

На правах рукописи

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Якут', is centered on the page.

Сыромятников Павел Викторович

**ДИНАМИКА СЛОЖНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ
ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД**

**Специальность 01.02.04 – механика деформируемого
твёрдого тела**

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

**Краснодар
2016**

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном
учреждении науки
«Южный научный центр Российской академии наук»

Научный консультант: **Бабешко Владимир Андреевич**,
академик РАН, доктор физико-
математических наук, профессор

Официальные
оппоненты: **Индейцев Дмитрий Анатольевич**,
член-корреспондент РАН, доктор
физико-математических наук, профессор,
научный руководитель ФГБУН «Институт
проблем машиноведения Российской академии
наук»

Ватульян Александр Ованесович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории упругости ФГАОУ
ВО «Южный федеральный университет»

Радаев Юрий Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт
проблем механики им. А.Ю. Ильшинского
Российской академии наук»

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное образова-
тельное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Защита состоится «20» июня 2017 г. в 14 ч. на заседании диссертацион-
ного совета Д 212.101.07 в ФГБОУ ВО «Кубанский государственный универси-
тет» (КубГУ) по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, ауд.
231.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» по адресу: 350040, г.
Краснодар, ул. Ставропольская, 149, <http://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>

Автореферат разослан « » 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Зарецкая Марина Валерьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований. Большое число научно-технических проблем связано с изучением закономерностей динамических процессов в гетерогенных средах со сложными физическими и механическими свойствами структурных элементов.

К числу таких актуальных и фундаментальных проблем относится проблема оценки сейсмичности и прогноза землетрясений на основе механической концепции. Концепция и ее реализация выполняется в Южном научном центре РАН и Кубанском государственном университете. Она доложена на конференциях в разных странах мира и представлена, например, на сайте программы Еврокомиссии EPOS http://rp7.ffg.at/eu-russian_opendays. На ее основе формировался мониторинг сейсмической обстановки территории олимпийского строительства в Сочи¹. В данной проблеме анализ напряженно-деформированного состояния литосферных плит требует учета упругой анизотропии, связности механических, электромагнитных и тепловых полей, влияния внутренних неоднородностей. Теоретическая часть данной проблемы затрагивает практически все разделы современной механики и многих смежных дисциплин. В проблеме оценки сейсмичности тесно связаны разнородные факторы, такие как сложная геометрия тел, различная размерность и гладкость неоднородностей, сложные физические и механические свойства тел, совместное влияние действующих на твердое тело различных полей.

На эффектах связанности физически различных полей основано функционирование большого числа технических устройств. Для проектирования и расчета таких устройств, улучшения их функциональных характеристик необходимы новые аналитические и численно-аналитические методы исследования свойств динамических систем, подвергающихся воздействию гармонических и нестационарных механических, электрических и тепловых нагрузок.

Важные приложения динамические задачи электроупругости находят в области акустоэлектроники. Расчет устройств акустоэлектроники приводит к необходимости анализа взаимодействия системы электродов с анизотропными материалами, обладающими пьезо- и пирозлектрическими свойствами.

Многослойные полуограниченные упругие, электроупругие и термоэлектроупругие среды с внутренними неоднородностями различной физической природы являются часто встречающимися объектами исследований. Тем не менее динамические задачи для полуограниченных тел, содержащих внутренние неоднородности, на сегодняшний день изучены недостаточно полно. Зависимость состояния системы от многих параметров значительно усложняет исследование задач, в силу чего традиционные методы их анализа, как аналитические, так и численные, становятся малоэффективными даже при небольшом ко-

¹ *Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Федоренко А.Г.* К теории прогноза сейсмичности на основе механической концепции, топологический подход // ДАН 2013. Т. 450. № 2. С. 166-170.

личестве неоднородностей. Динамические задачи для сред с совокупностью неоднородностей оказываются еще более сложными в силу обнаруженной неединственности решений краевых задач при некоторых значениях параметров¹.

В строгой постановке рассматриваемые в настоящей работе задачи, как и преобладающее число задач, с которыми сталкиваются исследователи в теории упругости, электроупругости, термоэлектроупругости и в других областях математической физики, представляют собой смешанные и, в частности, контактные задачи.

Как правило, при решении контактных задач теории упругости основное внимание уделяется расчету контактных напряжений, вопрос поведения многослойных сред под воздействием поверхностных или внутренних источников за пределами области контакта оставался, за малым исключением, без внимания.

В проблеме механической концепции прогноза сейсмичности, в которой применяются факторизационные методы и метод блочного элемента, этот вопрос является ключевым.

В настоящей работе он занимает центральное место. Особое внимание уделено малоизученным аспектам динамического поведения многослойных анизотропных сред, в том числе обладающих свойствами электроупругости и термоэлектроупругости. Анализ распространения упругих волн в многослойных анизотропных средах, описываемых одномерными и двумерными интегралами Фурье, представляет значительный интерес для сейсморазведки, геофизики, разработки новых композиционных материалов, конструкций и деталей из композитов. Разработка методов расчета интегралов Фурье составляет основное содержание диссертационной работы.

Весьма актуальны данные исследования в области неразрушающего контроля, в частности, в области ультразвуковой и тепловой дефектоскопии. Решение задач, связанных с возбуждением поверхностными или внутренними источниками в упругой среде волновых и тепловых полей, является ключевым этапом при решении обратных задач определения параметров скрытых неоднородностей.

Несмотря на достаточное разнообразие имеющихся на сегодняшний день методов и подходов, задача расчета двукратного интеграла Фурье, представляющего решения краевых задач анизотропной теории упругости, пока еще далека от исчерпывающего решения. В равной степени это касается и соответствующих краевых задач электроупругости и термоэлектроупругости. Следует отметить, что, в отличие от однократных интегралов Фурье, на сегодняшний день не существует стандартного алгоритма для вычисления двукратных интегралов Фурье.

Одна из глав диссертационной работы посвящена численно-аналитическому исследованию возмущений на поверхности упругого слоя, вызываемых подвижным осциллирующим источником поверхностных напряже-

¹ *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Известия РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.

ний. Высокоскоростное движение является традиционным объектом исследования в аэродинамике, гидродинамике, трибологии, мехатронике. Следует отметить актуальность задач с подвижным источником в первую очередь в области моделирования движения высокоскоростного наземного и подземного транспорта.

Интегральные представления, описывающие возмущения в слое от подвижного источника, формально незначительно отличаются от аналогичных представлений для неподвижного источника, при этом существенно отличаясь от них качественно. Движение источника вызывает появление так называемой наведенной анизотропии, дисперсионные кривые соответствующих символов матриц-функций Грина имеют сложный, зависящий от скорости характер, что делает данную задачу весьма трудоемкой при традиционных подходах к расчету интегралов Фурье, особенно в пространственном случае.

Применяемый в данной работе подход к решению динамической краевой задачи с подвижным источником основан на методах расчета интегральных представлений, разработанных для неподвижных осциллирующих источников, воздействующих на анизотропную среду.

Работа не претендует на охват всех возможных типов механических и физически различных неоднородностей и их пространственной ориентации, основные акценты сделаны на том, что среда многослойна, каждый слой может обладать произвольной термоэластичной анизотропией, физические поля являются связанными, а внешние или внутренние источники могут быть физически разнородными. Основное внимание в настоящей работе уделено случаю гармонических колебаний, решение гармонической задачи рассматривается как промежуточный этап решения нестационарной.

Целью работы является математическое исследование механических процессов в динамических режимах в многослойных гетерогенных полуграниченных средах со сложными физико-механическими свойствами при наличии ориентированных параллельно поверхности тела неоднородностей в виде плоских жестких включений и трещин, тепловых и электрических неоднородностей; разработка эффективных численно-аналитических методов построения символов блочных матриц Грина, матриц-символов ядер систем интегральных уравнений смешанных и контактных задач; создание новых методов и алгоритмов численно-аналитического расчета интегральных представлений механических характеристик, представляемых решениями краевых задач термоэластичности в виде однократных и двукратных интегралов Фурье.

Научную новизну составляют следующие результаты:

1) разработан новый устойчивый численно-аналитический метод построения символа Фурье блочной матрицы Грина многослойной полуграниченной термоэластичной среды с произвольной термоэластичной анизотропией каждого слоя, содержащей внешние и внутренние механические, тепловые и электрические неоднородности;

2) разработаны новые численно-аналитические методы и алгоритмы расчета интегральных представлений механических, электрических и тепловых

характеристик в виде двукратных интегралов Фурье решений краевых задач термоэластостатики для многослойных сред для ближней и дальней зоны при возбуждении колебаний поверхностными и/или внутренними гармоническими источниками в виде трещин или включений: метод прямого контурного интегрирования, метод интегрирования вычетов для осесимметричной нагрузки, метод интегрирования вычетов для несимметричной нагрузки, метод интегрирования вычетов в дальней зоне и асимптотические представления метода интегрирования вычетов;

3) получены аналитические и численно-аналитические оценки различных параметров метода прямого контурного интегрирования и метода интегрирования вычетов, позволяющие оптимизировать процессы вычислений;

4) на основе метода прямого контурного интегрирования разработан новый подход для расчета возмущений на поверхности изотропного упругого слоя, вызываемых осциллирующим и движущимся с постоянной скоростью поверхностным механическим источником, в широком диапазоне скоростей и частот, как для плоской, так и для пространственной задачи;

5) получены новые численные результаты решения ряда модельных динамических краевых задач теории упругости, электроупругости, термоэластостатики для многослойных сред, возбуждаемых поверхностными или внутренними физически разнородными источниками колебаний; решения задач идентификации параметров трещины в упругом слое; решения краевых задач для осциллирующего источника, движущегося по поверхности упругого изотропного слоя; алгоритм и результаты расчета пространственных зон дилатансии в упругом слое.

Научное и практическое значение результатов диссертации заключается в возможности качественного и количественного исследования с помощью разработанных методов динамических процессов в многослойных термоэластостатических средах при наличии неоднородностей различной физической природы.

Методы построения символов блочных матриц Грина использованы как при реализации механической концепции прогноза сейсмичности, так и при выполнении ряда научных проектов ЮНЦ РАН и Кубанского государственного университета при решении краевых задач теории упругости, электроупругости, термоэластостатики, для построения ядер систем интегральных уравнений термоэластостатики.

Методы расчета двукратных интегралов Фурье представлений решений краевых задач термоэластостатики могут применяться при проектировании различных электромеханических и термоэлектрических преобразователей, при создании гибридных композиционных материалов и конструкций из них.

Методы расчета возмущений, вызываемых движущимся источником, имеют теоретическое и прикладное значение для разработки и проектирования высокоскоростных транспортных средств и соответствующей инженерной инфраструктуры, для минимизации вибрационного воздействия на близлежащие наземные и подземные сооружения, окружающую среду.

Алгоритмы решения задачи идентификации параметров интерфейсной трещины в упругом слое могут быть использованы в задачах неразрушающего контроля.

Метод расчета пространственных зон дилатансии может найти применение в области геофизики и сейсмологии.

Фрагменты выполненной диссертационной работы нашли внедрение при выполнении проектов Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края, как под руководством диссертанта: 12-08-00880-а, 09-08-96522-р_юг_а, 09-08-00294-а, 13-01-96511-р_юг_а, 16-48-230336-р-а; так и с его участием в качестве исполнителя: 99-01-00787-а, 00-01-96019-р2000юг, 03-01-00694-а, 03-01-96537-р2003юг_а, 03-01-96662-р2003юг_а, 04-01-08101-офи_а, 05-01-00902-а, 06-01-00295-а, 06-01-96804-р_юг_офи, 06-05-96806-р_юг_офи, 06-08-00671-а, 06-08-96635-р_юг_а, 07-01-12028-офи, 08-01-99013-р_офи, 08-08-00447-а, 09-01-96507-р_юг_а, 09-08-00170-а, 09-08-96527-р_юг_а, 11-01-96506-р_юг_ц, 11-01-96507-р_юг_ц, 11-08-00381-а, 11-08-96505-р_юг_ц, 11-08-96506-р_юг_ц, 12-01-00330-а, 13-01-96525-р_юг_а.

Достоверность результатов диссертации обеспечивается использованием строгих математических методов и адекватных механических и физических моделей, сопоставлением результатов с аналогичными результатами, полученными разными методами другими авторами, сравнением теоретических результатов с имеющимися экспериментальными данными.

На защиту выносятся:

1) разработка методов исследования сложных механических процессов в гетерогенных средах путем решения динамических краевых задач для многослойной полуограниченной термоэластопругой среды с произвольной термоэластопругой анизотропией каждого слоя, содержащей внешние и внутренние механические, тепловые и электрические неоднородности, позволяющих моделировать произвольное сочетание неоднородностей различной физической природы и включающих в себя:

– устойчивый численно-аналитический метод построения символа Фурье блочной матрицы Грина для многослойной полуограниченной термоэластопругой среды, содержащей внешние и внутренние механические неоднородности типа трещин и жестких включений, а также тепловые и электрические неоднородности; алгоритм расширения вычислительного диапазона волновых чисел и частоты при построении символа матрицы Грина; численные примеры и аналитическое обоснование различий в применении принципов излучения в алгоритме построения символа матрицы Грина для анизотропного, термоэластопругого и термоэластопругого полупространства;

– метод построения символов ядер систем интегральных уравнений смешанных и контактных задач термоэластопругости;

– методы и алгоритмы расчета двукратных интегралов Фурье решений краевых задач термоэластопругости для многослойных сред с неоднородностями, являющиеся, в отличие от традиционных подходов, восходящих к изотропным средам и основанных на функциях Бесселя, более простыми, точными

и экономичными, эффективными в своих областях применения; три метода для ближней зоны – метод прямого контурного интегрирования, метод интегрирования вычетов для осесимметричной нагрузки, метод интегрирования вычетов для несимметричной нагрузки; два метода для дальней зоны – метод интегрирования вычетов в дальней зоне и асимптотические представления метода интегрирования вычетов; аналитические и численно-аналитические оценки различных параметров метода прямого контурного интегрирования и метода интегрирования вычетов.

2. Численные результаты расчета важных механических характеристик процессов, тепловых и электрических полей в ближней и дальней зоне многослойной термоэлектроупругой среды, вызванных механическими, тепловыми и электрическими источниками, действующими на поверхности и/или внутри полуограниченной многослойной среды; алгоритм и результаты расчета пространственных зон дилатансии в упругом слое; подход к решению краевой задачи и численные результаты моделирования возмущений упругого слоя под действием поверхностного подвижного осциллирующего источника напряжений; численные результаты решения задач идентификации параметров интерфейсной трещины в упругом слое.

Апробация работы. Основные результаты работы и отдельные ее части докладывались на Международной конференции «Проблемы геологии и освоения недр России» (Ростов-на-Дону, 2006 г.), VII, XI, XVI, XVIII Международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2007, 2012, 2013, 2016 гг.), XV Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении» (Иркутск, 2010 г.), Международных конгрессах Американского общества инженеров-механиков «Mechanical Engineering Congress & Exposition of The American Society Of Mechanical Engineers» (Vancouver, Canada, 2010 г.), «ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems & Design and Analysis» (Istanbul, Turkey, 2010 г.), на Международном симпозиуме «The 2nd International Symposium on NDT in Aerospace» (Hamburg, Germany, 2010 г.), XXXIX Международной летней школе XXXIX International Summer School «Advanced Problems in Mechanics» (St. Petersburg, Russia, 2011 г.), международных конференциях «81st Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics» (GAMM) (Karlsruhe, Germany, 2010 г.), «82nd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics» (Graz, Austria, 2011 г.), XXII Международной научной школе им. академика С.А. Христиановича (Алушта, Украина, 2012 г.), Международном симпозиуме «Physics and Mechanics of New Material and Underwater Applications» (PHENMA 2013) (Kaohsiung, Taiwan, 2013 г.), VI Международной конференции «6th International Conference from Scientific Computing to Computational Engineering», (Athens, Greece, 2014 г.), Международной конференции «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» (PHENMA 2015, Azov, Russia). В полном объеме результаты диссертационной работы представлялись и обсуждались на семинарах кафедры математического моделирования КубГУ и Научно-

исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф КубГУ, на заседаниях комплексного отдела механики, химии, физики и нанотехнологий Южного научного центра Российской академии наук.

Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертации, представлены в 66 публикациях, в том числе в 15 статьях, опубликованных в изданиях, рекомендуемых ВАК, и в 4 зарубежных изданиях, включенных в базы данных Scopus и Web of Science. По результатам диссертационных исследований получены 24 свидетельства об официальной регистрации программ в Реестре программ для ЭВМ Российской Федерации и один патент Российской Федерации на полезную модель. Список основных публикаций помещен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация состоит из двух томов, первый том включает в себя введение, шесть глав, заключение, список литературы, список иллюстративного материала. Во второй том вошли приложения, содержащие иллюстрации к пятой и шестой главам, номера приложений совпадают с номерами рубрик, к которым они относятся.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится краткий обзор литературных источников по теме диссертационной работы, обосновывается актуальность темы диссертации, дается общая характеристика работы, формулируются цель и основные задачи исследования, определяются научная новизна и практическая значимость результатов. Приводится описание вклада диссертанта в совместных публикациях.

Основными научными направлениями диссертационной работы являются математическое моделирование динамических процессов в полуограниченных средах со сложными физико-механическими свойствами и неоднородной структурой, разработка численно-аналитических методов их исследования. Значительный вклад в рассматриваемую тематику внесли ведущие российские и зарубежные исследователи: Ю.А. Амензаде, В.М. Александров, В.А. Бабешко, В.М. Бабич, А.В. Белоконь, Н.М. Бородачев, А.О. Ватульян, И.Н. Векуа, И.И. Ворович, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, В.Т. Гринченко, И.М. Дунаев, Д.А. Индейцев, В.В. Калинин, В.Д. Купрадзе, А.И. Лурье, М.Д. Мартыненко, В.И. Моссаковский, И.А. Молотков, Н.И. Мухелишвили, В. Новацкий, В.В. Новожилов, В.В. Панасюк, В.З. Партон, Б.Л. Пелех, Г.Я. Попов, О.Д. Пряхина, В.Л. Рвачев, В.М. Сеймов, А.И. Слепян, А.В. Смирнова, Л.А. Толоконников, А.Ф. Улитко, Я.С. Уфлянд, Ю.А. Устинов, М.И. Чебаков, Д.И. Шерман, J.D. Achenbach, W.M. Ewing, D. Gross, W.S. Jardetzky, H. Jeffreys, G.R. Liu, A.K. Mal, M. Lowengrub, M.J.P. Musgrave, Ch. Zhang и др.

Первая глава имеет вводный характер, в ней излагаются основные сведения о факторизации функций и матриц-функций, о применении факторизационного метода – метода Винера–Хопфа к решению некоторых функциональных

уравнений, приводится общая схема дифференциального метода факторизации для случая блочных структур, описывается топологический подход в теории блочных структур при наличии разноразмерных блочных элементов, схема метода фиктивного поглощения.

Вторая глава содержит описание основных соотношений и уравнений начально-краевых задач динамики термоэлектроупругого тела.

В рамках линейной теории приводится постановка смешанных динамических задач о взаимодействии жестких штампов и/или электродов с многослойной полуограниченной термоэлектроупругой средой, содержащей включения и трещины.

При постановке задач о колебаниях трещин, описываемых теорией Гриффитса, предполагается, что наряду с динамическими напряжениями на ее берега действуют статические напряжения, препятствующие касанию берегов трещины.

Для моделирования динамических процессов в многослойных средах с неоднородностями вводится система дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, для которых определяются начальные и краевые условия. Описывается общая схема решения, приводятся формулировки вспомогательных задач, вывод функционально-матричных соотношений в образах Фурье и Лапласа, сведение на основе предварительных построений смешанной начально-краевой задачи к системе матричных интегральных уравнений I рода.

Динамика слоистой среды при отсутствии объемных сил и внутренних источников тепла описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных со своими параметрами для каждого слоя:

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} - \chi_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad e_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} + p_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$g_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} = T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\chi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \alpha \theta \right), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Здесь c – тензор упругих постоянных; u – вектор механических смещений; x_j – пространственные координаты; e – тензор пьезоэлектрических модулей; φ – потенциал электрического поля; χ – тензор температурных коэффициентов механических напряжений; $\theta = T - T_0$ относительная температура; T и T_0 – абсолютная и начальная температуры соответственно; ρ – плотность материала; t – время; ε – тензор диэлектрических проницаемостей; p – пьезоэлектрический тензор; g – тензор коэффициентов теплопроводности; $\alpha = \rho c_\varepsilon T_0^{-1}$, c_ε – удельная теплоемкость.

Рассматривается многослойная среда, занимающая область $-\infty \leq x, y \leq +\infty$, $-h \leq z \leq 0$. В пределах каждого слоя все физико-механические характеристики $c_{ijmn}^{(n)}, e_{ijn}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, \chi_{jk}^{(n)}, g_{jk}^{(n)}, p_j^{(n)}, \rho^{(n)}, c_\varepsilon^{(n)}$ являются постоянными величинами. Границы слоев z_n , ($n=1, 2, \dots, N+1$) принимаются плоскопараллельными. Значение $z = z_1$ соответствует верхней границе пакета слоев, $z = z_{N+1}$ соответствует нижней

границе (в случае полупространства $z_{N+1} = -\infty$). На верхней границе $z = z_1$ в областях $\Omega_p^{(1,1)} = \Omega_p^{(1)}$, ($p = 1, 2, \dots, P_k^{(1)}$) действует один или несколько поверхностных источников с носителями $\Omega_p^{(1)}$. В плоскостях $z = z_k$, ($k = 2, \dots, N$) имеются неоднородности разных типов: включения, занимающие области $\Omega_p^{(2,k)}$, ($p = 1, 2, \dots, P_k^{(2)}$), и трещины плоской в плане формы $\Omega_m^{(3,k)}$, ($m = 1, 2, \dots, P_k^{(3)}$). Для постановки краевых задач вводится расширенный вектор перемещений, состоящий из механических перемещений (u_1, u_2, u_3) , потенциала электрического поля (φ) и температуры (θ)

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}^T = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, \theta\}^T. \quad (2.2)$$

Аналогично вводится расширенный вектор напряжений, компонентами которого являются элементы тензора напряжений $(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$, нормальные составляющие вектора электрической индукции (d_3) и вектора теплового потока (g_3)

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, d_3, g_3\}^T = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}^T. \quad (2.3)$$

На границах слоев с включениями вводятся скачки расширенных векторов напряжений с носителями $\Omega_m^{(2,k)}$, ($m = 1, 2, \dots, P_k^{(2)}$)

$$\Delta \mathbf{v}_m^{(k)} = \mathbf{v}_m^{(k)+} - \mathbf{v}_m^{(k)-} \quad (2.4)$$

и скачки расширенных векторов перемещений на берегах трещин с носителями $\Omega_m^{(3,k)}$, ($m = 1, 2, \dots, P_k^{(3)}$)

$$\Delta \mathbf{u}_m^{(k)} = \mathbf{u}_m^{(k)+} - \mathbf{u}_m^{(k)-}. \quad (2.5)$$

Области $\Omega_m^{(2,k)}$ и $\Omega_m^{(3,k)}$ принадлежат плоскости $z = z_k$, при этом некоторые из них могут быть нулевыми. На поверхности $z = z_1$ ставятся смешанные условия вида

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_m^{(1)0}, & (x, y) \in \Omega_m^{(1)} \\ \mathbf{v}_m^{(1)} = 0, & (x, y) \notin \Omega_m^{(1)} \end{cases}, \quad (m = 1, 2, \dots, P_k^{(1)}). \quad (2.6)$$

В плоскостях расположения неоднородностей имеют место разрывные смешанные граничные условия. При $z = z_k$, ($k = 2, \dots, N$)

для включений

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}_m^{(k)0}, & (x, y) \in \Omega_m^{(2,k)} \\ \Delta \mathbf{v}_m^{(k)} = 0, & (x, y) \notin \Omega_m^{(2,k)} \end{cases}, \quad (m = 1, 2, \dots, P_k^{(2)}), \quad (2.7)$$

и для трещин

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}_m^{(k)0}, & (x, y) \in \Omega_m^{(3,k)} \\ \Delta \mathbf{u}_m^{(k)} = 0, & (x, y) \notin \Omega_m^{(3,k)} \end{cases}, \quad (m = 1, 2, \dots, P_k^{(3)}). \quad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{u}_m^{(k)0} = \mathbf{u}_m^{(k)+} = \mathbf{u}_m^{(k)-}$ и $\mathbf{v}_m^{(k)0} = \mathbf{v}_m^{(k)+} = \mathbf{v}_m^{(k)-}$ – заданные в $\Omega_m^{(2,k)}$ и $\Omega_m^{(3,k)}$ векторы

$$\mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=z_k+0} = \mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=z_k-0} + \Delta \mathbf{v}^{(k)}(x, y, t), \quad (2.9)$$

$$\Delta \mathbf{v}_m^{(k)}(x, y, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_m^{(k)+} - \mathbf{v}_m^{(k)-}, & (x, y) \in \Omega_m^{(2,k)} \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_m^{(2,k)} \end{cases},$$

$$\mathbf{u}(x, y, z, t)|_{z=z_k+0} = \mathbf{u}(x, y, z, t)|_{z=z_k-0} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}(x, y, t), \quad (2.10)$$

$$\Delta \mathbf{u}_m^{(k)}(x, y, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_m^{(k)+} - \mathbf{u}_m^{(k)-}, & (x, y) \in \Omega_m^{(3,k)} \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_m^{(3,k)} \end{cases}.$$

В основании пакета при $z = -h$ ставятся различные граничные условия, основными вариантами для исследования являются условия «жесткой заделки»

$$\mathbf{u}(x, y, z, t)|_{z=-h} = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty \quad (2.11)$$

и условия «свободной» нижней грани

$$\mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=-h} = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty. \quad (2.12)$$

В силу линейности дифференциальных операторов решение исследуемых начально-краевых задач представимо в виде суперпозиции решений трех вспомогательных задач о колебаниях многослойной среды, источником в которых являются поверхностные объекты (задача 1), множество включений (задача 2), множество трещин (задача 3). Граничные условия для каждой из этих задач имеют следующий вид

Задача 1

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z, t)|_{z=1} = \mathbf{u}_m^{(1)}(x, y, t), & (x, y) \in \Omega_m^{(1)}, \\ \mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=1} = 0, & (x, y) \notin \Omega_m^{(1)}, \end{cases} m=1, 2, \dots, P_k^{(1)}, P_k^{(1)} \geq 1, \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}|_{z=z_k+0} = \mathbf{u}|_{z=z_k-0}, \\ \mathbf{v}|_{z=z_k+0} = \mathbf{v}|_{z=z_k-0} \end{cases}, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty, \quad k=2, \dots, N,$$

$$\mathbf{u}(x, y, -h, t) = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty.$$

Задача 2

$$\mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=0} = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty, \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}_m^{(k)0}, & (x, y) \in \Omega_m^{(2,k)} \\ \Delta \mathbf{v}_m^{(k)} = 0, & (x, y) \notin \Omega_m^{(2,k)} \end{cases}, \quad m=1, 2, \dots, P_k^{(2)}, P_k^{(2)} \neq 0,$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}|_{z=z_k+0} = \mathbf{u}|_{z=z_k-0}, \\ \mathbf{v}|_{z=z_k+0} = \mathbf{v}|_{z=z_k-0} \end{cases}, \quad z = z_k, \quad k=2, \dots, N; \quad P_k^{(2)} = 0,$$

$$\mathbf{u}(x, y, -h, t) = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty.$$

Задача 3

$$\mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=0} = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}_m^{(k)0}, & (x, y) \in \Omega_m^{(3,k)} \\ \Delta \mathbf{u}_m^{(k)} = 0, & (x, y) \notin \Omega_m^{(3,k)} \end{cases}, \quad m=1, 2, \dots, P_k^{(3)}, P_k^{(3)} \neq 0,$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}|_{z=z_k+0} = \mathbf{u}|_{z=z_k-0}, \\ \mathbf{v}|_{z=z_k+0} = \mathbf{v}|_{z=z_k-0} \end{cases}, \quad z = z_k, \quad k=2, \dots, N, \quad P_k^{(3)} = 0,$$

$$\mathbf{u}(x, y, -h, t) = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty.$$

Смешанные задачи 1–3 (2.13)–(2.15) сводятся к системам интегральных уравнений (СИУ) первого рода относительно расширенного вектора контактных напряжений $\mathbf{v}^{(1)}$ с носителем $\Omega^{(1)}$, скачков $\Delta \mathbf{v}_m^{(k)}$ расширенных векторов напряжений на границах включений с носителями $\Omega_m^{(2,k)}$ и скачков $\Delta \mathbf{u}_m^{(k)}$ расширенных векторов перемещений на берегах трещин с носителями $\Omega_m^{(3,k)}$. Для вывода системы ИУ на первом этапе решаются вспомогательные краевые задачи с од-

нородными условиями, получающиеся из смешанной при допущении, что векторы $\mathbf{v}^{(1)}$, $\Delta\mathbf{v}_m^{(k)}$, $\Delta\mathbf{u}_m^{(k)}$ известны в областях своего определения.

Полученные из решения вспомогательных задач функционально-матричные соотношения, в символах Фурье связывающие векторы напряжений и перемещений с заданными поверхностными усилиями $\mathbf{v}^{(1)}$ (вспомогательная задача 1-1), скачками векторов напряжений $\Delta\mathbf{v}_m^{(k)}$ (вспомогательная задача 2-1) и скачками векторов перемещений $\Delta\mathbf{u}_m^{(k)}$ (вспомогательная задача 3-1), определяют символ матрицы ядра системы интегральных уравнений \mathbf{K} .

Систему ИУ I рода, описывающую динамические процессы в многослойных полуограниченных средах с внутренними неоднородностями, можно записать в операторном виде

$$KQ(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, \omega) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)) d\alpha_1 d\alpha_2 = f(x, y), \quad (2.16)$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = \{u_1, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}, v^{(1)}, \dots, v^{(N)}\}^T,$$

где $\mathbf{Q} = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{f}^{(2,2)}, \mathbf{f}^{(2,3)}, \dots, \mathbf{f}^{(2,N)}, \mathbf{f}^{(3,2)}, \mathbf{f}^{(3,3)}, \dots, \mathbf{f}^{(3,N)}\}^T$ – многомерный вектор, имеющий своими компонентами трансформанты Фурье расширенных векторов поверхностных контактных напряжений $\mathbf{v}^{(1)}(x, y) = \mathbf{f}^{(1)}$, скачков расширенных векторов напряжений на границах включений $\Delta\mathbf{v}^{(k)}(x, y) = \mathbf{f}^{(2,k)}$ и скачков расширенных векторов перемещений $\Delta\mathbf{u}^{(k)}(x, y) = \mathbf{f}^{(3,k)}$ на берегах трещин соответственно; $f(x, y)$ – многомерный вектор, компонентами которого являются расширенные векторы перемещений $u_k^{(1)}$, заданные на поверхности среды в области контакта $\Omega_k^{(1)}$ и на границах включений $\Omega_k^{(2)}$, а также расширенные векторы усилий $v_k^{(1)}$, заданные на берегах трещин в областях $\Omega_k^{(3)}$. Носителем каждой из вектор-функций $\mathbf{v}^{(1)}(x, y)$, $\Delta\mathbf{v}^{(k)}(x, y)$, $\Delta\mathbf{u}^{(k)}(x, y)$ является соответствующая область из $\Omega_k^{(j)}$. Контуры Γ_j выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения¹.

Используя решение системы интегральных уравнений (2.16) и символ блочной матрицы Грина для задач 1–3, можно записать интегральное представление вектора $\mathbf{u}^{(n)}(x, y, z, t)$ в виде интеграла Фурье–Лапласа

$$\mathbf{u}^{(n)}(x, y, z, t) = \frac{1}{i(2\pi)^3} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^N \mathbf{K}^{(j,n,m)}(\alpha_1, \alpha_2, z, -p^2) \mathbf{Q}^{(j,m)}(\alpha_1, \alpha_2, p) e^{(-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y) + pt)} d\alpha_1 d\alpha_2 dp, \quad (2.17)$$

$$z_{n+1} \leq z \leq z_n, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty, \quad 0 \leq t, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где $\mathbf{K}^{(j,n,m)}(\alpha_1, \alpha_2, z, \omega^2)$ – символ блочной матрицы Грина соответствующей гармонической задачи ($\omega^2 = -p^2$); $\mathbf{Q}^{(j,m)}(\alpha_1, \alpha_2, p)$ – преобразование Фурье по x, y и Лапласа по t от расширенного вектора нагрузок $q^{(j,m)}(x, y, t)$. Первый верхний

¹ Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.

индекс $(j=1,2,3)$ матрицы $\mathbf{K}^{(j,n,m)}$ и вектора $\mathbf{Q}^{(j,m)}$ соответствует номеру задачи, индекс $(n=1,2,\dots,N)$ соответствует номеру слоя $(z_{n+1} \leq z \leq z_n)$, индекс $(m=2,\dots,N)$ соответствует номеру межслойной (интерфейсной) границы z_m , где заданы скачки расширенных векторов напряжений $\mathbf{Q}^{(2,m)}$ или скачки расширенных векторов перемещений $\mathbf{Q}^{(3,m)}$. Вектор $\mathbf{Q}^{(1,m)} = \mathbf{Q}^{(1,1)}$ соответствует поверхностным нагрузкам для задачи 1, для него индекс $m=1$.

Построение символа матрицы Грина гармонической задачи $\mathbf{K}^{(j,n,m)}(\alpha_1, \alpha_2, z, \omega^2)$ можно рассматривать как промежуточный этап решения нестационарной задачи, поэтому в работе основное внимание уделено исследованию краевых задач для случая гармонических колебаний и соответствующих интегральных представлений

$$\mathbf{u}^{(n)}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^N \mathbf{K}^{(j,n,m)}(\alpha_1, \alpha_2, z, \omega^2) \mathbf{Q}^{(j,m)}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)) d\alpha_1 d\alpha_2, \\ z_{n+1} \leq z \leq z_n, \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty, \quad n=1,2,\dots,N. \quad (2.18)$$

Решение СИУ (2.16) и вычисление интегралов (2.17), (2.18) дает исчерпывающее и точное описание динамики систем с внутренними неоднородностями в строгой и весьма общей постановке. Для качественного и количественного исследования динамики систем во многих случаях в интегральных представлениях (2.17), (2.18) достаточно приближенного задания векторов нагрузок $\mathbf{Q}^{(j,m)}(\alpha_1, \alpha_2)$, удовлетворяющих в зависимости от типа краевой задачи некоторым ограничениям. В работе используется именно такой подход, когда при заданных величинах $\mathbf{Q}^{(j,m)}$ основные усилия направляются на разработку методов и алгоритмов расчета интегралов вида (2.18), являющихся основным инструментом исследования.

В **третьей главе** подробно описываются методы построения символов матриц Грина для многослойных термоэлектроупругих сред без внутренних неоднородностей (задача 1) (п. 3.1) и при наличии внутренних неоднородностей (задачи 2, 3) (п. 3.2) различной физической природы. В пункте 3.1 рассматриваются однородный слой, электроупругое полупространство, термоэлектроупругое полупространство, многослойный пакет слоев и многослойное полупространство, колебания в которых возбуждаются поверхностным источником. Приводится «прямой» алгоритм вывода символа матрицы Грина, рекурсивный алгоритм и алгоритм, расширяющий допустимый диапазон волновых чисел и частоты для вычислений символа блочной матрицы Грина за счет выноса за рамки вычислительного процесса растущих экспонент. Пункт, посвященный однородному электроупругому полупространству, содержит большое число важных лемм, справедливых в основном только для упругого и электроупругого случаев. Часть из них выполняется и для более общего термоэлектроупругого случая.

В пункте 3.2 приводится обобщение алгоритмов, рассмотренных в пункте 3.1, на случай наличия внутренних неоднородностей (задачи 2, 3) в виде плоских трещин, жестких включений, электрических и тепловых неоднородностей.

Приводится описание алгоритма расширения диапазона устойчивых вы-

числений символа матрицы Грина, который был первоначально предложен для многослойных изотропных сред без внутренних неоднородностей¹, затем обобщен диссертантом на случай многослойных анизотропных [3], электроупругих сред [3, 21] и термоэлектроупругих сред, содержащих внутренние неоднородности в виде трещин, жестких включений, тепловых и электрических неоднородностей [8]. Алгоритм расширения, основанный на выносе за рамки вычислений растущих экспонент, довольно громоздкий и здесь не приводится. Дадим краткое описание общего для задач 1–3 (2.13)–(2.15) алгоритма построения символа блочной матрицы Грина для сред с внутренними неоднородностями и без таковых. В каждом слое вектор $\mathbf{U}^{(n)}$ ищется в виде

$$\mathbf{U}^{(n)} = \sum_{s=1}^{10} \mathbf{t}_s^{(n)} \mathbf{h}_s^{(n)} \exp(\lambda_s^{(n)} z), \quad n = \overline{1, N}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{t}^{(n)}$ – векторы или матрицы, подлежащие определению; $\mathbf{h}^{(n)}, \lambda^{(n)}$ – собственные векторы и собственные значения системы

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h} = 0 \quad (3.2)$$

для n -го слоя.

Вид матрицы \mathbf{A} (3.2) определяется физическими параметрами слоя и параметрами преобразования Фурье.

Условия на границах раздела слоев для задачи 1 – непрерывные, в случае наличия неоднородности для задач 2,3 – разрывные:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(n-1)} \mathbf{U}^{(n-1)}(z_n) - \mathbf{R}^{(n)} \mathbf{U}^{(n)}(z_n) \\ \hat{\mathbf{U}}^{(n-1)}(z_n) - \hat{\mathbf{U}}^{(n)}(z_n) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{f}}^{(n)}, \quad z = z_n, \quad n = 2, 3, \dots, N, \quad (3.3)$$

где матрица $\mathbf{R}^{(n)}$ получена преобразованием Фурье граничных условий (2.13)–(2.15). Здесь и далее запись $\hat{\mathbf{U}}$ обозначает верхнюю половину матрицы или вектора \mathbf{U} с четным числом строк, $\check{\mathbf{U}}$ – нижнюю половину \mathbf{U} .

Для трещины в плоскости $z = z_n$ в формуле (3.3) вектор $\tilde{\mathbf{f}}^{(n)}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(n)} = (\mathbf{0}, \mathbf{f}^{(3,n)})^T.$$

В случае жесткого включения в плоскости $z = z_n$

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(n)} = (\mathbf{f}^{(2,n)}, \mathbf{0})^T.$$

Относительно неизвестных $\mathbf{t}^{(n)}$ формулы (3.1), (3.3) приводят к линейным алгебраическим уравнениям с блочно-диагональной структурой

$$\mathbf{C}^{(n-1)}(z_n) \mathbf{t}^{(n-1)} - \mathbf{C}^{(n)}(z_n) \mathbf{t}^{(n)} = \tilde{\mathbf{f}}^{(n)}, \quad n = 2, 3, \dots, N,$$

где $\mathbf{C}^{(n-1)}(z)$ имеет вид

$$\mathbf{C}^{(n)}(z) = \tilde{\mathbf{R}}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{E}^{(n)}(z), \quad \tilde{\mathbf{R}}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(n)} & \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^{(n)} = \{\mathbf{h}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{h}_{10}^{(n)}\}, \quad E_{ii}^{(n)} = \text{diag} \{ \exp(\lambda_i^{(n)} z) \}.$$

В плоскостях $z_1 = 0, z = z_{N+1}$ относительно векторов $\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(N)}$ имеем уравнения $\hat{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) \mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}, \check{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1}) \mathbf{t}^{(N)} = \mathbf{0}$.

¹ Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989.

Здесь вектор $\mathbf{f}^{(1)}$ соответствует рассмотренным выше поверхностным нагрузкам \mathbf{q} . Векторы $\mathbf{t}^{(n,j)}$ имеют вид

$$\mathbf{t}^{(n,j)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \mathbf{Q}^{(j)} + \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(j-2)} (\mathbf{C}^{(j-1)}(z_j))^{-1} \mathbf{B}^{(j)}, \quad n \leq j-2, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{t}^{(n,j)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \mathbf{Q}^{(j)} + (\mathbf{C}^{(j-1)}(z_j))^{-1} \mathbf{B}^{(j)}, \quad n = j-1,$$

$$\mathbf{t}^{(n,j)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \mathbf{Q}^{(j)}, \quad n \geq j,$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) \widetilde{\mathbf{D}}^{(N-1)} \\ \widetilde{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1}) \end{pmatrix}^{-1}, \quad \widetilde{\mathbf{D}}^{(N-1)} = \mathbf{D}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)}, \quad \mathbf{Q}^{(j)} = \begin{pmatrix} -\widehat{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) \widetilde{\mathbf{D}}^{(j-2)} (\mathbf{C}^{(j-1)}(z_j))^{-1} \mathbf{B}^{(j)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad j \geq 2,$$

$$\mathbf{Q}^{(1)} = (\mathbf{I}, \mathbf{0})^T, \quad \mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{C}^{(n)}(z_{n+1}))^{-1} \mathbf{C}^{(n+1)}(z_{n+1}).$$

В случае трещины в плоскости $z = z_j$

$$\mathbf{B}^{(j)} = (\mathbf{0}, \mathbf{I})^T.$$

В случае наличия включения в плоскости $z = z_j$

$$\mathbf{B}^{(j)} = (\mathbf{I}, \mathbf{0})^T.$$

Здесь $\mathbf{I}, \mathbf{0}$ – единичная и нулевая матрицы (5×5) . Матрица $\mathbf{B}^{(1)}$, соответствующая поверхностной нагрузке $\mathbf{f}^{(1)}$, имеет вид $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}$.

Окончательно для символа блочной матрицы Грина $\mathbf{K}^{(n,j)}$ для задач 1–3 имеем представление

$$\mathbf{K}^{(n,j)}(z) = \widehat{\mathbf{L}}^{(n)}(z) \mathbf{t}^{(n,j)}, \quad z_{n+1} \leq z \leq z_n, \quad n, j = \overline{1, N}, \quad (3.5)$$

где $\widehat{\mathbf{L}}^{(n)}(z) = \{\widehat{h}_1^{(n)} \exp(z\lambda_1^{(n)}), \dots, \widehat{h}_{10}^{(n)} \exp(z\lambda_{10}^{(n)})\}$ – матрица фундаментальных решений системы (3.2) для слоя n .

При построении символа матрицы Грина однородного или многослойного термоэластостатического полупространства важное значение имеет способ классификации собственных значений λ_j (3.2), удовлетворяющих различным принципам излучения. Численно и аналитически этот вопрос исследован в пункте 5.1.

В пункте 3.3 описываются асимптотические свойства символов матриц Грина для задач 1–3.

Четвертая глава посвящена разработке численно-аналитических методов расчета интегралов (2.18) в ближней и дальней зонах. Предложены три метода расчета двукратного интеграла Фурье (2.18) в ближней зоне: метод прямого контурного интегрирования, метод интегрирования вычетов для осесимметричной нагрузки, метод интегрирования вычетов для несимметричной нагрузки. Для дальней зоны предложен метод интегрирования вычетов в дальней зоне и асимптотические представления метода интегрирования вычетов. Получены аналитические и численно-аналитические оценки различных параметров методов, позволяющие оптимизировать процессы вычислений, доказан ряд технически важных лемм.

В полярных системах координат

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_3 = z, \quad (4.1)$$

$$\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma, \quad \gamma = \arctg \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

интеграл (2.18) принимает следующий вид:

$$u(r, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, \gamma, z) Q(\alpha, \gamma) \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) \alpha d\alpha d\gamma. \quad (4.2)$$

В пункте 4.1 описан метод прямого контурного интегрирования, представляющий собой алгоритм непосредственного вычисления контурных интегралов (4.2) в ближней зоне [19].

Метод основывается на использовании принципа предельного поглощения (см. сноску на с. 15), который при гармонических колебаниях вида $\exp(-i\omega t)$, $0 < \omega$ предполагает введение в уравнения движений слагаемого $\frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < \varepsilon \ll \omega$, соответствующего действию малого внутреннего трения, что эквивалентно введению комплексной частоты $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i \frac{\varepsilon}{\rho} \omega$. Обозначим решение краевой задачи с комплексной частотой $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$, тогда результирующее решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ получается как равномерный предел

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (4.3)$$

При введении комплексной частоты все вещественные полюса символа матрицы Грина \mathbf{K} смещаются с действительной оси в комплексную плоскость. При этом интеграл по Γ в (4.2) может быть вычислен непосредственно вдоль вещественной полуоси Γ_R без деформирования контура в комплексную плоскость, так как в этом случае вещественная полуось является корректным контуром интегрирования. При введении ненулевого ε возникает погрешность, связанная с возникновением мнимых частей действительных полюсов и смещением комплексных. Кроме того, предполагается ограниченность вещественного контура Γ_R некоторой величиной R , что также вносит свою погрешность. В изотропном случае каждая мода $\mathbf{u}_\varepsilon^{(n)}$ при этом представляет собой неоднородную волну, амплитуда которой экспоненциально убывает с удалением от источника

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(n)}(r, \varphi) \sim \exp(-\varepsilon r / |c_g^{(n)}|) \mathbf{u}^{(n)}(r, \varphi). \quad (4.4)$$

Здесь $\mathbf{u}^{(n)}(r, \varphi)$ – точное решение, соответствующее $\varepsilon = 0$; $c_g^{(n)}$ – групповая скорость моды с номером n . Погрешность метода, связанную с ненулевым ε , всегда можно сделать значительно меньше других неизбежных составляющих суммарной вычислительной погрешности. В нерезонансном случае для любой фиксированной частоты ω можно указать диапазон изменения относительной погрешности $\delta(r)$ вычисления отдельной компоненты вектора \mathbf{u}_ε

$$\varepsilon r / c_{\max}^{(g)} \leq \delta(r) \leq \varepsilon r / c_{\min}^{(g)}, \quad c_{\max}^{(g)} = \max_{0 \leq \gamma \leq 2\pi} |c_g(\gamma, \omega)|, \quad c_{\min}^{(g)} = \min_{0 \leq \gamma \leq 2\pi} |c_g(\gamma, \omega)|, \quad (4.5)$$

где γ – угол в плоскости волновых чисел (4.1).

Данный метод не может быть использован непосредственно для вычислений предела $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ (4.3), когда интегралы для $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ становятся расходящимися,

но вполне пригоден для численной оценки точного решения $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$. Расчет интегралов по ограниченному вещественному контуру Γ_R осуществляется с помощью специальных квадратур для сильно осциллирующих функций, повторное интегрирование не требует привлечения специальных методов, поскольку осцилляции при повторном интегрировании намного меньше. Ключевым моментом в реализации метода являются устойчивость и экономичность алгоритмов расчета символа матрицы Грина, в том числе в интервалах больших волновых чисел. В практических расчетах наибольшая точность достигается при минимальных значениях ε , однако при этом расчетное время растет пропорционально величине (r/ε) .

Метод прямого контурного интегрирования удобен для расчета волновых полей в анизотропном однородном или многослойном полупространстве, поскольку вклад точек ветвления при наличии анизотропии требует вычисления контурных интегралов по берегам разрезов в комплексной плоскости, выходящих из точек ветвления, что по объему операций в два раза превышает расчет интеграла по вещественному контуру. Кроме того, для анизотропного материала расчет контура разреза в комплексной плоскости представляет собой самостоятельную достаточно сложную вычислительную задачу. Данный метод без дополнительных модификаций применим для расчета статических, гармонических и нестационарных термоэлектроупругих полей в ближней от источника зоне для всех вариантов рассматриваемых в диссертационной работе многослойных сред. Однако наиболее удобным и эффективным данный метод оказался при расчете возмущений в упругом слое, вызываемых подвижным поверхностным осциллирующим источником (глава 6) [19]. Благодаря своей простоте данный метод можно отнести к инженерным, хотя он вполне пригоден для научных исследований.

На рисунке 4.1 представлены результаты расчетов по методу прямого контурного интегрирования, рассчитаны вертикальные u_{33} и горизонтальные смещения u_{31} на поверхности слоя, возбуждаемого внутренним сосредоточенным вертикальным источником типа жесткого включения $Q_3^{(2,2)} = 1$. Источник расположен в середине слоя, частота $\omega = 0,2$.

В пункте 4.2 рассматривается метод интегрирования вычетов для осесимметричного источника вычисления интеграла (4.2). Предполагается, что функция нагрузок осесимметрична $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma) = \mathbf{Q}(\alpha)$ и возможно представление $\mathbf{Q}(\alpha)$ в виде

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}^+(\alpha) + \mathbf{Q}^-(\alpha) = \tilde{\mathbf{Q}}^+(\alpha)e^{+i\alpha} + \tilde{\mathbf{Q}}^-(\alpha)e^{-i\alpha}, \quad (4.6)$$

где $\tilde{\mathbf{Q}}^\pm(\alpha)$ – ограниченные соответственно в верхней (+) и нижней (–) полуплоскости α функции. Метод основан на применении теоремы Коши, леммы Жордана и способах замыкания контуров интегрирования Γ через мнимые

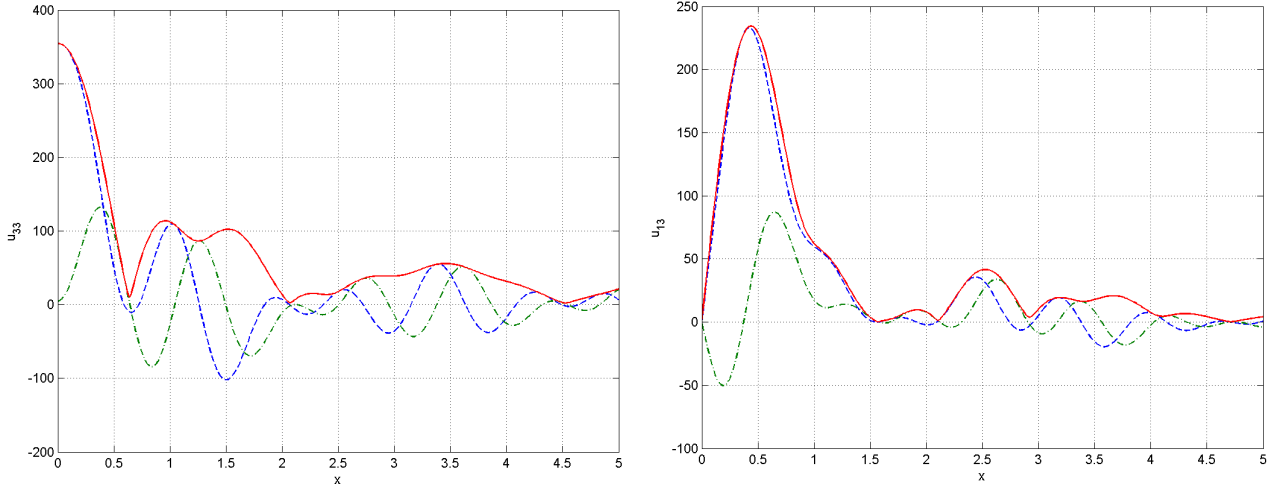


Рисунок 4.1 – Модуль смещений $|u_{33}(x)|$ (сплошная линия), действительная часть $\text{Re}u_{33}(x)$ (пунктир), мнимая часть $\text{Im}u_{33}(x)$ (штрих-пунктир), на поверхности изотропного слоя $z=0$ (слева); $|u_{13}(x)|$, $\text{Re}u_{13}(x)$, $\text{Im}u_{13}(x)$ (справа) (метод прямого контурного интегрирования)

полуоси Γ_l^\pm и четверть-окружности в первом и четвертом квадрантах плоскости α , определяемых множествами решений $\tau^\pm(r), \tilde{\tau}(r)$ по γ в зависимости от r неравенств вида $\cos(\gamma - \varphi) \pm \frac{1}{r} < 0$, $\cos(\gamma - \varphi) \pm \frac{1}{r} > 0$, $r \geq 1$, $0 \leq \gamma, \varphi \leq 2\pi$.

Выражение для вектора $\mathbf{u}(r, \varphi)$ (4.2), полученное методом интегрирования вычетов для осесимметричного источника, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \varphi) = & \frac{i}{2\pi} \int_{\tau^+(r)} \sum_{n=1}^{\infty} \text{res}_{\alpha=k_n(\gamma)}^{(+)} \mathbf{K}(\alpha, \gamma) \mathbf{Q}(\alpha) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) \Big|_{\alpha=k_n(\gamma)} d\gamma - \mathbf{i}^+ - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{\tau^-(r)} \sum_{n=1}^{\infty} \text{res}_{\alpha=k_n(\gamma)}^{(-)} \mathbf{K}(\alpha, \gamma) \mathbf{Q}(\alpha) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) \Big|_{\alpha=k_n(\gamma)} d\gamma - \mathbf{i}^- + \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\sum_{n=1}^{\infty} \text{res}_{\alpha=k_n(\gamma)}^{(+)}$ – сумма вычетов в полюсах $k_n(\gamma)$ в первом квадранте плоскости α ,

$\sum_{n=1}^{\infty} \text{res}_{\alpha=k_n(\gamma)}^{(-)}$ – в четвертом,

$$\mathbf{I}(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\tilde{\tau}(r)} d\gamma \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, \gamma) \mathbf{Q}(\alpha) \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) \alpha d\alpha, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{i}^\pm(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\tau^\pm(r)} d\gamma \int_{\Gamma_l^\pm} \mathbf{K}(\alpha, \gamma) \mathbf{Q}(\alpha) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) d\alpha, \quad (4.9)$$

$\Gamma_l^- = [-i\infty, 0]$, $\Gamma_l^+ = [+i\infty, 0]$, $\varphi_0 = \arccos(1/r)$, $0 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$, $r \geq 1$.

Множества $\tau^\pm(r, \varphi)$, $\tilde{\tau}(r, \varphi)$, по которым производится интегрирование, имеют вид

$$\begin{aligned} \tau^+ &= [\varphi + \pi - \varphi_0, \varphi + \pi + \varphi_0], \quad \tau^- = [\varphi - \varphi_0, \varphi + \varphi_0], \\ \tilde{\tau} &= (\varphi + \varphi_0, \varphi + \pi - \varphi_0) \cup (\varphi + \pi + \varphi_0, \varphi + 2\pi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Для интегралов $I(\tilde{\tau})$, $\mathbf{i}^{\pm}(\tau^{\pm})$ (4.8), (4.9) справедливы оценки (4.23), (4.24).

Примеры расчетов методом интегрирования вычетов для осесимметричного источника представлены на рисунках 4.2, 4.3.

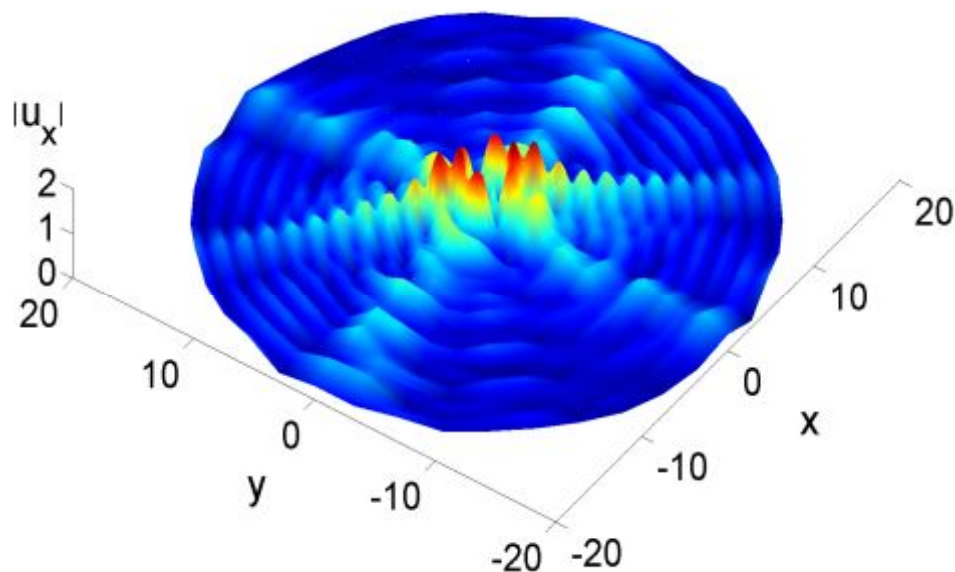


Рисунок 4.2 – Амплитуда горизонтальных перемещений $|u_x(x, y)|$ на поверхности 24-слойного композита $[+45_6/-45_6]_S$ из материала Graphite-Ероху, $\omega=4$, $h=1$ [15] (метод интегрирования вычетов для осесимметричного источника)

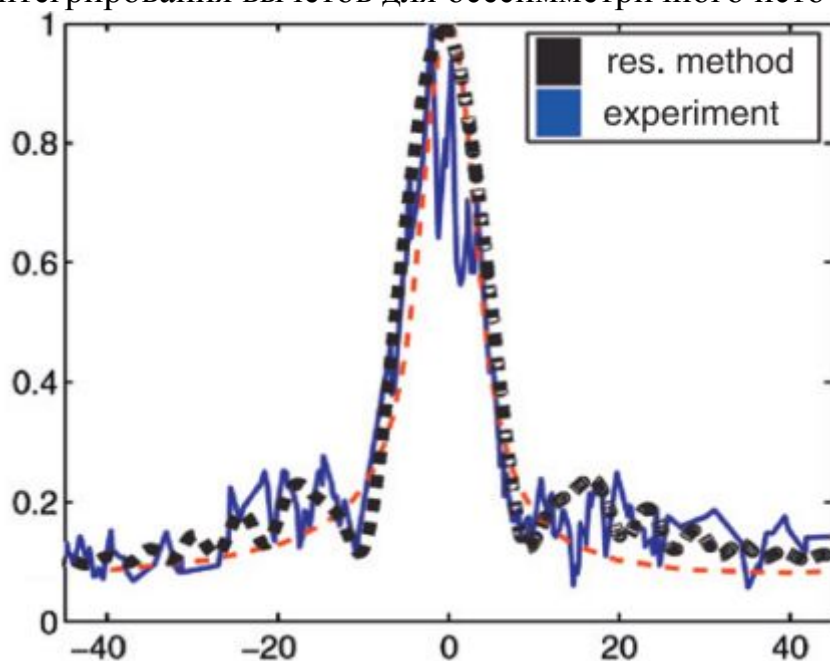


Рисунок 4.3 – Вертикальные смещения в зависимости от угла, возбуждаемые круговым источником с диаметром 1 см на частоте 300 КГц в симметричном композите $[0,90]_S$, материал CFRP T700GC/M21 [17] (метод интегрирования вычетов (--), экспериментальные данные¹ (—))

¹ *Chapius B., Terrien N., Royer D. Excitation and focussing of Lamb waves in a multilayered anisotropic plate // J. Acoust. Soc. Am. 127 (2010) 198–203.*

В пункте 4.3 приводится описание метода интегрирования вычетов для несимметричного источника, который является обобщением предыдущего метода. В этом случае предполагается, что функция $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma)$ может быть точно или приближенно представлена в виде

$$\mathbf{Q}(\alpha, \gamma) = \sum_j \exp(-i\alpha g_j(\gamma)) \tilde{\mathbf{Q}}_j(\alpha, \gamma), \quad (4.10)$$

где функции $\tilde{\mathbf{Q}}_j(\alpha, \gamma)$ ограничены в верхней или нижней полуплоскости α для $\forall \gamma \in [0, 2\pi]$, функции $g_j(\gamma)$ – периодические, вещественные при вещественных γ . В соответствии с алгоритмом метода находятся в общем случае численно интервалы $\tau_j^\pm(r, \varphi)$, в которых справедливы неравенства

$$\cos(\gamma - \varphi) + \frac{g_j(\gamma)}{r} < 0, \quad \gamma \in \tau_j^+(r, \varphi); \quad \cos(\gamma - \varphi) + \frac{g_j(\gamma)}{r} > 0, \quad \gamma \in \tau_j^-(r, \varphi).$$

После нахождения $\tau_j^\pm(r, \varphi)$ определяются множества

$$\tau^+ = \bigcap_j \tau_j^+, \quad \tau^- = \bigcap_j \tau_j^-, \quad \tilde{\tau} = \bigcup_j \tau_j^+ \setminus \bigcap_j \tau_j^+ \equiv \bigcup_j \tau_j^- \setminus \bigcap_j \tau_j^-.$$

Окончательно интеграл (4.2) по методу интегрирования вычетов для несимметричного источника может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \varphi, z, \omega) = & \frac{i}{2\pi} \int_{\tau^+(r, \varphi)} \sum_{m=1}^{\infty} \text{res} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) \Big|_{\alpha=k_m^+(\gamma)} d\gamma - \mathbf{i}^+ - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{\tau^-(r, \varphi)} \sum_{n=1}^{\infty} \text{res} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) \Big|_{\alpha=k_n^-(\gamma)} d\gamma - \mathbf{i}^- + \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где знак плюс соответствует вычетам в первом квадранте плоскости α , минус – в четвертом;

$$\mathbf{I}(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\tilde{\tau}(r, \varphi)} d\gamma \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \exp(-i\alpha(r \cos(\gamma - \varphi))) d\alpha; \quad (4.12)$$

$$\mathbf{i}^\pm(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\tau^\pm(r, \varphi)} d\gamma \int_{\Gamma^\pm} \mathbf{K}(\alpha, \gamma) \mathbf{Q}(\alpha) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \beta)) d\alpha. \quad (4.13)$$

Отличие данного метода от предыдущего состоит в более сложной процедуре определения множеств $\tau^\pm(r, \varphi)$, $\tilde{\tau}^\pm(r, \varphi)$, которые в общем случае могут быть найдены только численно как функции двух переменных r, φ . Для интегралов \mathbf{i}^\pm , \mathbf{I} также справедливы оценки (4.23), (4.24).

Для многих практически важных случаев множества $\tau^\pm, \tilde{\tau}^\pm$ могут быть найдены явно, примеры приведены в пунктах 4.2, 4.3.

На рисунке 4.4 приведен пример расчетов с помощью метода интегрирования вычетов для несимметричного источника.

Представление вида (4.10) может быть получено приближенно для произвольной функции нагрузки $q = F_{x,y}[Q]$ в виде суммы дельта-источников с некоторыми весовыми коэффициентами q_j

$$q(x, y) \approx \sum_{j=1}^{N_q} q_j \delta(x - x_j) \delta(y - y_j),$$

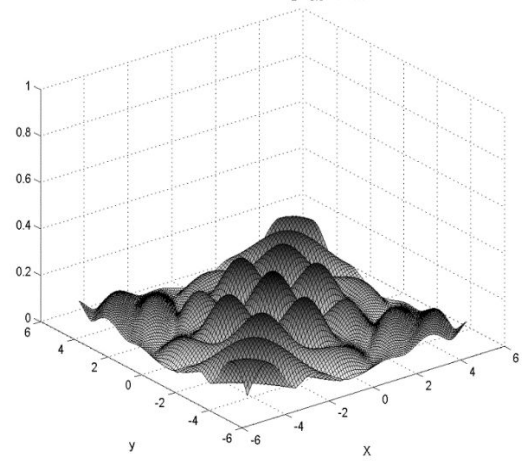
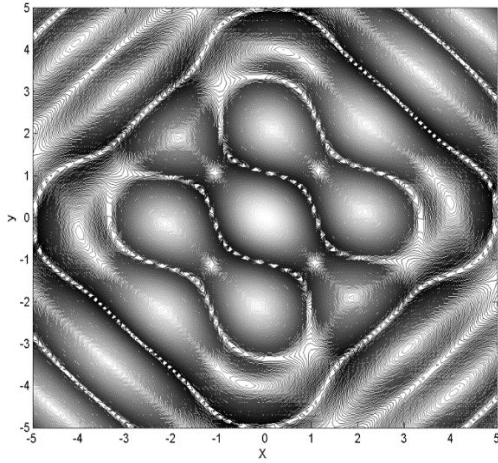


Рисунок 4.4 – Амплитуда вектора смещений $|\mathbf{u}(x, y, 0)|$ на поверхности восьмислойного симметричного пакета анизотропных слоев $[+45/-45/0/90]_S$, материал AS4/3502, вызываемых вертикальным гармоническим источником квадратной формы, частота $\omega=3$, $h=1$, сторона квадрата $L/h=3$ [30] (метод интегрирования вычетов для несимметричного источника)

которому в области символов Фурье соответствует функция

$$Q(\alpha, \gamma) \approx \sum_{j=1}^{N_q} q_j \exp(i\alpha r_j \cos(\gamma - \varphi_j)).$$

В обозначениях (4.10) коэффициенты определяются следующим образом:

$$q_j \equiv \tilde{Q}_j(\alpha, \gamma), \quad g_j(\gamma) = -r_j \cos(\gamma - \varphi_j), \quad r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}, \quad \varphi_j = \arctg(y_j / x_j).$$

Для такой аппроксимации $q(x, y)$ метод интегрирования вычетов для осесимметричного источника наиболее прост и удобен.

При больших r представления по методу интегрирования вычетов для осесимметричного и несимметричного источника совпадают, что соответствует методу интегрирования вычетов в дальней зоне

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \varphi, z, \omega) = & \frac{i}{2\pi} \int_{\varphi+\pi/2}^{\varphi+\pi/2+\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \text{res}^{(+)} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) \Big|_{\alpha=\alpha_m^+(\gamma)} d\gamma - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{\varphi-\pi/2}^{\varphi-\pi/2+\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \text{res}^{(-)} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) \Big|_{\alpha=\alpha_n^-(\gamma)} d\gamma. \end{aligned} \quad (4.14)$$

На основе формулы (4.14) и метода стационарной фазы в п. 4.4 для интегралов вида (4.2) при $r \rightarrow \infty$ получены асимптотические представления метода интегрирования вычетов. Асимптотика определяется характером фазовой функции $P_m^\pm(\gamma, \varphi) = -k_m^\pm(\gamma) \cos(\gamma - \varphi)$. Стационарные точки $\gamma_{mp}^\pm(\varphi)$ удовлетворяют фазовому уравнению

$$\frac{k_{m,\gamma}^{\pm}(\gamma)}{k_m^{\pm}(\gamma)} = \text{tg}(\gamma - \varphi), \quad \gamma \in (\varphi \pm \pi/2, \varphi + \pi \pm \pi/2). \quad (4.15)$$

Вклад стационарной точки $\gamma_{mp}^\pm(\varphi)$, найденной для полюсов $k_m^\pm(\gamma, \varphi)$, определяется следующим образом:

$$\mathbf{G}_{mp}^{\pm}(r, \varphi, z, \omega) = \frac{\pm i}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\mathbf{b}_m^{\pm}(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi), z, \omega)}{\sqrt{-iP_{m,\gamma^2}^{\prime\pm}(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi), \varphi)}} \exp(irP_m^{\pm}(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi), \varphi)) + O(r^{-3/2}), \quad (4.16)$$

где

$$P_{m,\gamma^2}^{\prime\pm}(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi), \varphi) = \frac{\partial^2 P_m^{\pm}(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi), \varphi)}{\partial \gamma^2} \neq 0, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{b}_m^{\pm}(\gamma, z, \omega) = \text{res} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \Big|_{\alpha=k_m^{\pm}(\gamma)}.$$

Сумма вкладов всех вещественных полюсов имеет вид

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z, \omega) = \sum_{m=1}^{N_r} \sum_{p=1}^{N_{mp}^{\pm}(\varphi)} \mathbf{G}_{mp}^{\pm}(r, \varphi, z, \omega) + O(r^{-3/2}), \quad (4.18)$$

где N_r – число действительных полюсов; $N_{mp}^{\pm}(\varphi)$ – число стационарных точек, найденных для кривой полюсов $k_m^{\pm}(\gamma)$ в направлении φ .

Полученные выше асимптотические представления действительны, если выполняется условие (4.17). Направления φ_c , для которых справедливо

$$P_{m,\gamma^2}^{\prime\pm}(\gamma_{mp}^{\pm}(\varphi), \varphi) = 0, \quad (4.19)$$

соответствуют каустикам, для них представления (4.18) неприменимы. В направлении каустики φ_c две стационарные точки $\gamma_{mp_1}^{\pm}$ и $\gamma_{mp_2}^{\pm}$ сливаются.

Этот случай показан на рисунке 4.5, где две стационарные точки становятся равными в направлениях $\varphi_c \approx 7^\circ$ и $\varphi_c \approx 83^\circ$.

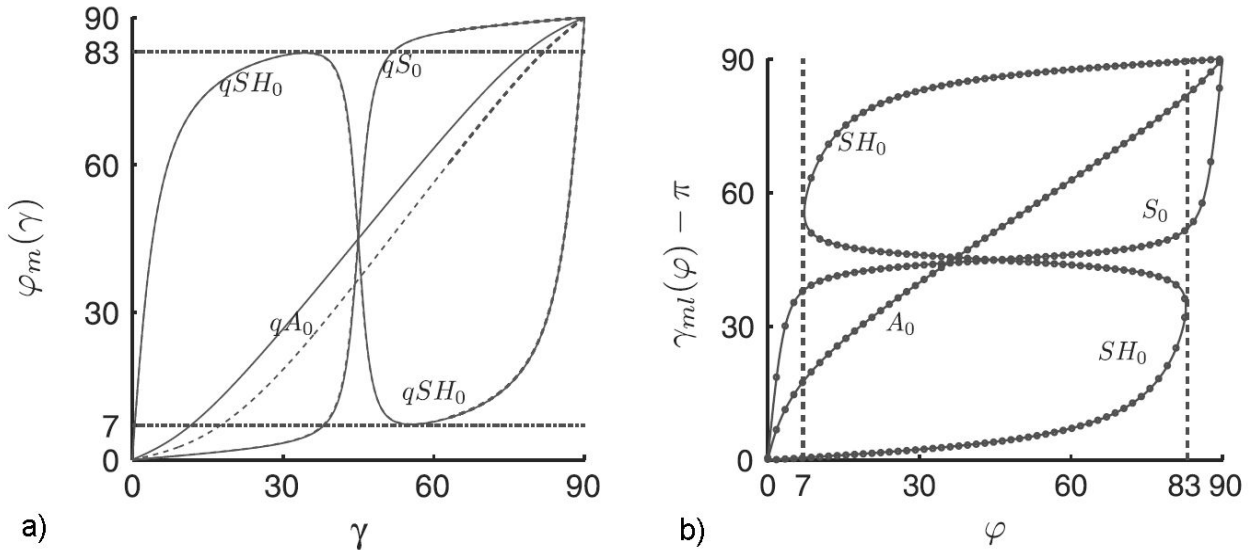


Рисунок 4.5 – а) Функция $\varphi_m(\gamma)$ (4.15) в зависимости от параметра γ ; б) стационарные точки $(\gamma_{ml}(\varphi) - \pi)$ уравнения (4.15) для симметричного композита $[0/90]_s$ из материала CFRP T700GC/M21, частота 300 кГц, толщина слоя $h=1$ см [17]

В окрестности φ_c сумма соответствующих представлений выражается в виде

$$G_{mp_1}^{\pm}(r, \varphi, z, \omega) + G_{mp_2}^{\pm}(r, \varphi, z, \omega) = r^{-1/3} \exp(irL(\varphi))V(s) \times \\ \times \left[b_m^{\pm}(\gamma_{mp_2}(\varphi), z, \omega) \sqrt{\frac{2\sqrt{S(\gamma_{mp_2}(\varphi))}}{P_m^{\prime\pm}(\gamma_{mp_2}(\varphi))}} + b_m^{\pm}(\gamma_{mp_1}(\varphi), z, \omega) \sqrt{\frac{-2\sqrt{S(\gamma_{mp_1}(\varphi))}}{P_m^{\prime\pm}(\gamma_{mp_1}(\varphi))}} \right] + O(r^{-4/3}), \quad (4.20)$$

где $L(\varphi) = \frac{1}{2} [P_m^{\pm}(\gamma_{mp_1}(\varphi), \varphi) + P_m^{\pm}(\gamma_{mp_2}(\varphi), \varphi)]$; V – функция Эйри; $s = -r^{2/3}S(\varphi)$;

$S(\varphi) = \left[\frac{3}{4} (P_m^{\pm}(\gamma_{mp_2}(\varphi), \varphi) - P_m^{\pm}(\gamma_{mp_1}(\varphi), \varphi)) \right]^{2/3}$; $P_m^{\prime\pm}(\gamma_{mp_1}(\varphi), \varphi) < 0$, $P_m^{\prime\pm}(\gamma_{mp_2}(\varphi), \varphi) > 0$.

На рисунке 4.5 слева $\varphi_c \approx 7^\circ$ и справа $\varphi_c \approx 83^\circ$ от каустики соответственно наблюдается только одна стационарная точка. Соответствующее решение убывает со скоростью $O(r^{-1/2})$ (теньевая зона), в то время как в противоположных от каустик сторонах существуют три стационарные точки и решение убывает со скоростью $O(r^{-1/3})$. Амплитуда вблизи каустики значительно выше по сравнению с соседними направлениями, что вызывает эффект фокусирования энергии.

Как видно из рисунка 4.6, где сравниваются результаты расчетов трех методов – метода прямого контурного интегрирования, метода интегрирования вычетов в дальней зоне, асимптотического представления для метода

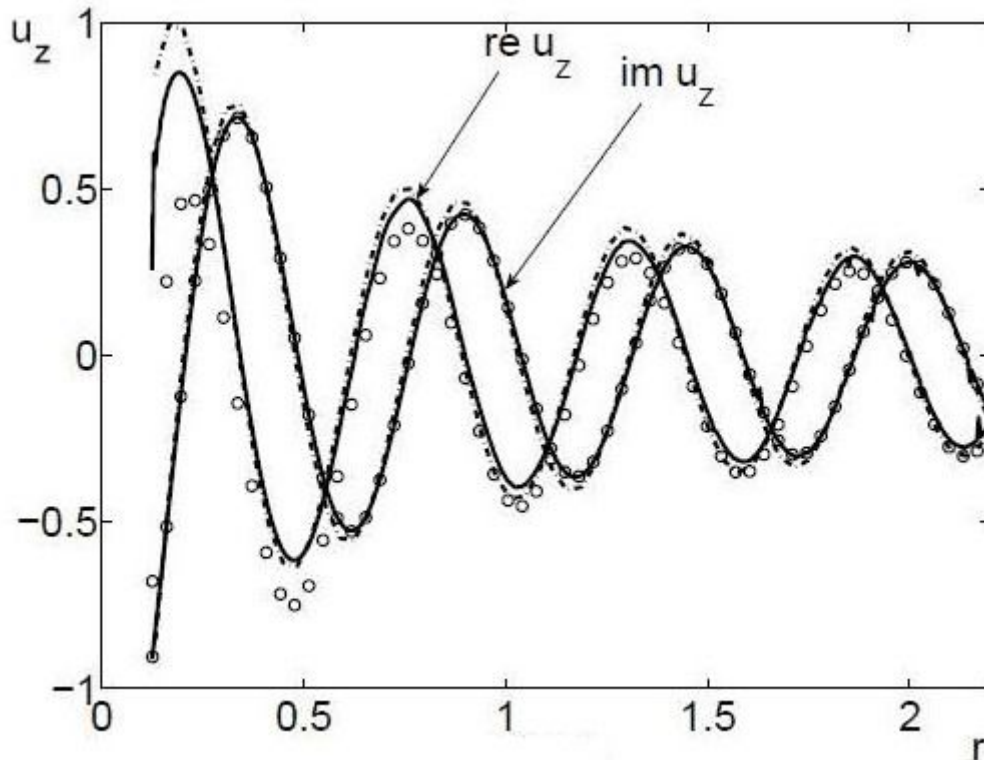


Рисунок 4.6 – Сравнение методов интегрирования для расчета вертикальных смещений на поверхности восьмислойного симметричного композита $[0/90/45/-45]_s$, материал Graphite-Ероху. Частота 200 кГц, диаметр поверхностного кругового источника $A = 0,25$ см (метод прямого контурного интегрирования (сплошная линия), метод интегрирования вычетов в дальней зоне (o), асимптотические представления метода интегрирования вычетов (–))

интегрирования вычетов, уже при относительно небольшом удалении от источника результаты практически совпадают.

В пункте 4.5 для изотропного случая и дельта-источника $q = \delta(x)\delta(y)$ получены оценки погрешности $\Delta_{ij}(r, \varphi, R)$ замены бесконечного контура Γ на конечный контур $\Gamma_R = [0, R]$

$$\Delta_{ij}(r, \varphi, R) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R K_{ij}(\alpha, \gamma, 0) \alpha \exp(-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)) d\alpha d\gamma. \quad (4.21)$$

Для абсолютной погрешности Δ_{ij} в пункте 4.5 получена зависимость от величин r и R следующего вида:

$$\Delta_{ij}(\varphi) \approx \frac{c_{ij}(\varphi)}{r^{3/2} R^{1/2}}, \quad 0 < r < R. \quad (4.22)$$

Здесь $c_{ij}(\varphi)$ – тригонометрические функции, соответствующие K_{ij} и имеющие явное выражение для изотропных сред (описаны в диссертации); r – расстояние от источника. Оценки (4.22) приведены в упрощенном виде без слагаемых меньшего порядка. Формула (4.22) позволяет оценить величину каждого из параметров Δ_{ij}, r, R в зависимости от значений остальных параметров, что необходимо для оптимизации вычислений по методу прямого контурного интегрирования.

В пунктах 4.6, 4.7 для различных элементов матрицы K_{ij} численно-аналитически получены следующие оценки интегралов $\mathbf{i}(K_{ij}, r)$ (4.9), (4.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(K_{11}, r) = \mathbf{i}(K_{12}, r) = \mathbf{i}(K_{21}, r) = \mathbf{i}(K_{22}, r) = \mathbf{i}(K_{33}, r) = O(r^{-1}), \\ \mathbf{i}(K_{13}, r) = \mathbf{i}(K_{31}, r) = O(r^{-2}), \quad \mathbf{i}(K_{23}, r) = \mathbf{i}(K_{32}, r) = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для интегралов $\mathbf{I}(K_{ij}, \tilde{\tau}, r)$ (4.8), (4.12) теми же методами получены численно-аналитические оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(K_{11}, r) = \mathbf{I}(K_{22}, r) = \mathbf{I}(K_{33}, r) = \mathbf{I}(K_{23}, r) = \mathbf{I}(K_{32}, r) = O(r^{-1}), \\ \mathbf{I}(K_{12}, r) = \mathbf{I}(K_{21}, r) = \mathbf{I}(K_{13}, r) = \mathbf{I}(K_{31}, r) = O(r^{-2}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Кроме оценки (4.5), оценки (4.22), (4.23), (4.24) получены для изотропной среды, тем не менее, они позволяют выбрать оптимальный метод интегрирования и оптимальные параметры самих методов.

Так, в зависимости от вида подынтегральной функции при малых r вклад интегралов \mathbf{I} (4.8), (4.12), \mathbf{i}^\pm (4.9), (4.13) может быть сравним с вкладом интегралов от вычетов, поэтому в вычислительном отношении в непосредственной близости от источника в этом случае целесообразно использовать метод прямого контурного интегрирования. На некотором удалении удобен метод интегрирования вычетов, для больших r – метод интегрирования вычетов в дальней зоне, при $r \rightarrow \infty$ – асимптотические представления метода интегрирования вычетов. Таким образом, разработанные в четвертой главе методы охватывают весь диапазон расстояний.

В **пятой главе** представлены основные численные результаты, полученные с помощью методов, описанных в главах 1–4.

В пункте 5.1 рассмотрены примеры различий в применении трех принципов излучения, имеющих важное значение при построении символа матрицы Грина однородного или многослойного термоэлектроупругого полупространства: принципа Зоммерфельда, принципа излучения энергии и принципа предельного поглощения (см. сноску на с. 15). Для кристаллов различных классов, представляющих все сингонии, кроме триклинной (данные об образцах кристаллов триклинной сингонии не найдены), показано, что принцип Зоммерфельда, в отличие от принципа излучения энергии и принципа предельного поглощения, в анизотропном случае может давать некорректные результаты. Доказана обобщающая лемма, утверждающая, что для любого анизотропного материала при определенном условии, выполнявшемся для всех рассмотренных случаев, найдется несчетное множество кристаллофизических систем координат, в которых принцип Зоммерфельда приводит к некорректному результату при классификации собственных значений λ (3.2). Полученные результаты означают, что принцип предельного поглощения, выбранный в диссертационной работе в качестве основного принципа излучения, должен применяться на этапе построения символа матрицы Грина для получения корректного результата.

В пункте 5.2 приведены примеры решения некоторых несмешанных краевых задач для многослойных анизотропных сред, возбуждаемых поверхностными источниками. Описанные в главе 4 методы вычисления интегралов Фурье применены для расчета гармонических колебаний, возбуждаемых в анизотропных многослойных пакетах (композитах, композитных материалах) без внутренних неоднородностей поверхностными нагрузками различных типов – сосредоточенными или распределенными в ограниченных областях по различным законам (см. рисунки 4.2, 4.3, 4.4, 4.6).

В пункте 5.3 даны примеры расчета дисперсионных кривых блочных матриц для изотропного слоя с внутренними неоднородностями в виде жестких включений или трещин.

В пункте 5.4 приведены примеры расчета амплитуд гармонических пространственных колебаний в изотропном упругом слое, вызванных плоскими горизонтальными трещинами или жесткими включениями (см. рисунок 4.1).

В пункте 5.5 описан метод и результаты расчета пространственных зон дилатансии (разуплотнения) в упругом слое, вызванных как одиночными внутренними источниками, так и парой этажно расположенных источников распорного или сдвигового типа. К области дилатансии отнесено множество точек упругой среды, для которых при известном поле напряжений $\{\sigma_{ij}\}$ выполнено следующее условие:

$$D_\tau = \tau - \beta(P + \rho g z) - Y > 0, \quad (5.1)$$

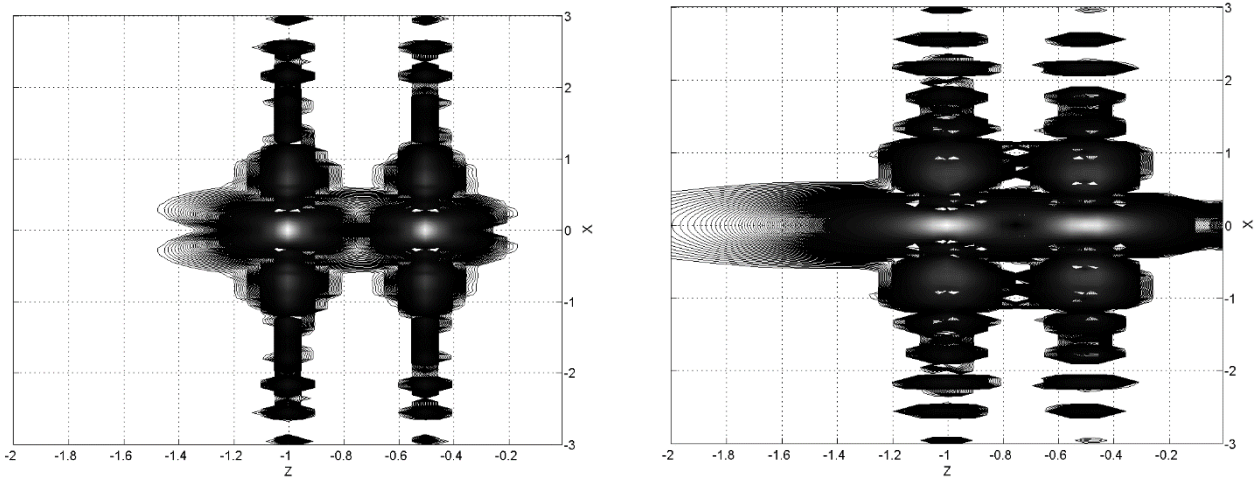
где $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{0.5}$;

β – коэффициент внутреннего трения (около 0,5); $P = -\frac{1}{3}[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}]$ – гидростатическое давление, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения, $h \leq z \leq 0$ – глубина точки, Y – сцепление породы (около $3 \cdot 10^6$ Па).

Условие (5.1) совпадает с критерием Шлейхера–Надаи разрушения материала под действием нагрузок, эффективность использования которого при исследовании начальной стадии процесса разрушения горных пород подтверждена экспериментально¹. Элементы тензора напряжений, входящие в (5.1), могут быть выражены в виде интеграла (2.18) с использованием блочной матрицы $K^{(n,m)}$. В качестве внутреннего статического источника были выбраны одиночные или этажно расположенные осесимметричные неоднородности, параллельные поверхности, в областях носителя которых $\Omega_m^{(2,k)}$ задаются функции скачка напряжений $q^{(k)}(r)$, соответствующие нагрузкам распорного или сдвигового типа для задачи 2

$$q(r) = \begin{cases} A \frac{m+1}{\pi} (1-r^2)^m, & r < 1 \\ 0 & , r \geq 1 \end{cases}, \quad A = const \quad (5.2)$$

Величина D_τ (5.1) вычислялась в прямоугольнике $-3 \leq x \leq 3, -2 \leq z \leq 0, y = 0$. В расчетах рассматривались два варианта изотропного слоя на жестком основании: характерный песчаник и известняк. Толщина слоя полагалась $h = 10$ км, радиус круговой неоднородности, расположенной параллельно поверхности слоя на глубине $z = z^{(2)}$, полагался $r = 1$ км. Центр источника нагрузок $q^{(n)}$ находится на оси OZ.



a

b

Рисунок 5.1 – Зоны дилатансии $D_\tau(x, z)$ (5.1) для двух этажно расположенных источников вида (5.2) в слое известняка: *a* – сдвиговая нагрузка; *b* – распорная (метод прямого контурного интегрирования)

На рисунке 5.1 изображены области $D_\tau(x, z)$ (5.1) для одинаковых парных нагрузок, расположенных одна под другой на глубинах $z_2 = -0.5, z_3 = -1.0$ Км. Рисунок 5.1, *a* соответствует нагрузке сдвига $Q = Q_1^{(2)} = Q_1^{(3)}$, рисунок 5.1, *b* –

¹ Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками / отв. ред. Г.М. Цыбульчик. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, Филиал «Гео» изд-ва СО РАН, 2004.

распорной нагрузке $Q = Q_3^{(2)} = Q_3^{(3)}$. В первом случае (а) наблюдаются более вытянутые по оси Ox зоны $D_r(x, z)$ без выхода на поверхность, во втором случае (б) зоны D_r выходят и на поверхность слоя и проникают значительно глубже, чем в случае соответствующих одиночных нагрузок.

На рисунках 5.2, 5.3 в качестве модельных примеров представлены расчеты для трехслойного термоэлектроупругого композита из ниобата лития

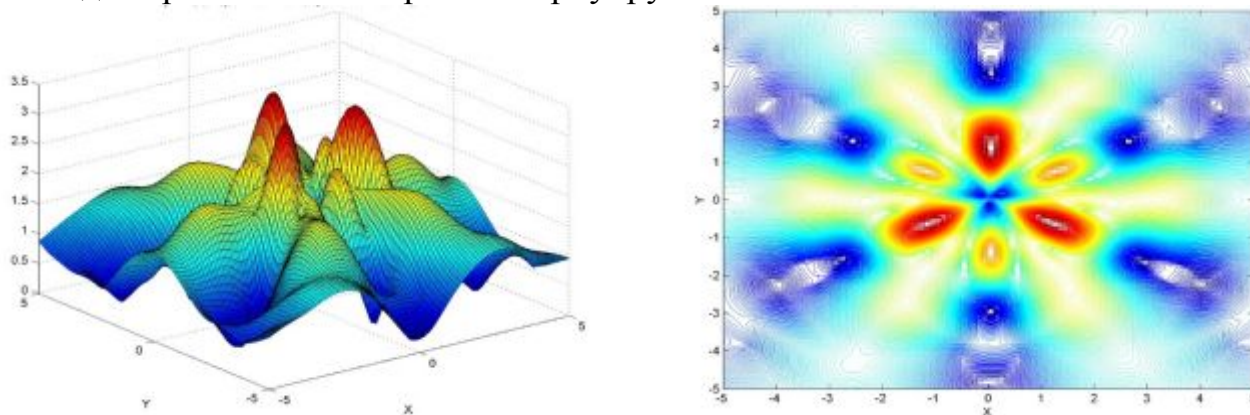


Рисунок 5.2 – Амплитуда вектора смещений $|\mathbf{u}(x, y, 0)|$ на поверхности $z = 0$ пакета $[\text{LiNbO}_3/\text{ZnO}/\text{LiTaO}_3]$, внутренний электрический источник $Q_4^{(2,2)} = 1$, частота $\omega = 7$ (метод интегрирования вычетов)

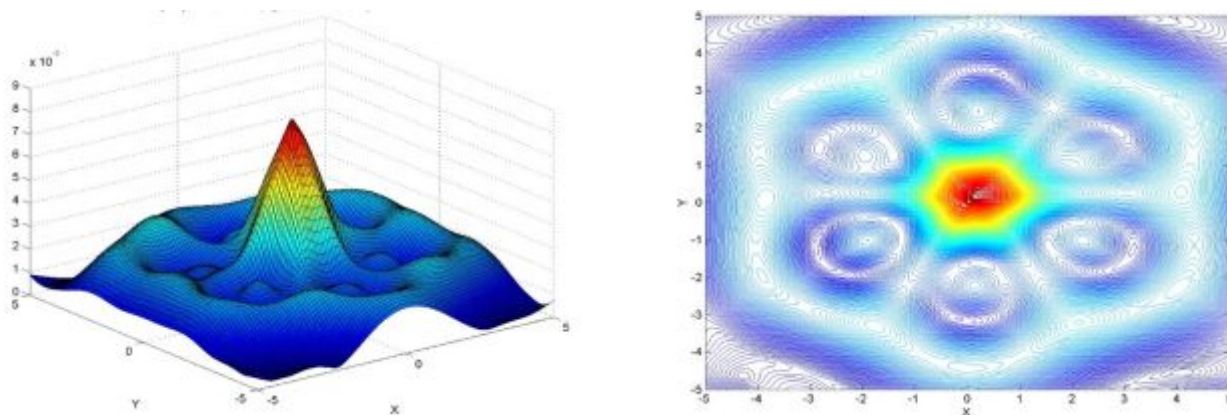


Рисунок 5.3 – Модуль электрического потенциала $|\varphi(x, y, 0)|$ на поверхности $z = 0$ пакета слоев $[\text{LiNbO}_3/\text{ZnO}/\text{LiTaO}_3]$, внутренний тепловой источник $Q_5^{(2,2)} = 1$, частота $\omega = 7$ (метод прямого контурного интегрирования)

(LiNbO_3 , тригональная сингония, класс $3m$), окиси цинка (ZnO , гексагональная сингония, класс $6mm$), танталата лития (LiTaO_3 , тригональная сингония, класс $3m$), толщины слоев равны $h/3$, сосредоточенные электрические и тепловые источники находятся между первым и вторым слоем, основание слоя жестко фиксировано.

В пункте 5.7 приведены примеры решения интегральных уравнений, возникающих в задачах идентификации параметров интерфейсной трещины в уп-

ругой полосе и примеры результатов идентификации. Рассматривается плоская задача для прямолинейной трещины в упругом слое, моделируемом как двухслойный пакет с горизонтальной трещиной. Колебания возбуждаются поверхностным гармоническим источником.

Задача определения неизвестных параметров трещины (расстояние от источника колебаний x_0 , глубина залегания h , длина трещины $2a$) может быть сведена к решению системы интегральных уравнений, вычислению соответствующих перемещений на поверхности слоя и минимизации методами оптимизации невязок между вычисленными пробными и эталонными перемещениями в определенных точках «замеров» на поверхности полосы вне зоны проекции трещины.

Системы интегральных уравнений второго порядка решались методами факторизации и фиктивного поглощения (МФП), описанными в первой главе, с помощью метода Бубнова–Галеркина (МБГ) и метода конечных элементов (МКЭ) в программе ABAQUS, тестировались на известных решениях, полученных другими авторами, и продемонстрировали в тестовых примерах качественное совпадение и количественно близкие результаты.

На рисунке 5.4 приведены примеры функций горизонтального и вертикального раскрытия берегов трещины в изотропном слое, полученные с помощью метода фиктивного поглощения.

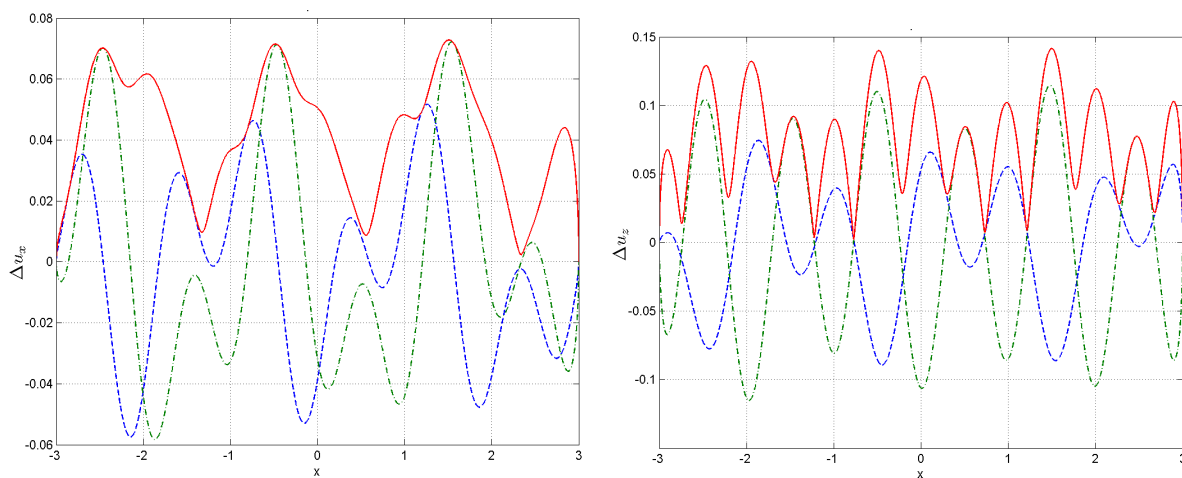


Рисунок 5.4 – Функция горизонтального раскрытия берегов трещины $\Delta u_x(x)$ (слева), функция вертикального раскрытия $\Delta u_z(x)$ (справа). Параметры: $\omega = 3$, $h = -0,5$, $a = 3$, $x_0 = -17$, источник $\mathbf{q}^{(1)} = \{0, \delta(x+17)\}^T$. Сплошная линия – $|\Delta u_j(x)|$, штрихованная линия – $\text{Re}\Delta u_j(x)$, штрихпунктирная линия – $\text{Im}\Delta u_j(x)$. Решение – МФП

На рисунке 5.5 изображены соответствующие решению системы интегральных уравнений смещения на поверхности слоя, полученные методом фиктивного поглощения и методом конечных элементов.

Незначительные расхождения наблюдаются в зоне проекции трещины, в остальных диапазонах решения практически совпадают. В зоне проекции тре-

шины $[-3,3]$ средняя амплитуда снижена приблизительно в три раза.

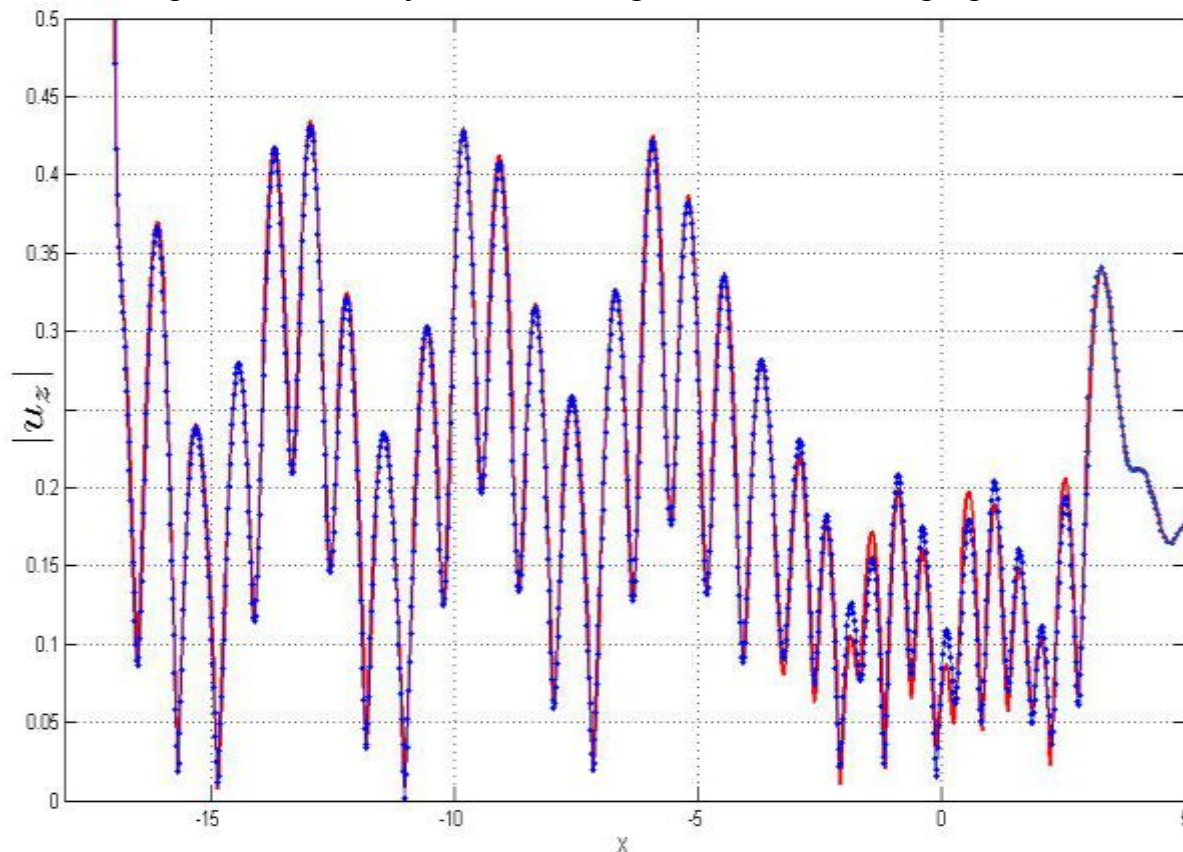


Рисунок 5.5 – Модуль вертикальных смещений $|u_z(x)|$ на поверхности слоя с трещиной. Параметры: $\omega=3$, $h=-0,5$, $a=3$, $x_0=-17$, источник $\mathbf{q}^{(1)} = \{0, \delta(x+17)\}^T$. Сплошная линия – МФП, линия с крестиками – МКЭ, программа ABAQUS

Таблица 5.1 – Результаты идентификации трех параметров трещины в изотропном слое [34]

Относительная погрешность симуляции ε_{inp} , %	Относительная погрешность идентификации (GA), %	Относительная погрешность идентификации (DIRECT 2.0), %	Число вычислений прямой задачи (GA)	Число вычислений прямой задачи (DIRECT 2.0)
0,05	1,0	0,1	327	133
5	2,3	0,3	658	292
10	6	0,7	1000	456

Параметры: $h = -0,5$, $x_0 = 2,0$, $a = 0,82$, частота $\omega = 0,97$, число точек «замеров» на поверхности – 16. Решение прямой задачи – МБГ

В таблице 5.1 приведен пример результатов идентификации трех параметров трещины в изотропном слое (расстояние от источника x_0 , глубина залегания h , длина трещины $2a$) при наличии ненулевой погрешности определения эталонных перемещений ε_{inp} , неизбежной в натуральных экспериментах.

Минимизация производилась с помощью генетических алгоритмов (GA, Matlab) и методов глобальной оптимизации (программа DIRECT 2.0, метод поиска паттернов (PS))¹.

Приведены практические выводы и рекомендации по решению задач идентификации трещин в упругой полосе [33, 34, 36, 37, 39].

Результаты численных экспериментов по идентификации параметров трещин в изотропных и анизотропных композитах показали, что в реализованных алгоритмах ошибка в определении параметров трещин не превышает уровень введенных погрешностей перемещений ε_{inp} в точках «измерений» либо превышает их незначительно.

Шестая глава посвящена численному моделированию возмущений на поверхности упругого слоя, вызываемых подвижным осциллирующим источником поверхностных напряжений. Рассматриваемая упругая среда представляет собой однородный изотропный слой с жестко заземленной нижней гранью, источник может быть сосредоточенным вектором нагрузок или распределенными в ограниченной области напряжениями.

Однородная краевая задача рассматривается в подвижной системе координат, связанной с источником. Предполагается, что в подвижной системе координат существует режим установившихся гармонических колебаний. Задача решается как в плоской, так и в пространственной постановке. Интегральное представление краевой задачи рассчитывается с помощью метода прямого контурного интегрирования. Получено большое количество численных результатов, детально исследован режим движения без осцилляций (режим B_0), режим движения с осцилляциями (режим B), исследованы приближенные амплитудно-скоростные и амплитудно-частотные характеристики системы «подвижный источник – упругое основание», другие динамические характеристики.

Для осциллирующего источника нагрузок, движущегося по поверхности упругого слоя с постоянной скоростью v параллельно оси OX, в символе матрицы Грина $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \omega^2)$ квадрат частоты ω^2 заменяется на выражение $(\omega - \alpha_1 v)^2$, где α_1 – параметр преобразования Фурье. В подвижной системе координат $\tilde{x} = x - vt$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = z$ возмущения поверхности $u(\tilde{x}, y, \omega)$ описываются следующим интегралом, аналогичным интегралу (2.18):

$$u_{ij}(\tilde{x}, y, \omega, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, (\omega - \alpha_1 v)^2) Q(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 \tilde{x} + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (6.1)$$

При этом возникает так называемая наведенная анизотропия, связанная с движением источника. Контур Γ_j в (6.1) могут существенно отличаться от контуров для соответствующего неподвижного источника.

¹ *Gablonsky J. M. DIRECT Version 2.0 User Guide. Technical Report CRSC-TR01-08, Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State University, April 2001.*

В пространственном случае в качестве поверхностного подвижного источника рассматривались сосредоточенный источник $q_j(\tilde{x}, y) = \delta(\tilde{x})\delta(y)$ и распределенный источник с равномерной нагрузкой, заданной в квадрате со стороной $2L$

$$q_j(\tilde{x}, y) = 1, \quad -L \leq \tilde{x}, y \leq L \quad (6.2)$$

Приведем несколько примеров расчетов. Так, на рисунке 6.1 при скорости $v = 1,8 = 1,63v_r = 1,5v_s = 0,87v_p$ (v_r – скорость релеевской волны, v_s – скорость поперечных волн, v_p – скорость продольных волн, параметры $\varepsilon = 0,01$, $L = 0,1$) конус Маха сформирован, угол конуса соответствует скорости релеевской волны v_r , амплитуда колебаний внутри конуса имеет сложный рельеф, в котором присутствуют две почти периодические пространственные структуры с различными пространственными периодами.

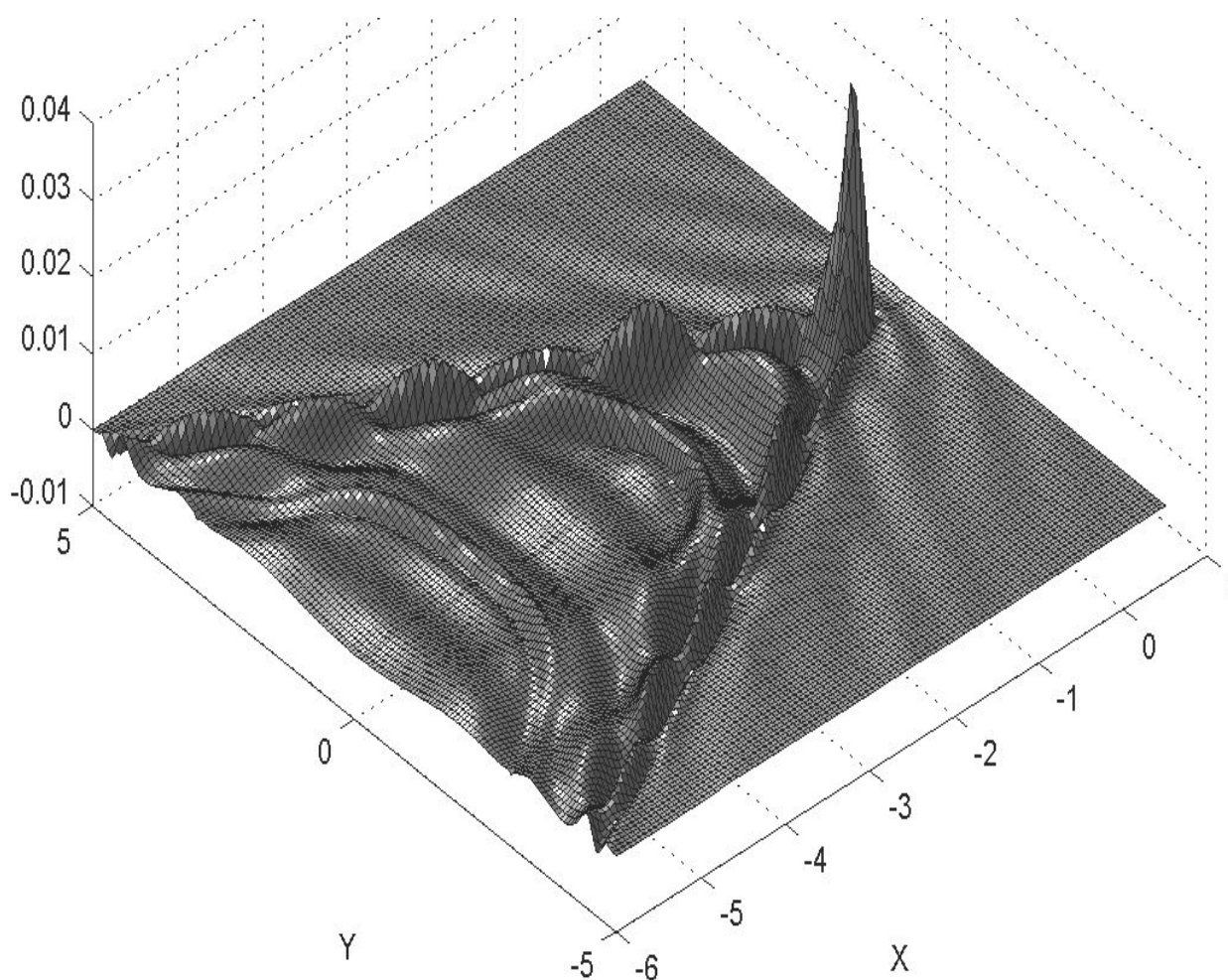


Рисунок 6.1 – Действительная часть смещений $Reu_3(\tilde{x}, y, v, \omega)(-1)$ на поверхности слоя, $v = 1,8 = 1,63v_r = 1,5v_s = 0,87v_p$, частота $\omega = 4$, источник (6.2), $L = 0,1$, режим В, пространственная задача

Действительная и мнимая части имеют одинаковые порядки. Вне конуса также происходят волновые движения, однако их амплитуда значительно меньше (на 2–3 порядка). Движения волн внутри и вне конуса для данного слу-

чая разнонаправленны, амплитуда колебаний на границах конуса может превышать амплитуду колебаний внутри него.

На рисунке 6.2 показана величина логарифма нормированной амплитуды вертикальных смещений $\lg|u_{33}(v, \omega)/u_{33}(0,0)|$, представляющая собой приближенную амплитудно-частотную и амплитудно-скоростную характеристику системы «подвижный источник – упругая среда» для плоского случая, $L = 0,01$. Данная величина, дающая качественное и количественное описание динамических свойств системы, имеет множество локальных максимумов, наибольший из которых соответствует релеевской скорости ($v = v_r, \omega = 0$), второй по величине максимум соответствует частоте первого двукратного полюса $\omega_1 = 3,23054$ для задачи с неподвижным источником ($v = 0, \omega \approx \omega_1$).

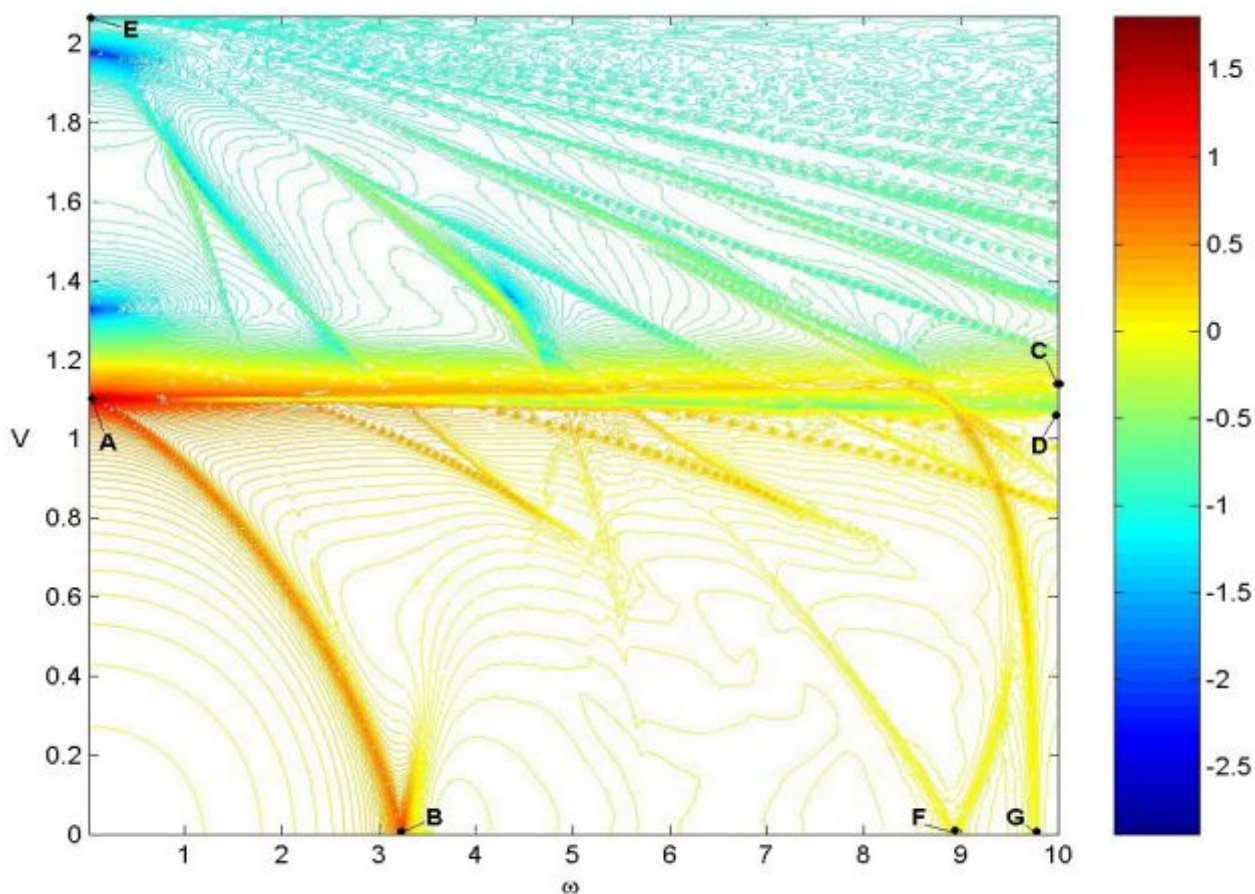


Рисунок 6.2 – Логарифм нормированной амплитуды вертикальных смещений $\lg|u_3(v, \omega)/u_3(0,0)|$ в зависимости от скорости и частоты (v, ω), распределенный вертикальный источник, плоская задача В, $L_x = 0,01$. В правой части рисунка – шкала десятичных порядков

Наибольшие средние уровни амплитуд соответствуют области (ОАВ), ограниченной кривой (АВ) и осями координат. При $v_s < v \leq v_p, 1 \leq \omega \leq 10$ амплитуда $|u_3(v, \omega)|$ слабо зависит от частоты и почти линейно уменьшается с увеличением скорости. Антирезонансы локализованы в трех областях с центрами

$(\nu = 1, 34, \omega = 0)$, $(\nu = 2, \omega = 0)$, $(\nu = 1, 36, \omega = 4, 2)$. Так как размер источника мал, аналогичные расчеты для случая сосредоточенного вертикального источника качественно и количественно близки приведенному на рисунке 6.2 графику. Общий диапазон изменения превышает 4 десятичных порядка, что означает наличие множества потенциально опасных сочетаний параметров системы для источника как транспортного средства.

Результаты шестой главы продемонстрировали практическую применимость и эффективность метода прямого контурного интегрирования для исследования плоских и пространственных задач B , B_0 . Сравнение результатов с контрольными расчетами по методу интегрирования вычетов показало их количественное совпадение в пределах средней погрешности вычислений.

В заключении сформулированы основные результаты исследования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Основными результатами работы являются:

- новые численно-аналитические методы и алгоритмы расчета интегральных представлений решений краевых задач термоэластостатики для многослойных сред при возбуждении колебаний поверхностными источниками и/или внутренними гармоническими источниками в виде трещин, включений, электрических и тепловых неоднородностей: для ближней зоны – метод прямого контурного интегрирования, метод интегрирования вычетов для осесимметричной нагрузки, метод интегрирования вычетов для несимметричной нагрузки; для дальней зоны – метод интегрирования вычетов в дальней зоне и асимптотические представления метода интегрирования вычетов;

- аналитические и численно-аналитические оценки различных параметров метода прямого контурного интегрирования и метода интегрирования вычетов, позволяющие оптимизировать процессы вычислений;

- новый устойчивый численно-аналитический метод построения символа Фурье блочной матрицы Грина многослойной полуограниченной термоэластостатической среды с произвольной термоэластостатической анизотропией каждого слоя, содержащей внешние и внутренние механические, тепловые и электрические неоднородности, алгоритм выноса растущих экспонент за рамки вычислительного процесса, позволяющий расширить диапазон вычислений для больших волновых чисел и частоты;

- аналитическое обоснование и численные примеры различий в применении принципов излучения в алгоритме построения символа матрицы Грина для анизотропного, электроупругого и термоэластостатического полупространства;

- метод построения символов ядер систем интегральных уравнений смешанных и контактных задач теории термоэластостатики на основе алгоритма построения символа блочной матрицы Грина;

- новый подход на основе метода прямого контурного интегрирования для расчета возмущений на поверхности изотропного упругого слоя, вызывае-

мых осциллирующим и движущимся поверхностным механическим источником; численное исследование различных режимов движения в широком диапазоне скоростей и частот как для плоской, так и для пространственной задачи, исследование приближенных амплитудно-скоростных и амплитудно-частотных характеристик системы «подвижный источник – упругое основание»;

– численные результаты и алгоритмы решения задач идентификации параметров интерфейсной трещины в слое на основе методов расчета символов ядер систем интегральных уравнений, факторизационных методов решения систем интегральных уравнений, других методов решения интегральных уравнений (метода Бубнова-Галеркина, метода конечных элементов), методов расчета интегралов Фурье, а также различных методов оптимизации;

– алгоритм и численные результаты расчета пространственных зон дилатансии в упругом слое;

– новые численные результаты решения ряда модельных динамических краевых задач теории упругости, электроупругости и термоэлектроупругости для многослойных сред, возбуждаемых поверхностными или внутренними источниками.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, определенных ВАК РФ для докторских диссертаций

1. *Бабешко, В.А.* К проблеме исследования локализации в электроупругих средах / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников // Доклады АН. 1995. Т. 345, № 1. С. 50–53.

2. *Бабешко, В.А.* К проблеме исследования локализации и резонансов в электроупругом анизотропном слое / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников // Доклады АН. 1999. Т. 367, № 2. С. 186–190.

3. *Бабешко, В.А.* Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 5. С. 35–47.

4. *Бабешко, В.А.* Теоретические и экспериментальные исследования глубинного строения Земли в аридных зонах / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников [и др.] // Вестник Южного научного центра РАН. 2006. Т. 2, №2. С. 42–45.

5. *Бабешко, В.А.* О смешанных задачах для многослойных анизотропных композитов / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников [и др.] // Вестник ЮНЦ РАН. 2006. Т. 2, № 4. С. 5–11.

6. *Бабешко, В.А.* Анизотропные тела с неоднородностями; случай совокупности трещин / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников [и др.] // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 5, С. 49–59.

7. *Бабешко, В.А.* Комплексные геофизические методы в изучении глубинного строения Земли для построения модели напряженно-деформированного состояния земной коры / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников [и др.] // Вестник ЮНЦ РАН. 2007. Т. 3, № 2. С. 32–38.

8. *Бабешко, В.А.* О смешанных задачах для термоэластостатических сред с разрывными граничными условиями / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников [и др.] // Доклады АН. 2007. Т. 412, № 6. С. 1–6.
9. *Зарецкая, М.В.* О смешанных задачах для многослойных анизотропных материалов со множественными неоднородностями / М.В. Зарецкая, П.В. Сыромятников [и др.] // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2007. № 1. С. 35–42.
10. *Сыромятников, П.В.* Разработка теоретических основ мониторинга динамики массивных разломно-блоковых структур в аридных зонах юга России / П.В. Сыромятников, С.В. Ратнер // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2007. № 10. С. 10–14.
11. *Сыромятников, П.В.* Интегральные представления термоэластостатических полей в многослойных средах с плоскими осесимметричными неоднородностями / П.В. Сыромятников, С.В. Ратнер // Вестник ЮНЦ РАН. 2008. Т. 4, № 1. С. 8–15.
12. *Кармазин, А.В.* Фазовые скорости волн Лэмба в многослойных анизотропных композитах / А.В. Кармазин, П.В. Сыромятников [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 2. С. 25–36.
13. *Ратнер, С.В.* Моделирование процесса образования дилатансной зоны в пакете анизотропных упругих слоев / С.В. Ратнер, П.В. Сыромятников // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 3. С. 72–79.
14. *Зарецкая, М.В.* О развитии математических методов оценки последствий техногенного воздействия предприятия нефтегазового комплекса на окружающую среду / М.В. Зарецкая, П.В. Сыромятников [и др.] // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2009. № 7. С. 25–35.
15. *Karmazin, A.* Analysis of spatial steady-state vibrations of a layered anisotropic plate using the Green's functions / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Proceedings of the ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems & Design and Analysis ESDA 2010, July 12-14, Istanbul, Turkey, 2010. P. 403–410.
16. *Karmazin, A.* Investigation of Lamb elastic waves in anisotropic multilayered composites applying the Green's matrix / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Ultrasonics. 2011. Vol. 51, is. 1. P. 17–28.
17. *Karmazin, A.* A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Ultrasonics. 2013. Vol. 53, is. 1. P. 283–293.
18. *Karmazin, A.* Study of piezo-excited Lamb waves in Laminated composite plates / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Advanced Materials. Physics, Mechanics and Applications. Springer Proceedings in Physics. Vol. 152, ch. 13, P. 149–162. Springer International Publishing Switzerland 2014.
19. *Сыромятников, П.В.* Моделирование возмущений поверхности упругой полуограниченной среды, вызываемых подвижным осциллирующим источ-

ником / П.В. Сыромятников // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 4. С. 82–91.

Основные публикации автора по теме диссертации в других изданиях

20. *Бабешко, В.А.* К проблеме исследования локализации и резонансов в ортотропных средах / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников // Наука Кубани. 1999. № 7. С. 70–75.

21. *Сыромятников, П.В.* Метод построения символа Фурье матрицы Грина для пакета электроупругих слоев / П.В. Сыромятников // Природа. Общество. Человек. Вестник Южно-Российского отделения Международной академии наук высшей школы. 2002. № 1 (14). С. 97–104.

22. *Бабешко, В.А.* Разработка новых методов мониторинга сейсмической активности / В.А. Бабешко, П.В. Сыромятников [и др.] // Современные проблемы аридных и семиаридных экосистем Юга России: сб. науч. ст. Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2006. С. 34–50.

23. *Лозовой, В.В.* Проведение теоретических и экспериментальных исследований по изучению глубинного строения Земли и развитию методов активного воздействия на среды / В.В. Лозовой, П.В. Сыромятников [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. Приложение. 2006. №1. С. 123–127.

24. *Ratner, S.* Modeling of the dynamic behaviour of anisotropic media containing parallel cracks ensembles / S. Ratner, P. Syromyatnikov // Bulletin of the Novosibirsk computing center. Series: mathematical modeling in geophysics. 2008. № 12. P. 65–71.

25. *Karmazin, A.* Modelling of 3D steady-state oscillations of anisotropic multilayered structures applying the Green's functions / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Advances in Theoretical and Applied Mechanics. 2010. Vol. 3, № 9. P. 425–450.

26. *Сыромятников П.В.* О решении двух интегральных уравнений методами факторизации / П.В. Сыромятников // Наука Кубани. 2013. № 3. С. 4–10.

Материалы конференций

27. *Ратнер, С.В.* Математическое моделирование динамики азимутально анизотропных сред с трещинами / С.В. Ратнер, П.В. Сыромятников // Проблемы геологии и освоения недр России: материалы Междунар. науч. конф. Ростов н/Д, 2006. С. 172–174.

28. *Кириллова, Е.В.* Вычислительные аспекты расчета напряженно-деформированного состояния композитных материалов: конечноэлементные и аналитические методы / Е.В. Кириллова, П.В. Сыромятников // Современные

проблемы механики сплошной среды: тр. XI Междунар. конф. Ростов н/Д, 2007. Т. 2. С. 114–116.

29. Сыромятников, П.В. Анизотропные тела с трещинами / П.В. Сыромятников, С.В. Ратнер // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XI Междунар. конф. Ростов н/Д, 2007. Т. 2. С. 187–189.

30. Кармазин, А.В. Анализ распространения волн в композитах с использованием функции Грина / А.В. Кармазин, П.В. Сыромятников [и др.] // Информационные и математические технологии в науке и управлении: тр. XV Байкальской Всерос. конф. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010. Ч. I. С. 138–145.

31. *Karmazin, A.* Methods for computing 3D Steady-state vibrations of composites using Green's functions / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Proceedings Of The American Society Of Mechanical Engineers International Mechanical Engineering Congress & Exposition (IMECE 2010), Vancouver, Canada, 2010, P. 10.

32. *Karmazin, A.* Investigation of Dispersion Characteristics of Composites / A. Karmazin, P. Syromyatnikov // Proc. Appl. Math. Mech., Vol. 10, is. 1. P. 503–504, December 2010. Karlsruhe 2010. DOI: 10.1002/pamm.201010244.

33. *Karmazin, A.* On the Solution of Crack Identification Problems in Composite Materials / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Proceedings of The 2nd International Symposium on NDT in Aerospace 2010. Hamburg, Germany, 2010. We.2. B. 3. 8 p.

34. *Karmazin, A.* On the Solution of Crack Identification Problems in Composite Materials / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Proceedings of the XXXIX International Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. St. Petersburg, Russia, 2011. P. 227–234.

35. *Karmazin, A.* Modelling of Lamb wave propagation in composite plate excited by surface bonded piezoelectrical actuators / A. Karmazin, P. Syromyatnikov [et al.] // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, PAMM, 11, 633–634 (2011), Graz, Austria, 2011. Special Issue: 82nd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM) / DOI 10.1002/pamm.201110306.

36. Кармазин, А.В. Определение параметров интерфейсной трещины в пакете упругих слоев / А.В. Кармазин, П.В. Сыромятников [и др.] // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XVI Междунар. конф. Ростов н/Д, 2012. Т. 1. С. 128–132.

37. Кармазин, А.В. Определение параметров интерфейсной трещины в многослойном упругом материале / А.В. Кармазин, П.В. Сыромятников [и др.] // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: материалы XXII Междунар. науч. школы им. С. А. Христиановича. Алушта, 2012. С. 141–143.

38. Никитин, Ю.Г. Оптимизация расчетов многослойных анизотропных композитов / Ю.Г. Никитин, П.В. Сыромятников [и др.] // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XVII Междунар. конф. Ростов н/Д, 2013. Т. 1. С. 112–115.

39. Диденко, А.В. Определение параметров внутренних полостей в упругом слое / А.В. Диденко, П.В. Сыромятников // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XVII Междунар. конф. Ростов н/Д, 2013. Т. 1. С. 46–49.

40. Kirillova, E. Wave Fields Generated by an Oscillating Mechanical Source Moving on the Surface of an Elastic Semibounded Medium / E. Kirillova, P. Syromyatnikov [et al.] // IC-SCCE – 6th International Conference from Scientific Computing to Computational Engineering – PROCEEDINGS, Athens, Greece, 2014, Vol. 2. P. 536–544.

41. Сыромятников, П.В. Осциллирующий источник, движущийся по поверхности полугораниченного упругого тела / П.В. Сыромятников, А.А. Васильченко [и др.] // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XVIII Междунар. конф. Ростов н/Д, 2016. Т. 2. С. 210–214.

Свидетельства об официальной регистрации программ для ЭВМ, патенты

42. Свидетельство об официальной регистрации № 2006614042 от 24.11.2006 «Программа расчета механических перемещений точек среды, возбуждаемых поверхностными гармоническими нагрузками в пакете упругих анизотропных слоев, содержащих систему трещин» / Сыромятников П.В., Ратнер С.В., Зарецкая М.В., Ломакина Л.В.

43. Свидетельство об официальной регистрации № 2006614043 от 24.11.2006 «Программа расчета смещений частиц упругой слоистой анизотропной среды, содержащей систему жестких включений, при возбуждении сейсмических волн внутренними источниками» / Сыромятников П.В., Ратнер С.В., Зарецкая М.В., Ломакина Л.В.

44. Свидетельство об официальной регистрации № 2007610220 от 11.01.2007 «Программа расчета перемещений в анизотропном композите» / Сыромятников П.В., Ратнер С.В., Зарецкая М.В., Ломакина Л.В.

45. Свидетельство об официальной регистрации № 2007610339 от 18.01.2007 «Программа расчета механических перемещений и напряжений, возбуждаемых гармоническими нагрузками на берегах трещин и границах жестких включений в пакете упругих анизотропных слоев» / Сыромятников П.В., Ратнер С.В., Зарецкая М.В., Ломакина Л.В., Павлова А.В.

46. Свидетельство об официальной регистрации № 2007611522 от 11.04.2007 «Программа расчета прохождения магнитотеллурических волн в зонах Земли с учетом ее сложного строения» / Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Ломакина Л.В., Ратнер С.В., Сыромятников П.В.

47. Свидетельство об официальной регистрации № 2007614198 от 03.10.2007 «Математическая модель расчета электрических полей в пакете электроупругих слоев, возбуждаемых внутренними электрическими гармоническими источниками» / Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Ломакина Л.В., Ратнер С.В., Сыромятников П.В.

48. Свидетельство об официальной регистрации № 2007614254 от 05.10.2007 «Математическая модель расчета температурных полей в пакете термоупругих слоев, содержащих внутренние тепловые гармонические источники» / *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Ломакина Л.В., Ратнер С.В., Сыромятников П.В.*

49. Патент на полезную модель (Россия) № 72334 от 10.04.2008 «Комплекс для оценки сейсмической опасности и снижения ее негативных последствий» / *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Зарецкая М.В., Мухин А.С., Сыромятников П.В.*

50. Свидетельство об официальной регистрации № 2009611000 от 13.02.2009 «Расчет амплитуд волн релеевского типа, возбуждаемых поверхностным механическим источником в анизотропном полупространстве» / *Сыромятников П.В., Бабешко О.М., Ломакина Л.В.*

51. Свидетельство об официальной регистрации № 2009611060 от 17.02.2009 «Расчет амплитуд волн, возбуждаемых поверхностным механическим источником в анизотропном слое» / *Сыромятников П.В., Павлова А.В., Ломакина Л.В.*

52. Свидетельство об официальной регистрации № 2009611282 от 02.03.2009 «Расчет амплитуд объемных волн в анизотропном полупространстве, возбуждаемых поверхностным механическим источником» / *Сыромятников П.В., Ратнер С.В., Зарецкая М.В., Ломакина Л.В.*

53. Свидетельство о государственной регистрации № 2010615927 от 10.09.2010 «Расчет возмущений в упругом изотропном слое, вызванных поверхностным источником напряжений, движущимся с постоянной досейсмической скоростью» / *Бабешко В. А., Ломакина Л. В., Сыромятников П. В.*

54. Свидетельство о государственной регистрации № 2010615928 от 10.09.2010 «Решение первой и второй внутренней краевой задачи для уравнения эллиптического типа в круге методом дифференциальной факторизации» / *Бабешко В. А., Ломакина Л. В., Сыромятников П. В.*

55. Свидетельство о государственной регистрации № 2011617374 от 16.09.2011 «Программа расчета полубесконечной трещины нормального отрыва, параллельной границе упругого изотропного полупространства» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

56. Свидетельство о государственной регистрации № 2011617240 от 21.09.2011 «Программа расчета волн Лэмба в изотропном слое, возбуждаемым поверхностным гармоническим источником» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

57. Свидетельство о государственной регистрации № 2011617239 от 16.09.2011 «Программа расчета зон дилатансии в изотропном упругом полупространстве, вызываемых заглубленным или поверхностным сосредоточенным вектором нагрузок» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

58. Свидетельство о государственной регистрации № 2012618257 от 12.09.2012 «Амплитудные и энергетические диаграммы направленности объ-

емных волн в изотропном полупространстве, покрытым слоем жидкости, вызываемых внутренним сосредоточенным гармоническим вектором нагрузок» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

59. Свидетельство о государственной регистрации № 2012618256 от 12.09.2012 «Расчет зон дилатансии в изотропном упругом слое, порождаемых осесимметричными заглубленными этажно расположенными нагрузками распорного или сдвигового типа» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

60. Свидетельство о государственной регистрации № 2012618260 от 12.09.2012 «Расчет волновых полей Релея-Лэмба в ближней зоне ортотропного слоя, вызываемых поверхностной механической гармонической нагрузкой» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

61. Свидетельство о государственной регистрации № 2012618259 от 12.09.2012 «Расчет пространственных асимптотик упругих и электроупругих волновых полей Релея-Лэмба в пьезоэлектрическом слое в дальней от источника зоне, возбуждаемых поверхностными гармоническими механическими и электрическими источниками» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

62. Свидетельство о государственной регистрации № 2013619988 от 24.09.2013 «Расчет пространственных возмущений упругого изотропного слоя, вызываемых осциллирующим и движущимся с постоянной дозвуковой или сверхзвуковой скоростью поверхностным источником напряжений» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

63. Свидетельство о государственной регистрации № 2013618832 от 04.10.2013 «Решение методом фиктивного поглощения модельного интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разностным ядром, с правой частью специального вида» / *Бабешко В.А., Диденко А.В., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

64. Свидетельство о государственной регистрации № 2014661555 от 30.10.14 «Расчет амплитудно-частотных характеристик поверхностного сверхзвукового гармонического источника для изотропной упругой полуплоскости и полосы» / *Бабешко В.А., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

65. Свидетельство о государственной регистрации № 2015611460 от 29.01.2015 «Расчет пространственных и частотных характеристик возмущений от поверхностного сверхзвукового осциллирующего источника для упругого изотропного слоя и полупространства» / *Бабешко В.А., Ломакина Л.В., Сыромятников П.В.*

66. Свидетельство о государственной регистрации № 2014660326 от 06.10.14 «Расчет амплитуд вертикальных колебаний двух контактирующих полугограниченных пластин на упругом слое под действием гармонической поверхностной нагрузки» / *Колесников М.Н., Сыромятников П.В., Телятников И.С.*

СЫРОМЯТНИКОВ ПАВЕЛ ВИКТОРОВИЧ

**ДИНАМИКА СЛОЖНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ
ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук