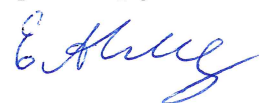


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»

На правах рукописи



Евдокимов Александр Александрович

**ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН
В ПРОТЯЖЕННЫХ СМАРТ- СТРУКТУРАХ
С АКТИВНЫМИ ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Глушков Е. В.

Краснодар

2018

Оглавление

Введение	5
1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОТЯЖЕННЫХ СТРУКТУР С АКТИВНЫМИ ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ И ЛОКАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ	21
§1.1. Уравнения, начальные и граничные условия динамической теории упругости	21
§1.2. Краевые задачи теории линейной электроупругости	28
§1.2.1 Уравнения, начальные и граничные условия	29
§1.2.2 Краевые задачи для полосового и кругового пьезоактуатора	35
§1.3. Краевые задачи для упругих волноводов с поверхностными пьезоактивными элементами	40
§1.4. Краевые задачи для акустических волноводов	43
2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	46
§2.1. Матрица Грина	46
§2.2. Нормальные моды	50
§2.3. Дисперсионные уравнения	52
§2.4. Энергетические характеристики бегущих волн	60

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УПРУГОЙ ПОДЛОЖКОЙ	62
§3.1. Интегро-дифференциальные уравнения	62
§3.1.1 Вывод интегрального уравнения Винера-Хопфа в слу- чае плоской задачи	63
§3.1.2 Вывод интегрального уравнения Винера-Хопфа в слу- чае осесимметричных колебаний	64
§3.2. Метод Галёркина	65
§3.3. Оценка границ применимости на основе сопоставления с дру- гими моделями	68
§3.4. Расчет оптимальных параметров связанной системы актуатор- упругая подложка	74
4. ГИБРИДНАЯ ЧИСЛЕННО- АНАЛИТИЧЕСКАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СРЕД С ЛОКАЛЬ- НЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ	80
§4.1. Общая схема решения в скалярном случае	81
§4.2. Гибридная численно-аналитическая схема решения краевых задач линейной теории упругости	87
§4.3. Верификации и численные примеры	90
5. ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ЛОКАЛЬНЫХ НЕОД- НОРОДНОСТЯХ	96
§5.1. Коэффициент прохождения и резонансные частоты рассеяния	96
§5.1.1 Волноводы со внутренней полостью	97
§5.1.2 Волноводы с упругим включением	100
§5.1.3 Волноводы с рельефной поверхностью	103

§5.2. Волноводы со множественными препятствиями	107
§5.2.1 Формирование зон прохождения-запирания	108
§5.2.2 Модификация гибридной численно-аналитической схе- мы	112
6. МОДИФИКАЦИЯ ГИБРИДНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ АНАЛИ- ЗА РАСПРОСТРАНЕНИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН ВО ВСТРО- ЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ	117
§6.1. Общее описание встроенных волноводов	117
§6.2. Реализация гибридной схемы в случае акустического волновода	120
§6.3. Обобщение на упругий случай	123
Заключение	125

Введение

В настоящее время во многих областях науки и техники все большую популярность приобретают системы, использующие управляемые поверхностные или объемные волны, возбуждаемые и регистрируемые поверхностными или встроенными в волновод активными пьезосенсорами (смарт-структуры [128]). В качестве типичных примеров смарт-структур можно указать снабженные сетью пьезоактивных элементов оболочки аэрокосмических изделий, системы активного виброгашения или системы волнового мониторинга, разрабатываемые для неразрушающего контроля текущего состояния и предупреждения возникновения скрытых дефектов в протяженных элементах конструкций (нефтепроводы, газопроводы, стенки реакторов и химических емкостей и др.; рисунок 1.1). Использование в подобных системах пьезоактивных элементов, выполненных в виде тонких и гибких накладок обеспечивает слабое влияние на механические свойства исследуемого объекта. При этом сами пьезокерамические актуаторы обладают относительно небольшой стоимостью.



Рис. 1.1: Примеры смарт-структур и систем ультразвукового волнового мониторинга

Бегущие волны, возбуждаемые в алюминиевых, стальных или композитных тонкостенных конструкциях с помощью пьезоактуаторов (активных пьезосенсоров), выполненных в виде тонких и гибких накладок, распространяются на большие расстояния и взаимодействуют с неоднородностями любой природы, что позволяет выявлять скрытые дефекты. В настоящее время такая технология ультразвукового неразрушающего контроля выделилась в самостоятельное научно-техническое направление – волновой мониторинг состояния конструкций (Structural Health Monitoring – SHM) [83,84,127]. Одной из актуальных проблем SHM является выбор параметров проектируемых систем диагностики (несущие частоты, тип, размер и расстановка активных пьезоэлементов и т.п.), обеспечивающих максимальную эффективность зондирования элементов конструкций с конкретными физико-механическими свойствами (плотность, упругие модули, толщина пластины и др.). В целом разработка и оптимизация SHM систем и смарт-материалов и структур предполагает решение задач возбуждения, распространения и дифракции бегущих волн в упругих слоистых волноводах с локальными неоднородностями (рисунок 1.2).

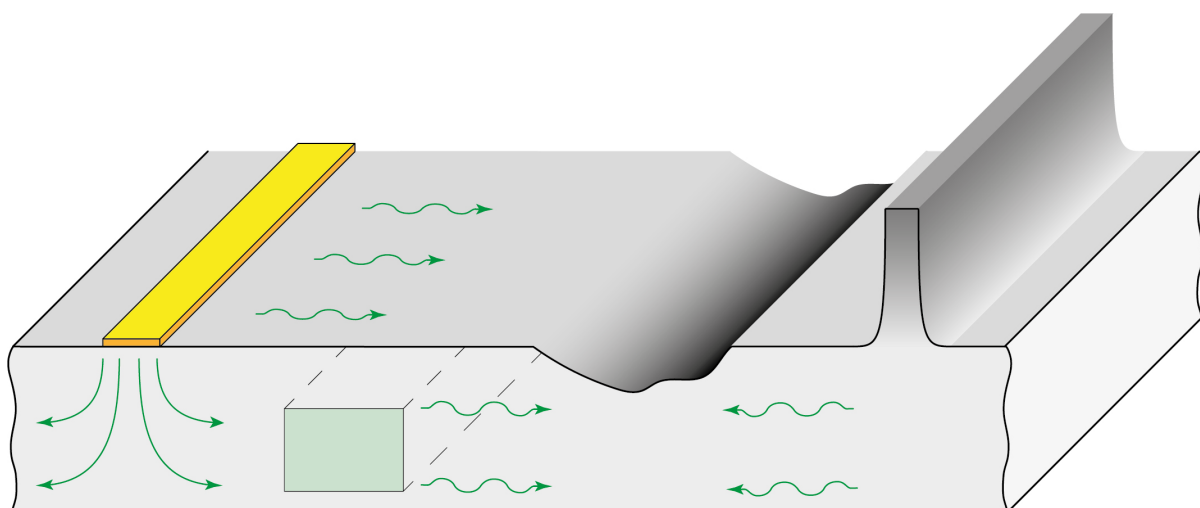


Рис. 1.2: Общий вид волновода с локальными неоднородностями

Исходя из сформулированных задач для SHM систем и смарт-материалов в диссертационном исследовании разрабатываются математические и компьютерные модели процессов возбуждения (тонкими и гибкими поверхностными пьезонакладками), распространения и дифракции бегущих волн на препятствиях (дефектах). Возникающие волновые поля в данных задачах описываются на основе интегрального подхода [6, 15, 97]. В рамках разработанных моделей проводится расчет оптимальных режимов работы полосового и кругового актуаторов и исследуются закономерности распределения волновой энергии как при возбуждении бегущих волн, так и при их дифракции на локальных препятствиях. Помимо упомянутых выше, полученные численные результаты представляют интерес для таких областей науки и техники, как сейсмология и сейсмостойкое строительство, виброзащита, машиностроение, мехатроника, акустоэлектроника и др.

Одной из первых задач, возникающих при оптимизации параметров активных смарт-структур, является оценка количества волновой энергии, отдаваемой пьезоактуатором в подложку и ее распределения между возбуждаемыми волнами различных типов. Примером подобных исследований является работа [41], в рамках которой, в приложении к проблемам виброакустического контроля, проанализировано распределение энергии точечного источника (касательная периодическая нагрузка) между бегущими волнами, возбуждаемыми в упругом слое, лежащем на жестко фиксированном основании. При рассмотрении размерных источников, например, в виде поверхностной нагрузки, заданной в полосе фиксированной полуширины a или в круговой области определенного радиуса a , на распределение энергии, обусловленное только свойствами подложки, накладывается дополнительная зависимость от частоты, связанная с размерами

источника, видом нагрузки и законом ее распределения в области приложения. Известно [84, 88, 127], что при изменении размера источника a может быть достигнуто полное гашение или, наоборот, максимизация амплитуды отдельных мод. Аналогичный эффект чередования максимумов и минимумов амплитуды имеет место и при варьировании частоты f при фиксированном значении a . Сочетания размера актуатора и центральной частоты, максимизирующие амплитуду зондирующего сигнала (обычно фундаментальной антисимметричной или симметричной моды A_0 или S_0), получили в SHM название "sweet spots", т.е. зоны (пятнышки) наилучшего возбуждения [83]. При выборе рабочих параметров проектируемых систем волнового мониторинга следует ориентироваться на эти пятнышки. Для этого необходимы адекватные математические и компьютерные модели процесса возбуждения бегущих волн пьезоактивными элементами.

Во многих используемых для этой цели моделях действие пьезоактуатора описывается некоторой нагрузкой, заданной в области контакта активного элемента с подложкой, или в виде набора сосредоточенных точечных сил, заданных на границах области контакта [83]. Подобные модели позволяют учитывать фактор, связанный с размерами источника, однако, они не учитывают реальное распределение контактных напряжений. Для относительно небольших размеров источника или/и значения центральной частоты распределение контактных напряжений не оказывает заметного влияния на расчетные значения энергетических характеристик. Однако, с ростом частоты или размеров источника расхождения между расчетными и реальными данными все более заметны.

Для учета распределения контактных напряжений необходимо решение связной контактной задачи о динамическом взаимодействии активно-

го элемента пьезоактуатора (гибкой пьезонакладки) с упругой подложкой. Решению подобных контактных задач посвящено немало количество работ [6–9, 11, 12, 45, 57–59, 110]. Численное решение такой задачи может быть реализовано с помощью современных конечно-элементных пакетов программ (ANSYS, Comsol, ACELAN и др.) [8, 9, 11, 57]. Например, в работе [57] применяется конечно-элементное моделирование для анализа накопления энергии в пьезоэлектрическом устройстве, выполненном в форме круглой пластины.

Один из способов построения решения задачи о динамическом взаимодействии активного пьезоактуатора с упругой подложкой был предложен в работах [16, 17, 87]. В рамках данной модели характеристики возникающих волновых полей рассчитываются на основе решения интегро-дифференциальных уравнений, к которым сводится исходная задача. Тем самым строго учитывается распределение контактных напряжений и сохраняются преимущества явного аналитического представления. В настоящей работе проводится обобщение данного подхода на случай круговых пьезоактуаторов, а также анализируется энергетическая эффективность пьезоактуаторов (полосового и кругового) и закономерности межмодового распределения энергии, поступающей от источника в упругий слой.

Наряду с задачами, возникающими при моделировании процессов возбуждения и распространения упругих волн, в диссертации также рассматриваются задачи дифракции возбуждаемых бегущих волн на локальных препятствиях различного вида (рельефные поверхности, трещины, объемные полости и упругие включения; рисунок 1.2). В связи со сложной геометрией таких волноводных структур, аналитическое решение краевых задач, описывающих их волновую динамику, в большинстве случаев не пред-

ставляется возможным. Поэтому для решения данного класса задач широкое распространение получили прямые численные методы, базирующиеся на сеточной аппроксимации, – метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР). Несмотря на их универсальность, простоту в реализации и широкую доступность в виде коммерческих программных продуктов, существует немало примеров задач, для которых прямое применение МКР или МКЭ оказывается неэффективным или даже невозможным. В частности, данный класс методов плохо приспособлен для моделирования волновых процессов. Основные трудности связаны здесь с необходимостью хранения больших объемов данных в случае трехмерных задач и/или протяженных волноводных структур, измельчения сетки при приближении к геометрическим неоднородностям, а также со снижением точности решения при резкой контрастности физических свойств материала. Для решения данных проблем в последнее время было разработано несколько новых подходов.

Одним из таких методов-модификаций МКР, успешно применяемым для моделирования нестационарных волновых полей в упругих средах, является метод моделирования локального взаимодействия (LISA – Local Interaction Simulation Approach) [122, 124]. В рамках данного подхода перемещения в узлах конечно-разностной сетки выражаются через перемещения всех узловых точек, соседних с данной, посредством специальной линейной формы, учитывающей непрерывность расчетных физических величин. К преимуществам LISA можно отнести удобство реализации данного алгоритма в распределенных и параллельных вычислениях, в том числе и с использованием современных графических ускорителей.

Не менее активно развиваются и специальные модификации МКЭ.

Например, метод конечных элементов высокого порядка аппроксимации [75, 111, 123], основанный на применении интерполяционных полиномов высоких порядков и специальном выборе узлов интегрирования, что приводит к существенному уменьшению необходимого количества элементов и диагональной структуре матрицы масс. Или методы спектральных [101] и полуманалитических конечных элементов [118], в которых конечно-элементная дискретизация осуществляется только по толщине волновода, а по горизонтальным осям применяется быстрое преобразование Фурье.

С начала 1990-х годов активно развиваются бессеточные методы. Они отличаются от МКЭ/МКР тем, что не требуют построения сетки, а значит и стыковки базисных элементов, заданных в её ячейках. В научной литературе можно найти несколько десятков различных бессеточных методов, отличающихся друг от друга алгоритмами интерполяции решения и расстановки узлов, на которых строится решение, и использованием различных базисных функций (например, Meshless local Petrov-Galerkin, Method of Finite Spheres, [82, 106]).

Еще одна альтернатива МКЭ – метод граничных элементов (МГЭ) и его многочисленные модификации, призванные уменьшить вычислительные затраты (например, [7, 12, 116, 117]). Решение, построенное с помощью МГЭ, представляется в интегральной форме через функции Грина. Главное отличие от перечисленных выше методов заключается в том, что дискретизируется не весь рассматриваемый объем, а только его граница. Соответственно, построение и перестроение сеток оказывается намного проще и быстрее, чем для МКЭ. Кроме того, для неограниченных областей и при анализе концентраторов напряжений и сингулярностей МГЭ обеспечивает большую точность и эффективность, чем МКЭ и МКР. К недостаткам

МГЭ относится сложность его применения при стыковке значительного числа разнородных областей, а также сложности построения матрицы фундаментальных решений для анизотропного материала [138].

Вариантом МГЭ является метод слоистых элементов (МСЭ) в приложении к слоистым структурам [19, 98]. В отличие от классического МГЭ, использующего в качестве ядер соответствующих интегральных представлений фундаментальные решения для однородного упругого пространства, слоистые элементы, являющиеся фундаментальными решениями для рассматриваемой многослойной структуры в целом, автоматически удовлетворяют граничным условиям на всех ее внешних и внутренних плоскопараллельных границах.

Отличительной особенностью описанных выше подходов, за исключением МГЭ и МСЭ, является их применимость для расчета волновой динамики только тел конечных размеров. Поэтому при рассмотрении бесконечных волноводов необходимо предварительно тем или иным способом выделить из них ограниченную расчетную область, для которой можно использовать стандартный МКЭ или МКР пакет. Для корректного выделения ограниченной области используются различные подходы, такие как вывод специальных поглощающих граничных условий [85], введение идеально согласованного поглощающего слоя (Perfect Matched Layer – PML) [72, 131] или поглощающих слоев с возрастающим демпфированием [130], уже реализованные в большинстве современных конечно-элементных пакетов.

Наряду с использованием одного конкретного метода для моделирования волновой динамики большой интерес представляет комбинирование нескольких подходов (гибридные схемы). Основная идея гибридных схем состоит в существенном повышении точности и снижении вычислитель-

ных затрат за счет использования явных аналитических представлений на прямолинейных участках волновода с тем, чтобы затратная сеточная аппроксимация применялась только в ограниченных областях с локальными неоднородностями, т.е. там где она необходима по существу ввиду отсутствия аналитических решений [66]. Аналогичный подход может быть использован и в случае неограниченной среды (не волновода) с локальной неоднородностью. Например, для неограниченных сред реализована схема, в которой расчет области конечных размеров ведется с использованием МКЭ, а поле в оставшейся безграничной среде аппроксимируется точечными источниками (фундаментальными решениями) или традиционными граничными элементами, удовлетворяющими условиям излучения на бесконечности. Сшивание получаемых решений осуществляется на основе интегрального принципа взаимности [137]. В случае задачи распространения упругих волн в слоистых материалах развиваются схемы, основанные на сшивании МКЭ и модальных разложений [105, 121]. Для моделирования взаимодействия пьезоактуатора с подложкой реализована гибридная схема, в рамках которой плоская деформация полосового пьезоактуатора моделируется с помощью МКЭ высокой степени точности, а динамическая реакция основания учитывается через решение интегрального уравнения для соответствующей контактной задачи [35, 64].

При исследовании распространения бегущих волн в волноводах с препятствиями самостоятельный интерес представляют резонансные эффекты, наблюдающиеся при дифракции. Начиная с работы Урсела [135], связавшего образование ловушечных мод (trapping modes) с наличием вещественных точек спектра на непрерывном спектре рассматриваемой краевой задачи, ведутся активные исследования спектральных свойств вол-

новодов различной природы с целью обнаружения и изучения явлений захвата энергии бегущей волны и ее локализации в окрестности препятствия [14, 91, 109, 114]. С этим явлением тесно связаны закономерности резкого блокирования бегущих волн, используемые во многих важных практических приложениях. В акустоэлектронике, например, при создании фильтров на поверхностных акустических волнах (ПАВ) используется эффект резкого экранирования сигналов системой периодических препятствий (бороздки, встречно-штырьевые контакты и др.) [51]. Аналогично, в фотонике используются фотонные кристаллы (диэлектрические структуры) с широкими диапазонами (полосами) непропускания (band gaps) [44, 77]. Схожие диапазоны запираения наблюдаются и при распространении акустических волн (фононов) в периодических композитных и кристаллических структурах (атомных фононных решетках) [136].

Наряду с традиционными задачами дифракции и рассеяния упругих волн на локализованных неоднородностях большой интерес представляет случай, когда препятствие является протяженным и может само по себе рассматриваться как волновод, взаимодействующий с окружающей трехмерной средой (акустической или упругой; такие задачи называют иногда еще 2.5-мерными, а волноводы – погруженными или встроенными) [67, 73, 80, 119]. Примерами таких задач могут служить ультразвуковой неразрушающий контроль сварных соединений или ребер жесткости (стрингеров), волновая диагностика заглубленных трубопроводов, контроль состояния рельсового полотна на железнодорожном транспорте, генерация сейсмоакустических бегущих волн в скважине для вибровоздействия на пласт с целью увеличения его промысловой отдачи и т.п. Интерес представляет изучение дисперсионных характеристик и собственных форм бегущих волн

в таких погруженных волноводных системах с учетом сложной геометрии их поперечного сечения и наличия вытекающих волн, уносящих энергию во внешнюю среду.

Здесь в целом применимы описанные выше методы, но, в то же время, имеются некоторые особенности их использования. В частности, у волновода с искусственно ограниченным поперечным сечением, появляется счетный набор вещественных собственных частот и собственных форм. Для исходного погруженного волновода с безграничным поперечным сечением большинство из них являются излишними (паразитными). Выбор же из них нужных представляет собой трудоемкую задачу и производится, фактически, вручную [73]. Здесь также перспективно использование гибридных схем, сочетающих сеточную аппроксимацию сечения волновода и гранично-элементное моделирование окружающей среды. Примеры успешной реализации такого подхода включают расчет дисперсионных кривых упругих волноводов произвольного сечения, погруженных в жидкость [119], а также моделирование нестационарных волновых полей, возникающих в стратифицированном упругом полупространстве, содержащем круговой туннель [80].

Целью диссертационной работы является создание эффективных математических и компьютерных моделей, а также исследование на их основе процессов возбуждения (пьезонакладками), распространения и дифракции упругих волн в волноводах с локальными неоднородностями (препятствиями, дефектами).

Для достижения поставленной цели решены следующие **задачи**:

1. Разработаны и реализованы в виде пакета программ эффективные методы решения краевых задач о динамическом взаимодействии полосо-

вого и кругового пьезоактуатора с упругим слоем.

2. Проведено исследование границ применимости традиционных инженерных (упрощенных) моделей пьезоактуатора и разработанной связанной модели, строго учитывающей взаимное влияние деформации пьезонакладки и упругой подложки.
3. Установлены оптимальные сочетания центральной частоты и размера пьезоактуатора, максимизирующие амплитуду зондирующего сигнала.
4. Разработаны математические и компьютерные модели процессов распространения и дифракции волн в слоистых средах с локальными неоднородностями на основе локально-глобальных гибридных численно-аналитических схем.
5. Исследованы резонансные эффекты в волноводах с локальными неоднородностями различной природы.
6. Предложена модификация численно-аналитической гибридной схемы для погруженных и встроенных волноводов произвольного сечения.

Диссертационная работа общим объемом 146 страниц имеет следующую структуру: введение, шесть глав основной части, заключение и список литературы, включающий 138 источников. Работа содержит 46 рисунков.

В **первой главе** диссертации в рамках линейной теории упругости формулируются динамические краевые задачи для упругих и пьезоупругих тел. Дается постановка линейных краевых задач для акустических сред. Приводится описание математических моделей пьезоактуаторов, используемых в дальнейшем.

Вторая глава посвящена описанию интегрального подхода, который используется для решения рассматриваемых краевых задач динамической теории упругости. Приводятся различные представления решения сформулированных краевых задач, как в интегральной форме, так и в виде суммы нормальных мод. Подробно описаны дисперсионные свойства и приведены основные формулы для вычисления энергетических характеристик возбуждаемых нормальных мод.

В **третьей главе** представлены основные методы решения связанных краевых задач о динамическом взаимодействии пьезонакладки и упругого слоя, которые сводятся к решению интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений и смещений. Проводится оценка границ применимости рассматриваемой модели пьезоактуатор - упругая подложка на основе сопоставления с другими моделями. В рамках разработанной связанной модели проводится расчет оптимальных параметров системы актуатор-слой.

В **четвертой главе** разрабатывается гибридная численно-аналитическая схема решения задач дифракции. Схема подробно описывается на примере скалярной модельной задачи для акустического волновода, а затем обобщается на случай упругих слоистых структур с локальными неоднородностями. Верификация предложенной схемы осуществляется на основе сопоставления численных результатов с результатами других моделей.

Пятая глава посвящена изучению дифракции упругих волн на препятствиях различного вида (эллиптическая полость, прямоугольная выемка, упругие включения и другие). Определяются комплексные резонансные частоты рассеяния. Исследуются зоны прохождения-запираания для системы последовательно расположенных упругих включений, при этом

проводится модификация гибридной численно-аналитической схемы для подобных случаев.

В **шестой главе** рассматриваются краевые задачи для встроженных (погруженных) упругих или акустических волноводов (2.5-мерные задачи). Приводится обзор существующих подходов к решению данных задач. С помощью преобразования Фурье вдоль оси волновода исходная трехмерная задача сводится к решению плоской задачи для поперечного сечения исходного объекта в рамках гибридной схемы. В качестве примера приводятся результаты расчета дисперсионных характеристик вытекающих мод для модельной задачи и проводится их тестовое сопоставление с известными результатами других авторов.

На защиту выносятся:

1. Математическая модель, описывающая динамическое взаимодействие тонких и гибких пьезоактуаторов с упругим волноводом.
2. Численные методы решения краевых задач о связном динамическом взаимодействии полосовых и круговых пьезонакладок с упругим слоем.
3. Результаты расчета оптимальных параметров связной системы пьезоактуатор-упругая подложка.
4. Численно-аналитические методы решения краевых задач для сред с локальными неоднородностями.
5. Результаты численного исследования резонансных эффектов в средах с одиночными или множественными препятствиями, включающие в себя определение резонансных частот рассеяния и зон прохождения-запирания.

Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертации, опубликованы в работах [3, 18, 26–30, 37–40, 86, 95] и докладывались на следующих конференциях: The 13th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics (University of Technology, Vienna, Austria, 2017) [99], International Congress on Ultrasonics (Metz, France, 2015) [86], International Conference on "Physics and Mechanics of new Materials and their Applications" (г. Азов, 2015) [95], XVII и XVIII международные конференции "Современные проблемы механики сплошной среды" (г. Ростов-на-Дону, 2014 и 2016) [27, 30], XX Зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, 2017) [28], XXI международный симпозиум "Динамические и технологические проблемы механики конструкция и сплошных сред" имени А.Г. Горшкова (г. Вятчи, 2015) [20], Научная конференция "Проблемы прочности, динамики и ресурса" (г. Нижний Новгород, 2014), Международная конференция "Days on diffraction 2014" (г. Санкт-Петербург, 2014) [93], VII Всероссийская (с международным участием) конференция по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 2013) [18], XII, XIII, XIV и XV объединенные научные конференции студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики "Прикладная математика XXI века" (г. Краснодар, 2012-2015) [3, 37, 39, 40]; а также на научных семинарах Института математики механики и информатики Кубанского государственного университета.

Диссертационная работа проводилась в рамках выполнения проектов РФФИ 12-01-00320а, 13-01-96520, 14-08-003-370а, МОЛ-А-2014 14-01-31236, 13-01-96516, 16-41-230744 р а, 16-41-230769 р а; при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (шифры проектов 1.2737.2011, 1.189.2014/К), стипендий от Правительства (2015-2016)

и Президента Российской Федерации (2016-2018), администрации Краснодарского края (2015-2018) и фонда поддержки науки, культуры, образования и здравоохранения О. Дерипаска "Вольное дело"(2012-2014).

ГЛАВА 1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОТЯЖЕННЫХ СТРУКТУР С АКТИВНЫМИ ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ И ЛОКАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

§1.1. Уравнения, начальные и граничные условия динамической теории упругости

Рассматривается упругое тело (протяженный волновод, рисунок 1.2), занимающее в начальный момент времени объем V , ограниченный поверхностью S . Положение точек тела описывается декартовыми координатами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. К телу прикладываются поверхностные и массовые нагрузки, под действием которых возникают смещения, характеризуемые вектор-функцией $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, непрерывно зависящей от координат \mathbf{x} и времени t . Механическое состояние тела описывается тензором деформаций ε_{ij} и тензором напряжений σ_{ij} [60, 62, 63].

В линейной теории упругости перемещения, деформации и напряжения связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.2)$$

и геометрическими соотношениями Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \quad (1.3)$$

Здесь $c_{ijkl}(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ – модули упругости и плотность; $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1, F_2, F_3)^T$ – вектор-функция, характеризующая массовые силы. Традиционно, в тен-

зорной записи предполагается суммирование по одинаковым индексам, а производная по координате обозначается соответствующим индексом через запятую: $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

В дальнейшем используются также традиционные обозначения координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$, вектора смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_x, u_y, u_z)^T$, компонент тензоров деформаций $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \dots$ и напряжений σ_x, τ_{xy} и т.п.

В случае изотропного материала, свойства которого не зависят от направления, обобщенный закон Гука (1.2) принимает вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.4)$$

где λ, μ – константы Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера, $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – относительное объемное расширение [50].

Исходя из уравнений движения (1.1) и соотношений (1.3), (1.4) для однородной изотропной среды, получаем известные уравнения Навье-Ламе относительно смещений \mathbf{u} :

$$\mathcal{L}\mathbf{u} + \mathbf{F} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.5)$$

где $\mathcal{L}\mathbf{u} \equiv (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}$ – дифференциальный оператор Ламе. В дальнейшем при постановке краевых задач $\mathbf{F} = 0$, т.е. предполагается отсутствие внешних объемных сил.

Вектор напряжений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$, возникающих на элементарной площадке с нормалью $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$, выражается через компоненты тензора напряжений в следующем виде

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.6)$$

С учетом соотношений (1.4) вектор напряжений для изотропного случая выражается через смещения

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}\mathbf{u} \equiv \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}). \quad (1.7)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}\mathbf{u}$ – линейный дифференциальный оператор, называемый оператором напряжений.

Возмущения, вызванные, например, приложенной поверхностной нагрузкой, распространяются по всему объёму тела V не мгновенно, а с некоторой конечной скоростью по вполне определенным законам. Такой процесс распространения возмущений называется распространением упругих волн. В дальнейшем широко используются такие понятия, как амплитуда и фаза волны, волновой фронт, фазовые и групповые скорости волны и некоторые другие. Определения данных понятий хорошо известны [1, 10, 13, 36, 46].

В настоящей работе в качестве волновода, как правило рассматривается упругий изотропный слой или пакет слоев. Для определенности считаем, что его плоскопараллельные границы – горизонтальны, а координатная плоскость $z = 0$ совпадает с верхней границей слоя толщины h . До начального момента времени $t = 0$ предполагается, что точки слоя находятся в покое:

$$\mathbf{u}\Big|_{t \leq 0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}\Big|_{t \leq 0} = 0. \quad (1.8)$$

Начиная с момента $t = 0$, к слою прикладываются поверхностные силы в некоторой ограниченной области Ω , порождающие колебания тела V . На верхней границе слоя $z = 0$ рассматриваются условия двух видов

$$\boldsymbol{\tau}\Big|_{z=0} = \mathbf{q} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{u}\Big|_{\mathbf{x} \in \Omega} = \mathbf{p}, \\ \boldsymbol{\tau}\Big|_{\mathbf{x} \notin \Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

На нижней границе рассматриваются или условия отсутствия напряжений,

или жесткой заделки, или контакта без трения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \Big|_{z=-h} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{u} \Big|_{z=-h} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \tau_{xz} \Big|_{z=-h} &= 0, \\ \tau_{yz} \Big|_{z=-h} &= 0, \\ u_z \Big|_{z=-h} &= 0. \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вектор-функции \mathbf{p} и \mathbf{q} предполагаются заданными в области Ω , а вне Ω считаются тождественно равными нулю. Для постановки корректной краевой задачи необходимо и достаточно использовать по одному из граничных условий (1.9) и (1.10).

Важным дополнительным условием является принцип причинности, а именно, в среде должны отсутствовать колебания вне области ограниченной переднем фронтом волнового поля, идущего от источника.

Большая часть данной работы посвящена изучению установившихся гармонических колебаний, возникающих при синусоидальных колебаниях частиц среды. При данном типе колебаний зависимость от времени имеет вид $\cos(\theta(x, y, z) - \omega t)$, где ω – круговая частота, θ – сдвиг фазы. В таком случае оказывается удобным перейти к комплексной форме записи. Обозначим одну из компонент вектора смещений $u = v_1(\mathbf{x}) \cos(\theta - \omega t)$. Очевидно, что

$$u = v_1(\mathbf{x}) \operatorname{Re} \left[e^{i(\theta - \omega t)} \right] = \operatorname{Re} [v e^{-i\omega t}], \quad (1.11)$$

где $v = v_1 e^{i\theta}$. Величина v называется комплексной амплитудой величины u . Аналогичным образом можно записать все компоненты тензора деформаций и напряжений, компонент вектора объемных и поверхностных сил. Таким образом, все линейные операции над данными величинами можно свести к операциям над их комплексными амплитудами. Откуда формируется следующая схема решения в случае установившихся гармонических колебаний:

1. Производится замена всех величин с гармонической зависимостью от времени в уравнениях и граничных условиях на их комплексные амплитуды, а дифференцирование по t заменяется множителем $-i\omega$.
2. Краевая задача решается относительно неизвестных комплексных амплитуд.
3. Полученные в результате решения комплексные амплитуды умножаются на $e^{-i\omega t}$, после чего берется вещественная часть получившегося выражения.

Данный подход удобен тем, что можно он позволяет уйти от временной зависимости в выкладках, а также дает возможность учитывать одновременно и амплитуду, и сдвиг фазы. В дальнейшем под \mathbf{u} , σ_{ij} , ε_{ij} , \mathbf{F} и т.д. понимаются комплексные амплитуды соответствующих величин в случае гармонических колебаний. Следует отметить, что данная замена справедлива исключительно для линейных операций над этими величинами. В случае нелинейных операций, следует вернуться к исходным обозначениям.

В случае установившихся гармонических колебаний уравнения Ламе (1.5) при условии отсутствия объемных сил \mathbf{F} принимают вид

$$\mathcal{L}\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0. \quad (1.12)$$

Граничные условия (1.9) и (1.10) с учетом описанных выше рассуждений не изменяются. В случае неограниченных тел (слой V) для установившихся гармонических колебаний требуется вводить дополнительные условия для выделения единственного решения. Одним из способов выделения данного решения является задание дополнительных условий на бесконечности в

форме принципов излучения. В рамках используемого в настоящей работе интегрального подхода Воровича-Бабешко [6, 15] традиционно применяются условия излучения, вытекающие из принципа предельного поглощения [55]. В качестве решения задачи \mathbf{u} для идеально-упругой среды принимается решение соответствующей задачи для вязкоупругой среды (среды с поглощением) \mathbf{u}_ε при стремлении вязкости к нулю: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$. Ввод вязкости приводит к появлению тормозящей объемной силы, пропорциональной скорости смещений частиц $-\varepsilon \partial \mathbf{u} / \partial t$. В случае установившихся гармонических колебаний в уравнениях (1.12) появляется дополнительное слагаемое $i\varepsilon \omega \mathbf{u}$. При этом вид уравнений остается прежним, если ввести обозначение $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon \omega / \rho$, $\text{Im } \omega_\varepsilon > 0$. Таким образом, решение, удовлетворяющее принципу предельного поглощения, можно рассматривать как решение уравнений (1.12) для комплексной частоты $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, $\omega_2 > 0$ при $\omega_2 \rightarrow 0$.

Решение нестационарной задачи (1.5), (1.8) - (1.10) относительно перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ может быть построено при помощи решения гармонической задачи (1.9) - (1.12) относительно комплексных амплитуд $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$. Для этого к уравнениям и граничным условиям нестационарной задачи применяются преобразование Фурье-Лапласа по t , что, учитывая начальные условия (1.8), сводит её к краевой задаче относительно комплексной амплитуды:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^\infty \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.13)$$

В силу свойства $u(x, -\omega) = u^*(x, \omega)$ (звездочкой здесь и далее обозначается комплексное сопряжение.), обратное преобразование Фурье сводит-

ся в данном случае к интегралу по вещественной полуоси:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.14)$$

Таким образом, решение гармонической задачи можно рассматривать как этап построения решения соответствующей нестационарной задачи, а представление (1.14) отражает принцип суперпозиции колебаний в линейных системах. Кроме того, при $\omega = 0$ уравнения (1.12) принимают вид аналогичных уравнений статики, а вещественная часть комплексной амплитуды $\operatorname{Re} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ – решение соответствующей задачи статики. Исходя из данных соображений основным объектом изучения диссертационной работы являются динамические задачи для установившихся гармонических колебаний, которые включают в себя задачи статики, а также позволяют получить решения соответствующих нестационарных задач.

При решении некоторых задач, рассматриваемых в данной работе, оказывается удобным перейти к цилиндрической системе координат. Связь между перемещениями и деформациями, заданными в декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и цилиндрической системе r, θ, z , определяется соотношениями вида [4, 49]:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z, \quad (1.15)$$

$$u_1 = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \quad u_2 = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta, \quad u_3 = u_z,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta, \\
\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta, \\
\sigma_{r\theta} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\
\sigma_{rz} &= \sigma_{13} \cos \theta + \sigma_{23} \sin \theta, \quad \sigma_{\theta z} = -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{33}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

В таком случае, для изотропной среды обобщенный закон Гука (1.4) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \\
\sigma_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{zz}, \\
\sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta}, \\
\sigma_{r\theta} &= 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\theta z} = 2\mu\varepsilon_{\theta z}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Уравнения движения (1.1) в цилиндрической системе координат, при условии отсутствия внешних объемных сил, принимают вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

§1.2. Краевые задачи теории линейной электроупругости

В рамках данного параграфа на основе общих уравнений теории линейной электроупругости выводятся уравнения движения для пьезоупругих накладок (рисунок 1.3). В §1.2.1 приводятся основные уравнения, начальные и граничные условия как для электрических, так и для упругих полей возникающих под действием внешних механических нагрузок или внешних электрических полей. Вводятся ограничения, связанные с классом симметрии для материала, используемого в пьезонакладке. Для электрического поля применяется квазистатическое приближение, а магнитное

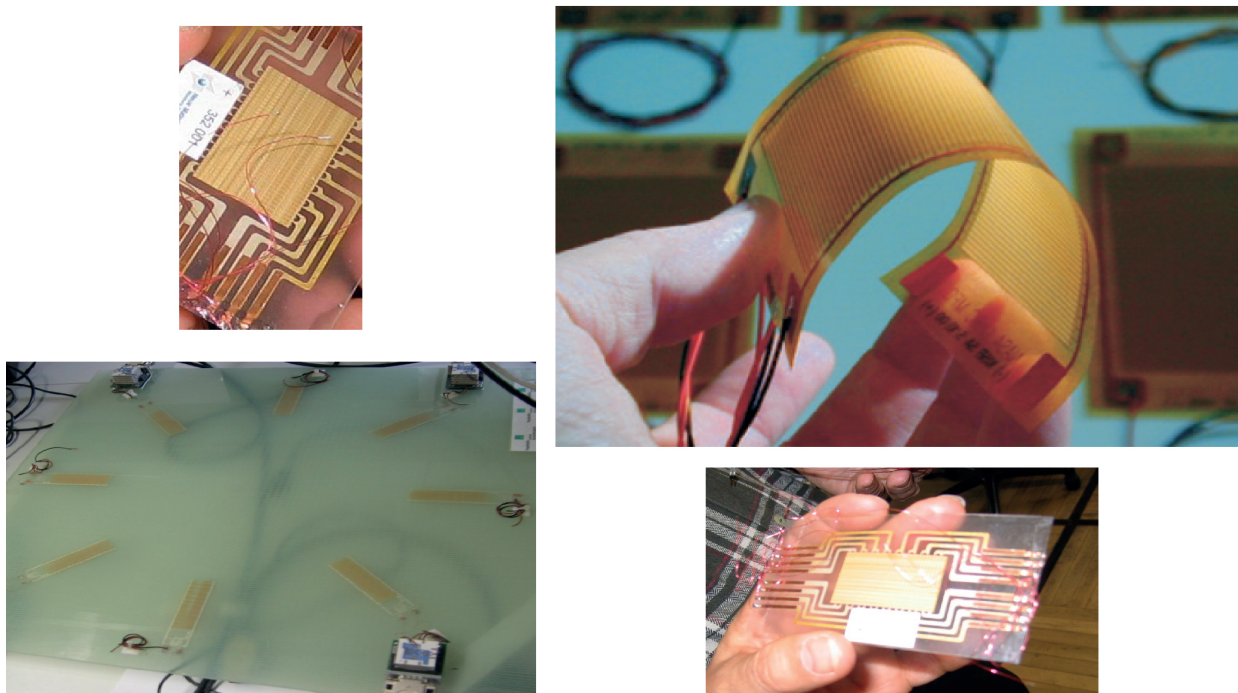


Рис. 1.3: Пример пьезоупругих накладок

поле отбрасывается.

В §1.2.2 проводится дальнейшее упрощение сформулированных ранее уравнений, граничных и начальных условий, исходя из предположений о толщине накладки, что позволяет отбросить некоторые соотношения закона Гука. Предположение о вертикальной направленности и постоянстве электрического поля внутри накладки позволяют существенно упростить соответствующие уравнения электростатики и свести связанные электромеханические задачи к механическим. Математическая модель строится для накладок выполненных в виде тонких гибких пленок.

§1.2.1 Уравнения, начальные и граничные условия

Под действием механических напряжений у некоторых диэлектриков возникает электрическая поляризация, т.е. между поверхностями деформируемого твердого тела появляется электрическое напряжение. Данная

поляризация пропорциональна механическим деформациям, а сам эффект поляризации называется прямым пьезоэлектрическим эффектом [74]. Возможна и обратная ситуация, когда под действием электрического поля в теле возникают механические деформации, подобный эффект называется обратным пьезоэлектрическим эффектом [53]. Для таких материалов, называемых пьезоэлектриками, существуют соотношения, связывающие его упругие и электромагнитные свойства [53]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - h_{ijm} D_m, \\ E_m &= -h_{ijm} \varepsilon_{ij} + \beta_{mk}^e D_k,\end{aligned}\tag{1.20}$$

где $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^T$ и $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)^T$ – вектора напряженности электрического поля и электрической индукции соответственно, c_{ijkl}^D – модули упругости при постоянной электрической индукции, h_{ijm} – тензор пьезоэлектрических констант и β_{mk}^e – диэлектрические константы при постоянных деформациях. В соотношениях (1.20) компоненты тензора напряжений σ_{ij} и вектора напряженности \mathbf{E} выражены через вектор электрической индукции \mathbf{D} и компоненты тензора деформаций ε_{ij} . В некоторых случаях удобнее пользоваться обратной связью, когда компоненты тензора деформаций и вектора электрической индукции выражены через тензор напряжений и вектор электрической напряженности:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k, \\ D_i &= d_{ijk} \sigma_{jk} + \epsilon_{ij}^\sigma E_j.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Здесь s_{ijkl}^E – коэффициенты упругой податливости при постоянной напряженности электрического поля, d_{kij} – пьезоэлектрические модули, ϵ_{ij}^σ – диэлектрические проницаемости при постоянных напряжениях.

Рассмотрим уравнения состояния (1.21) в матричном виде, при этом введем следующие обозначения для компонент тензора напряжений и де-

формации в соответствии с системой Фойгта [2]

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_6 = \tau_{xy}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_6 = \gamma_{xy}, \quad \varepsilon_5 = \gamma_{xz}, \\
\sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_4 = \gamma_{yz}, \\
\sigma_3 = \sigma_z, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z,
\end{aligned}$$

а также воспользуемся свойствами симметрии тензора упругих податливостей $s_{ijkl}^E = s_{\alpha\beta}^E$ (по паре первых и последних индексов) и тензора пьезоэлектрических модулей $d_{kij} = d_{k\alpha}$ (по двум последним), $i, j, k = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$. В этих обозначениях соотношения (1.21) принимают вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= s_{\alpha\beta}^E \sigma_\beta + d_{k\alpha} E_k, \\
D_i &= d_{i\alpha} \sigma_\alpha + \epsilon_{ij}^\sigma E_j.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Дальнейшее упрощение уравнений состояния (1.22) и сокращение числа независимых переменных осуществляется за счет выбора класса симметрии материала. В данной работе рассматриваются пьезоэлектрики принадлежащие к классу симметрии $6mm$ (поляризованная керамика PZT или сульфид кадмия). При этом в качестве оси поляризации здесь и далее выбирается ось z . Для таких материалов уравнения (1.22) принимают вид [53]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь $s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E)$.

Уравнения состояния пьезоэлектрической среды (1.22) описывают взаимодействие упругих и электрических полей. Для формирования корректной краевой задачи линейной теории электроупругости к соотношениям (1.22) необходимо добавить уравнения динамики, уравнения Максвелла, начальные и граничные условия на электрические и упругие поля.

Массовые силы электрической природы при формулировке уравнений движения для пьезоэлектриков обычно не учитываются. Такого рода силы возникают, например, в результате взаимодействия индуцированных токов с электромагнитным полем [53]. С учетом данного предположения получаем, что форма уравнений движения для пьезоупругой среды не отличается от аналогичных уравнений теории упругости

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}. \quad (1.23)$$

Здесь через $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ обозначен вектор смещений точек пьезоэлектрика.

Уравнения Максвелла при условии отсутствия тока проводимости и свободных электрических зарядов имеют вид [43, 53]

$$\gamma_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0, \quad \gamma_{ijk} \frac{\partial H_j}{\partial x_k} + \frac{\partial D_i}{\partial t} = 0; \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = 0, \quad (1.25)$$

где H_j, E_j – векторы напряженности магнитного и электрического полей, причем $B_i = \mu_0 H_i$ – вектор магнитной индукции, а μ_0 – магнитная проницаемость; γ_{ijk} – антисимметричный тензор с компонентами $\gamma_{123} = \gamma_{231} = \gamma_{321} = 1$, $\gamma_{132} = \gamma_{321} = \gamma_{213} = -1$, а остальные компоненты равны нулю.

Используя соотношения $B_i = \mu_0 H_i$, получим из (1.24) уравнение вида

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_k \partial x_k} = -\mu_0 \frac{\partial^2 D_i}{\partial t^2}. \quad (1.26)$$

Следует отметить, что скорость распространения упругих волн на порядки ниже, чем скорость распространения электромагнитных волн, следовательно, можно пренебречь магнитным полем и использовать квазистатическое приближение для электрического поля, т.е.

$$\gamma_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial B_i}{\partial t} \cong 0, \quad \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.27)$$

При этом возможно ввести скалярный потенциал φ для электрического поля E_j

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

В таком случае полная система уравнений для линейной пьезоупругой среды состоит из уравнений динамики (1.23), уравнений электростатики (1.27) и уравнений состояния (1.22).

Механические граничные условия для пьезоэлектрика, занимающего объем V и ограниченного поверхностью S , сводятся к обычным граничным условиям теории упругости

$$\sigma_{ij} n_j = q_i, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \quad v_i = p_i, \quad \mathbf{x} \in S_v. \quad (1.28)$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ – вектор единичной нормали к поверхности S , S_σ и S_v – части поверхности S , в которых заданы внешние поверхностные нагрузки q_i и смещения p_i .

Условия на смещения и скорости до начального момента времени $t = 0$ имеют такой же вид, как и рассмотренные ранее для упругого тела

$$\mathbf{v}\Big|_{t \leq 0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}\Big|_{t \leq 0} = 0. \quad (1.29)$$

При формулировании электрических граничных условий, в случае, если граница пьезоэлектрического тела граничит с внешней средой, необходимо учитывать непрерывность касательной составляющей вектора напряженности электрического поля E_i и нормальной составляющей вектора электрической индукции D_i на поверхности раздела двух сред при условии отсутствия свободных электрических зарядов на ней. Диэлектрическая проницаемость ϵ_0 вакуума или воздуха значительно меньше коэффициентов ϵ_{ij} для большинства диэлектриков, поэтому условия на непрерывность нормальной составляющей вектора D_i можно заменить приближенным равенством

$$D_i n_i = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (1.30)$$

Здесь $S = S_0 \cup S_\varphi$, где S_φ – часть поверхности, на которую нанесены электроды, а S_0 – граница раздела самого тела и внешней среды. Предположим далее, что электроды питаются генератором напряжений с выходным потенциалом $\pm V e^{-i\omega t}$, тогда электрические граничные условия на S_φ имеют вид

$$\varphi\Big|_{S_\varphi} = \pm V e^{-i\omega t}. \quad (1.31)$$

Если задан электрический ток в цепи, а значение потенциала на электродах неизвестно, то условия (1.31) записываются следующим образом:

$$\varphi\Big|_{S_\varphi} = \pm V(t),$$

Неизвестное значение потенциала $V(t)$ на электродах необходимо выразить через заданный ток $I(t)$ во внешней цепи. Для этого требуется решить

соответствующую задачу электроупругости [53], при этом условие связи между потенциалом $V(t)$ и током $I(t)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_\varphi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS = -I(t).$$

Таким образом, корректно поставленная краевая задача электроупругости состоит из уравнений движения (1.23), уравнений электростатики (1.27), уравнений состояния (1.22), механических начальных (1.29) и краевых (1.28) условий, а также из электрических краевых условий (1.30) и (1.31). Начальные электрические условия задавать не нужно, так как используется квазистатическое приближение.

§1.2.2 Краевые задачи для полосового и кругового пьезоактуатора

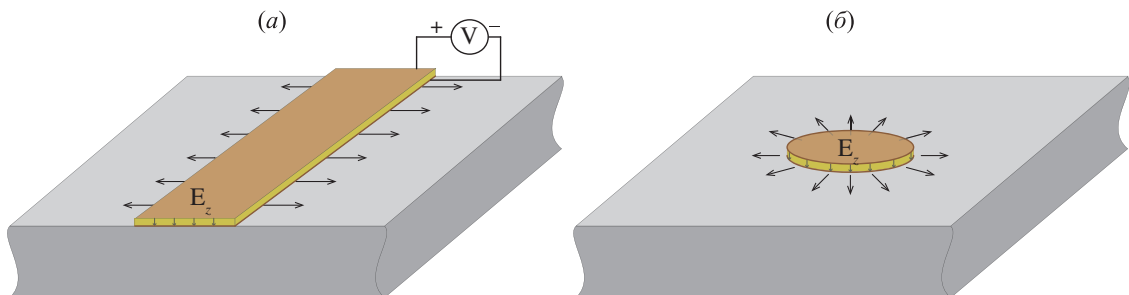


Рис. 1.4: Геометрия задач; (а) – для полосового пьезоактуатора, (б) – для кругового пьезоактуатора

В диссертационной работе рассматриваются активные пьзосенсоры, выполненные в виде тонких и гибких накладок (пластин), которые приклеиваются к поверхности упругого волновода (рисунок 1.4). Полосовой пьезоактуатор моделируется пьезоэлектрической пластиной толщины h_0 , приклеенной в области Ω к поверхности волновода. Электроды располагаются на верхней и нижней границе пластины, причем их влияние на меха-

нические свойства системы, состоящей из пьезоактуатора и упругой подложки, в дальнейшем не учитывается. На электроды подается напряжение с выходным потенциалом $V(t)$. Краевая задача для данной среды состоит из уравнений движения (1.23), уравнений электростатики (1.27), уравнений состояния (1.22), электрических граничных условий на электродах и торцах граничащих с внешней средой

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{z=0} &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \varphi \Big|_{z=h_0} &= V(t), & (x, y) \in \Omega, \\ D_1 n_1 + D_2 n_2 &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega, 0 \leq z \leq h_0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

механические условия на границах вне соприкосновения с волноводом предполагаются свободными от напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z &= 0, & (x, y) \in \Omega, z = h_0, \\ (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}) &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega, 0 \leq z \leq h_0, \end{aligned} \quad (1.33)$$

а в области соприкосновения с волноводом предполагается выполнение условий идеального контакта

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \Big|_{z=0} &= \mathbf{u} \Big|_{z=0}, & (x, y) \in \Omega, \\ \boldsymbol{\tau} \Big|_{z=0} &= -\mathbf{q}, & (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Кроме того задаются механические начальные условия (1.29). В силу того, что в правую часть условий (1.34) входят неизвестные смещения поверхности подложки u и неизвестные контактные напряжения q , полученную краевую задачу можно решить только совместно с краевой задачей для упругой среды (1.5), (1.8)-(1.10).

Рассматривая взаимодействие круговой пьезонакладки с упругой подложкой, удобно перейти к цилиндрической системе координат r, θ, z . Полная система уравнений для пьезоэлектрика, имеющего форму диска радиуса $r = a$ и толщины $h = h_0$, поляризованного в направлении оси z , с

аналогичным расположением электродов (рисунок 1.4 (б)) состоит из уравнений движения, которые по форме повторяют уравнения для упругого тела (1.19),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.35}$$

уравнений электростатики

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{D_r}{r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \tag{1.36}$$

и уравнения состояния

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= s_{11}^E \sigma_{rr} + s_{12}^E \sigma_{\theta\theta} + s_{13}^E \sigma_{zz} + d_{31} E_z, \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= s_{12}^E \sigma_{rr} + s_{11}^E \sigma_{\theta\theta} + s_{13}^E \sigma_{zz} + d_{31} E_z, \\
\varepsilon_{zz} &= s_{13}^E \sigma_{rr} + s_{13}^E \sigma_{\theta\theta} + s_{33}^E \sigma_{zz} + d_{31} E_z, \\
\varepsilon_{r\theta} &= s_{44}^E \sigma_{r\theta}, \quad \varepsilon_{rz} = s_{44}^E \sigma_{rz}, \quad \varepsilon_{\theta z} = s_{66}^E \sigma_{\theta z}, \\
D_r &= d_{15} \sigma_{rz} + \epsilon_{11}^\sigma E_r, \quad D_\theta = d_{15} \sigma_{\theta z} + \epsilon_{11}^\sigma E_\theta, \\
D_z &= d_{31} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + d_{33} \sigma_{zz} + \epsilon_{33}^\sigma E_z,
\end{aligned} \tag{1.37}$$

где компоненты тензора деформаций ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{zz} , $\varepsilon_{r\theta}$, ε_{rz} и $\varepsilon_{\theta z}$ связаны со смещениями v_r , v_θ , v_z через соотношения (1.16).

Механические и электрические граничные условия состоят из условий на свободных поверхностях

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} &= 0, \quad (r, \theta) \in \Omega, \quad z = h_0, \\
\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{rr} &= 0, \quad r = a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h_0, \\
D_r \Big|_{r=a} &= 0
\end{aligned} \tag{1.38}$$

и условий, описывающих контакт пьезоактуатора с упругой средой

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \Big|_{z=0} &= \mathbf{u} \Big|_{z=0}, & (r, \theta) \in \Omega, \\
\boldsymbol{\sigma} \Big|_{z=0} &= -\mathbf{q}, & (r, \theta) \in \Omega, \\
\varphi \Big|_{z=0} &= 0, & (r, \theta) \in \Omega, \\
\varphi \Big|_{z=h_0} &= V(t), & (r, \theta) \in \Omega.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Наконец, механические начальные условия

$$\mathbf{v} \Big|_{t \leq 0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} \Big|_{t \leq 0} = 0 \tag{1.40}$$

позволяют сформулировать полную краевую задачу для пьезоэлектрика в цилиндрической системе координат.

При построении краевой задачи (1.22), (1.23), (1.27), (1.32)-(1.34) и задачи (1.35) - (1.40) использовался ряд упрощений, тем не менее данные задачи довольно сложны для аналитического и численного анализа, поэтому целесообразно принять дополнительные допущения. На практике, в используемых устройствах, толщина накладки достаточно мала $h_0 \ll l$, где l – характерная длина объемных волн в пьезоэлектрике, поэтому в случае полосового пьезоактуатора предполагается, что компоненты тензора деформации ε_{xz} , ε_{yz} и ε_z малы по сравнению с остальными ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_z = 0$), а соответствующие им соотношения закона Гука отбрасываются. В силу гибкости накладки вертикальная компонента тензора напряжений σ_z мала по сравнению с компонентами σ_x , σ_y и τ_{xy} ($\sigma_z = 0$). Электрическое поле, возникающее между электродами при подаче на них напряжения, считается постоянным внутри накладки и направленным вертикально: $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)^T$, где $E_z = V/h_0$.

Сформулированные выше предположения позволяют существенно упростить краевую задачу (1.22), (1.23), (1.27), (1.32)-(1.34). В следующем параграфе приводится окончательный вид полученных уравнений и граничных

условий. С подробным выкладками для полосовых пьезоактуаторов можно ознакомиться в работах [31, 47]. В случае круговых пьезонакладок рассматривается осесимметричная задача, т.е. компоненты векторов смещений v_θ , напряженности E_θ и электрической индукции D_θ , как и все частные производные по θ считаются равными нулю. Такое допущение позволяет преобразовать уравнения движения (1.35) и электростатики (1.36) к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1.41}$$

Дополнительно предполагается, что $v_r = v_r(r)$. Из соотношений (1.16) – (1.18) получаем, что компоненты тензора напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ постоянны по всей толщине, а уравнения состояния (1.37) принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= s_{11}^E \sigma_{rr} + s_{12}^E \sigma_{\theta\theta} + d_{31} E_z, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= s_{12}^E \sigma_{rr} + s_{11}^E \sigma_{\theta\theta} + d_{31} E_z, \\ \varepsilon_{rz} &= s_{44}^E \sigma_{rz}, \\ D_r &= d_{15} \sigma_{rz}, \quad D_z = d_{31}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{33}^\sigma E_z.\end{aligned}$$

Выразим σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{rz} через ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ и ε_{rz} :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{Y_0}{1 - \nu_0^2} (\varepsilon_{rr} + \nu_0 \varepsilon_{\theta\theta} - e_0), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{Y_0}{1 - \nu_0^2} (\nu_0 \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - e_0), \\ \sigma_{rz} &= \frac{1}{s_{44}^E} \varepsilon_{rz}.\end{aligned}\tag{1.42}$$

Здесь $Y_0 = 1/s_{11}^E$ – модуль Юнга пьезоэлектрика, а $\nu_0 = -s_{12}^E/s_{11}^E$ – коэффициент Пуассона, $e_0 = (1 + \nu_0)d_{31}E_z$ – безразмерный параметр, характеризующий величину деформации наклейки, вызванную воздействием электрического поля.

Интегрируя по толщине накладки первое из уравнений (1.41), производя гармоническую замену и учитывая граничные механические условия на электродах (1.38), получим, что

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho\omega^2 v_r = \frac{1}{h_0} q_r, \quad (1.43)$$

где $q_r(r) = \sigma_{rz}(r, 0)$ – контактное напряжение. Второе уравнение (1.41) отбрасывается и заменяется условиями $u_z = v_z$ и $\sigma_{zz} = 0$, при $z = 0$. В этом случае изгибная жесткость пьзоэлектрика не учитывается, т.е. пьзонакладка моделируется тонкой пленкой.

Подставляя в уравнение (1.43) соотношения (1.42) получаем уравнение движения в перемещениях:

$$v_r'' + \frac{1}{r} v_r' - \frac{1}{r^2} v_r + \kappa_1^2 v_r = b_0 q_r, \quad (1.44)$$

здесь $\kappa_1^2 = \rho\omega^2(1 - \nu_0^2)/Y_0$, $b_0 = (1 - \nu_0^2)/(Y_0 h_0)$.

Граничные условия на торце накладки

$$v_r' + \nu_0 \frac{v_r}{r} = e_0, \quad \text{при } r = a \quad (1.45)$$

и условия в области контакта с упругим слоем

$$v_r = u_r, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \text{при } r \leq a, z = 0, \quad (1.46)$$

позволяют сформировать связанную краевую задачу, описывающую взаимодействие пьзоактуатора с упругой подложкой.

§1.3. Краевые задачи для упругих волноводов с поверхностными пьзоактивными элементами

В случае протяженной (полосовой) пьзонакладки предполагается, что она приклеена к волноводу в полосовой области $[-a, a] \times (-\infty, +\infty)$. В этом

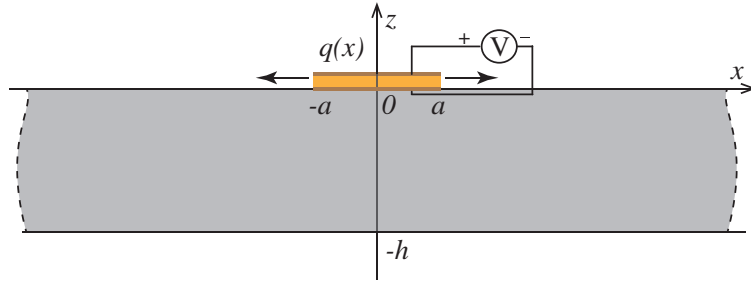


Рис. 1.5: Плоская постановка задачи

случае краевая задача (1.22), (1.23), (1.27), (1.32)-(1.34) и задача для слоя (1.5), (1.8)-(1.10), при принятии некоторых упрощающих предположений [47], разбивается на две: плоскую и антиплоскую.

Задача о плоской деформации системы имеет следующий вид (рисунок 1.5):

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}|_{z=0} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}|_{z=-h} = 0, \\ u_x|_{z=0} = v, \end{cases} \quad (1.47)$$

$$\begin{cases} v'' + \kappa^2 v = b_0 q, \\ v'|_{x=\pm a} = e_0, \quad e_0 = d_{31} E_z (1 + \nu_0), \end{cases} \quad (1.48)$$

где $\mathbf{u} = (u_x(x, z), u_z(x, z))^T$ – смещения точек слоя, а $v = v_x$ – компонента смещений точек полосовой накладкой в направлении оси Ox ; $\boldsymbol{\sigma} = (\tau_{xz}(x, z), \sigma_{zz}(x, z))^T$ – напряжения на горизонтальных поверхностях волновода; $q = q_x = \tau_{xz}$ – касательная компонента вектора напряжений под накладкой; $\kappa^2 = \omega^2 \rho_0 (1 - \nu_0^2) / Y_0$.

Антиплоская задача формулируется в следующем виде:

$$\begin{cases} \mu\Delta u_y + \rho\omega^2 u_y = 0, \\ \tau_{xy}\big|_{z=0} = q_y, \quad \tau_{xy}\big|_{z=-h} = 0, \\ u_y\big|_{z=0} = v_y, \\ \frac{Y_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d^2 v_y}{dx^2} + \rho_0\omega^2 v_y = \frac{1}{h_0} q_y, \\ \frac{dv_y}{dx}\big|_{x=\pm a} = 0. \end{cases} \quad (1.49)$$

Очевидно, что в силу отсутствия ненулевых условий на торцах накладки $x = \pm a$ решение задачи (1.49) – нулевое во всей рассматриваемой области ($u_y \equiv 0, v_y \equiv 0, q_y \equiv 0$).

Осесимметричная задача об установившихся гармонических колебаниях упругого изотропного слоя под действием кругового пьезоактуатора формулируется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho\omega^2 u_z = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}\big|_{z=0} = \begin{pmatrix} q_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}\big|_{z=-h} = 0, \\ u_r\big|_{z=0} = v, \\ \begin{cases} v'' + \frac{1}{r}v' - \frac{1}{r^2}v + \kappa_1^2 v = b_0 q_r, \\ v' + v\frac{\nu_0}{r}\big|_{r=a} = e_0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.50)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_r, u_z)^T$ и $v = v_r(r)$, как и ранее, смещения точек слоя и накладки в цилиндрической системе координат; компоненты тензора напряжений и деформаций связаны уравнениями (1.18); $q_r(r) = \sigma_{rz}$ – неизвестная касательная компонента тензора напряжений в области контакта с накладкой.

§1.4. Краевые задачи для акустических волноводов

В некоторых задачах, рассматриваемых в диссертационной работе, оказывается удобным первоначально рассматривать более простые уравнения и краевые задачи, нежели чем краевые задачи теории упругости. Для этого сформулируем краевые задачи из общей теории акустики.

Колебания акустической среды удовлетворяют полной системе уравнений гидродинамики. Система уравнений гидродинамики нелинейна, но поскольку акустика рассматривает малые колебания среды, то, принимая ряд упрощающих предположений, можно выписать приближенные линейные уравнения. В частности, уравнение Эйлера, при условии отсутствия внешних массовых сил, принимает вид [46]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (1.52)$$

где $\rho(\mathbf{x})$ – невозмущенная плотность среды, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – скорость частиц относительно неподвижной системы координат, $p(\mathbf{x}, t)$ – давление в среде.

Линеаризация уравнения неразрывности гидродинамики приводит к уравнению вида:

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.53)$$

Здесь $\beta = 1/(\rho c^2)$ – сжимаемость среды, c – скорость продольных волн в акустической среде (скорость звука).

Сформулированные уравнения (1.52) и (1.53) составляют полную систему общих линейных уравнений акустики для скорости частиц и давления. Любое частное решение данных уравнений описывает свободную волну в среде. Коэффициенты сжимаемости и невозмущенной плотности могут быть как константами для всех точек среды (тогда говорят, что акустическая среда однородна), так и непрерывно зависеть от координаты.

Предположим, что ρ и β не зависят от координат, продифференцируем уравнение (1.53) по времени, поменяем порядок дифференцирования по времени и по координате и подставим выражение для ускорения из уравнения (1.52), в итоге получим волновое уравнение для давления

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (1.54)$$

Если решение (1.54) для какой-либо задачи найдено, то скорости частиц определяются из соотношений вида [46]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \frac{1}{\rho} \nabla \int_{t_0}^t p dt. \quad (1.55)$$

Здесь \mathbf{v}_0 – распределение скоростей в начальный момент времени $t_0 = 0$.

Волновое уравнение справедливо для однородных сред и для некоторых неоднородных сред. Если только сжимаемость β зависит от координат, а плотность ρ не зависит, то волновое уравнение сохранит свою форму (1.54). При этом от координат будет зависеть величина c , которая потеряет смысл скорости звука в среде, т.к. в подобных средах волны при распространении не сохраняют свою форму.

Начальные условия формулируются в виде:

$$\mathbf{v} \Big|_{t \leq 0} = \mathbf{v}_0, \quad p \Big|_{t \leq 0} = p_0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (1.56)$$

где \mathbf{v}_0 , p_0 – начальные скорости и давления, а V – область пространства занимаемое акустической средой. В дальнейшем предположим, что $v_0 = 0$ и $p_0 = 0$.

Граничные условия для акустической среды, в рамках диссертационной работы, формулируются в виде:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{S_v} = q_S, \quad (1.57)$$

$$p|_{S_p} = p_S. \quad (1.58)$$

Здесь $S = S_v \cup S_p = \partial V$ – поверхность раздела акустической среды с другими телами, а \mathbf{n} – единичная внешняя нормаль к поверхности.

Если на какой-то части поверхности S_v (или на всей) выполняется равенство (1.57) при $q_s = 0$, то такая часть поверхности называется абсолютно жесткой. Граничные условия вида (1.58), где $p_S = 0$ возникают, например, на границе с вакуумом или газом, если давление газа не слишком велико. Поверхность S_p в таком случае называется абсолютно мягкой границей.

В случае установившихся гармонических колебаний $p(\mathbf{x}, t) = p_\omega(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ уравнение (1.54) принимает вид уравнения Гельмгольца

$$\Delta p_\omega + \kappa^2 p_\omega = 0, \quad \kappa^2 = (\omega/c)^2, \quad (1.59)$$

Комплексная амплитуда давления p_ω и давление p связаны соотношениями аналогичными (1.13) и (1.14). Для краткости, в случае, если это не приводит к путанице, комплексные амплитуды давления также будем обозначать как p .

Граничные условия (1.57) и (1.58) для установившихся гармонических колебаний по форме остаются прежними, где $\mathbf{v} = -1/\rho \nabla p$. Как и ранее, для упругих тел в случае установившихся гармонических колебаний к граничным условиям добавляются условия излучения, вытекающие из принципа предельного поглощения.

ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В данной главе приводится основной математический аппарат, применяемый для решения сформулированных в первой главе краевых задач динамической теории упругости. В рамках данного подхода решение строится в виде свертки матрицы Грина с заданными поверхностными нагрузками. Используя теоремы о свертке, исходный интеграл преобразуется в контурный интеграл, совпадающий почти всюду с вещественными осью параметра интегрирования, отклоняясь от неё при обходе полюсов матрицы Грина. Направление отклонения контура определяется, исходя из принципа предельного поглощения. Используя теорему Коши о вычетах и лемму Жордана, контурный интеграл может быть заменен суммой вычетов, отдельные слагаемые в которой являются нормальными модами.

§2.1. Матрица Грина

Геометрия краевой задачи для установившихся гармонических колебаний упругого изотропного слоя позволяет применить двойное преобразование Фурье по координатам x и y

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u} e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy$$

к уравнению (1.12) и граничным условиям (1.9), (1.10), где α_1 и α_2 – параметры преобразования по x и y соответственно. В результате уравнения исходной краевой задачи сводятся к системе однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а решение данной задачи

в Фурье-образах принимает вид [15, 23]

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, z) = K(\alpha_1, \alpha_2, z)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{q}]$ – преобразование Фурье от заданной в области Ω поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(x, y)$, а $K(\alpha_1, \alpha_2, z) = \mathcal{F}_{xy}[k(x, y, z)]$ – преобразование Фурье от матрицы Грина $k(x, y, z)$. Столбцы матрицы Грина соответствуют перемещениям \mathbf{u}_n , вызванным сосредоточенными поверхностными нагрузками $\boldsymbol{\sigma}_n = \delta(x, y, z)\mathbf{e}_n$, $n = 1, 2, 3$, (\mathbf{e}_n – орты) и удовлетворяют всем условиям поставленной задачи на границах и на бесконечности.

Применяя обратное преобразование Фурье к выражению (2.1) по параметрам α_1, α_2 получим интегральное представление решения исходной задачи:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1x + \alpha_2y)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.2)$$

или в виде свертки матрицы Грина k и вектор-функции нагрузки \mathbf{q}

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \iint_{\Omega} k(x - \xi, y - \zeta, z)\mathbf{q}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta. \quad (2.3)$$

Контуры интегрирования Γ_1 и Γ_2 почти всюду совпадают с вещественными осями комплексных плоскостей α_1 и α_2 , отклоняясь от них в комплексную плоскость при обходе вещественных особенностей элементов Фурье-символа матрицы Грина K . Направление отклонения определяется принципом предельного поглощения [15, 56].

Фурье-символ матрицы Грина K для произвольного линейно-упругого вертикально-однородного тела (слой, пакет слоев, полупространство и т.п.)

имеет вид [6, 34]

$$K = \begin{pmatrix} -i(\alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N) & -i\alpha_1\alpha_2(M - N) & -i\alpha_1 P \\ -i\alpha_1\alpha_2(M - N) & -i(\alpha_2^2 M + \alpha_1^2 N) & -i\alpha_2 P \\ \alpha_1 S & \alpha_2 S & R \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} M &= M_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), & N &= N_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), & P &= P_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), \\ R &= R_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), & S &= S_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), & \alpha &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

являются известными функциями своих аргументов. Для вычисления M , N , P , R , S разработаны эффективные численные алгоритмы [5, 21, 32]. Конкретный вид функций зависит от свойств среды, в частности, для однородного изотропного упругого слоя со свободными границами [34, 47]

$$\begin{aligned} M_1(\alpha, z) &= -i\sigma_2\{\alpha^2(\sigma_1\sigma_2\gamma^2\text{sh } \sigma_2 z + \gamma^4\text{sh } \sigma_1 z) - \\ &\quad -\alpha^2\gamma^4\text{ch } \sigma_2 h \text{sh } \sigma_1(z+h) + \alpha^4\sigma_1\sigma_2\text{sh } \sigma_2 h \text{ch } \sigma_1(z+h) - \\ &\quad -\alpha^2\sigma_1\sigma_2\gamma^2\text{ch } \sigma_1 h \text{sh } \sigma_2(z+h) + \gamma^6\text{sh } \sigma_1 h \text{ch } \sigma_2(z+h)\}/\alpha^2, \\ N_1(\alpha, z) &= i\text{ch } \sigma_2(z+h)/(\mu\alpha^2\sigma_2\text{sh } \sigma_2 h), \\ P_1(\alpha, z) &= -\sigma_1\sigma_2[\gamma^2\alpha^2\text{ch } \sigma_1 z + \gamma^4\text{ch } \sigma_2 z] - \\ &\quad -\alpha^2\sigma_1^2\sigma_2^2\text{sh } \sigma_1 h \text{sh } \sigma_2(z+h) + \sigma_1\sigma_2\gamma^4\text{ch } \sigma_1 h \text{ch } \sigma_2(z+h) + \\ &\quad +\alpha^2\sigma_1\sigma_2\gamma^2\text{ch } \sigma_2 h \text{ch } \sigma_1(z+h) - \gamma^6\text{sh } \sigma_2 h \text{sh } \sigma_1(z+h), \\ S_1(\alpha, z) &= -i\{\sigma_1\sigma_2(\gamma^2\alpha^2\text{ch } \sigma_2 z + \gamma^4\text{ch } \sigma_1 z) - \\ &\quad -\gamma^4\sigma_1\sigma_2\text{ch } \sigma_2 h \text{ch } \sigma_1(z+h) + \alpha^2\sigma_1^2\sigma_2^2\text{sh } \sigma_2 h \text{sh } \sigma_1(z+h) - \\ &\quad -\alpha^2\sigma_1\sigma_2\gamma^2\text{ch } \sigma_1 h \text{ch } \sigma_2(z+h) + \gamma^6\text{sh } \sigma_1 h \text{sh } \sigma_2(z+h)\}, \\ R_1(\alpha, z) &= \sigma_1\{-\alpha^2(\sigma_1\sigma_2\gamma^2\text{sh } \sigma_1 z + \gamma^4\text{sh } \sigma_2 z) + \\ &\quad +\alpha^2\sigma_1\sigma_2\gamma^2\text{ch } \sigma_2 h \text{sh } \sigma_1(z+h) - \gamma^6\text{sh } \sigma_2 h \text{ch } \sigma_1(z+h) + \\ &\quad +\alpha^2\gamma^4\text{ch } \sigma_1 h \text{sh } \sigma_2(z+h) - \alpha^4\sigma_1\sigma_2\text{sh } \sigma_1 h \text{ch } \sigma_2(z+h)\}, \\ \Delta(\alpha) &= 2\mu[-2\alpha^2\sigma_1\sigma_2\gamma^4 - (\gamma^8 + \alpha^4\sigma_1^2\sigma_2^2)\text{sh } \sigma_1 h \text{sh } \sigma_2 h + \\ &\quad + 2\alpha^2\sigma_1\sigma_2\gamma^4\text{ch } \sigma_1 h \text{ch } \sigma_2 h], \quad \gamma^2 = \alpha^2 - 0.5\kappa_2^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}$, $n = 1, 2$, а $\kappa_1 = \omega/c_p$ и $\kappa_2 = \omega/c_s$ – волновые числа продольных и поперечных волн, c_p и c_s – скорости их распространения.

В случае плоских деформаций (краевая задача вида (1.47)) смещения определяются через первый $\mathbf{k}_1 = (k_{11}, k_{21}, k_{31})^T$ и третий столбец $\mathbf{k}_3 = (k_{13}, k_{23}, k_{33})$ матрицы Грина. При этом вторые компоненты перемещений и напряжений u_y и q_y считаются равными нулю, а интегральное представление решения (2.3) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, z) &= \int_{\Omega} \mathbf{k}_1(x - \xi, z) q_x(\xi) d\xi + \int_{\Omega} \mathbf{k}_3(x - \xi, z) q_z(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \mathbf{K}_1(\alpha_1, z) Q_x(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x} d\alpha_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \mathbf{K}_3(\alpha_1, z) Q_z(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x} d\alpha_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{K}_1(\alpha_1, z) = \mathcal{F}_x[\mathbf{k}_1(x, z)]$, $\mathbf{K}_3(\alpha_1, z) = \mathcal{F}_x[\mathbf{k}_3(x, z)]$. В случае краевых задач (1.47)-(1.49) ненулевой остается только касательная компонента контактных напряжений q_x , т.е. поле смещений, генерируемое в подложке гибкой пьезонакладкой, выражается только через первый столбец матрицы Грина:

$$\mathbf{u}(x, z) = \int_{\Omega} \mathbf{k}_1(x - \xi, z) q_x(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \mathbf{K}_1(\alpha_1, z) Q_x(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x} d\alpha_1. \quad (2.8)$$

В осесимметричном случае интегрирование по области Ω сводится к преобразованию Фурье-Бесселя [34]. В цилиндрических координатах вместо формулы (2.1) имеем $\mathbf{V}(\alpha, z) = \mathbf{L}(\alpha, z)\mathbf{P}(\alpha)$, где $\mathbf{V} = C^{-1}(\gamma)\mathbf{U}$ и $\mathbf{P} = C^{-1}(\gamma)\mathbf{Q}$ – преобразование Фурье-Бесселя от вектора перемещений и поверхностных нагрузок, а $C(\varphi)$ и $C^{-1}(\gamma)$ – матрицы перехода

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае решение краевой задачи может быть выписано в виде:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta, z) \\ v_\theta(r, \theta, z) \\ v_z(r, \theta, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} -i \int_{\Gamma^+} (-i\alpha^2 M Q_r - i\alpha P Q_z) J_1(\alpha r) \alpha d\alpha \\ -i \int_{\Gamma^+} (-i\alpha^2 N Q_\theta) J_1(\alpha r) \alpha d\alpha \\ \int_{\Gamma^+} (i\alpha S Q_r + R Q_z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$L(\alpha, z) = C^{-1}(\gamma) \cdot K \cdot C(\gamma) = \begin{pmatrix} -i\alpha^2 M & 0 & -i\alpha P \\ 0 & -i\alpha^2 N & 0 \\ i\alpha S & 0 & R \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и ранее, контур Γ^+ почти всюду совпадает с положительной вещественной осью комплексной плоскости α , отклоняясь от неё при обходе вещественных полюсов функции $V(\alpha, z)$ в соответствии с принципом предельного поглощения.

§2.2. Нормальные моды

К интегральному представлению решения (2.7) возможно применить лемму Жордана и теорему Коши для точек x , лежащих вне области приложения нагрузки Ω [15, 36, 65, 68, 69]. В результате волновые поля, возбуждаемые вправо и влево от источника (\mathbf{u}^- и \mathbf{u}^+) представимы в виде рядов, слагаемые которых являются нормальными модами упругого волновода:

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\pm \mathbf{u}^\pm(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^- \mathbf{a}_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & \text{при } x < -a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^+ \mathbf{a}_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & \text{при } x > a, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{c}_n^\pm = \mp i e^{i\zeta_n a} \begin{pmatrix} Q_1(\mp \zeta_n) \\ Q_2(\mp \zeta_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_n^-(z) = \mathbf{a}_n(z) = \text{res } K(\alpha, z) \Big|_{\alpha=\zeta_n},$$

$$\mathbf{a}_n^+(z) = \text{res } K(\alpha, z) \Big|_{\alpha=-\zeta_n} = \begin{pmatrix} -\text{res } K_{11} \Big|_{\alpha=\zeta_n} & \text{res } K_{12} \Big|_{\alpha=\zeta_n} \\ \text{res } K_{21} \Big|_{\alpha=\zeta_n} & -\text{res } K_{22} \Big|_{\alpha=\zeta_n} \end{pmatrix}.$$

Слагаемые ряда (2.10), с точностью до постоянных множителей \mathbf{c}_n^\pm , совпадают с собственными решениями рассматриваемых краевых задач (собственными формами нормальных мод), соответствующими собственным значениям ζ_n (точкам спектра), которые играют роль волновых чисел для возбуждаемых бегущих волн и являются полюсами матрицы Грина K . Амплитудные множители $\mathbf{a}_n^\pm(z)$ описывают пространственную форму волны в поперечном сечении волновода.

Аналогичным образом можно представить и поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}(x, z)$, возникающее в упругом слое:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\pm \boldsymbol{\sigma}^\pm(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^- \mathbf{b}_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & \text{при } x < -a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^+ \mathbf{b}_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & \text{при } x > a, \end{cases} \quad (2.11)$$

В случае слоя со свободными границами бегущие волны разбиваются на две группы – симметричные и антисимметричные волны Лэмба [13,112], которые обозначаются S_n и A_n , $n = 1, 2, \dots$. Данные моды обеспечивают перенос энергии вправо и влево от источника, а их фазовые и групповые скорости определяются как $c_n = \omega/\zeta_n$ и $v_n = d\omega/d\zeta_n$.

Пара мод с комплексными, но не чисто мнимыми, волновыми числами $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ и $\zeta_{n+1} = -\xi_n + i\eta_n$ описывает стоячую волну с экспоненциально убывающей амплитудой $e^{-\eta_n|x|}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Моды, соответствующие чисто мнимым полюсам $\zeta_n = i\eta_n$ ($\xi_n = 0$) также экспоненциально убывают с удалением от источника. Однако моды с малой мнимой частью волнового числа ($\eta_n \approx 0$) оказывают существенное влияние на поля смещений и

напряжений в ближней зоне от источника или препятствия.

§2.3. Дисперсионные уравнения

Полюса матрицы Грина K вида (2.4) определяются как корни дисперсионного уравнения:

$$\Delta(\alpha, \omega) = \det A(\alpha, \omega) = 0, \quad (2.12)$$

где A – матрица системы линейных алгебраических уравнений, возникающей при подстановки общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в граничные условия. Для упругого изотропного слоя $\Delta(\alpha, \omega)$ выписывается в явном виде (см. (2.6)).

Уравнение (2.12) имеет конечное число вещественных и счетный набор комплексных корней: $\alpha = \pm\zeta_n(\omega)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Кроме симметрии относительно начала координат, полюса расположены симметрично и относительно мнимой оси. Для определенности обозначим как ζ_n вещественные положительные полюса и полюса, расположенные в верхней полуплоскости α ($\text{Im } \zeta_n \geq 0$), а через $\zeta'_n = -\zeta_n$ корни с отрицательной мнимой частью или отрицательные вещественные. Полюса считаются упорядоченными по возрастанию мнимой части: $\text{Im } \zeta_{n+1} \geq \text{Im } \zeta_n$. Вещественные положительные корни располагаются в начале последовательности полюсов, причем $0 \leq \zeta_{n+1} \leq \zeta_n$.

Корни дисперсионного уравнения (2.12) являются непрерывными функциями от круговой частоты ω , соответственно, с изменением частоты, полюса ζ_n в комплексной плоскости движутся по определенным траекториям. Зависимость вещественных корней от частоты в плоскости (f, ζ) для упругого слоя со свободными от напряжений границами (1.10) изображена на рисунке 2.1. В случае комплексных корней аналогичный график должен

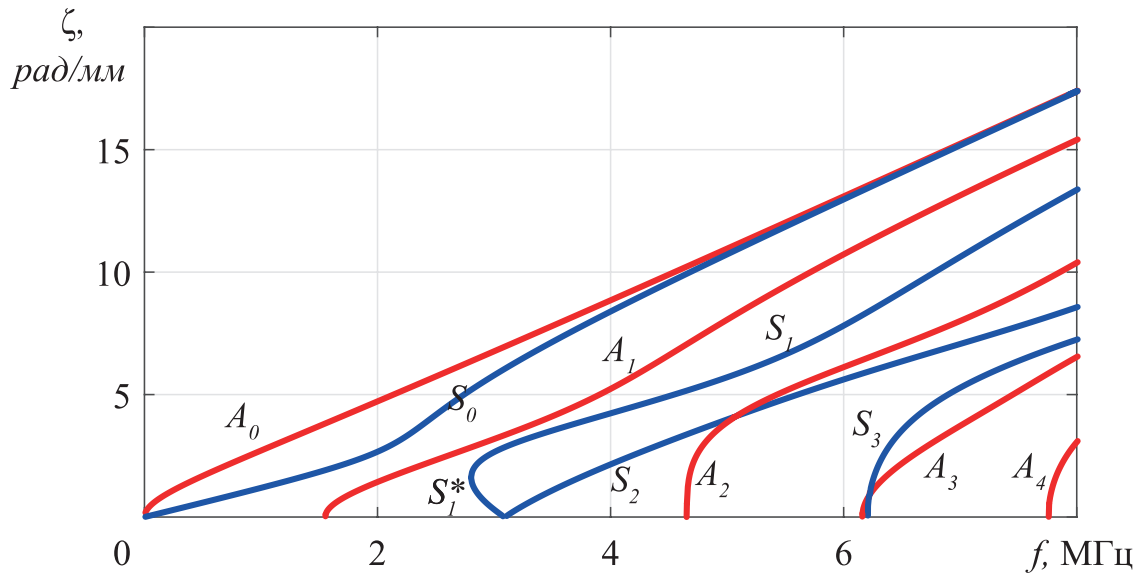


Рис. 2.1: Зависимость вещественных полюсов от частоты для свободного упругого слоя с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.33$; красным и синим показаны дисперсионные кривые для антисимметричных и симметричных волн Лэмба; f – размерная частота, ζ – волновые числа

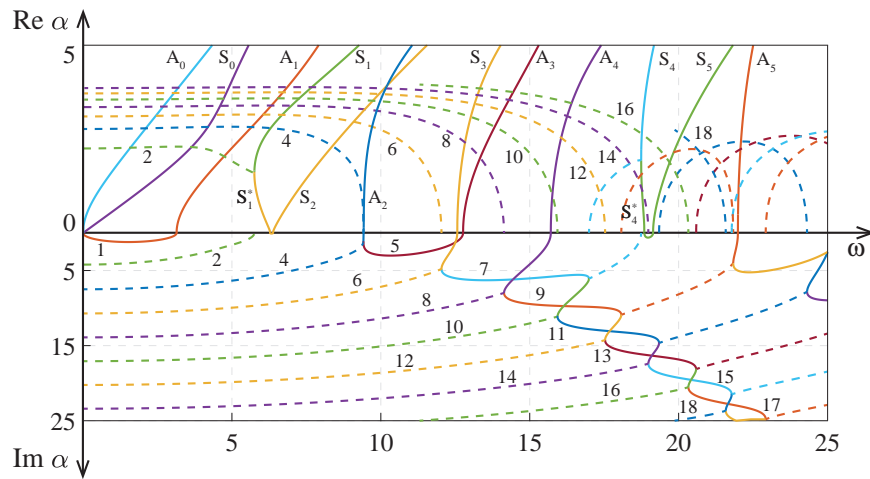


Рис. 2.2: Зависимость вещественной (вверху) и мнимой (внизу) части корней $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ от безразмерной круговой частоты для свободного слоя; сплошные линии обозначают чисто вещественные (как на рисунке 2.1) или чисто мнимые корни, пунктиром показаны вещественные и мнимые части комплексных корней

строиться в трехмерном пространстве (f, ξ, η) или (ω, ξ, η) , где $\xi = \text{Re } \zeta$, $\eta = \text{Im } \zeta$, что достаточно сложно реализовать с помощью двумерных графиков, хотя и такие примеры имеются [36], поэтому более наглядными получаются графики (ξ, η) с единой осью абсцисс ω (рисунки 2.2, 2.4, 2.6)

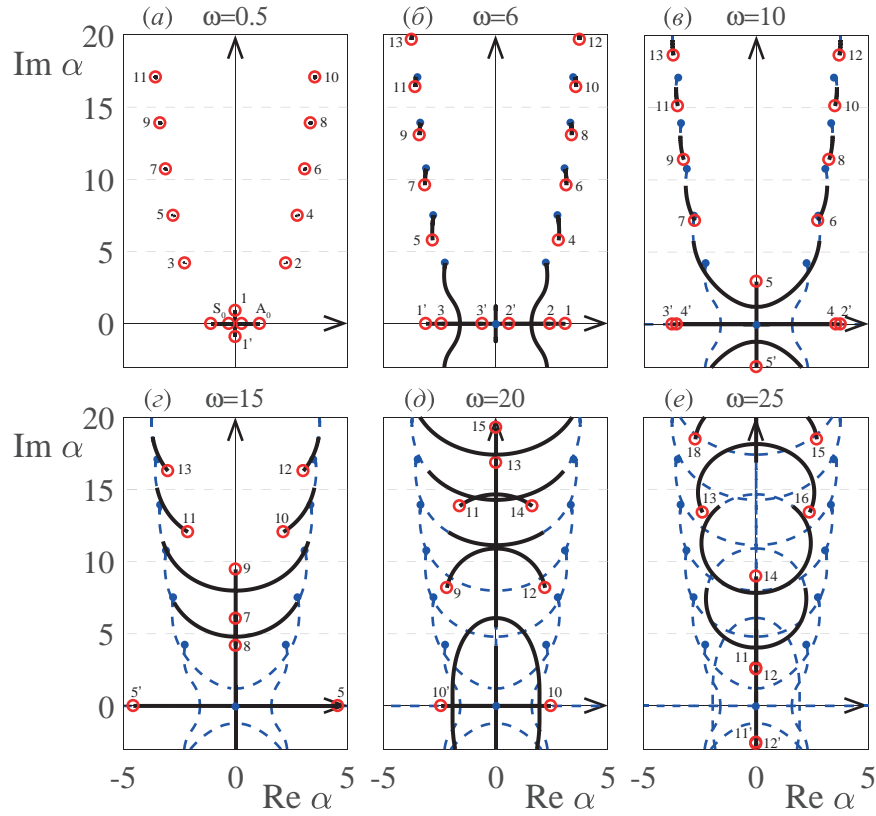


Рис. 2.3: Траектории движения полюсов в комплексной плоскости α в зависимости от частоты ω ; пунктирами указаны траектории движения от начального положения до положения на предыдущем рисунке, сплошными линиями – от положения на предыдущем рисунке до текущего положения на данной частоте, обозначенного кружочками. Рассматривается свободный от напряжений слой

При проведении численных расчетов для однородного упругого слоя использовались безразмерные параметры, получающиеся при выборе в качестве трех базовых единиц толщины слоя h , скорости поперечных волн $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ и плотности ρ (т.е. в качестве входных параметров задается $h = 1$, $c_s = 1$ и $\rho = 1$). В этих единицах безразмерная круговая частота

$\omega = 2\pi fh/s$, где f – размерная частота в герцах. При построении рисунка 2.1 использовались значения параметров, соответствующих свойствам дюралюминовой пластины ($h = 1$ мм, $\rho = 2730$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$ и $c_s = 3103$ м/с), а безразмерные параметры упругой среды ($\lambda = 2.125$, $\mu = 1$, $\rho = 1$, $\nu = 0.34$) применялись при построении рисунков 2.2-2.7.

Еще одним способом визуализации является изображение траекторий движения корней в комплексной плоскости α (рисунки 2.3, 2.5, 2.7). Каждый корень пронумерован, начальное положение при $\omega = 0$ обозначено закрашенным маркером, а положение на указанной частоте – незакрашенным. Пунктирные линии на рисунках обозначают траектории движения полюсов от $\omega = 0$ до частоты, указанной на предыдущем рисунке, сплошными линиями обозначено движение корней от положения на предыдущем рисунке до текущей частоты на графике.

Значительная часть данной работы посвящена решению задач для слоя со свободными от напряжений границами, поэтому здесь более подробно разбирается именно данный случай. Траектории движения полюсов для слоя с жестко фиксированным или со скользящим основанием аналогичны и указаны на рисунках 2.4-2.7.

Анализ траекторий движения полюсов с ростом безразмерной частоты ω следует начинать с определения их начального положения при $\omega = 0$. В этом случае $\alpha = 0$ является шестикратным корнем дисперсионного уравнения $\Delta(\alpha, 0) = 0$. Расположение остальных полюсов аппроксимируется асимптотикой [34, 36]

$$\zeta_n = (-1)^n \ln \pi(1 + 2m) + i\pi(m + 1/2), \quad m = [n/2] \rightarrow \infty$$

С ростом частоты (рисунок 2.3 (a)) шесть корней, располагавшиеся в нача-

ле координат, начинают свое движение, по две пары корней влево и вправо вдоль вещественной прямой, которые обозначают как A_0 и S_0 , а последняя пара начинает свое движение вверх и вниз вдоль мнимой оси и указывается как 1 и 1'. Здесь и далее штрихом обозначаются полюса, начальная траектория которых проходит в нижней полуплоскости α симметрично к соответствующим корням без штриха в верхней полуплоскости.

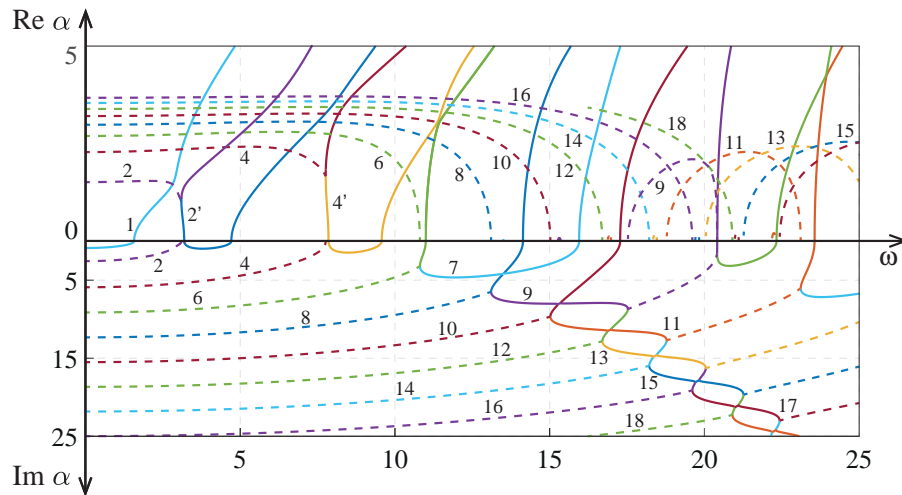


Рис. 2.4: То же, что и на рисунке 2.2, но для слоя с жестко закрепленной нижней границей

Затем движение полюсов 1 и 1' вдоль мнимой оси в разные стороны сменяется на встречное движение к началу координат и на частоте отсечки $\omega_1 = \pi$ происходит их повторное слияние в двукратный полюс в точке $\alpha = 0$. На рисунке 2.2 данное движение полюса 1 наблюдается как переход соответствующей сплошной линии 1 из нижней полуплоскости $(\omega, \text{Im } \alpha)$, в верхнюю $(\omega, \text{Re } \alpha)$ в виде вещественной ветви A_1 . Таким образом, пара чисто мнимых полюсов, встретившись в начале координат при $\omega = \omega_1$ и образовав в данной точке двукратный корень, расходятся вправо и влево при $\omega > \omega_1$ вдоль вещественной оси. На рисунке 2.3 (б) данные полюса еще не вышли за границы рисунка $|\text{Re } \alpha| \leq 5$, но полюса A_0 и S_0 уже за

его пределами, поэтому они присутствуют только на рисунке 2.3 (а).

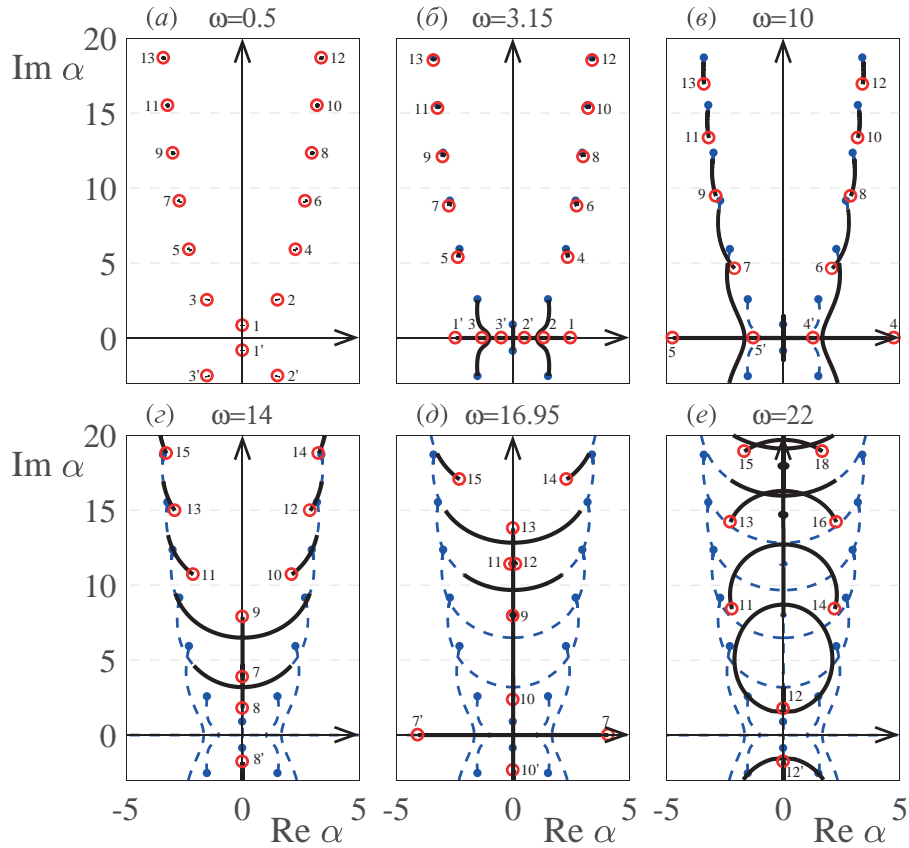


Рис. 2.5: То же, что на рисунке 2.3, но для слоя с фиксированным основанием

Остальные полюса, расположенные в комплексной плоскости почти не смещаются от начального положения до выхода пары $\pm\zeta_1$ на вещественную ось, а после этого начинается быстрое движение следующих пар 2 и 3. Данные полюса выходят на вещественную ось в точках $\alpha \approx 1.59$ и $\alpha \approx -1.59$, встречаясь в них с комплексно-сопряженными полюсами, пришедшими из нижней полуплоскости и образуя в каждой из этих точек двукратные полюса на частоте отсечки $\omega_2 \approx 5.75$. После выхода на вещественную ось корни $2'$ и $3'$ движутся вдоль оси навстречу друг другу, встречаясь в начале координат, а корни 2 и 3 удаляются друг от друга вдоль вещественной оси (рисунок 2.3 (б)).

После выхода на вещественную ось пар 2-3 и $2'-3'$ происходит ускоре-

ние движения следующих двух пар 4-5 и 4'-5' и т.д. Как правило, корни встречаются на мнимой оси, при этом траектории их движения выглядят как выгнутые вниз дуги (рисунок 2.3 (в)). Все корни движутся по направлению к вещественной оси, но не монотонно, а с некоторыми возможными локальными отступлениями, вызванными движением вверх по мнимой оси (рисунок 2.3 (г), полюса с номерами 7, 9, 11 и т.д.). Данные полюса в последующем встречаются с полюсами с более высокими номерами и вновь выходят в комплексную плоскость. Затем они либо выходят на вещественную ось непосредственно из комплексной плоскости, образуя тем самым обратные волны, характеризующиеся противоположной направленностью фазовой и групповой скорости (нерегулярные полюса) [13, 15, 36] (например 7 и 10, см. рисунок 2.3 (д)), либо вновь встречаются на мнимой оси, вычерчивая при этом эллипсообразные кривые (корни 9 и 12, рисунок 2.3 (е)). Более подробное описание траекторий движения полюсов для свободного упругого слоя приведено в работах [28, 38].

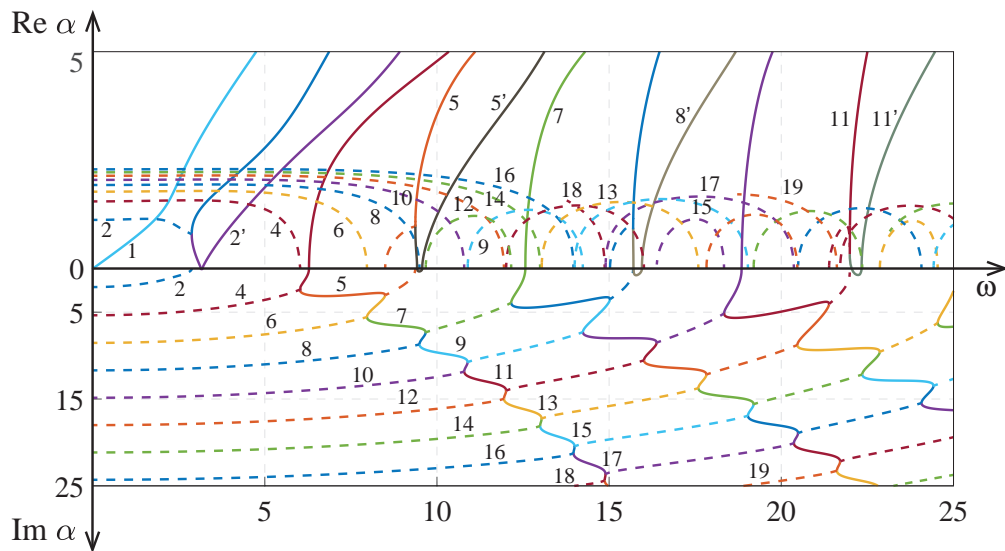


Рис. 2.6: То же, что на рисунках 2.2, 2.4, но для слоя, лежащего без трения на основании

Траектории движения корней для упругого слоя с жестко фиксиро-

ванной нижней границей (рисунки 2.4, 2.5) в целом аналогичны разобранным выше. Отличия проявляются в начальном расположении полюсов при $\omega = 0$ и движении корней вдоль вещественной и мнимой оси. На низких частотах ($\omega < \pi/2$) нет вещественных полюсов, а только счетный набор комплексных и пара чисто мнимых корней (рисунок 2.5(a)), т.е. до первой частоты отсечки в слое не возбуждаются бегущие волны, переносящие энергию на бесконечность [36].

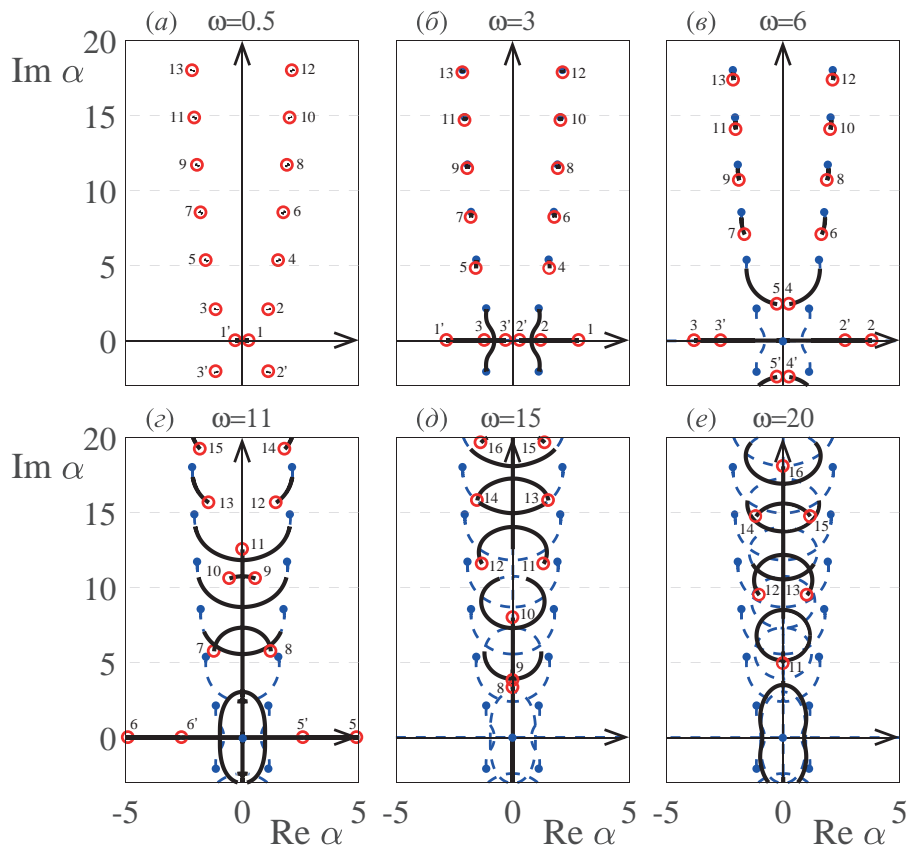


Рис. 2.7: То же, что и на рисунках 2.3, 2.5, но для слоя, контактирующего без трения с жестким основанием

Поведение корней для слоя со скользящим контактом с жестким основанием похоже на разобранные выше случаи (рисунки 2.6, 2.7). В данном случае на частотах ниже первой частоты отсечки $\omega < \omega_1$ существует пара вещественных полюсов и пара мнимых, остальные как и ранее комплекс-

ные (рисунок 2.7 (а)). С ростом частоты комплексные полюса выходят из комплексной плоскости на мнимую или непосредственно на вещественную ось, сливаясь в точке выхода в двукратный полюс и расходясь затем в противоположных направлениях (рисунки 2.7 (б), (в)). Характер движения корней вдоль мнимой оси отличается от предыдущих случаев, т.к. полюса встречаются не через пару, а непосредственно со следующей, например 5 с 6, 7 с 8 и т.д. (рисунки 2.7(г), (д)), поэтому эллипсообразные траектории появляются раньше и становятся более густыми (рисунок 2.7(е)).

§2.4. Энергетические характеристики бегущих волн

Количество энергии E , осредненное за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ и переносимое упругими волнами в поле гармонических колебаний $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$ через некоторую поверхность, определяется как интеграл по данной поверхности от нормальной компоненты $e_s = (\mathbf{e}, \mathbf{n})$ вектора плотности энергии \mathbf{e} (вектора Умова [61]):

$$E = \int_S e_s(\mathbf{x})dS, \quad e_s = -\frac{\omega}{2}\text{Im}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_s). \quad (2.13)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_s = \lambda \text{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + 2\mu \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} + \mu(\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{u})$ – компоненты вектора напряжений в точке интегрирования; \mathbf{n} – нормаль к поверхности S в данной точке.

В случае плоских гармонических колебаний энергия E_0 , поступающая от некоторого поверхностного источника, расположенного на верхней границе $z = 0$, определяется как [22]:

$$E_0 = \frac{\omega}{2}\text{Im} \int_{\Omega} u_x \tau_{xz} + u_z \sigma_{zz} dx = \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \int_{\Gamma} K(\alpha, 0) \mathbf{Q}(\alpha) \mathbf{Q}^*(\alpha^*) d\alpha. \quad (2.14)$$

Элементы матрицы Грина $K(\alpha, z)$ имеют вещественные значения при вещественных α , поэтому вклад в мнимую часть контурного интеграла по Γ определяется только вычетами в вещественных полюсах $\pm\zeta_n$. Исходя из соотношений (2.10) и (2.11),

$$E_0 = \sum_{n=1}^{N_r} E_n, \quad E_n = \frac{\omega}{2} j_n \operatorname{res} K(\alpha, 0) \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^*, \quad \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}(\zeta_n), \quad (2.15)$$

где N_r – число вещественных полюсов для данной частоты ω . Множитель j_n вводится для учета вклада обратных волн, т.е. вклада нерегулярных полюсов с отрицательным тангенсом угла наклона касательной к дисперсионной кривой (например участок кривой S_1^* на рисунке 2.1); для них $j_n = -1$, а для регулярных полюсов – $j_n = 1$.

Исходя из закона сохранения энергии, количество энергии E^- и E^+ , уходящей через поперечные сечения волновода $x = \mp d$, $-h \leq z \leq 0$ влево и вправо от источника, не зависит от d и равно количеству энергии, поступающему в волновод от источника колебаний: $E_0 = E^+ + E^-$. Для вычисления E^\pm удобно воспользоваться равенствами (2.10) и (2.11). Горизонтальная компонента вектора плотности энергии e_x представима в виде двойной суммы:

$$e_x^\pm = \sum_n \sum_m e_{nm}^\pm, \quad e_{nm}^\pm = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} (\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\tau}_m).$$

Используя условия ортогональности нормальных мод [42], получаем что вклад в величины E^\pm дают только слагаемые при $n = m \leq N_r$:

$$E_0 = \sum_{n=1}^{N_r} E_n^\pm, \quad E_n^\pm = \int_{-h}^0 e_{nn}^\pm dz. \quad (2.16)$$

Величины E_n^- и E_n^+ описывают количество энергии, переносимой модой с номером n влево и вправо от источника.

ГЛАВА 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УПРУГОЙ ПОДЛОЖКОЙ

В данной главе приводится решение сформулированных выше связанных краевых задач динамической теории упругости и электроупругости. Условия неразрывности смещений и напряжений в зоне контакта пьезоактуатора с подложкой приводят к интегральным уравнениям Винера-Хопфа относительно неизвестных контактных напряжений, которые решаются методом Галеркина. Верификация полученного решения проводится путем сопоставления с результатами, полученными в рамках других моделей – конечно-элементной и точечно-силовой. Приводится параметрический анализ энергетических характеристик системы актуатор - упругая подложка для определения центральных частот, обеспечивающих максимизацию амплитуды зондирующего сигнала.

§3.1. Интегро-дифференциальные уравнения

Линейность краевых задач для пьезоактуатора позволяет построить их решение в виде суммы ряда вспомогательных задач. Их подстановка в условие непрерывности смещений актуатора и упругой подложки в зоне контакта сводит задачу к интегральному уравнению относительно неизвестных контактных напряжений.

§3.1.1 Вывод интегрального уравнения Винера-Хопфа в случае плоской задачи

Решение краевой задачи (1.48) представляется в виде суммы решения трех вспомогательных задач $v(x) = v_{ih}(x) + v_h(x) + v_b(x)$, где v_{ih} – общее решение исходного неоднородного уравнения, а v_b и v_h – решения краевых задач с однородными уравнениями и неоднородными граничными условиями вида $v'_b|_{x=\pm a} = e_0$ и $v'_h|_{x=\pm a} = -v_{ih}$. Последовательное решение сформулированных краевых задач позволяет получить выражение для продольных смещений накладки:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} G(\alpha) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + c^{(1)} \cos(\kappa x) + (c^{(2)} + c^{(3)}) \sin(\kappa x). \quad (3.1)$$

Здесь $G(\alpha) = -b_0/(\alpha^2 - \kappa^2)$, $Q(\alpha) = \mathcal{F}[q] = \mathcal{F}[\tau_{xz}]$ – преобразование Фурье неизвестных контактных напряжений, а

$$c^{(1)} = \frac{b_0 e^{i\kappa a} (Q(\kappa) + Q(-\kappa))}{4\kappa \sin \kappa a}, \quad c^{(2)} = \frac{b_0 e^{i\kappa a} (Q(\kappa) - Q(-\kappa))}{4\kappa \cos \kappa a}, \quad c^{(3)} = \frac{e_0}{\kappa \cos \kappa a}.$$

Подставляя найденное решение (3.1) в условия связи $u_x(x) = v(x)$ при $|x| \leq a$ и используя интегральное представление решения для плоской краевой задачи (2.8), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (K_{11}(\alpha, 0) - G(\alpha)) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha - c^{(1)}(Q) \cos(\kappa x) - \\ & - c^{(2)}(Q) \sin(\kappa x) = c^{(3)} \sin(\kappa x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полученное уравнение (3.2) является интегральным уравнением относительно функции $Q(\alpha)$, входящей как в интегральный оператор, так и в неизвестные коэффициенты дополнительных слагаемых. Заменой порядка интегрирования интегральный оператор сводится к оператору с разностным ядром, действующему на $q(\xi) = \mathcal{F}^{-1}[Q]$, т.е. данное уравнение фактически является уравнением Винера-Хопфа.

§3.1.2 Вывод интегрального уравнения Винера-Хопфа в случае осесимметричных колебаний

Краевая задача (1.51) формулируется относительно неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и смешанными граничными условиями, поэтому её решение v можно выписать в виде суммы решений следующих вспомогательных задач:

$$v(r) = v_{ih}(r) + v_h(r) + v_b(r), \quad (3.3)$$

$$v_{ih}'' + \frac{1}{r}v_{ih}' - \frac{1}{r^2}v_{ih} + \varkappa_1^2 v_{ih} = b_0 q r, \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} v_h'' + \frac{1}{r}v_h' - \frac{1}{r^2}v_h + \varkappa_1^2 v_h = 0, \\ (v_h + v_{ih})' + (v_h + v_{ih})\frac{\nu_0}{r} \Big|_{r=a} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} v_b'' + \frac{1}{r}v_b' - \frac{1}{r^2}v_b + \varkappa_1^2 v_b = 0, \\ v_b' + v_b\frac{\nu_0}{r} \Big|_{r=a} = e_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Частное решение неоднородного уравнения (3.4) может быть построено с помощью преобразования Фурье-Бесселя первого порядка по координате r . Заменой $r = x\varkappa$ однородные дифференциальные уравнения, входящие в краевые задачи (3.5) и (3.6), сводятся к дифференциальному уравнению Бесселя [48, 83]. Общее решение $y(r)$ уравнения Бесселя представимо в виде суммы функции Бесселя J_1 и Неймана Y_1 :

$$y(r) = s_1 J_1(r\varkappa) + s_2 Y_1(r\varkappa).$$

Функция Неймана $Y_1(r\varkappa)$ имеет особенность при $r = 0$, что противоречит экспериментальным данным [83], поэтому коэффициент s_2 должен быть равен нулю.

Учитывая граничные условия задач (3.5), (3.6), решение исходной задачи (3.3) имеет вид:

$$v(r) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma^+} G(\alpha) Q_r(\alpha) J_1(\alpha r) \alpha d\alpha + (s_1 Q_r(\varkappa) + \hat{E}) J_1(r\varkappa), \quad (3.7)$$

где контур Γ^+ почти всюду совпадает с вещественной положительной полуосью, отклоняясь от неё вниз при обходе вещественного полюса $\alpha = \varkappa$, $Q_r(\alpha)$ – преобразование Фурье-Бесселя от неизвестных контактных напряжений $q_r(r) = \tau_{rz}$,

$$s_1 = \frac{b_0(a\varkappa H_0^{(1)}(a\varkappa) + (\nu_0 - 1)H_1^{(1)}(a\varkappa))}{4(a\varkappa J_0(a\varkappa) + (\nu_0 - 1)J_1(a\varkappa))},$$

$$\hat{E} = \frac{ae_0}{a\varkappa J_0(a\varkappa) + (\nu_0 - 1)J_1(a\varkappa)}.$$

Подставляя интегральное представление решения (2.9) в уравнения связи $u_r(r, 0) = v(r)$ (1.50) получим

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma^+} (K_{11}(\alpha, 0) - G(\alpha)) Q_r(\alpha) J_1(\alpha r) \alpha d\alpha - s_1 Q_r(\varkappa) J_1(r\varkappa) = \hat{E} J_1(r\varkappa). \quad (3.8)$$

§3.2. Метод Галёркина

Интегральные уравнения (3.8) и (3.2) могут быть решены различными методами, в частности, методом бесконечных систем или методом Галёркина [24, 47, 87]. В рамках метода Галёркина неизвестные функции $q(x) \in L_2(\Omega)$ и $q_r(r) \in L_2(\Omega_r)$ раскладываются в ряды по базисным функциям в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega_r)$:

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad q_r(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(r). \quad (3.9)$$

Неизвестные коэффициенты $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ определяются из требования ортогональности невязки уравнений (3.2), (3.8) системам функций

$\psi_m(x)$, $\psi_{r,m}(r)$, называемых проекторами, плотных в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega_r)$, что приводит к системам линейных алгебраических уравнений вида:

$$A\mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (3.10)$$

где элементы матриц A определяются как

$$a_{ij} = ((\mathcal{K} + G)\phi_j, \psi_i)_{L_2(\Omega)} \quad \text{или} \quad a_{ij} = ((\mathcal{K} + G)\varphi_j, \psi_{r,i})_{L_2(\Omega_r)}.$$

Через $(f, g)_{L_2(\Omega)}$ и $(f, g)_{L_2(\Omega_r)}$ обозначены скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega_r)$: $(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g^*(x)dx = \int_{-a}^a f(x)g^*(x)dx$ и $(f, g)_{L_2(\Omega_r)} = \int_{\Omega_r} f(r)g^*(r)rdr = \int_0^a f(r)g^*(r)rdr$ соответственно. Компоненты векторов $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ принимают вид:

$$f_i = (\tilde{f}, \psi_i)_{L_2(\Omega)} \quad \text{или} \quad f_i = (\tilde{f}_r, \psi_{r,i})_{L_2(\Omega_r)}.$$

Здесь $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}_r(r)$ – правые части интегральных уравнений (3.2) и (3.8) соответственно.

В качестве системы базисных функций $\phi_n(x)$ для плоской задачи можно выбрать сплайн-шапочки, связанные с узлами x_n , покрывающими отрезок $\Omega = [-a, a]$ с равномерным шагом $h = 2a/N$ и определяемые соотношениями:

$$\phi_n(x) = \phi\left(\frac{x - x_n}{h}\right), \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$x_n = -a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

А в качестве проекторов $\psi_m(x)$ в данном случае удобно использовать саму систему базисных функций $\phi_n(x)$.

Элементы матрицы и правая часть линейной алгебраической системы (3.10) для данных систем базисных функций и проекторов имеют вид:

$$a_{ij} = \frac{h^2}{\pi} \int_{\Gamma^+} (K_{11}(\alpha, 0) - G(\alpha)) \Phi^2(\alpha h) \cos(\alpha h|i - j|) d\alpha +$$

$$+ \frac{(-1 + \cos(\kappa h)) b_0 h \Phi(\kappa h) e^{i\kappa a}}{\kappa^3} \left(\frac{\cos(\kappa x_j) \cos(\kappa x_i)}{\sin(\kappa a)} + \frac{\sin(\kappa x_j) \sin(\kappa x_i)}{\cos(\kappa a)} \right),$$

$$f_i = \frac{2(1 - \cos(\kappa h)) c^{(3)}}{\kappa^2} \sin(\kappa x_i).$$

Здесь $\Phi(\alpha) = \int_{-1}^1 \phi(x) e^{i\alpha x} dx = \sin^2(\alpha/2)/(\alpha/2)^2$ – Фурье-символ функции формы.

Напряжения $q(x)$ и $q_r(r)$ обладают корневой особенностью [34, 47], при $x = \pm a$ или $r = a$. Поэтому выгоднее использовать в качестве базисных функции ϕ_n и φ_n , уже несущие особенность данного типа. Например:

$$\tilde{\phi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} T_n\left(\frac{x}{a}\right), \quad \varphi_n(r) = \frac{1}{r\sqrt{a^2 - r^2}} T_{2n-1}\left(\frac{r}{a}\right), \quad (3.12)$$

где $T_n(x)$ – полином Чебышева первого рода степени n . Проекторами для первой системы $\tilde{\phi}_n(x)$ удобно использовать систему экспонент – $\psi_n(x) = e^{-i\pi n x/a}$, а проекторами для второй системы выбираются $\psi_n(r) = r\varphi_n(r)$. Выбор данных систем проекторов упрощает вычисление элементов матрицы $A = (a_{ij})$ и компонент вектора правой части \mathbf{f} системы (3.10) [54]. С видом элементов a_{ij} и компонент f_i для базисных функций $\tilde{\phi}_n(x)$ можно ознакомиться, например, в работе [47]. А для осесимметричной задачи (3.8) элементы матрицы A и компоненты вектора \mathbf{f} имеют вид

$$a_{ij} = \int_{\Gamma^+} (K_{11}(\alpha, 0) - G(\alpha)) \Phi_j(\alpha) \Phi_i^*(\alpha^*) \alpha d\alpha - 2\pi i \Phi_i(\boldsymbol{\varkappa}) \Phi_j(\boldsymbol{\varkappa}) s_1,$$

$$f_i = \hat{E} \Phi_i(\boldsymbol{\varkappa}), \quad \Phi_n(\alpha) = \frac{\pi}{2} J_n\left(\frac{a\alpha}{2}\right) J_{1-n}\left(\frac{a\alpha}{2}\right).$$

§3.3. Оценка границ применимости на основе сопоставления с другими моделями

Эффективность разработанной модели оценивается на основе сопоставления с двумя моделями: в первой из них действие актуатора на упругую подложку аппроксимируется сосредоточенными силами, приложенными к поверхности слоя в граничных точках $x = \pm a$, $r = a$ (несвязная точечно-силовая (pin-force) модель по терминологии [83, 84]):

$$\tau_{xz}|_{z=0} = A[\delta(x - a) - \delta(x + a)], \quad \tau_{rz}|_{z=0} = A\delta(r - a), \quad (3.13)$$

где δ – дельта-функция Дирака, A – амплитудный множитель, задающий величину прикладываемых сил.

Одной из оценок величины A , учитывающей интенсивность электрического поля E_z , подаваемого на накладку, является представление [83]:

$$A = \frac{\gamma}{\gamma + 4} h_0 Y_0 \varepsilon_{isa}, \quad \gamma = \frac{Yh}{Y_0 h_0}, \quad \varepsilon_{isa} = \frac{d_{31} V}{h_0}. \quad (3.14)$$

Здесь Y_0 и Y – модули Юнга для накладки и упругого слоя соответственно, h_0 и h – толщины пьезонакладки и слоя, V – напряжение, поданное на электроды.

В рамках данной модели для проведения численных расчетов не требуется построение решения контактной задачи, поэтому она широко используется в инженерных расчетах. Точечно-силовая модель (3.13) учитывает размеры источника через параметр a , входящий в дельта-функции, но не реальное распределение контактных напряжений, а только факт их концентрации на границе области контакта. Для учета распределения контактных напряжений необходимо решение связанной контактной задачи о динамическом взаимодействии пьезоактуатора с упругой подложкой, описанное в

данной работе. Соответствующую связную модель назовём пленочной моделью актуатора.

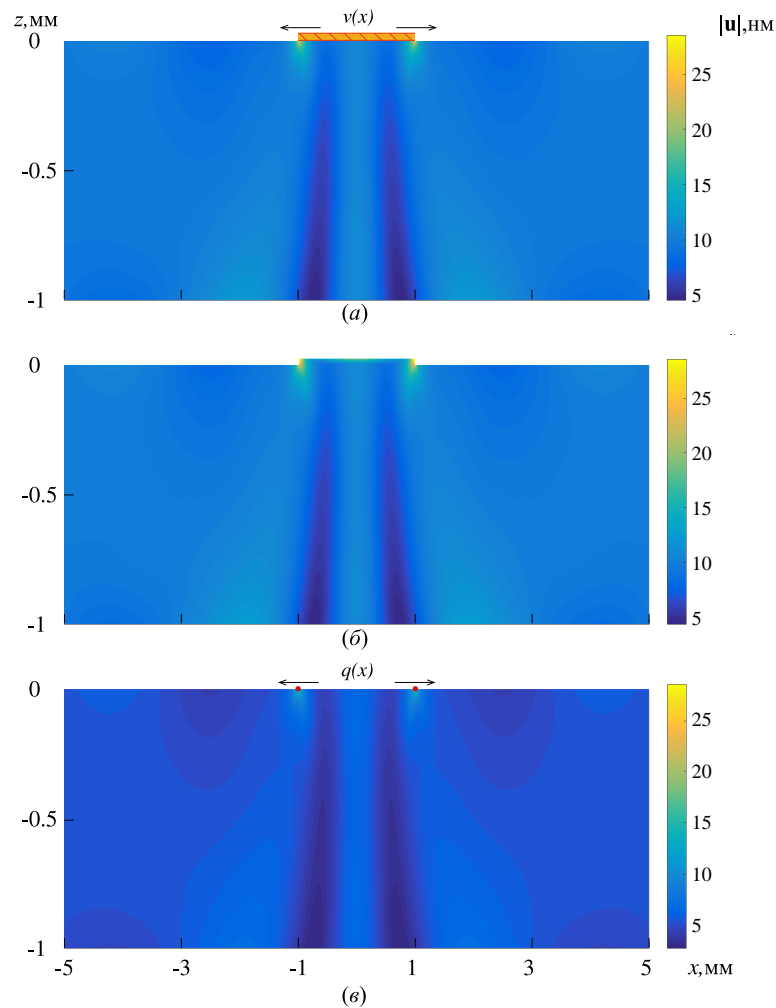


Рис. 3.1: Амплитуда поля смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, возбуждаемого в упругом слое пьезонакладкой толщины $h_0 = 0.02$ мм, рассчитанная на частоте $f = 1$ МГц. (а) – пленочная модель актуатора (1.48), (б) – конечно-элементная модель с поглощающими условиями на торцах выделенной области МКЭ дискретизации, (в) – несвязная точечно-силовая модель

Численное решение рассматриваемой связной электромеханической задачи может быть также получено в рамках МКЭ, реализованного в стандартных коммерческих пакетах программ, таких как ANSYS, Abacus, Comsol и др. В силу применимости МКЭ только к ограниченным областям, из

бесконечного волновода выделяется область дискретизации, содержащая накладку, а отток волновой энергии на бесконечность моделируется при помощи специальных поглощающих граничных условий, например, к рассматриваемой области примыкают так называемые идеально согласованные слои (Perfectly matched layer – PML) [72,76]. Построение МКЭ-решения в данном случае достаточно громоздко и приводит к потере физической наглядности и возможности быстрого параметрического анализа. Естественный способ преодоления указанных недостатков является построение гибридных численно-аналитических моделей. В работах [35,64] для моделирования влияния пьезонакладки использовалась конечно-элементная модель с элементами высокого порядка точности, а возбуждаемые ей колебания в упругой подложке описывались на основе интегрального подхода [6, 15, 97].

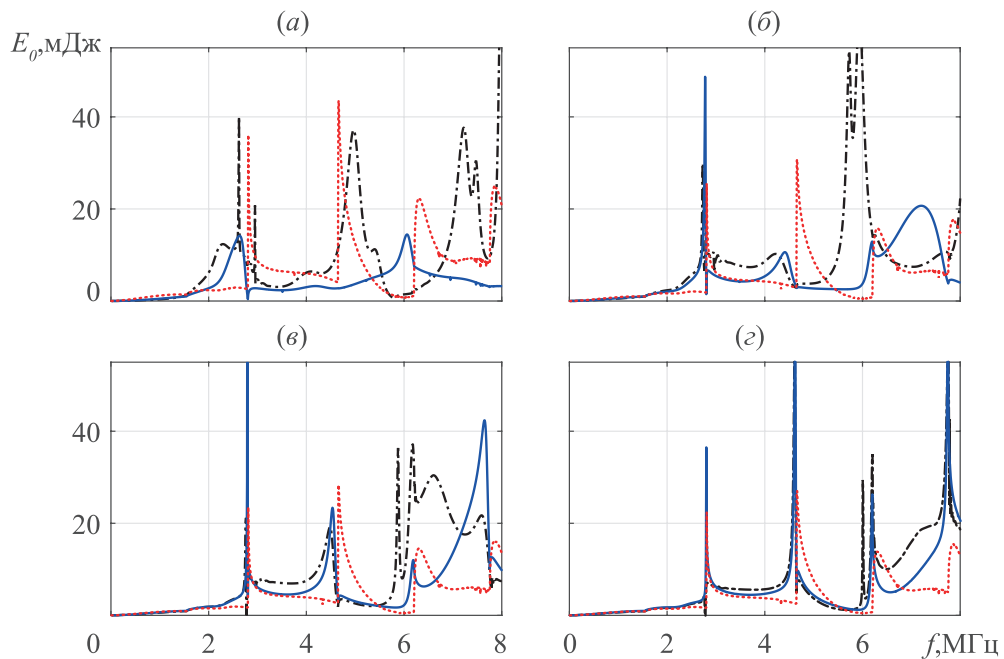


Рис. 3.2: Зависимость энергии E_0 , поступающей в среду от полосовой пьезонакладки, от частоты f при различных значениях её толщины h_0 ; $h_0 = h/10$ – (а), $h_0 = h/20$ – (б), $h_0 = h/30$ – (в), $h_0 = h/50$ – (г). Синяя сплошная линия – пленочная модель актуатора, красная пунктирная линия – несвязная модель, а черная штрихпунктирная линия – МКЭ

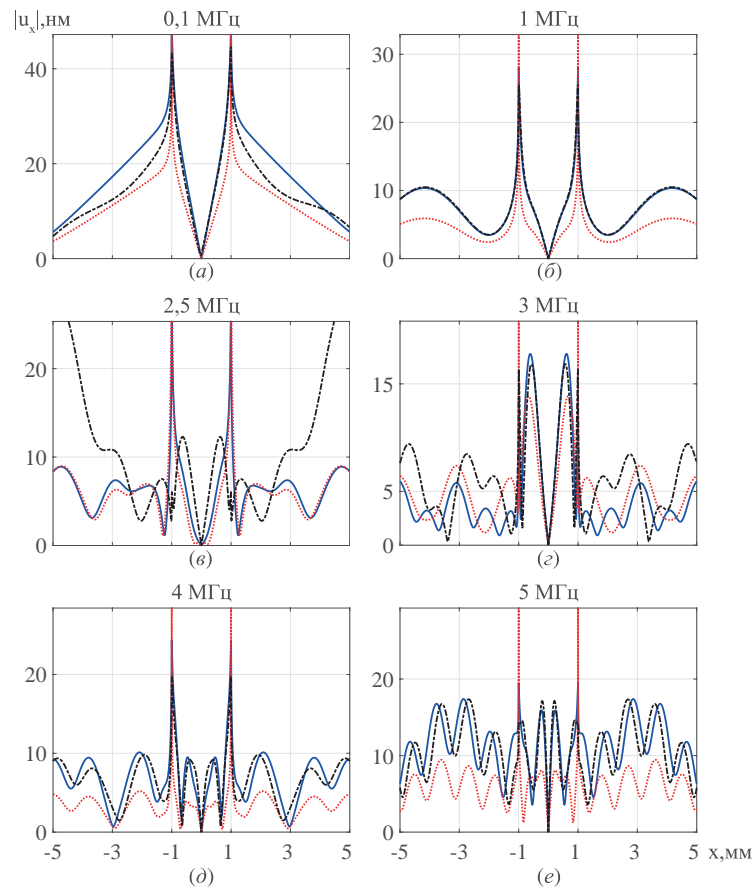


Рис. 3.3: Модуль продольной компоненты вектора смещений $|u_x(x, 0)|$ при толщине пленочной наклейки $h_0 = 0.02$ мм. Синяя сплошная линия – пленочная модель актуатора, красная пунктирная линия – точно-силовая модель, черная штрихпунктирная линия – МКЭ

Геометрия, а также результаты тестового сопоставления амплитуды вектора смещения $|\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$, полученные для пленочной модели актуатора, несвязной модели и МКЭ, приведены на рисунке 3.1. При проведении численных расчетов в качестве материала подложки рассматривается дюралюминовая пластина толщины $h = 1$ мм, плотности $\rho = 2730$ кг/м³, с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.33$ и модулем Юнга $Y = 69.9$ ГПа. Для пьезонаклейки используется материал P1С 255 ширины $a = 1$ мм, толщины $h_0 = 0.1, 0.05, 0.033, 0.025$ или 0.02 мм, плотности $\rho_0 = 7800$ кг/м³, с модулями Юнга $Y_0 = 62.9$ ГПа и пьезоэлектрическим коэффициентом

$d_{31} = -174$ пВ/м. На электроды подается напряжение $V = 50$ В.

На рисунке 3.2 представлен расчет общей энергии $E_0(f)$, поступающей в волновод от полосового пьезоактуатора, при различных значениях толщины пьезоактуатора h_0 , исходя из формул (2.14). В низкочастотном (двухмодовом) диапазоне $f < 1.55$ МГц (рисунок 2.1) закон распределения контактных напряжений не оказывает заметного влияния на расчетные значения, поэтому результаты всех моделей достаточно хорошо согласуются между собой, даже при относительно больших толщинах источника колебаний $h_0 = h/10 \approx 0.1$ мм (рисунок 3.2 (а)). Кроме того, имеются сопоставления несвязной модели (3.13) с экспериментальными данными [88], где установлено совпадение расчетных характеристик волнового поля, возбуждаемого круговым пьезоактуатором. Однако, с ростом частоты отклонение результатов, полученных при помощи несвязной модели, от связанных моделей нарастает. В трехмодовом ($1.55 \text{ МГц} < f < 2.81 \text{ МГц}$) и пятимодовом ($2.81 \text{ МГц} < f < 4.65 \text{ МГц}$) диапазоне различия между всеми моделями становятся значительными. Следует отметить, что результаты МКЭ модели нельзя считать эталонными, т.к. несмотря на использование поглощающих граничных условий они все-таки зависят от ширины выделенной области дискретизации, особенно с ростом частоты. Результаты аналитической пленочной модели, напротив, быстро стабилизируются с увеличением числа базисных функций метода Галёркина. В этом смысле можно считать, что эта модель обеспечивает получение точного решения рассматриваемой связанной задачи для системы актуатор-подложка.

При постепенном уменьшении относительной толщины пьезонакладки h_0 вплоть до $h_0 = h/50$ (рисунок 3.2 (б) – (г)), расчетные значения E_0 для связанных моделей совпадают между собой и для более высоких частот; сна-

чала в трехмодовом диапазоне (рисунок 3.2 (б)), потом сближаются между собой в пятимодовом диапазоне (рисунок 3.2 (в)), а в конечном счете практически совпадают между собой и в пятимодовом и в шестимодовом ($4.65 \text{ МГц} < f < 6.16 \text{ МГц}$) диапазоне, что можно наблюдать на рисунке 3.2 (г). Несвязная модель совпадает со связными количественно вплоть до возбуждения третьей моды (рисунок 3.2 (а) – (в)), а при относительно малых толщинах пьезоактуатора – вплоть до возбуждения пятой моды (рисунок 3.2 (г)). Такое поведение справедливо и для круговых пьезонакладок (краевая задача (1.50)), что можно наблюдать на рисунке 3.4.

Подобные выводы, в частности, подтверждает расчет модуля продольной компоненты смещения под накладкой при её толщине $h_0 = h/50$ для всех трех моделей, представленный на рисунке 3.3. Отклонение конечно-элементной модели от двух других на частоте $f = 2.5 \text{ МГц}$ связано с тем,

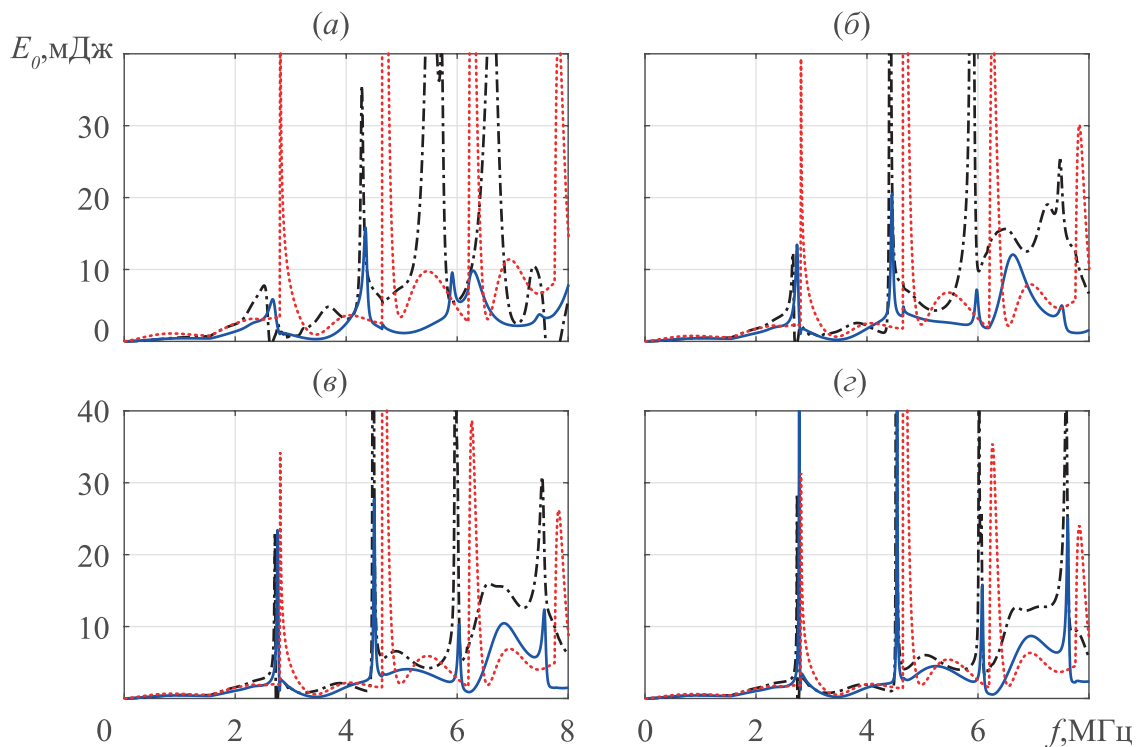


Рис. 3.4: То же, что и на рисунке 3.2, но для кругового пьезоактуатора, $h_0 = h/20$ – (а), $h_0 = h/30$ – (б), $h_0 = h/40$ – (в), $h_0 = h/50$ – (г)

что в рамках данной модели рассматривается ограниченный образец, а частота f близка к собственной частоте колебаний образца, что приводит к возникновению отраженного волнового поля от мнимых поглощающих границ области, задаваемых с помощью PML. На частоте $f = 3$ МГц одна из пяти волн Лэмба, возбуждаемых на данной частоте, является обратной, поэтому на данных частотах идеально согласованные слои, реализованные в рамках пакета Comsol, также не позволяют получить точные результаты (рисунок 3.3 (z)) [71]. В диапазоне высших мод аналитическая и конечно-элементная модель хорошо согласуются между собой (рисунок 3.3 (d), (e)).

§3.4. Расчет оптимальных параметров связной системы актуатор-упругая подложка

Анализ зависимости энергии источника $E_0(\omega, a)$ от частоты и размеров актуатора позволяет оценить эффективность его работы для различных сочетаний этих параметров. Относительная эффективность возбуждения отдельных волн определяется коэффициентом распределения энергии источника $\eta_n = E_n/E_0$, где E_n – энергия отдельной волны с номером n . Исходя из формул (2.14), (2.15) и (2.16) коэффициенты $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}(\zeta_n)$ определяют как значение энергии E_0 , так и значение энергии, переносимой каждой модой вправо и влево от источника E_n^\pm . В случае точечно-силовой модели (3.13) для плоской задачи коэффициенты $\mathbf{Q}_n = (Q_n, 0)^T = (2iA \sin(a\zeta_n), 0)^T$, поэтому, очевидно, что волна \mathbf{u}_n не возбуждается при тех сочетаниях пары (ω, a) , при которых $a\zeta_n = \pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, так как для них $Q_n = 0$, а соответственно и комплексная амплитуда \mathbf{a}_n и энергия переносимая данной модой E_n обращаются в ноль. Напротив, при $a\zeta_n = \pi(k - 1/2)$ значение $|Q_n| = |2iA|$ максимально, т.е. модой \mathbf{u}_n переносится максимально

возможное при такой нагрузке количество энергии E_n . С ростом ширины накладки и/или частоты максимальные и нулевые значения амплитудного множителя Q_n периодически чередуются. Ветви дисперсионных кривых $\zeta_n(\omega)$ выходят на асимптотику $\zeta_n \sim c_n\omega$, в следствие чего линии минимумов и максимумов Q_n с ростом ω идут на плоскости (ω, a) вдоль гипербол $a \sim \pi k/(c_n\omega)$.

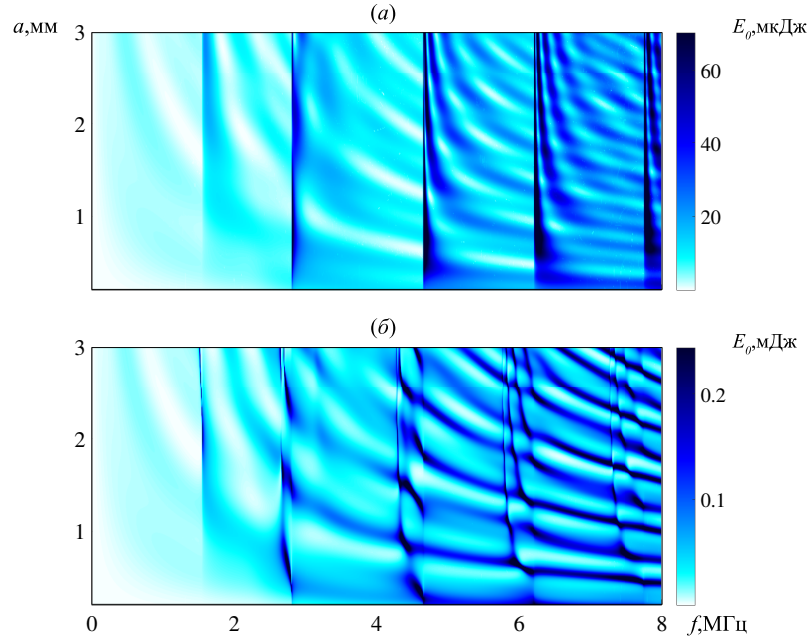


Рис. 3.5: Зависимость энергии полосового пьезоактуатора $E_0(f, a)$ от размера области контакта a и частоты f для точно-силовой модели с нагрузкой (3.13), (а), и пленочной модели (б).

На графиках зависимости E_0 от f и a (рисунок 3.5 (а)) данное чередование минимумов и максимумов $Q_n(\omega, a)$ проявляется в виде светлых и темных полос, идущих вдоль указанных гипербол для волн, определяющих основной вклад в E_0 . Аналогичный характер зависимости E_0 от a и f сохраняется и при вычислении контактных напряжений $q(x)$ и, соответственно, коэффициентов Q_n через строгое решение связной контактной задачи (рисунок 3.5 (б)). В низкочастотном (двухмодовом) диапазоне $f < 1.8$ МГц

совпадение не только качественное, но в целом и количественное, что подтверждает ценность более простой модели с нагрузкой (3.13) для практической оценки эффективности генерации фундаментальных мод A_0 и S_0 . С ростом частоты и/или размера актуатора различия двух моделей становятся более заметным, хотя и картины чередования полос остаются похожими. Применения несвязной модели в данных диапазонах может привести к некорректному выбору центральных частот, что заметно отразится на эффективности зондирования.

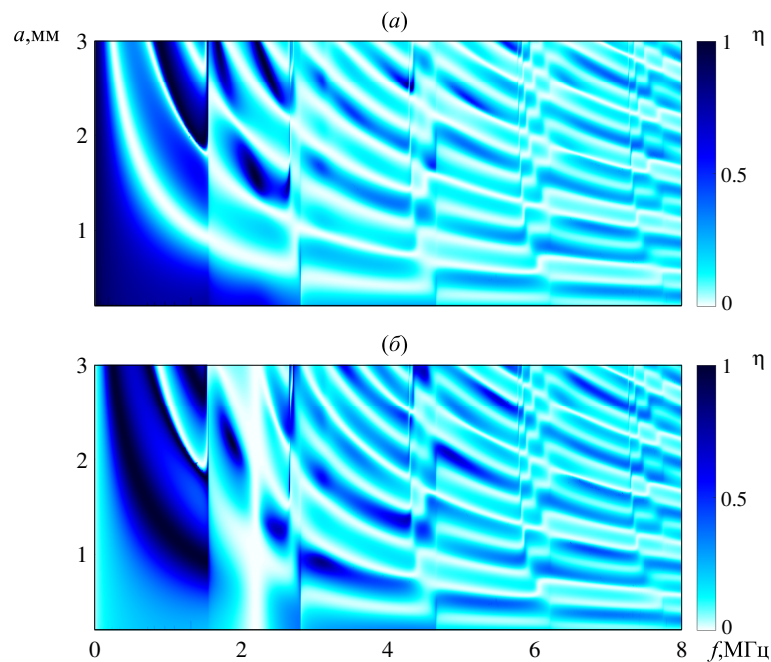


Рис. 3.6: Зависимость долей энергии $\eta_n(f, a)$ от частоты f и ширины a фундаментальных мод A_0 (a) и S_0 (б) в общем потоке волновой энергии, поступающей от полосового пьезоактуатора в упругий слой.

В многомодовом диапазоне возникает сложная для интерпретации волновая картина, поэтому при проектировании систем волнового мониторинга стараются подобрать такие параметры пьезоисточника, при которых обеспечивается возбуждение одной доминирующей моды. В основном, в качестве такой моды используется одна из фундаментальных волн Лэмба

A_0 или S_0 . На рисунке 3.6 отображена зависимость доли $\eta_n = E_n/E_0$ энергии данных мод ($A_0 - (a), S_0 - (b)$) от частоты f и полуширины накладки a . Данные численные результаты получены в рамках пленочной модели актуатора (1.47)-(1.48). В двухмодовом диапазоне $0 < f < 1.8$ МГц картина темных и светлых полос, указывающих на максимальную и минимальную долю энергии одной из этих мод, выглядит как негативное изображение картины распределения энергии для другой моды. Для более высоких частот большая часть энергии пьезоисточника идет на возбуждения высших мод. Однако и в многомодовом диапазоне наблюдаются темные пятна, указывающие на возможность возбуждения одной доминирующей фундаментальной моды при данных значениях пары (a, f) .

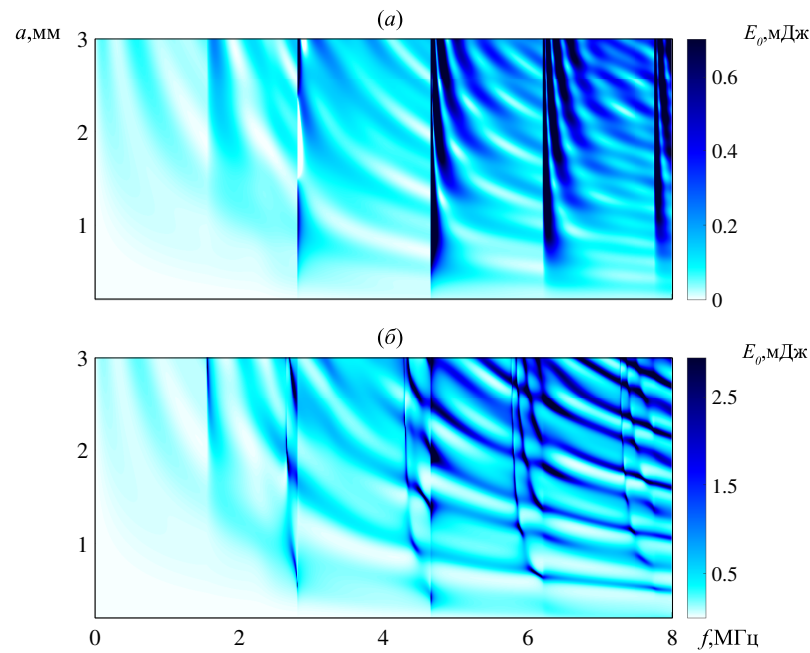


Рис. 3.7: То же, что и на рисунке 3.5, но для кругового пьезоактуатора.

В осесимметричном случае (краевая задача (1.50)) выражение для расчета энергии E_0 , поступающей от поверхностного источника колебаний в

упругую среду, имеет вид:

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \text{Im} \int_{\Omega} u_r \tau_{rz} + u_z \sigma_{zz} dx = \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \int_{\Gamma^+} K(\alpha, 0) \mathbf{Q}(\alpha) \mathbf{Q}^*(\alpha^*) \alpha d\alpha. \quad (3.15)$$

В случае точечно-силовой модели (3.13) вектор-функция нагрузки принимает вид $\mathbf{Q} = (Q_r, 0)^T$, где $Q_r(\alpha) = 2\pi i a A J_1(\alpha a)$. Нули функции Бесселя $J_1(x)$ хоть и не расположены периодически, но при $x \rightarrow +\infty$, в силу асимптотического представления:

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}),$$

также наблюдается чередование темных и светлых полос (рисунок 3.7 (а)). Аналогичную смену минимумов и максимумов можно наблюдать и для связанной модели (1.50)-(1.51) (рисунок 3.7 (б)).

На рисунке 3.8 изображены доли энергии A_0 и S_0 , (а) и (б) соответственно. В выражения для вычисления энергии каждой моды E_n , так же как и ранее, в качестве сомножителя входят коэффициенты $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}(\zeta_n)$,

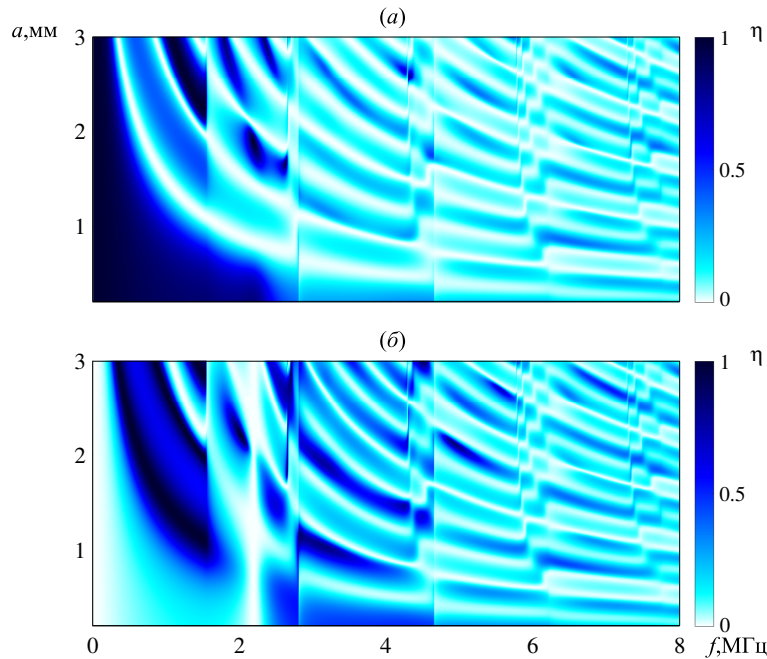


Рис. 3.8: То же, что и на рисунке 3.6, но для кругового пьезоактуатора.

поэтому полученные численные результаты качественно схожи с результатами для полосового пьезоактуатора.

При проведении численных расчетов использовались параметры упругой подложки и пьезокерамики, указанные в §3.3. Толщина кругового и полосового пьезоактуатора составляет $h_0 = h/25 = 0.04$ мм для рисунков 3.5 – 3.8.

ГЛАВА 4. ГИБРИДНАЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СРЕД С ЛОКАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Численное моделирование процесса возбуждения, распространения и дифракции бегущих волн в средах с локальными неоднородностями (препятствиями) сопряжено с большими вычислительными затратами, связанными с необходимостью сеточной аппроксимации протяженных областей, а также с проблемами строгого учета условий излучения на бесконечности. Поэтому разрабатываются гибридные численно-аналитические подходы, основанные на сопряжении численного решения в локальной окрестности препятствия и/или источника с явным аналитическим представлением в полубесконечной внешней области. Однако в стандартных конечно-элементных пакетах возможность такого сопряжения с внешним полем, тем более в случае многомодового разложения, как правило, отсутствует. В работе [26] предложена гибридная вычислительная схема, позволяющая реализовать подобное сопряжение, используя стандартный конечно-элементный пакет (для численных примеров, приведенных ниже, использовался пакет COMSOL Multiphysics [52]). С его помощью строится набор вспомогательных численных решений, служащих базисом для искомого решения в локальной внутренней области. Неизвестные коэффициенты разложения по данному базису и по нормальным модам в полубесконечной внешней области определяются затем из условий непрерывности полей смещений и напряжений на границе между этими областями.

В данной главе приводится описание реализации данного подхода в

скалярном и векторном случаях, а также обобщение представленного подхода на случай множественных препятствий, разделенных зонами однородности. Для оценки достоверности результатов и эффективности алгоритма проводится сопоставление с полуаналитическим решением задачи дифракции бегущих волн на поверхностном горизонтальном препятствии, а также с конечно-элементным решением, полученным при искусственном ограничении области дискретизации с помощью поглощающих границ. Кроме того, приводится сопоставление с результатами, полученными другими авторами, для волновода переменной толщины.

§4.1. Общая схема решения в скалярном случае

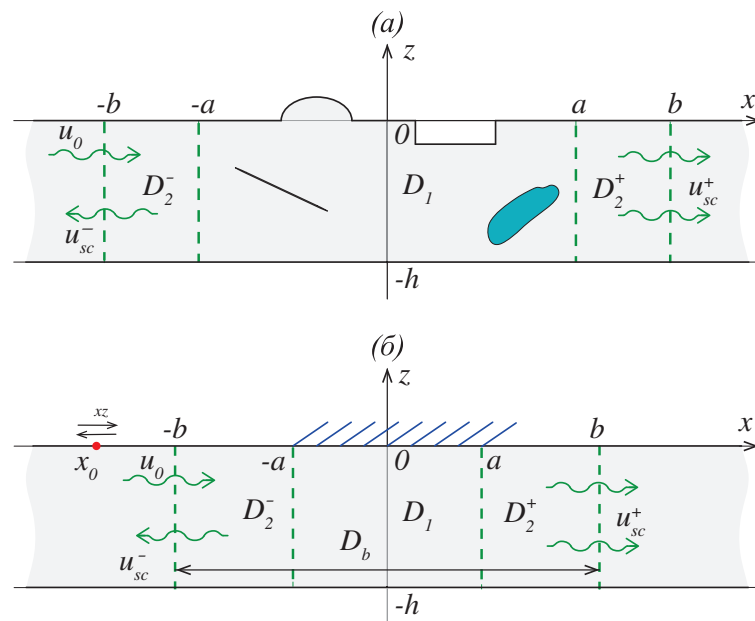


Рис. 4.1: (а) – полосовой волновод с препятствиями различных типов, локализованными в области $D_1: |x| < a$, (б) – геометрия модельной задачи с поверхностным препятствием в виде жестко зафиксированной части поверхности волновода в области $|x| < a$; область конечно-элементной аппроксимации – $D_b: |x| \leq b$

В качестве модельной рассматривается задача о распространении и

дифракции бегущей волны $p_0(\mathbf{x}) = a_0(z)e^{i\zeta_0 x}$ в акустическом полосовом волноводе $D = D_1 \cup D_2^\pm$, состоящем из ограниченной области D_1 , которая включает в себя локальные неоднородности и в том числе может быть произвольной геометрии (например, переменной толщины), и внешних однородных полуполос постоянной толщины h : $-h \leq z \leq 0$, $a \leq |x| \leq +\infty$ (рисунок 4.1 (а)). Комплексная амплитуда установившихся гармонических колебаний $p(\mathbf{x})$ удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца (1.59), в котором волновое число $\kappa(\mathbf{x})$ зависит от \mathbf{x} во внутренней области D_1 , а во внешних областях D_2^\pm – постоянно: $\kappa = \text{const}$. На горизонтальных границах области D задаются условия Дирихле (1.58) и/или Неймана (1.57). Для определенности считаем, что на нижней границе $p = 0$ для $z = -h(\mathbf{x})$, а на верхней $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$.

Набегающая волна $p_0(\mathbf{x})$ во внешней области $|x| \geq a$, где $\kappa = \text{const}$, удовлетворяет уравнению (1.59), являясь собственным решением соответствующей краевой задачи с однородными граничными условиями $p = 0$ при $z = -h$ и $\partial p / \partial z = 0$ при $z = 0$. Волновое число ζ_0 – один из вещественных корней

$$\zeta_n = \sqrt{\kappa^2 - l_n^2}, \quad l_n = \pi(n - 1/2)/h, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

дисперсионного уравнения

$$\Delta(\alpha, \omega) = \text{ch}(\sigma h) = 0, \quad \sigma = \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}$$

сформулированного для бегущих волн в полосе со свойствами области D_2 . Амплитудный множитель $a_0(z)$ нормальной моды p_0 с номером j имеет вид: $a_0(z) = a_j(z) = \cos l_j z$. Здесь $a_j(z)$ – ее собственная форма, соответствующая корню $\zeta_0 = \zeta_j$.

Рассеянное волновое поле p_{sc} , возникающее в результате дифракции падающей моды p_0 на неоднородностях области D_1 , в области D_2 можно

представить в виде разложения по нормальным модам с неизвестными коэффициентами c_n^\pm :

$$p_{\text{sc}}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} c_n^- a_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & x \leq -a, \\ c_n^+ a_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & x \geq a, \end{cases} \quad a_n^- = a_n^+ = a_n. \quad (4.2)$$

Во внутренней области D_1 решение предполагается построить методом конечных элементов, для чего в дополнение к условиям на нижней и верхней границах необходимо задать граничные условия и на ее боковых торцах $x = \pm a$. В соответствии с представлением (4.2) на любых вертикальных отрезках $x = \pm b$, $-h \leq z \leq 0$, $b > a$ волновое поле можно записать с точностью до бесконечного набора неизвестных констант c_n^\pm :

$$p = p_0 + p_{\text{sc}}, \quad p_{\text{sc}}(\pm b, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\pm a_n(z) e^{i\zeta_n r}, \quad r = b - a. \quad (4.3)$$

Наличие неизвестных коэффициентов не позволяет непосредственно использовать это представление для задания граничных условий на торцах прямоугольной области $|x| < b$ или для построения DtN-отображений, чтобы применить стандартный конечно-элементный пакет. Использование разложения по модам в качестве дополнительного бесконечного элемента, так, чтобы коэффициенты c_n^\pm определялись одновременно с коэффициентами конечных элементов внутренней области из единой системы уравнений МКЭ, также невозможно без изменения кода стандартного пакета.

Чтобы обойти это препятствие, формулируются вспомогательные МКЭ-задачи с известными условиями на торцах, соответствующими собственным формам $a_n(z)$. При этом необходимо ограничиться конечным числом таких задач. Для этого достаточно учесть, что среди счетного набора корней ζ_n (4.1) вещественными является только их конечное число, а остальные корни – комплексные с мнимой частью, растущей пропорционально

номеру n : $\text{Im } \zeta_n \sim O(n)$, $n \rightarrow \infty$. Вещественным корням ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N_r$ соответствуют бегущие волны $a_n e^{\pm i \zeta_n (x \mp a)}$, распространяющиеся по волноводу D_2 вправо и влево от области дифракции D_1 без затухания, в то время как амплитуда нормальных мод, соответствующих комплексным корням, экспоненциально убывает с расстоянием:

$$|a_n e^{\pm i \zeta_n (x \mp a)}| \sim O(e^{-\text{Im } \zeta_n (|x| - a)}), \quad |x| - a \rightarrow \infty.$$

Данное свойство присуще волноводам конечной толщины любой структуры (анизотропные композитные пластины, многослойные материалы, акустические волноводы с подводным звуковым каналом, скважинные волноводы и т.п.). Это позволяет использовать описанный ниже подход и для таких структур с локальными препятствиями произвольного вида.

Ввиду экспоненциального затухания высших мод, в разложении (4.3) можно ограничиться конечным числом слагаемых $N \geq N_r$, оставаясь в пределах заданной точности (следует отметить, что учитываются все бегущие волны). Поэтому для построения МКЭ-решения выбирается область D_b : $|x| \leq b$, включающая в себя область локальной неоднородности D_1 (рисунок 4.1 (б)). При достаточно большой величине $r = b - a$ вклад остальных экспоненциально затухающих высших мод в пределах заданной точности не влияет на результат. При уменьшении области МКЭ-дискретизации D_b , и тем самым числа узлов сетки, необходимо увеличить число мод N , удерживаемых в разложении (4.2).

Численное решение в области D_b ищется в виде разложения по базисным МКЭ-решениям $p_{F,n}^{\pm}(\mathbf{x})$:

$$p(\mathbf{x}) \approx p_F(\mathbf{x}) = p_{F,0}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N [c_n^+ p_{F,n}^+(\mathbf{x}) + c_n^- p_{F,n}^-(\mathbf{x})], \quad |x| \leq b.$$

Коэффициенты c_n^{\pm} здесь те же, что и в разложении (4.2), а функции $p_{F,n}^{\pm}(\mathbf{x})$

удовлетворяют в области D_b уравнению (1.59) и исходным граничным условиям на ее нижней и верхней границах, а также всем условиям на внутренних границах, если рассматриваются препятствия в виде полостей, трещин, включений и т.п. На боковых торцах $x = \pm b$ задаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} p_{F,0}(-b, z) &= p_0(-b, z), & p_{F,n}^+(-b, z) &= 0, & p_{F,n}^-(-b, z) &= a_n^-(z)e^{i\zeta_n r}, \\ p_{F,0}(b, z) &= 0, & p_{F,n}^+(b, z) &= a_n^+(z)e^{i\zeta_n r}, & p_{F,n}^-(b, z) &= 0, \\ & & -h \leq z \leq 0, & & n &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Во всем волноводе D искомое решение $p(\mathbf{x})$ аппроксимируется функцией $p_N(\mathbf{x})$:

$$p(\mathbf{x}) \approx p_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_0(\mathbf{x}) + p_{\text{sc},N}^-(\mathbf{x}), & x \leq -b, \\ p_F(\mathbf{x}), & |x| \leq b, \\ p_{\text{sc},N}^+(\mathbf{x}), & x \geq b, \end{cases} \quad (4.5)$$

в которой $p_{\text{sc},N}^\pm = \sum_{n=1}^N c_n^\pm a_n(z)e^{i\zeta_n x}$ – конечные суммы, аппроксимирующие рассеянное поле p_{sc} . При таком выборе автоматически выполняется условие непрерывности искомого решения на искусственных внутренних границах $x = \pm b$.

Для определения неизвестных коэффициентов c_n^\pm на искомую функцию $p_N(\mathbf{x})$ накладывается дополнительное условие непрерывности производной $\partial p_N / \partial x$ при $x = \pm b$. Используя обозначения

$$d_n^\pm(x, z) = \frac{\partial p_{F,n}^\pm(x, z)}{\partial x}, \quad e_n^\pm = \frac{\partial}{\partial x} [e^{\pm i\zeta_n(x \mp a)}]_{x=\pm b} = \pm i\zeta_n e^{i\zeta_n r},$$

ЭТИ УСЛОВИЯ МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ВИДЕ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (c_n^- [a_n^-(z) e_n^- d_n^-(-b, z)] - c_n^+ d_n^+(-b, z)) &= d_0(-b, z) - \frac{\partial p_0(-b, z)}{\partial x}, \\ \sum_{n=1}^N (-c_n^- d_n^-(b, z) + c_n^+ [a_n^+(z) e_n^+ - d_n^+(b, z)]) &= d_0(b, z), \quad -h \leq z \leq 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Дискретизация соотношений (4.6), сводящая их к линейной алгебраической системе относительно вектора $\mathbf{c} = (c_1^-, c_2^-, \dots, c_N^-; c_1^+, c_2^+, \dots, c_N^+)^T$ длины $2N$, может быть проведена различными способами. В рассматриваемом случае удобно воспользоваться методом Галеркина, используя в качестве проекторов нормальные моды $a_m^\pm(z) = \cos l_m z$, обладающие свойством ортогональности относительно скалярного произведения в L_2 :

$$(a_n, a_m) = \int_{-h}^0 \cos l_n z \cos l_m z dz = \frac{h}{2} \delta_{mn},$$

δ_{mn} – символ Кронекера. Это приводит к системе размерности $2N \times 2N$

$$A\mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (4.7)$$

матрица которой складывается из заполненной B и диагональной матрицы D :

$$A = D + B, \quad D = \text{diag}(d_1^-, d_2^-, \dots, d_N^-; d_1^+, d_2^+, \dots, d_N^+), \quad B = - \begin{bmatrix} B_1^- & B_1^+ \\ B_2^- & B_2^+ \end{bmatrix},$$

$$d_m^\pm = i e_m^\pm / (2\zeta_m), \quad b_{1,mn}^\pm = (d_n^\pm, a_m) |_{x=-b}, \quad b_{2,mn}^\pm = (d_n^\pm, a_m) |_{x=b}.$$

Правая часть (4.7) представима в виде $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_F$; в векторе \mathbf{f}_0 ненулевым является только j -й элемент $f_{0,j} = -i\zeta_j e^{-i\zeta_j b} h/2$, где j – номер моды, взятой в качестве набегающей волны p_0 , а $\mathbf{f}_F = \{f_{F,1}^-, \dots, f_{F,N}^-; f_{F,1}^+, \dots, f_{F,N}^+\}$ – вектор с элементами $f_{F,m}^\mp = (d_0, a_m) |_{x=\mp b}$.

§4.2. Гибридная численно-аналитическая схема решения краевых задач линейной теории упругости

В качестве модельной задачи для векторного случая рассмотрим упругий изотропный волновод той же геометрии (рисунок 4.1). Вектор комплексной амплитуды смещений \mathbf{u} во внешней однородной области D_2 удовлетворяет векторному уравнению Навье-Ламе (1.12) с постоянными коэффициентами Ламе λ и μ и плотностью ρ . Внешние границы области D_2 для определенности считаем свободными от напряжений. Внутренняя область D_1 , как и ранее, может быть сложной формы, неоднородной и с произвольными условиями на границе. Набегающая волна \mathbf{u}_0 удовлетворяет в D_2 уравнению (1.12) и нулевым граничным условиям (первые из условий (1.9), (1.10)).

Гибридная схема определения параметров рассеянного поля \mathbf{u}_{sc} и конечно-элементного решения \mathbf{u}_F остается в целом той же, что и в скалярном случае. Основное отличие связано с тем, что волновые числа ζ_n в разложении p_{sc} вида (4.2) – это корни дисперсионного уравнения для упругого слоя со свободными от напряжений внешними поверхностями, поведение которых подробно разобрано в §2.3. Собственные формы соответствующих нормальных мод описываются вектор-функциями $\mathbf{a}_n^\pm(z)$, $\mathbf{b}_n^\pm(z)$ из разложений (2.10) и (2.11). Как и выше, ограниченному набору вещественных корней ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N_r$ соответствуют бегущие волны (в рассматриваемом примере – антисимметричные и симметричные волны Лэмба), а комплексным ($n > N_r$) – экспоненциально убывающие с удалением от D_1 составляющие. Соответственно, вектор-функциями являются и базисные МКЭ-решения $\mathbf{u}_{F,n}$, $n = 0, 1, \dots, N$ во вспомогательной области D_b . Граничные условия для их определения формулируются так, чтобы можно было воспользо-

ваться свойством обобщенной ортогональности нормальных мод упругого слоя [42]:

$$(a_{m,x}, b_{n,x}) - (b_{m,z}, a_{n,z}) = 0, \quad n \neq m, \quad (4.8)$$

$$(f, g) = \int_{-h}^0 f(z)g(z)dz.$$

В этом соотношении перемножаются и интегрируются по z компоненты амплитудных функций нормальных мод для вектора смещений $\mathbf{u}_n = \mathbf{a}_n e^{i\zeta_n x}$ и напряжений на вертикальной площадке $\boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_{n,xx}, \tau_{n,xz})^T = \mathbf{b}_n e^{i\zeta_n x}$: $\mathbf{a}_n = (a_{n,x}, a_{n,z})^T$, $\mathbf{b}_n = (b_{n,x}, b_{n,z})^T$.

В соответствии с соотношением (4.8) на торцах $x = -b$ и $x = b$, $-h \leq z \leq 0$ задается первая компонента перемещений $\mathbf{u}_{F,n} = (u_{F,n}, w_{F,n})^T$ и вторая компонента напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{F,n} = (\sigma_{F,n}, \tau_{F,n})^T$:

$$\begin{pmatrix} u_{F,0} \\ \tau_{F,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,x} \\ \tau_{0,xz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^+ \\ \tau_{F,n}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^- \\ \tau_{F,n}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,x}^-(z) \\ b_{n,z}^-(z) \end{pmatrix} e^{i\zeta_n r}, \quad x = -b,$$

$$\begin{pmatrix} u_{F,0} \\ \tau_{F,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^+ \\ \tau_{F,n}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,x}^+(z) \\ b_{n,z}^+(z) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^- \\ \tau_{F,n}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\zeta_n r}, \quad x = b,$$

Подобные граничные условия для численных решений, как и в скалярном случае, автоматически обеспечивают непрерывность первой компоненты u_N вектора смещений \mathbf{u}_N и второй компоненты τ_N соответствующего вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_N$ суммарного искомого решения (аналога представления (4.5)). Условия непрерывности для оставшихся компонент – вертикальных смещений w_N и нормальных напряжений σ_N используются для определения коэффициентов разложения c_n^\pm . Первое из них домножается на $b_{m,z}$, а второе на $a_{m,x}$, вычитается из первого и интегрируется по z в соответствии с соотношением ортогональности (4.8). В результате возникает

система вида (4.7) с такой же структурой матрицы $A = D + B$. Элементы матриц D и B для упругого слоя имеют вид:

$$A = D + B, \quad D = \text{diag}(d_1^-, d_2^-, \dots, d_N^-; d_1^+, d_2^+, \dots, d_N^+), \quad B = - \begin{bmatrix} B_1^- & B_1^+ \\ B_2^- & B_2^+ \end{bmatrix},$$

$$d_m^\pm = \pm e^{i\zeta_m r} \int_{-h}^0 (a_{m,x}(z)b_{m,x}(z) - a_{m,z}(z)b_{m,z}(z)) dz,$$

$$b_{1,nm}^\pm = \int_{-h}^0 (a_{n,x}(z)\sigma_{F,m}^\pm(-b, z) - w_{F,m}^\pm(-b, z)b_{m,z}(z)) dz,$$

$$b_{2,nm}^\pm = \int_{-h}^0 (a_{n,x}(z)\sigma_{F,m}^\pm(b, z) - w_{F,m}^\pm(b, z)b_{m,z}(z)) dz.$$

Правая часть сформированной системы для упругого изотропного слоя, как и ранее, представима в виде суммы двух векторов $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_F$. Вектор \mathbf{f}_0 почти полностью нулевой, кроме элемента с номером j , соответствующего номеру набегающей волны \mathbf{u}_0 : $f_{0,j} = -[(a_{j,x}, b_{j,x}) - (b_{j,z}, a_{j,z})]e^{-i\zeta_j b}$, а элементы вектора $\mathbf{f}_F = \{f_{F,1}^-, \dots, f_{F,N}^-; f_{F,1}^+, \dots, f_{F,N}^+\}$ имеют вид:

$$f_{F,n}^\pm = - \int_{-h}^0 (a_{n,x}(z)\sigma_{F,0}(\pm b, z) - w_{F,0}(\pm b, z)b_{n,z}(z)) dz.$$

Для волноводов более сложного строения (анизотропные, многослойные, функционально-градиентные, пористые) разработаны эффективные алгоритмы построения матрицы Грина K (2.4), поиска полюсов ζ_n и вычисления вычетов K в этих полюсах (а соответственно и вида вектор-функций $\mathbf{a}_n^\pm(z)$ и $\mathbf{b}_n^\pm(z)$ собственных форм) [21, 32, 33], позволяющие применять предлагаемую гибридную схему анализа дифракции на локальных неоднородностях и в таких структурах.

§4.3. Верификации и численные примеры

Для проверки применимости и точности предлагаемой схемы была выбрана тестовая задача дифракции на гибкой, но нерастяжимой накладке, приклеенной к поверхности свободного упругого слоя (рисунок 4.1 (б)). Ее полуаналитическое решение, полученное на основе сведения к интегральному уравнению, в пределах различимой погрешности можно считать точным. Кроме того, для оценки сравнительной эффективности гибридной схемы проводилось сопоставление с МКЭ-результатами, полученными для ограниченных областей, выделенных из рассматриваемой бесконечной полосы с помощью поглощающих граничных условий PML пакета Comsol Multiphysics. В дальнейшем для краткости данный подход называется FEM-PML, а предлагаемая гибридная численно-аналитическая схема – FEM-An.

Ниже все численные результаты приводятся в безразмерном виде, рассчитанные исходя из следующих значений параметров упругой среды: $\lambda = 2.125$, $\mu = 1$ и $\rho = 1$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$), которые используются при построении дисперсионных кривых в §2.3.

Поверхностное препятствие моделируется условием отсутствия нормальных напряжений σ_{zz} и касательных смещений u_x в области $|x| < a$, $z = 0$ (рисунок 4.1 (б)). В качестве источника колебаний задается сосредоточенная касательная нагрузка $\tau_{xz} = \delta(x - x_0)$, приложенная к поверхности слоя в точке $x = x_0$, либо, как в скалярном случае, задается набегающая волна $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a}_0^+(z)e^{i\zeta_0 x}$, приходящая из бесконечности. Вещественные и комплексные ветви дисперсионных кривых (зависимости $\zeta_n(\omega)$) для фундаментальных и нескольких первых высших антисимметричных и симметричных мод A_m и S_m , $m = 0, 1, 2, \dots$ рассматриваемого волновода показаны

на рисунках 2.1, 2.2. Кривая S_1 имеет характерный изгиб, указывающий на наличие обратной волны S_1^* в частотном диапазоне $5.75 < \omega < 6.28$.

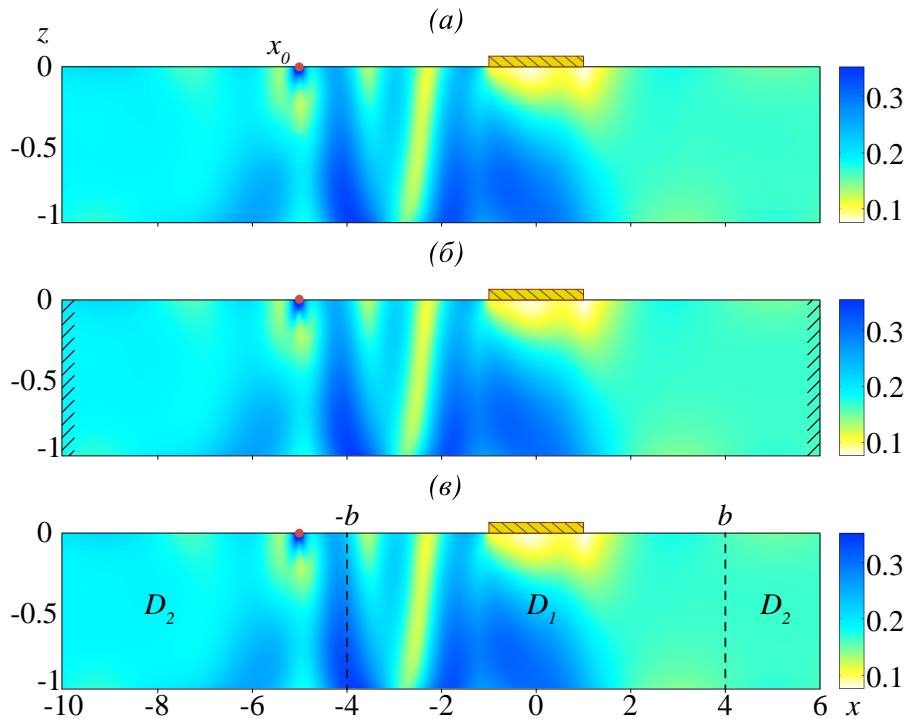


Рис. 4.2: Решение тестовой задачи $|\mathbf{u}(x, z)|$: (а) через сведение к интегральному уравнению (точное решение), (б) МКЭ для ограниченного образца с поглощающими граничными условиями на торцах (FEM-PML), (в) гибридная схема (FEM-An); касательная нагрузка $\tau_{xz} = \delta(x - x_0)$ задана в точке $x_0 = -5$ при круговой частоте $\omega = 2$

На рисунке 4.2 приводится распределение амплитуды смещений $|\mathbf{u}(x, z)|$ в полосе с накладкой полуширины $a = 1$, полученное при $x_0 = -5$, $\omega = 2$ тремя способами:

- а) через решение интегрального уравнения (точное решение);
- б) МКЭ с условием поглощения на торцах $x = -10$ и $x = 6$ (FEM-PML);
- в) гибридная схема с МКЭ-дискретизацией в области $D_1: |x| \leq b = 4$ (FEM-An).

Во втором случае для дискретизации области $-10 \leq x \leq 6$, $-1 \leq z \leq 0$ ис-

пользовано 1350 конечных элементов (рисунок 4.2 (б)), а в третьем – 611 для внутренней области D_1 и $N = 3$ мод поля \mathbf{u}_{sc} в каждой из полуполос $x \leq -4$ и $x \geq 4$ (рисунок 4.2 (в)).

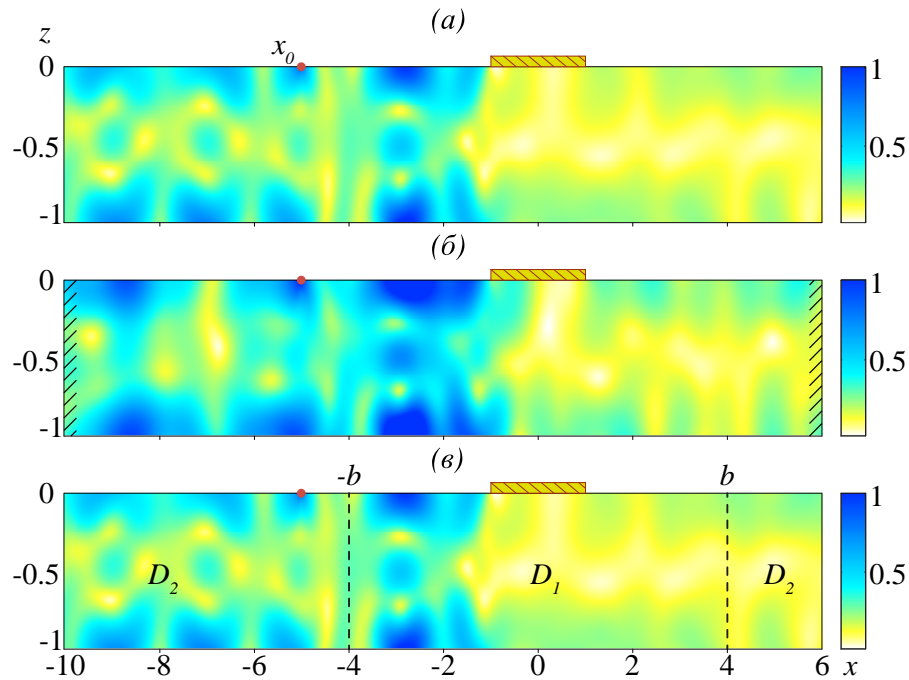


Рис. 4.3: То же, что на рисунке 4.2, но в диапазоне обратной волны ($\omega = 6$); результат FEM-PML (б) отличается от точного (а), в то время как FEM-An (в) дает корректные результаты и для таких частот.

Результаты, полученные этими тремя способами, практически не различаются, что подтверждает возможность использования гибридной схемы. Но, несмотря на меньшее количество конечных элементов, время счета по этой схеме в данном примере оказалось большим, чем у FEM-PML, так как для построения базисных функций $\mathbf{u}_{F,n}^{\pm}$ пакет МКЭ (в нашем случае Comsol в среде Matlab) приходится применять $2N + 1$ раз. Следует отметить, что формируемые при этом алгебраические системы различаются только правыми частями. Поэтому, если пакет допускает сохранение обратной матрицы или формирование и решение системы с несколькими правыми частями за одно обращение, то дополнительных затрат, связан-

ных с необходимостью применять пакет $2N + 1$ раз, можно избежать.

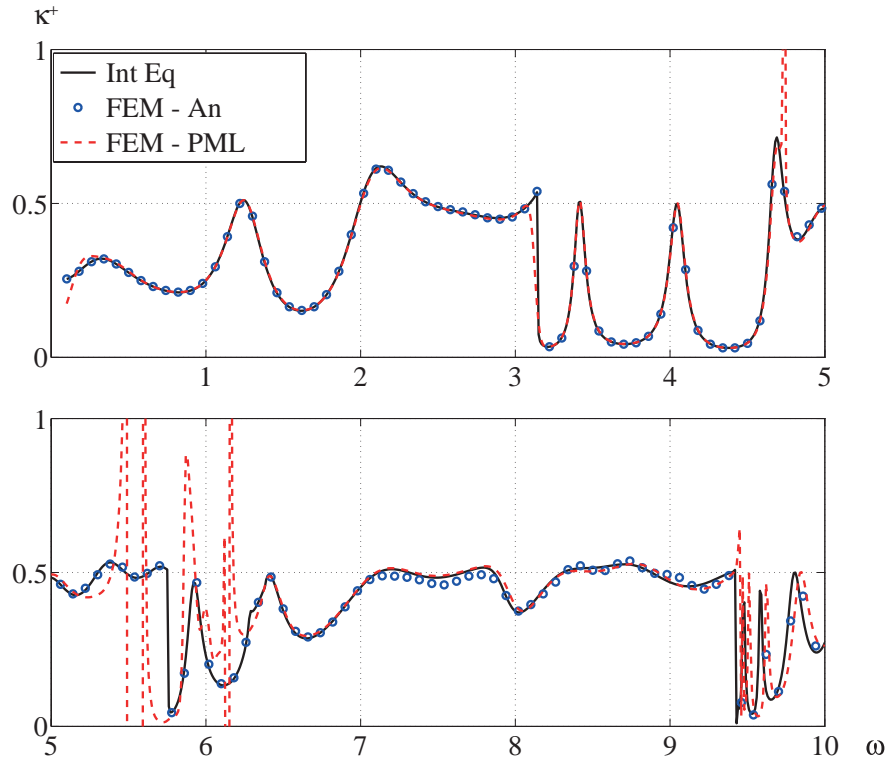


Рис. 4.4: Частотная зависимость коэффициента прохождения $\kappa^+(\omega)$: точное решение (сплошная линия), FEM-PML (пунктир) и FEM-An (маркеры)

Но и без такой оптимизации преимущество FEM-PML быстро сходит на нет с удалением точки приложения нагрузки x_0 от препятствия из-за лавинообразного роста числа конечных элементов, необходимых для аппроксимации увеличивающейся области дискретизации. При расстояниях от источника до препятствия, больших некоторого порогового значения, погрешность МКЭ-решения резко возрастает (говорят, что решение “разваливается”) либо ресурсов персонального компьютера оказывается недостаточно для применения FEM-PML, в то время как точность и затраты гибридной схемы не зависят от точки приложения нагрузки x_0 . Кроме того, переход от исходной бесконечной области к ограниченной с помощью поглощающих граничных условий оказался неприменимым в диапазоне об-

ратных волн, в то время как результаты гибридной схемы совпадают с точными и для таких частот (рисунок 4.3).

Сопоставление результатов, полученных тремя указанными способами во всем рассматриваемом частотном диапазоне, иллюстрируется графиком частотной зависимости коэффициента прохождения $\kappa^+ = E^+/E_0$ (рисунок 4.4); здесь E_0 – осредненное за период колебаний количество волновой энергии, поступающей в волновод от источника, а E^+ – проходящей через его поперечное сечение правее препятствия. Результаты FEM-An совпадают с точными во всем частотном диапазоне, в то время как наблюдается качественное отличие результатов FEM-PML от точных в диапазоне обратных волн и его окрестности.

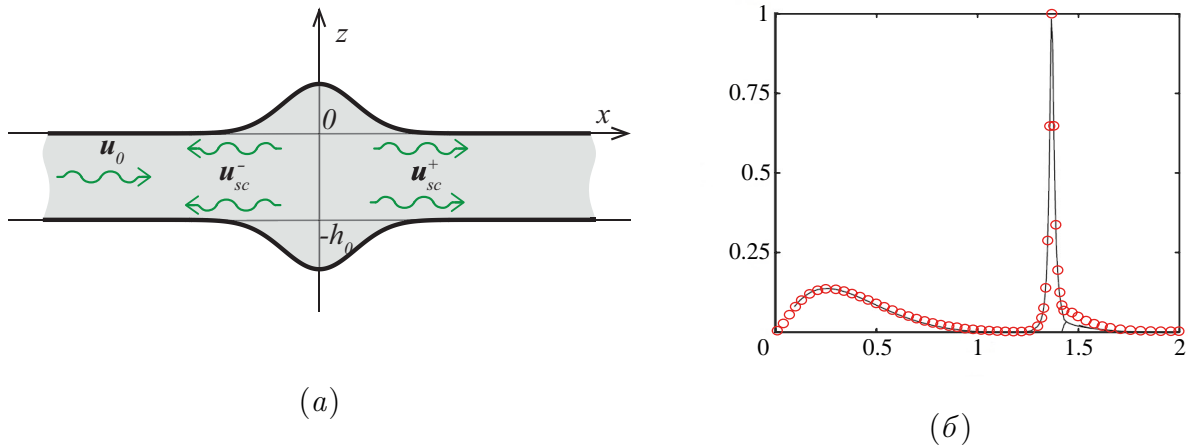


Рис. 4.5: (а) – геометрия задачи; (б) – частотная зависимость коэффициента отражения $\kappa^-(\omega)$: сплошная линия – результаты [125], красные маркеры – FEM-An

Для дополнительного подтверждения корректности гибридной схемы проводилось сопоставление с численными результатами, полученными независимо другими авторами. Например, в работе [125] рассматривалась задача о распространении и дифракции нормальных мод \mathbf{u}_0 в упругих изотропных волноводах переменной толщины. Возникающее волновое поле ищется в виде разложения по упругим модам (аналог представлений (2.10) и

(2.11)).

В качестве примера на рисунке 4.5 (б) приводится частотная зависимость коэффициента отражения антисимметричной моды A_0 от зоны нерегулярности упругого волновода, верхняя и нижняя границы которого описываются функциям $z = (h_1 - h_0)e^{-x^2/L^2}$ и $z = -h_0 - (h_1 - h_0)e^{-x^2/L^2}$ (рисунок 4.5 (а)). Данный волновод имеет переменную толщину по всей длине, однако, ввиду экспоненциального убывания, начиная с некоторых значений $x = \pm b$, определяемых исходя из требуемой точности, его толщину h можно считать постоянной: $h \approx h_0$.

В рассмотренном примере коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$, скорости поперечных и продольных волн $c_s = 2/\pi$ и $c_p = 2/\pi\sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$, плотность $\rho = 1$, а параметры, определяющие геометрию волновода $h_0 = 1.4$, $h_1 = 2.2$ и $L = 1.5$. Значения коэффициента отражения, полученные с помощью гибридной схемы совпадают с результатами статьи [125]. На частоте $\omega \approx 1.37$ наблюдается резкий максимум коэффициента отражения со значением близким к единице. Данное поведение указывает на так называемый эффект ловушечной моды (trapped mode effect [114, 135]).

ГЛАВА 5. ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

В данной главе приводятся основные численные результаты, полученные при решении краевых задач для упругих волноводов с локальными неоднородностями в рамках гибридной численно-аналитической схемы. В §5.1. производится расчет коэффициентов прохождения и резонансных частот рассеяния для упругих волн, падающих на одиночные препятствия различных видов, а в следующем параграфе (§5.2.) вычисляются аналогичные характеристики, но для сред со множественными упругими включениями. Численно определяются диапазоны прохождения и запираения, а также дается обобщение гибридной численно-аналитической схемы на случай сред со множественными локальными препятствиями, разделенными протяженными зонами однородного материала.

§5.1. Коэффициент прохождения и резонансные частоты рассеяния

В рамках данного параграфа рассматривается приложение гибридной численно-аналитической схемы к изучению резонансных явлений в слоистых структурах, а именно, эффекта ловушечных колебаний или ловушечных мод. Данный эффект проявляется как резкое резонансное блокирование одиночным препятствием падающего волнового поля на определенных частотах [25, 89, 92]. В нестационарном поле ловушечные колебания локализируются в окрестности препятствия, что подтверждается экспериментальными измерениями колебаний поверхности с помощью лазерного виброметра [94, 96].

Значения резонансных частот определяются формой, размерами и материальными свойствами рассеивателя, поэтому изучение закономерностей их появления и движения вблизи вещественной оси при варьировании параметров препятствия создает основу для разработки алгоритмов оценки потенциальной опасности скрытых дефектов по резонансным характеристикам рассеяния зондирующих сигналов (метод резонансной идентификации). В частности, для повышения разрешающей способности SHM-систем активного волнового мониторинга тонкостенных конструкций из композитных материалов ультразвуковыми бегущими волнами.

§5.1.1 Волноводы со внутренней полостью

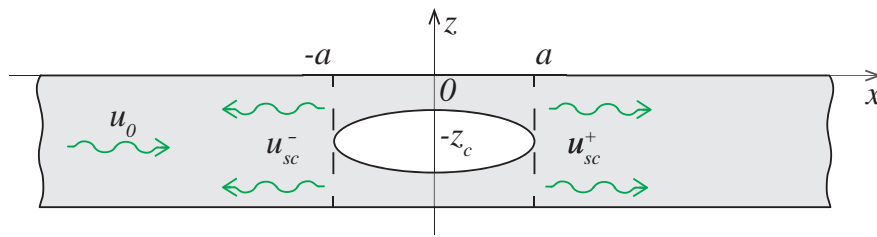


Рис. 5.1: Геометрия задачи о дифракции набегающей волны \mathbf{u}_0 на эллиптической полости

Рассматривается задача о дифракции набегающей волны \mathbf{u}_0 на эллиптической полости с горизонтальной a и вертикальной b полуосями и центром, расположенным в точке $x = 0$ и $z = z_c$ (рисунок 5.1). Для определения частот ловушечных мод с помощью гибридной схемы строятся частотные зависимости коэффициента прохождения κ^+ для падающих мод A_0 и S_0 (рисунки 5.2 и 5.3). В качестве дополнительной проверки корректности полученных результатов проводится сопоставление с результатами других моделей, а именно с методом слоистых элементов (Laminate element method – LEM) [19]. В рамках данного подхода отраженное волновое поле

строится в виде разложения по фундаментальным решениям для конкретных слоистых структур (в данном случае для упругой полосы). Отличие от классического метода граничных элементов, базирующегося на использовании фундаментальных решений для однородного упругого пространства, состоит в том, что слоистые элементы тождественно удовлетворяют не только уравнениям, но и граничным условиям на всех внутренних и внешних плоскопараллельных границах. Поэтому для определения неизвестных коэффициентов, входящих в разложение рассеянного волнового поля, требуется удовлетворить граничным условиям только на поверхности препятствия, что позволяет существенно сократить число элементов по сравнению с методом граничных элементов, где требуется размещать элементы и на всех внутренних и внешних границах.

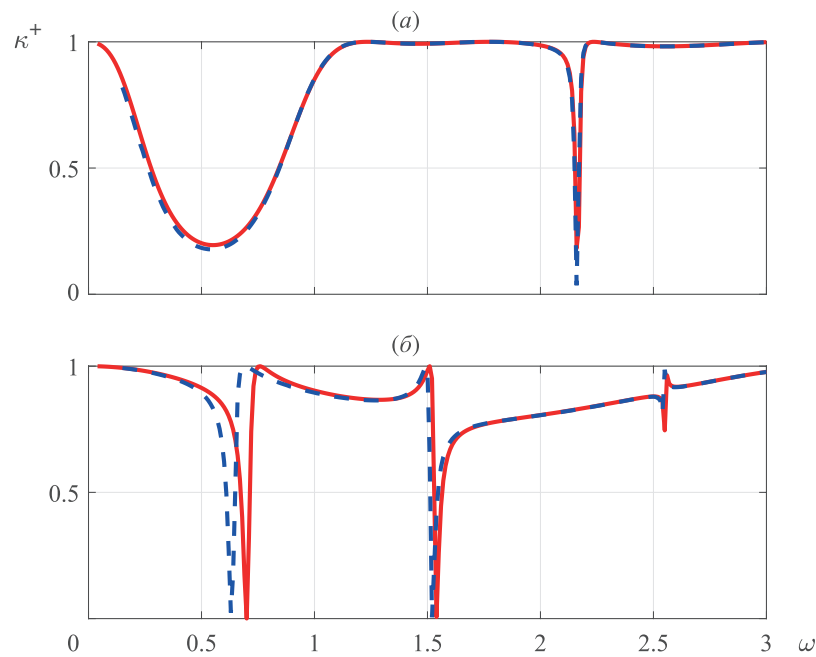


Рис. 5.2: Коэффициент прохождения для задачи дифракции набегающих волн A_0 (а) и S_0 (б) на эллиптической полости с полуосями $a = 1$ и $b = 0.2$, расположенной в центре волновода $z_c = -0.5$; красная сплошная линия – FEM-An, пунктирная линия – LEM

Резонансные частоты рассеяния, на которых проявляется эффект ло-

вещечных мод $\omega_n = 2\pi f_n$, аппроксимируются корнями характеристического уравнения

$$\det A(\omega_n) = 0, \quad (5.1)$$

где A – матрицы системы (4.7). В рассматриваемом примере (рисунок 5.1) модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность равны $Y = 2.66$, $\nu = 0.33$ и $\rho = 1$. Для препятствия в виде эллиптической полости с указанными на рисунке 5.2 геометрическими параметрами первые наиболее близкие к вещественной оси резонансные (собственные) частоты ω_n имеют значения:

$$\omega_1 = 0.71 - 0.02i, \quad \omega_2 = 1.53 - 0.01i, \quad \omega_3 = 2.17 - 0.01i, \quad \omega_4 = 2.554 - 0.0008i.$$

Полученные значения корней хорошо согласуются с локальными минимумами коэффициента прохождения κ^+ , на рисунке 5.2. Здесь следует отметить, что метод слоистых элементов даёт недостаточно точное решение ввиду малого количества базисных элементов (черная пунктирная линия). Однако, с увеличением числа элементов, значения κ^+ практически совпадают между собой (синяя пунктирная линия).

Важно отметить, что корни характеристического уравнения (5.1) не зависят от падающего волнового поля \mathbf{u}_0 , которое входит лишь в правую часть системы (4.7). В примере, рассмотренном на рисунке 5.2 резонансная частота ω_3 проявляется только на графике коэффициента прохождения моды A_0 , а ω_1 , ω_2 и $\omega_3 - S_0$. Корни уравнения зависят от параметров слоя и препятствия, поэтому, изменяя только горизонтальную полуось эллипса ($a = 2$, рисунок 5.3), получаем новый набор резонансных частот:

$$\omega_1 = 0.22 - 0.005i, \quad \omega_2 = 0.53 - 0.001i, \quad \omega_3 = 0.97 - 0.0002i, \quad \omega_4 = 1.47 - 0.0007i.$$

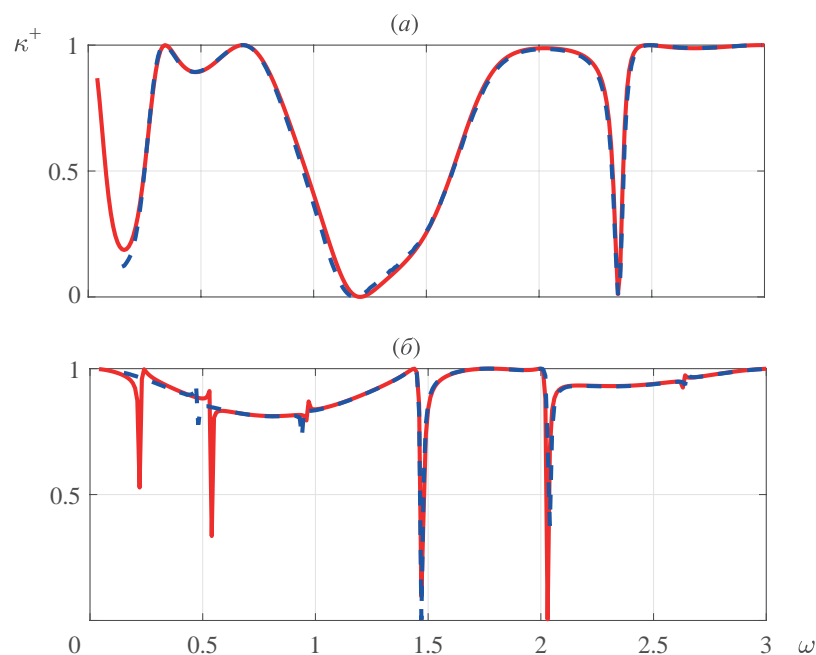


Рис. 5.3: То же, что на рисунке 5.2, но для полости с вдвое большей горизонтальной полуосью

§5.1.2 Волноводы с упругим включением

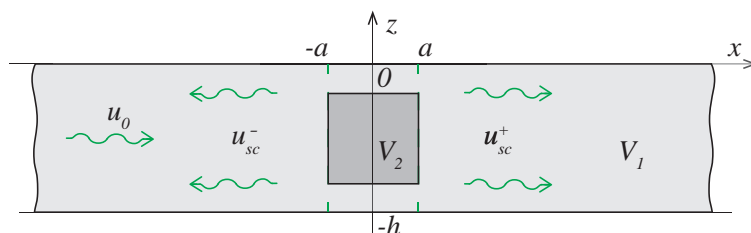


Рис. 5.4: Упругое квадратное включение V_2 , встроенное в волновод

Как упоминалось ранее, гибридная численно-аналитическая схема реализована в связке Comsol Multiphysics версии 5.2 и Matlab R2016b, используя инструмент COMSOL LiveLink™ for MATLAB®, встроенного в конечно-элементный пакет Comsol. Подобная связь позволяет проводить быстрый параметрический анализ для различных задач. В качестве примера рассматривается дифракция фундаментальной моды S_0 на упругом

квадратном включении V_2 со стороной $2a = 0.6$ (рисунок 5.4). Изотропный материал включения описывается следующими значениями безразмерных параметров: коэффициент Пуассона $\nu_2 = 0.3$, плотность $\rho_2 = (4/7)c_s^{(2)} + (3/7)$, коэффициенты Ламе $\mu_2 = c_s^{(2)}c_s^{(2)}\rho_2$ и $\lambda_2 = 2\mu_2\nu_2/(1-2\nu_2)$, где $c_s^{(2)}$ – скорость поперечных волн. Включение располагается по центру волновода: $(x_c, z_c) = (0, -0.5)$. В качестве волновода V_1 выступает изотропный слой со свободными границами, коэффициент Пуассона, модуль сдвига, плотность и толщина которого имеют следующие значения $\nu_1 = 0.34$, $\mu_1 = 1$, $\rho_1 = 1$ и $h = 1$ соответственно. На границе раздела V_1 и V_2 задаются условия непрерывности смещений и напряжений.

Варьирование скорости поперечных волн во включении позволяет получать либо мягкий ($c_s^{(2)} \leq 1$), либо жесткий ($c_s^{(2)} > 1$) материал по сравнению с материалом волновода. При предельных значениях мягкости ($c_s^{(2)} \rightarrow 0$) условия на границах раздела V_1 и V_2 могут быть заменены на условия равенства нулю напряжений вдоль границы включения ∂V_2 , а при $c_s^{(2)} \rightarrow \infty$ – равенством нулю смещений.

В случае мягкого включения (рисунок 5.5), в двухмодовом диапазоне частот ($\omega < \pi$), при малых (рисунок 5.5 (а)) и средних значениях $c_s^{(2)}$ (рисунок 5.5 (б)), наблюдается постепенное уменьшение коэффициента прохождения падающей волны S_0 вплоть до нуля. При этом возбуждается одна ловушечная мода для $0.2 < c_s^{(2)} < 0.5$ (например, при $c_s^{(2)} = 0.4$ резонансная частота $\omega = 2.95 - 0.45i$). В трех- и пятимодовом диапазоне ($\omega > \pi$), при малых и средних поперечных скоростях во включении, падающая волна преимущественно отражается от препятствия ($\kappa^+ < 0.5$). При увеличении жесткости препятствия (рисунок 5.5 (в)) поведение коэффициента прохождения стабилизируется и в двухмодовом диапазоне он фактически равен

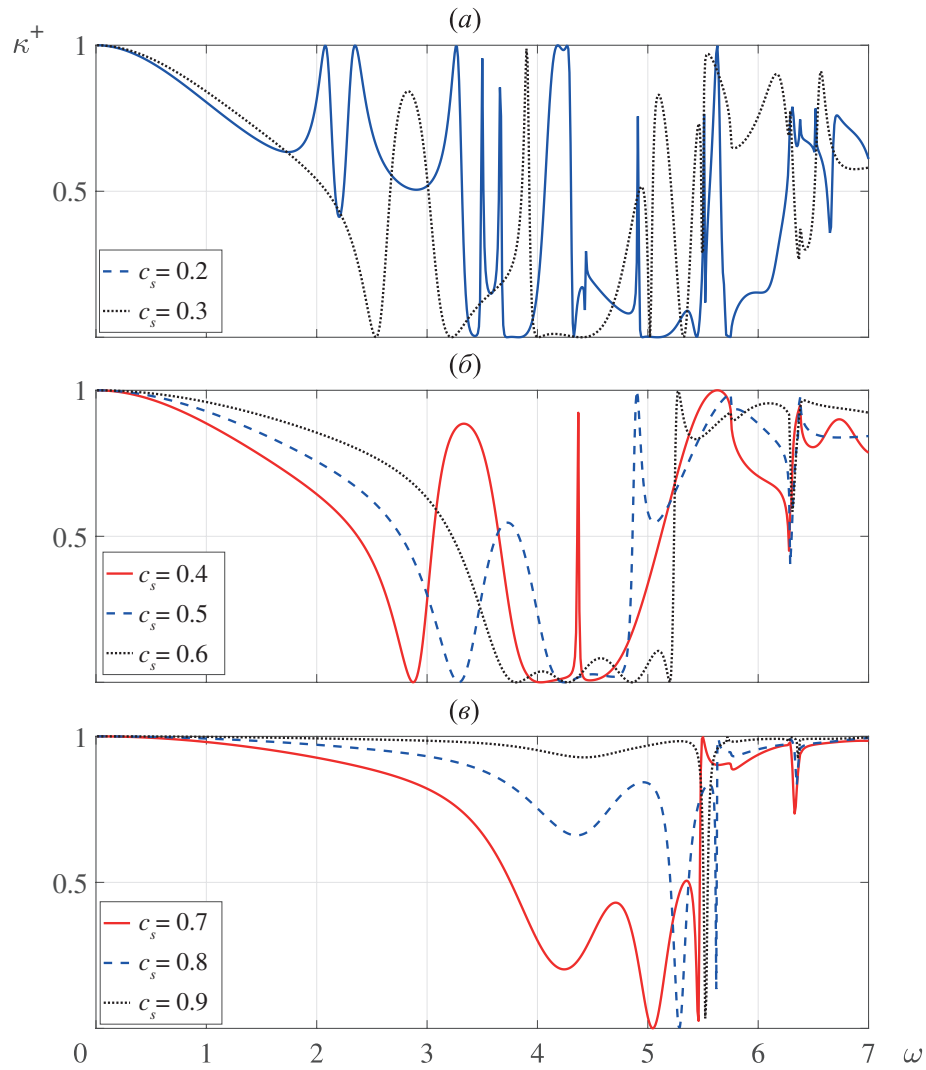


Рис. 5.5: Частотные зависимости коэффициента прохождения $\kappa^+(\omega)$ для фундаментальной моды S_0 , набегающей на упругое квадратное включение со стороной $2a = 0.6$, при изменении скорости поперечных волн $c_s^{(2)}$ во включении, указанном в легенде

единице. Характерные минимумы κ^+ наблюдаются вблизи диапазона обратных волн ($5.75 < \omega < 6.28$).

В случае жесткого включения (рисунок 5.6) ловушечные моды, при $1 < c_s^{(2)} < 5$, не возбуждаются. Резкие локальные максимумы κ^+ приходятся на частоты возбуждения бегущих волн ($\omega = 5.75$ и $\omega = 6.39$), а резкий локальный минимум ($\omega = 6.29$) связан с тем, что обратная волна перестаёт быть бегущей, т.к. соответствующее ей волновое число стано-

вится чисто мнимым. В целом, при увеличении жесткости препятствия, среднее значение коэффициента прохождения уменьшается.

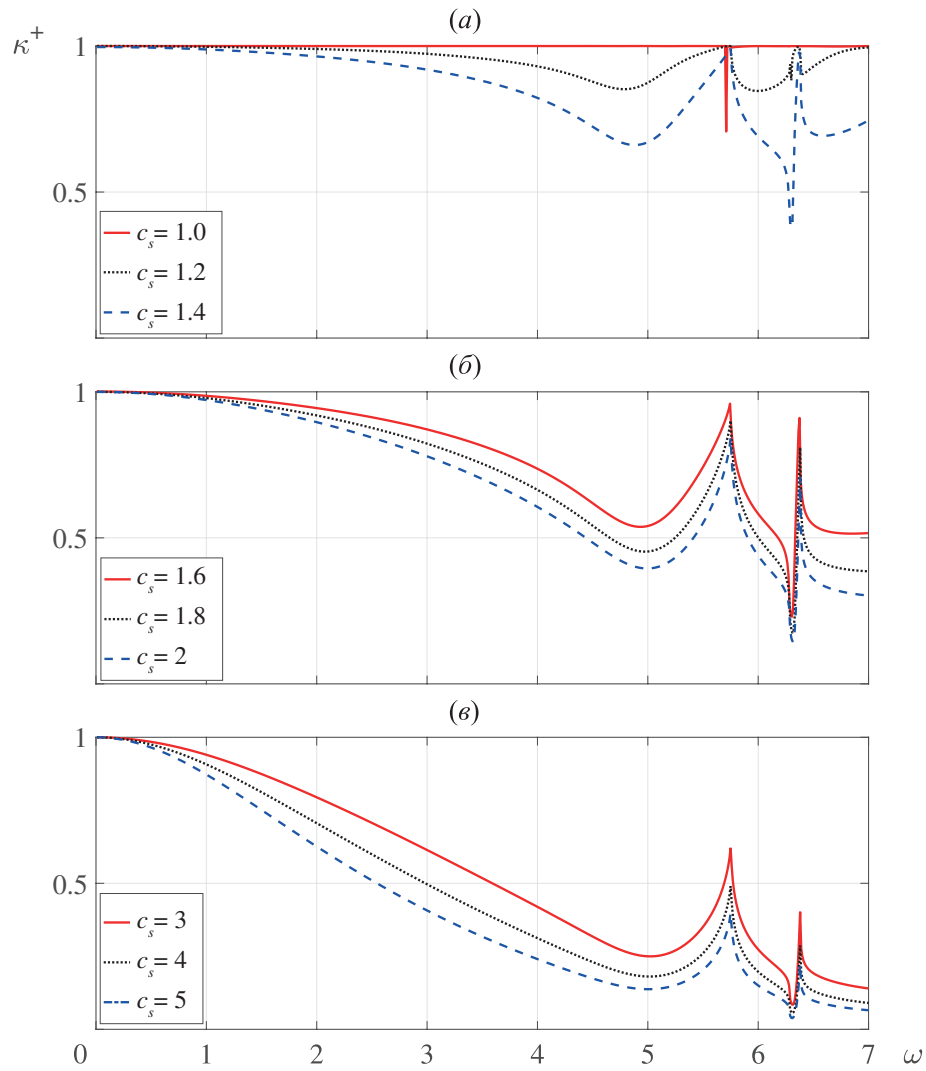


Рис. 5.6: То же, что и на рисунке 5.5, но для более жестких включений

§5.1.3 Волноводы с рельефной поверхностью

Рассматривается полоса ($\mu = 1$, $\nu = 0.33$, $\rho = 1$) толщины $h = 1$ с прямоугольной выемкой толщины $2a$ и высоты d (рисунок 5.7 (a)), моделирующей повреждения металлических пластин в результате коррозии. Коэффициент прохождения κ^+ для набегающих мод A_0 и S_0 изображен

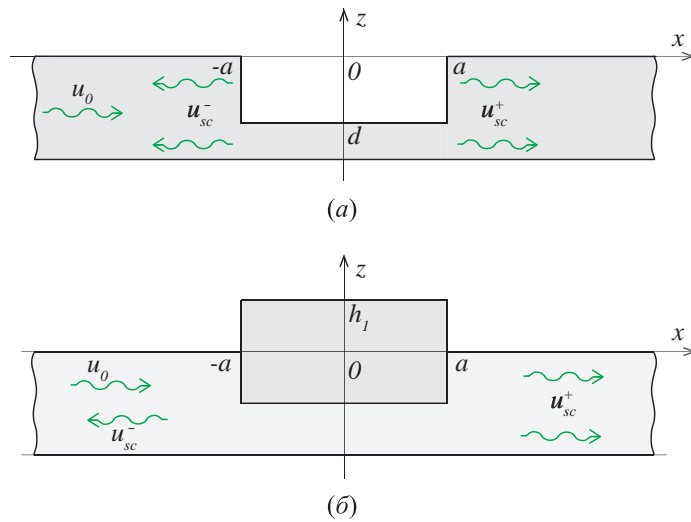


Рис. 5.7: Прямоугольная выемка $2a \times d$ – (а); упругое включение размером $2a \times 2d$, выступающее над волноводом на высоту h_1 – (б)

на рисунках 5.8 и 5.9. Вновь, в качестве дополнительной проверки, проводится сопоставление численных результатов гибридной схемы (красная сплошная линия) и метода слоистых элементов (синяя пунктирная линия).

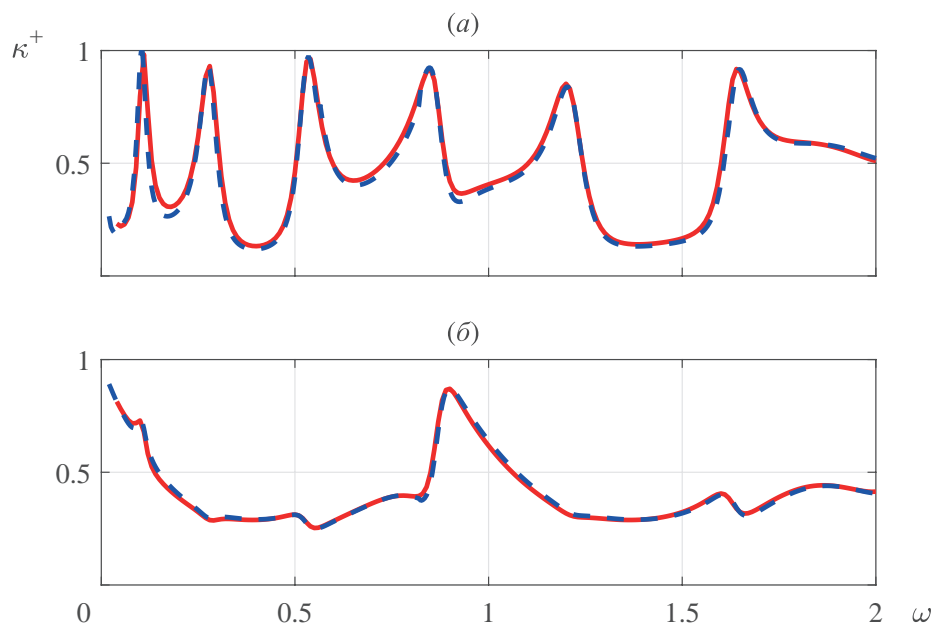


Рис. 5.8: Частотная зависимость коэффициента прохождения $\kappa^+(\omega)$ для фундаментальных мод A_0 (а) и S_0 (б), набегающих на прямоугольную выемку (рисунок 5.7 (а)) полуширины $a = 2.5$ и глубины $d = 0.75$; сплошная линия – FEM-AP, пунктирная – LEM

При изменении глубины выемки (вплоть до половины толщины полосы $d = h/2 = 0.5$) коэффициент прохождения κ^+ близок к единице. Однако, с увеличением $d > 0.5$ экранирующие свойства выемки повышаются (для любой падающей волны), при этом появляются выраженные локальные максимумы коэффициента прохождения κ^+ (гораздо более ярко выражено для моды A_0). Сами пики становятся более острыми при увеличении глубины d , а ширина выемки $2a$ влияет на количество пиков в рассматриваемом диапазоне частот, что частично можно наблюдать на рисунках 5.8 и 5.9, а более наглядно показано в статьях [90, 94].

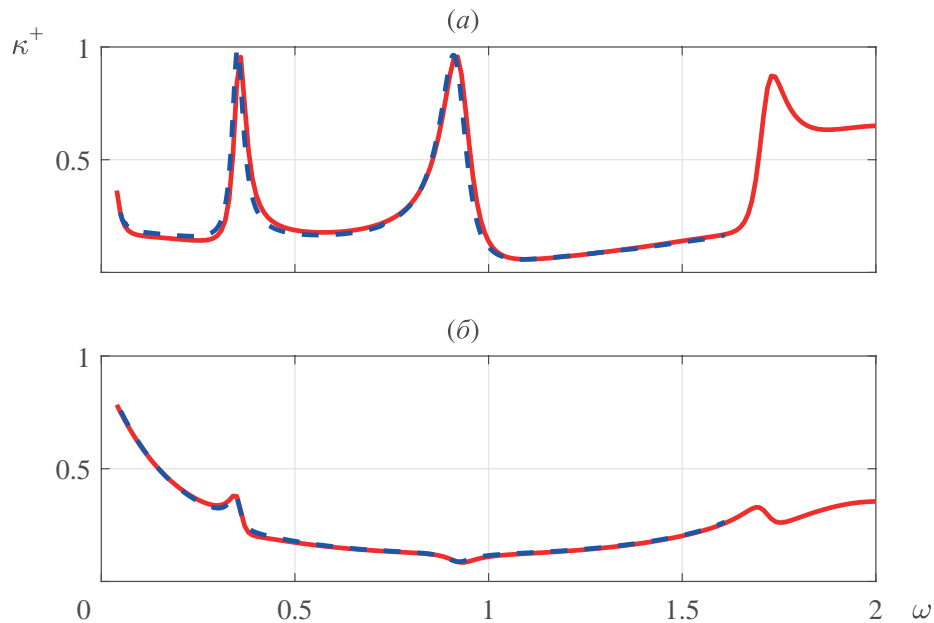


Рис. 5.9: То же, что на рисунке 5.8, но для волновода с выемкой полуширины $a = 0.99$ и глубины $d = 0.855$

Эффект ловушечных мод в данном случае проявляется не в виде резонансного отражения не с коэффициентом $\kappa^+ \approx 0$, а наоборот, характеризуется максимальным прохождением ($\kappa^+ \approx 1$). Например, для выемки $a = 2.5$, $d = 0.75$ (рисунок 5.8), первые четыре пика резонансного переноса

волновой энергии совпадают с собственными частотами рассеяния:

$$\omega_1 = 0.11 - 0.02i, \omega_2 = 0.28 - 0.03i, \omega_3 = 0.53 - 0.03i, \omega_4 = 0.87 - 0.04i.$$

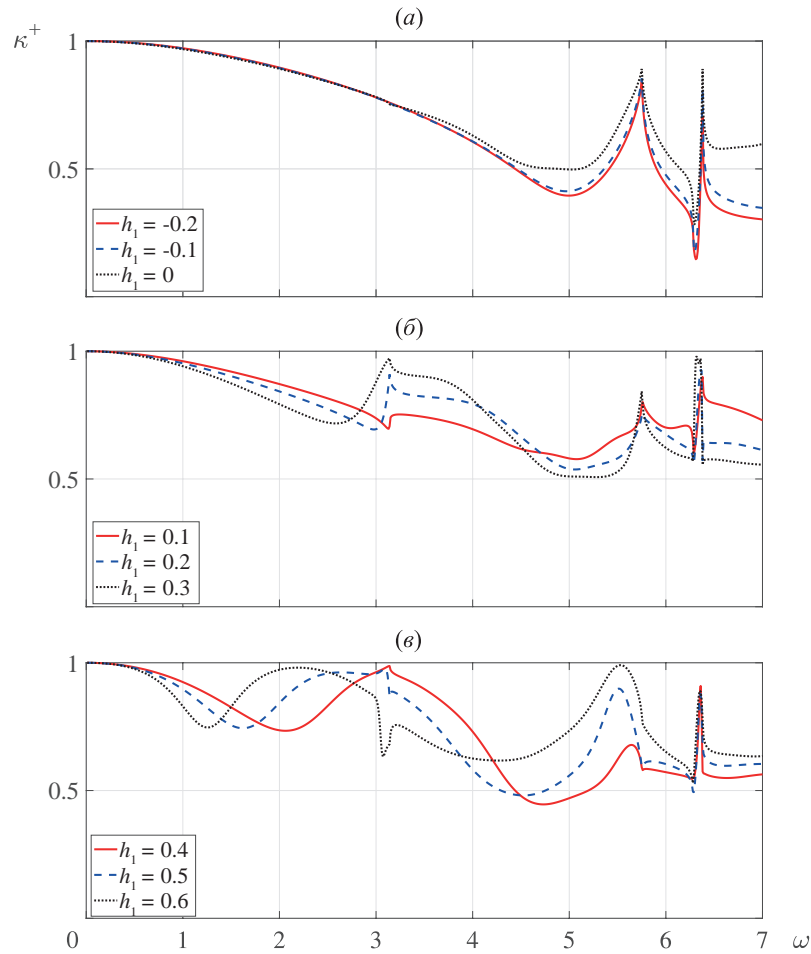


Рис. 5.10: Коэффициент прохождения $\kappa^+(\omega)$ для задачи о дифракции фундаментальной моды S_0 , набегающей на упругое включение, выступающее над слоем на высоту h_1 рисунок 5.7 (б)

В качестве дополнительного примера волноводов с рельефной поверхностью рассматривалась задача о дифракции падающей волны S_0 на упругом квадратном включении со стороной $2a = 0.6$, выступающем над слоем на высоту h_1 (рисунок 5.7 (б)). При получении численных результатов использовались параметры, указанные в §5.1.2, при этом скорость поперечных волн во включении $c_s^{(2)} = 2$.

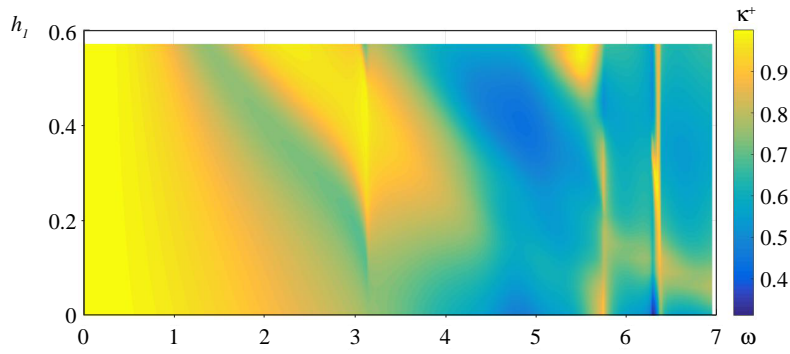


Рис. 5.11: Поверхность, иллюстрирующая зависимость коэффициента прохождения κ^+ от частоты и высоты h_1 для моды S_0 , геометрия задачи изображена на рисунке 5.7 (б)

В целом, бегущая мода S_0 слабо взаимодействует с данным препятствием, что можно наблюдать на рисунках 5.10 и 5.11. Экранирующие свойства препятствия выше при его полном погружении в волновод (рисунок 5.10 (а)), при этом данные свойства в среднем уменьшаются с уменьшением погруженной части препятствия. Коэффициент прохождения κ^+ , как функция от h_1 и частоты ω , имеет достаточно гладкую структуру (рисунок 5.11). Резкие минимумы и максимумы $\kappa^+(\omega, h_1)$ приходятся на частоты отсечки мод A_1 , S_1 , S_1^* и S_2 . Ловушечные моды в данном случае не возбуждаются.

§5.2. Волноводы со множественными препятствиями

Данный параграф посвящен изучению волноводов со множественными локальными неоднородностями. Примерами подобного рода объектов могут послужить композитные материалы или фоновые кристаллы. Данные структуры обладают рядом свойств, позволяющих реализовывать такие механизмы как, например, поглощение падающего волнового поля, локализация волн, фокусировка, частотная фильтрация и т.д. Учет подобных особенностей позволяет создавать новые устройства, использующие

управляемые объемные или поверхностные волны в широком диапазоне частот [81, 129, 132]. Наиболее известное и часто используемое свойство фоновых кристаллов это резонансное блокирование падающего волнового поля в определенных диапазонах частот, называемых зонами запираения.

§5.2.1 Формирование зон прохождения-запираения

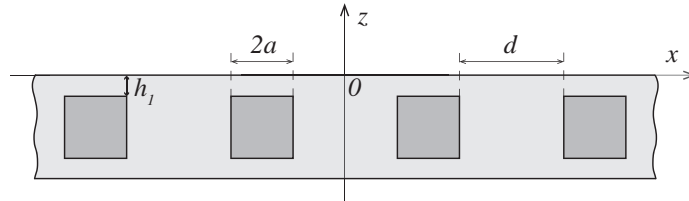


Рис. 5.12: Полосовой волновод со множественными упругими квадратными включениями $2a \times 2a$, равноудаленными друг от друга на расстоянии d

В рамках диссертационной работы, формирование зон прохождения-запираения изучается на примере полосового волновода толщины $h = 1$ со множественными упругими квадратными включениями $2a \times 2a$, равноудаленными друг от друга на расстоянии d (рисунок 5.12). Включения расположены либо в центре волновода (точки пересечения диагоналей квадрата имеют координаты $(x_i, -h/2)$, $i = 1, \dots, N$, где N – общее число квадратных включений), либо частично заглублены в него – $(x_i, 0)$. Безразмерные упругие параметры свободной от напряжений полосы и включений связаны такими же соотношениями, как и в §5.1.2, однако теперь коэффициент Пуассона для упругого слоя $\nu = 0.34$, а скорость поперечных волн во включении $c_s^{(2)} = 2$. В качестве падающего волнового поля \mathbf{u}_0 выступают моды A_0 или S_0 .

На рисунках 5.13-5.16 представлены коэффициенты прохождения падающих волн A_0 и S_0 для различного числа препятствий N . Наиболее чет-

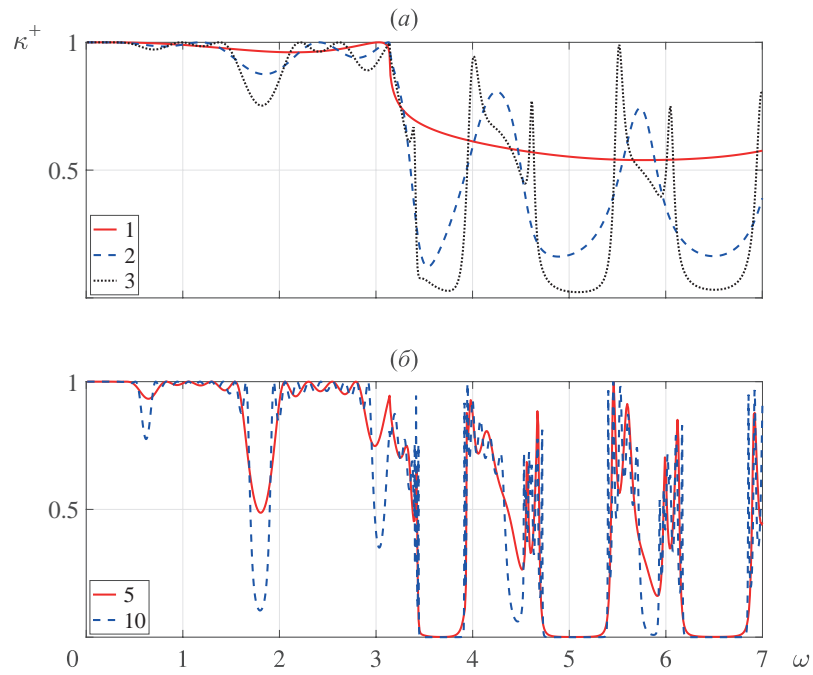


Рис. 5.13: Коэффициент прохождения $\kappa^+(\omega)$ для различного числа (указанного в легенде) упругих квадратных включений со сторонами $2a = 0.6$, расположенных в центре волновода $(x_i, -0.5)$ на расстоянии $d = 2$ друг от друга; в качестве набегающей волны рассматривается фундаментальная мода A_0

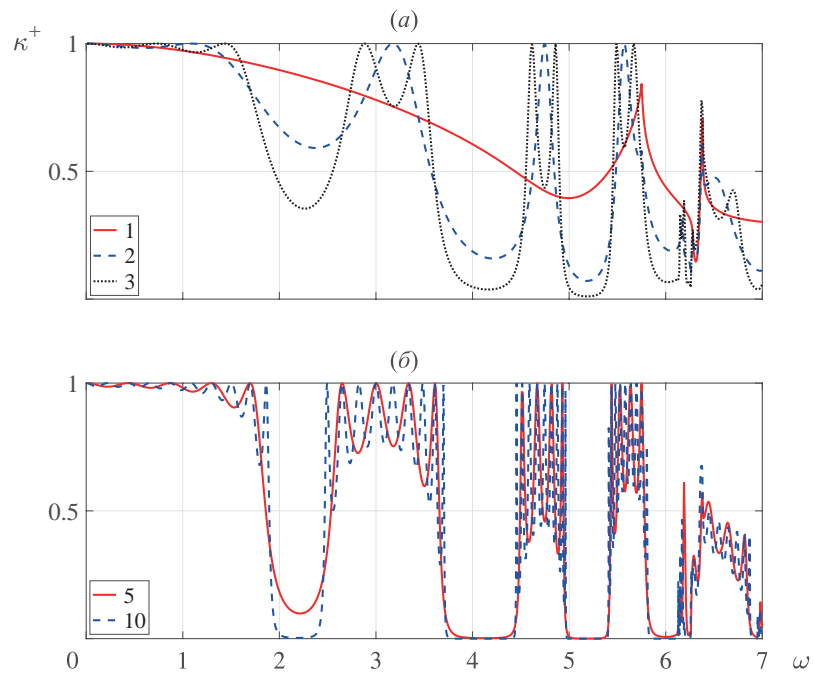


Рис. 5.14: Тоже, что и на рисунке 5.13, но для моды S_0

кую структуру зон прохождения-запираания можно наблюдать на рисунке 5.14 (б) для максимального числа включений $N = 10$. Диапазон круговых частот $\omega \in (0, 7)$ разделяется на несколько подынтервалов, которые затем разбиваются на две группы. В первой группе коэффициент прохождения близок к нулю $\kappa^+ \approx 0$ (в рассматриваемом примере это интервалы $D_b = (1.91, 2.46) \cup (3.71, 4.44) \cup (4.94, 5.41) \cup (5.81, 6.13) \cup (6.2, 6.266) \cup (6.87, 6.95)$). Эти частотные диапазоны называются зонами запираания. И вторая группа интервалов $D_p = (0, 7) \setminus D_b$ – зоны прохождения. Следует отметить, что при увеличении числа препятствий расположение зон не изменяется, а лишь уточняется.

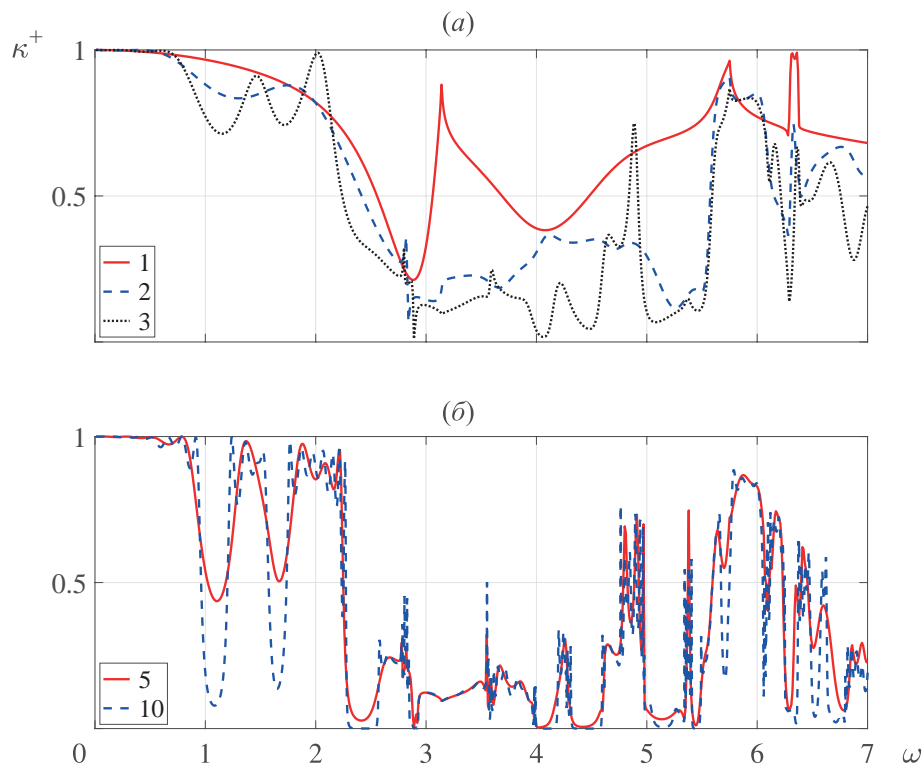


Рис. 5.15: Коэффициент прохождения $\kappa^+(\omega)$ для различного числа (указанного в легенде) упругих квадратных включений со сторонами $2a = 0.6$, выступающих над волноводом на $h_1 = 0.3$ и равноудаленных друг от друга на $d = 2$; в качестве набегающей волны рассматривается фундаментальная мода A_0

Пики коэффициента прохождения ($\kappa^+ \approx 1$) совпадают с веществен-

ными частями резонансных частот ω_n . Причем количество резонансных частот в интервалах прохождения равно в точности количеству препятствий минус один: $N - 1$ [92, 94, 100]. Например, если посчитать количество пиков в интервале $\omega \in (2.46, 3.71)$ рисунка 5.13 (а) или (б), то количество локальных максимумов в точности совпадает с числом препятствий минус один. Подобная структура коэффициента прохождения, а соответственно и волнового поля, встречается и в других случаях, например, для последовательной группы выемок [90, 94] или слоев [79].

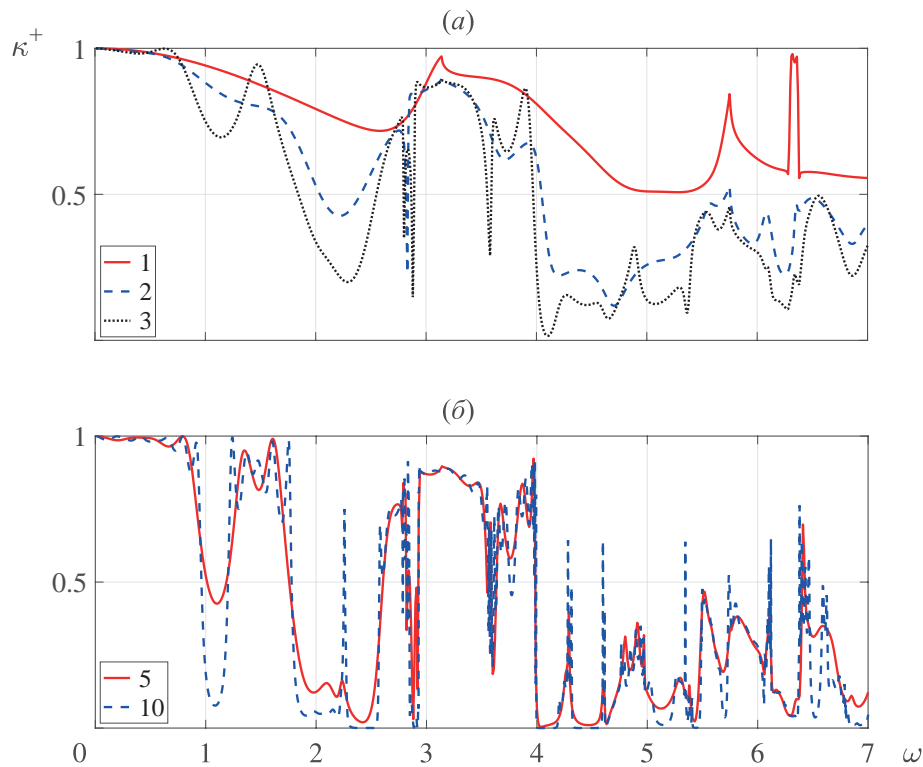


Рис. 5.16: Тоже, что и на рисунке 5.15, но набегающей волной является S_0

В случае частично заглубленного препятствия κ^+ не имеет столь ярко выраженную структуру зон прохождений-запирания (рисунки 5.15 и 5.16), как в случае полностью погруженных включений (рисунки 5.14 и 5.15). Однако, и здесь данные зоны определяются, но зоны запирания имеют меньший частотный диапазон в среднем, но количество самих интервалов

больше. Резонансные частоты ω_n , а соответственно и пики коэффициента прохождения, не столь ярко выражены, но в некоторых случаях тоже видны.

§5.2.2 Модификация гибридной численно-аналитической схемы

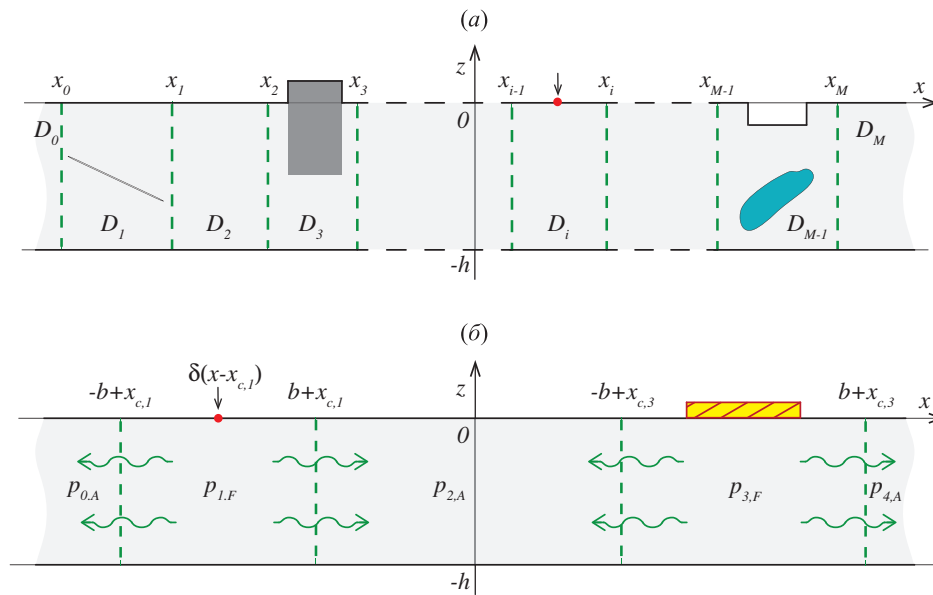


Рис. 5.17: (а) – полосовой волновод с препятствиями различных типов, локализованными в областях D_1, D_3, \dots, D_{M-1} ; области D_0, D_2, \dots, D_M – однородные; (б) – геометрия модельной задачи

Для волноводов со множественными неоднородностями (рисунок 5.17 (а)), расположенными в областях D_1, D_3, \dots, D_{M-1} и разделенными протяженными зонами однородности D_0, D_2, \dots, D_M , предлагается модификация гибридной численно-аналитической схемы. Для простоты данная модификация формулируется для акустического волновода. Общее решение $p(\mathbf{x})$ имеет вид:

$$p(\mathbf{x}) = p_{0,A} + p_{1,F} + p_{2,A} + p_{3,F} + \dots + p_{i,F} + \dots + p_{M-1,F} + p_{M,A}. \quad (5.2)$$

Здесь $p_{0,A}, p_{2,A}, \dots, p_{M,A}$ аналитические решения в протяженных областях однородности D_0, D_2, \dots, D_M , а $p_{1,F}, p_{3,F}, \dots, p_{M-1,F}$ – конечно-элементные решения в зонах с препятствиями или источниками колебаний. Аналитические решения представимы в виде суммы мод с коэффициентами $\mathbf{c} = (c_1^{(1)}, \dots, c_N^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_N^{(2)}, \dots, c_N^{(M)})^T$:

$$\begin{aligned}
p_{0,A}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N c_n^{(1)} a_n(z) e^{i\zeta_n(x_{c,1}-x)}, & \mathbf{x} \in D_0, \\
p_{2,A}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N c_n^{(2)} a_n(z) e^{i\zeta_n(x-x_{c,1})} + c_n^{(3)} a_n(z) e^{i\zeta_n(x_{c,3}-x)}, & \mathbf{x} \in D_2, \\
&\vdots & \vdots \\
p_{M,A}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N c_n^{(M)} a_n(z) e^{i\zeta_n(x_{c,M-1}-x)}, & \mathbf{x} \in D_M,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

где $x_{c,j}$, $j = 1, 3, \dots, M-1$ – середины областей с неоднородностями.

МКЭ-решения в областях, содержащих в себе препятствия различной природы, формулируется в виде:

$$\begin{aligned}
p_{1,F}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N c_n^{(1)} p_{1,n}^{(1)}(\mathbf{x}) + c_n^{(2)} p_{1,n}^{(2)}(\mathbf{x}) + c_n^{(3)} p_{1,n}^{(4)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D_1, \\
p_{3,F}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N c_n^{(2)} p_{3,n}^{(1)} + c_n^{(3)} p_{3,n}^{(2)} + c_n^{(1)} p_{3,n}^{(3)} + c_n^{(4)} p_{3,n}^{(4)}, & \mathbf{x} \in D_3, \\
&\vdots & \vdots
\end{aligned} \tag{5.4}$$

а в зонах, содержащих в себе источники колебаний – в виде

$$p_{i,F}(\mathbf{x}) = p_i^{(0)} + \sum_{n=1}^N c_n^{(i)} p_{1,i,n} + c_n^{(i+1)} p_{2,i,n} + c_n^{(i-1)} p_{3,i,n} + c_n^{(i+2)} p_{4,i,n}, \quad \mathbf{x} \in D_i.$$

Граничные условия для наборов МКЭ-решений $p_{j,n}^{(l)}$, $n = 1, \dots, N$, $l = 0, \dots, 4$, $j = 1, 3, \dots, M-1$ формулируются исходя из условий непре-

равности давлений на границах раздела областей в точках x_0, x_1, \dots, x_M :

$$\begin{aligned}
p_j^{(0)}(x_{j-1}, z) &= 0, & p_j^{(0)}(x_j, z) &= 0 \\
p_{j,n}^{(1)}(x_{j-1}, z) &= a_n(z)e^{i\zeta_n(x_{c,j}-x_{j-1})}, & p_{j,n}^{(1)}(x_j, z) &= 0 \\
p_{j,n}^{(2)}(x_{j-1}, z) &= 0, & p_{j,n}^{(2)}(x_j, z) &= a_n(z)e^{i\zeta_n(x_j-x_{c,j})} \\
p_{j,n}^{(3)}(x_{j-1}, z) &= a_n(z)e^{i\zeta_n(x_{j-1}-x_{c,j-2})}, & p_{j,n}^{(3)}(x_j, z) &= 0 \\
p_{j,n}^{(4)}(x_{j-1}, z) &= 0, & p_{j,n}^{(4)}(x_j, z) &= a_n(z)e^{i\zeta_n(x_j-x_{c,j+2})}
\end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты \mathbf{c} определяются из системы вида (4.7). Строки матрицы системы $A = B + D$ формируются исходя из дискретизации соотношений равенства производных по x аналитических (5.3) и МКЭ (5.4) решений в граничных точках, аналогичных соотношениям (4.6). Матрица D в общем случае имеет блочно-диагональную структуру

$$D = \begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D^{(2,3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D^{(4,5)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D^{(M)} \end{pmatrix}$$

с диагональными блоками $D^{(1)} = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_N^{(1)})$ и $D^{(M)}$ размерности $N \times N$ и разреженными блоками $D^{(2,3)}, D^{(4,5)}, \dots, D^{(M-2, M-1)}$ размерности $2N \times 2N$.

Матрица B имеет блочную структуру

$$B = \begin{pmatrix} B^{1,1,1} & B^{1,2,1} & B^{1,3,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ B^{2,1,1} & B^{2,2,1} & B^{2,3,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{3,3,1} & B^{3,1,3} & B^{3,2,3} & B^{3,4,3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & B^{M,3,M-1} & B^{M,1,M-1} & B^{M,2,M-1} \end{pmatrix}$$

с элементами внутри каждого блока $b_{ij}^{n,m,k} = (p_{k,j}^{(m)}(x_{n-1}, z), \cos l_i z)$.

Построение модифицированной гибридной схемы для векторного упругого случая в целом аналогично. Граничные условия на торцах для базисных МКЭ-решений входящих в гибридную схему, как и ранее, формулируются исходя из условия ортогональности нормальных мод (4.8), что упрощает вид матрицы D , входящей в систему линейных алгебраических уравнений вида (4.7).

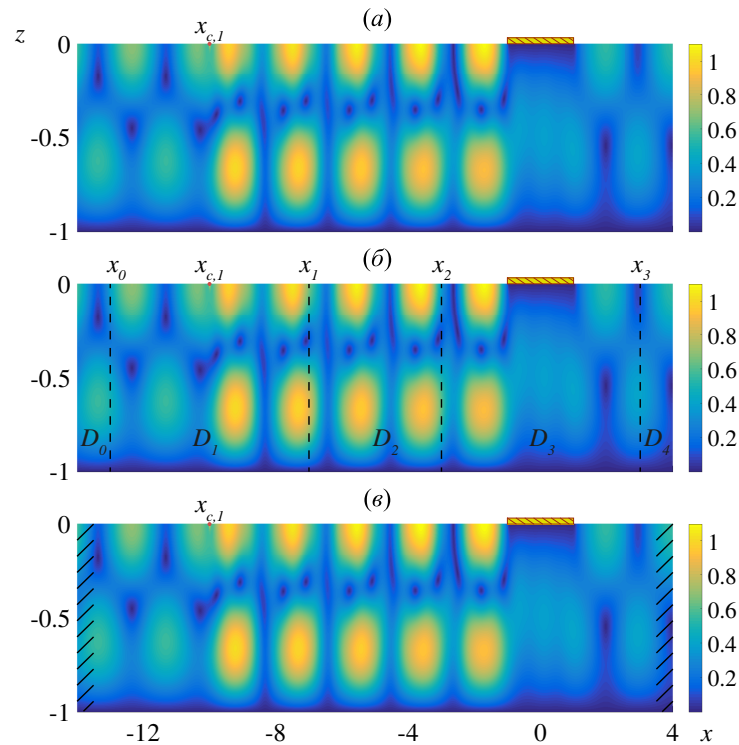


Рис. 5.18: Решение тестовой задачи $|p(x, z)|$: (а) через сведение к интегральному уравнению (точное решение), (б) модифицированная гибридная схема (FEM-An), (в) МКЭ для ограниченного образца с поглощающими граничными условиями на торцах (FEM-PML); нагрузка $\partial p / \partial z = \delta(x - x_{c,1})$ задана в точке $x_{c,1} = -10$ при круговой частоте $\omega = 5$

В качестве примера приводится решение задачи дифракции на поверхностном препятствии в акустическом волноводе (рисунок 5.17 (б)). Гармонические колебания возбуждаются поверхностным точечным источ-

ником, расположенным в точке $x_{c,1}$. В области $\Omega = \{(x, z) : z = 0, |x - x_{c,2}| < a\}$ находится препятствие, моделируемое нарушением краевых условий $p(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$. В остальных точках верхней границы полагаются абсолютно жесткие граничные условия (1.57), а на нижней границе – абсолютно мягкие (1.58).

Решение данной краевой задачи может быть построено аналитически, исходя из решения интегрального уравнения сформулированного относительно неизвестных скоростей в области Ω . В рамках указанной точности аналитическое решение можно считать точным (рисунок 5.17 (а)). Также для сопоставления было построено МКЭ-решение с поглощающими граничными условиями типа PML (рисунок 5.17 (в)). И, наконец, предложенная в данном параграфе модифицированная гибридная схема (рисунок 5.17 (б)). Результаты для всех трех моделей совпадают между собой, что подтверждает возможность применения данной модификации для решения различных задач дифракции. Следует отметить, что модифицированная гибридная схема даёт преимущества, если область, разделяющая препятствия и источник колебаний, достаточно протяженна, иначе более экономичным способом является построение решения в рамках стандартной гибридной схемы. Кроме того, применение модификации к сформулированной выше краевой задачи вообще говоря не требуется, т.к. поле, возбуждаемое точечным источником имеет аналитическое представление. На данном тестовом примере демонстрируется основное преимущество гибридной схемы: конечно-элементное моделирование применяется только там, где явные аналитические представления волновых полей отсутствуют.

ГЛАВА 6. МОДИФИКАЦИЯ ГИБРИДНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ АНАЛИЗА РАСПРОСТРАНЕНИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН ВО ВСТРОЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ

§6.1. Общее описание встроенных волноводов

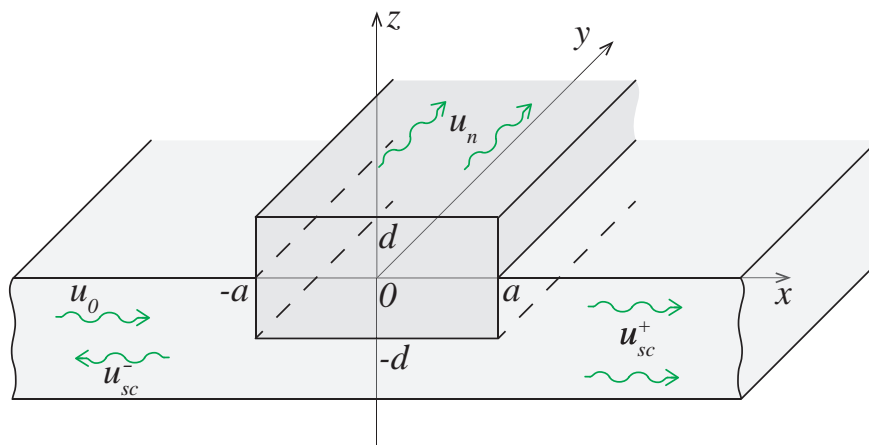


Рис. 6.1: Волновод прямоугольного сечения $2a \times 2d$, встроенный в слой для волн распространяющихся вдоль оси Oy

В рамках данной главы рассматриваются погруженные или встроенные волноводы (рисунок 6.2), частично погруженные волноводы (рисунок 6.1) или волноводы, вынесенные на поверхность (например, ребра жесткости). Такие волноводы достаточно часто встречаются в инженерных задачах, например, при неразрушающем контроле целостности соединений в стальных конструкциях, тросов, висячих мостов или подземных трубопроводов [70, 113, 126]. Подобные структуры погружены в некоторую внешнюю среду (например грунт, бетон, почва), которую можно считать безграничной в поперечном сечении.

Для построения решения задач о распространении волн во встроенных волноводах произвольной формы требуется разработка эффективных

численных методов решения возникающих краевых задач. Один из самых распространенных методов состоит в том, что к трехмерным общим уравнениям упругости и граничным условиям применяется преобразование Фурье вдоль направления распространения волн (вдоль оси Oy рисунков 6.1 и 6.2), что позволяет перейти к плоской задаче для поперечного сечения относительно Фурье-символов искомых функций. Их решение в последующем строится используя стандартные численные методы (обычно МКЭ).

В случае волноводов с ограниченным поперечным сечением данный метод широко применяется под различными названиями: метод полуаналитических конечных элементов (semi-analytical finite element method, SAFE) [108, 133], метод волноводных элементов (waveguide finite element method) [78], метод полосовых элементов (strip element method) [115] или метод масштабируемых граничных конечных элементов (scaled boundary finite element method) [102, 103]. Данные методы используют схожие теоретические основы и сводятся к определению собственных частот и собственных форм бегущих волн.

В случае погруженных и встроенных волноводов появляются трудности, связанные с неограниченностью поперечного сечения. В процессе распространения бегущих волн происходит переизлучение энергии во внешнюю среду, т.е. бегущие волны становятся вытекающими с комплексными волновыми числами (leaky waves) [70, 126]. Для вычисления характеристик вытекающих мод требуется увеличение числа конечных элементов в стандартных коммерческих пакетах, применяемых для дискретизации поперечного сечения.

Естественным способом преодоления трудностей, связанных с неограниченностью среды, окружающей погруженный волновод, является исполь-

зование искусственных вязкоупругих слоев для поглощения волн [73]. Для моделирования волновых процессов в волноводах, погруженных в твердую упругую среду [119] или в жидкость [120], был использован метод граничных элементов для построения решения в поперечном сечении. Использование метода граничных элементов позволяет избежать проблем, связанных с дискретизацией неограниченной среды. В статье [104] предлагаются особые поглощающие граничные условия (dashpot boundary condition) на торцах окружающих слоев, которые позволяют решать сформулированную задачу, однако, полученные решения не являются достаточно точными при низких частотах или при малом отличии свойств материалов. Используя метод граничных элементов совместно с точными условиями излучения для двумерных пластин, в работе [107] успешно трансформирована возникающая нелинейная задача для определения собственных значений в линейную. Однако, данная трансформация применима только, если в качестве окружающей среды рассматривается жидкость.

Альтернативный метод состоит в использовании идеально согласованных слоев, что и реализовано в работе [134]. Поперечное сечение дискретизируется с помощью спектральных элементов высокого порядка. Подобный подход позволяет производить расчет высокочастотных вытекающих мод в открытых сплошных волноводах, а также остается применимым и для сред с малым отличием свойств материалов. Один из недостатков идеально согласованных слоев заключается в том, что дополнительная часть внешней области, окружающей погруженный волновод, должна быть также дискретизирована, что может увеличить вычислительные затраты по сравнению с методом граничных элементов. Тем не менее, толщина поглощающей области может быть значительно уменьшена по сравнению с вязкоупругими

слоями благодаря идеально подобранному поглощению. А основным недостатком применения данного метода является то, что появляются моды, резонирующие главным образом внутри поглощающих областей. Для исходной задачи данные моды являются излишними (паразитными), а отбор нужных собственных частот и собственных форм для вытекающих мод является достаточно трудоемкой задачей и производится, фактически, вручную [73].

Указанных недостатков лишена гибридная численно-аналитическая схема, разрабатываемая в настоящей работе.

§6.2. Реализация гибридной схемы в случае акустического волновода

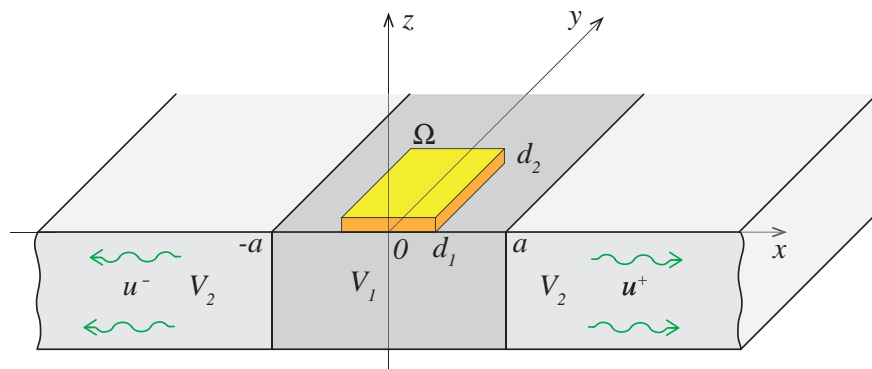


Рис. 6.2: Геометрия модельной задачи для слоя со встроенным квадратным волноводом и поверхностным источником гармонических колебаний

В качестве модельной рассматривается задача о колебаниях акустического слоя $V = \{\mathbf{x} = (x, y, z) : x, y \in (-\infty, +\infty); z \in [-h, 0]\}$ со встроенным волноводом в области $V_1 = \{\mathbf{x} : x \in [-a, a]; z \in [-h, 0]; y \in (-\infty, +\infty)\}$, возбуждаемых источником, расположенным на поверхности в $\Omega = \{\mathbf{x} : x \in [-d_1, d_1], y \in [-d_2, d_2], z = 0\}$ (рисунок 6.2). Комплексная

амплитуда установившихся гармонических колебаний удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца в каждой из областей:

$$\Delta p_n(\mathbf{x}) + \kappa_n^2 p_n(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V_n, \quad n = 1, 2. \quad (6.1)$$

Здесь $V_2 = V \setminus V_1$ – многосвязная область, содержащая бесконечно удаленную точку, $\kappa_n = \omega/c_n$, $n = 1, 2$ – волновые числа для областей V_1 и V_2 . На внешних границах задаются условия Дирихле:

$$p_1|_{z=0} = \begin{cases} q_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (6.2)$$

$$p_2|_{z=0} = 0,$$

$$p_n|_{z=-h} = 0, \quad n = 1, 2.$$

На внутренних границах областей V_1 и V_2 предполагаются условия непрерывности давлений p_n .

Геометрия задачи позволяет применить преобразование Фурье по y к уравнениям (6.1) и граничным условиям (6.2), после чего получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta \hat{p}_n(x, z) + \beta_n^2 \hat{p}_n(x, z) = 0, \quad \mathbf{x} \in \hat{V}_n, \quad n = 1, 2. \quad (6.3)$$

$$\hat{p}_1|_{z=0} = \begin{cases} Q_0(x), & x \in [-d_1, d_1] = \hat{\Omega}, \\ 0, & x \notin \hat{\Omega}, \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\hat{p}_2|_{z=0} = 0,$$

$$\hat{p}_n|_{z=-h} = 0, \quad n = 1, 2,$$

где \hat{V}_n – сечение трехмерных областей V_1 и V_2 плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxz , $\hat{p}_n = \mathcal{F}_y[p_n]$ и $Q_0(x) = \mathcal{F}_y[q_0]$ – преобразование Фурье от давления и внешней нагрузки соответственно, $\beta_n^2 = \kappa_n^2 - \alpha_2^2$, а α_2 – параметр преобразование Фурье.

Полученные уравнения (6.3) и граничные условия (6.4) по форме совпадают с соответствующими уравнениями для рассмотренных выше плоских задач о дифракции падающего волнового поля на включении. Основное отличие здесь только в появлении волновых чисел β_n вместо κ_n . Поэтому для численного решения этой краевой задачи может применяться гибридная численно-аналитическая схема или МКЭ с идеально согласованными слоями.

Как и в случае ловушечных мод, волновые числа ζ_n для вытекающих волн определяются как корни уравнения

$$\det A(\zeta_n) = 0 \quad (6.5)$$

с матрицей A из системы (4.7) при фиксированной частоте f .

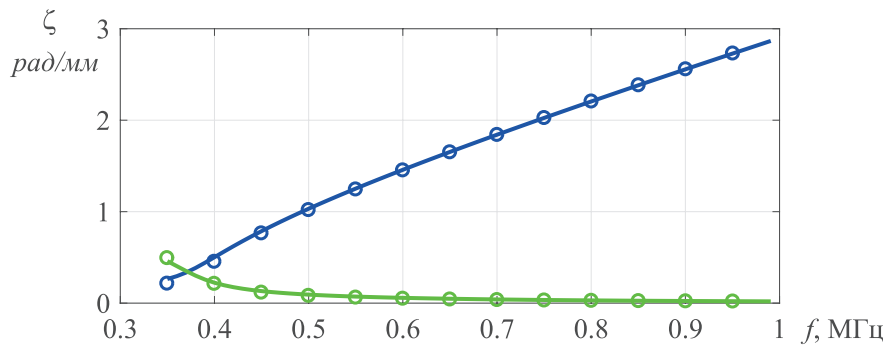


Рис. 6.3: Зависимость ближайшего к вещественной оси волнового числа ζ от частоты f для встроенного акустического волновода (рисунок 6.2). Сплошными линиями обозначены численные результаты полученные в рамках гибридной схемы, маркерами – МКЭ с идеально согласованными слоями; синие линии и маркеры – вещественная часть ζ , а мнимая часть – зеленые маркеры и линия

На рисунке 6.3 представлена зависимость ближайшего к вещественной оси для низких частот волнового числа ζ вытекающей моды. В качестве базовых единиц измерения выбраны: скорость $c = 1000$ [м/с], длина $h = 0.001$ [м], плотность $\rho = 1000$ [кг/м³]. Рассматривается акустический волновод

толщины $h = 3$ и полуширины $a = 2.5$. Плотность и скорость во включении V_1 – $\rho_1 = 1.25$ и $c_1 = 2$, а во внешних областях V_2 – плотность $\rho_2 = 1$, скорость $c_2 = 1.5$. Внешний источник колебаний задан в квадратной области Ω со стороной $2d_1 = 2d_2 = 1$, при этом $q_0(x, y) = 1$.

В целом, результаты МКЭ с идеально согласованными слоями совпадают с гибридной численно-аналитической схемой, однако, при малых частотах наблюдается расхождение, которые уменьшаются с ростом частоты.

§6.3. Обобщение на упругий случай

В упругом случае краевая задача формулируется относительно вектора перемещений вида $\mathbf{u}(x, y, z) = (u_x(x, y, z), 0, u_z(x, y, z))^T$, что приводит трехмерные уравнения (1.12) и граничные условия (1.9), (1.10) для модельной задачи (рисунок 6.2) к следующему виду:

$$\begin{aligned} (\lambda_n + \mu_n) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu_n \Delta u + \rho_n \omega^2 u &= 0, & (x, y, z) \in V_n, \\ (\lambda_n + \mu_n) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu_n \Delta w + \rho_n \omega^2 w &= 0, & n = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \begin{cases} \mathbf{q}_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=-h} = 0.$$

Применяя преобразование Фурье по y к уравнениям (6.6) и граничным условиям (6.7) получим:

$$\begin{aligned} (\lambda_n + \mu_n) \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial z} \right) + \mu_n \Delta \hat{u} + (\rho_n \omega^2 - \mu \alpha_2^2) \hat{u} &= 0, \\ (\lambda_n + \mu_n) \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) + \mu_n \Delta \hat{w} + (\rho_n \omega^2 - \mu \alpha_2^2) \hat{w} &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь $\hat{\mathbf{u}}_n = \mathcal{F}_y[\mathbf{u}_n]$ – преобразование Фурье от вектора смещений. Граничные условия (6.7) внешне не изменятся после преобразования.

Применяя замену $\hat{\rho}_n \omega^2 = \rho_n \omega^2 - \mu_n \alpha_2^2$, $n = 1, 2$, уравнения (6.8) сводятся к соответствующим уравнениям теории упругости для плоских задач, к которым применима как гибридная численно-аналитическая схема, так и другие методы. Комплексные волновые числа для вытекающих мод также определяются из уравнения вида (6.5).

Заключение

В процессе проведения диссертационного исследования получены следующие результаты:

1. Разработаны эффективные методы решения краевых задач о динамическом взаимодействии полосового и кругового пьезоактуатора с упругим слоем, на основе которых проведено сопоставление с численными результатами других моделей и дана оценка границ их применимости.
2. Произведен расчет оптимальных параметров системы пьезоактуатор-подложка, позволяющих возбуждать одну доминирующую фундаментальную моду как в двумодовом, так и в многомодовом диапазоне.
3. Построены эффективные математические и компьютерные модели, реализующие гибридную численно-аналитическую схему для слоистых сред с локальными неоднородностями.
4. Произведена верификации предложенной схемы на основе сопоставления численных результатов с результатами, полученными в рамках полуаналитических и конечно-элементных моделей.
5. Произведен расчет центральных частот ловушечных мод для различных типов препятствий, а также исследованы зоны запираения-прохождения для групп включений.

Основные результаты, выполненные в рамках работы над диссертацией, содержатся в работах [3, 18, 26, 27, 29, 30, 37–40, 86, 95]. Данные результаты получены совместно с Е. В. Глушковым и Н. В. Глушковой. Постановку задачи и общее руководство исследованиями осуществляли Е. В. Глушков и Н. В. Глушкова. Лично автором осуществлена реализация методов решения

рассмотренных задач, разработка пакетов программ и численные расчеты, а также дан анализ полученных результатов.

Автор выражает благодарность за помощь, поддержку, ценные советы и обсуждению полученных результатов научному руководителю Е. В. Глушкову, профессору Н. В. Глушковой, а также коллективу Института математики, механики и информатики ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет».

Литература

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы: В 2-х т. - М.: Мир, 1983. — 520 с.
2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. - М.: Наука, 1969. - 352 с.
3. Александров А.А., Евдокимов А.А., Емельянов Е.А. Разработка программного обеспечения для анализа волновых полей в полосе, возбуждаемых поверхностной нагрузкой, и построения численного решения // Материалы XII объединенной научной конференции студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики "Прикладная математика XXI века". - Краснодар, 2012. - С. 22-24.
4. Амензаде Ю.А. Теория упругости. - М.: Высшая школа, 1976. - 272 с.
5. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1987. - Т. 27. - Вып. 1. - С. 93-101.
6. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих тел. - М.: Наука, 1986. - 343 с.
7. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 352 с.

8. Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств // Прикладная математика и механика. 2002. - Т. 66. - № 3. - С. 491–501.
9. Белоконь А.В., Наседкин А.В. Моделирование пьезоизлучателей ультразвуковых волн с использованием программного комплекса ANSYS // Известия Таганрогского радиотехнического университета. 1998. - № 4(10). - С. 147–150.
10. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. 2-е изд., доп. и испр. - М.: Наука, 1973. - 343 с.
11. Васильченко К.Е., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. К расчету амплитудно-частотных характеристик задач об установившихся колебаниях на основе кластерных технологий в ACELAN // Вычислительные технологии. 2005. - Т. 10 - № 1. - С. 10–20.
12. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел – Ростов н/Д: Южный Федеральный университет, 2008. – С. 176.
13. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - М.: Наука, 1981. - 287 с.
14. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // ДАН СССР. – 1979. – Т. 245(5). – С. 1076-1079.
15. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. - М.: Наука, 1979. - 320 с.

16. Глушков Е.В. Возбуждение волн в слое пьезоэлектрическими накладками, симметрично расположенными на обеих поверхностях упругого слоя / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, В. Зеemann, О.В. Кваша // Прикл. математика и механика. - 2011. - Т. 75, № 1. - С. 83-94.
17. Глушков Е.В. Возбуждение упругих волн в слое пьезокерамическими накладками / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, В. Зеemann, О.В. Кваша // Акустический журнал. - 2006. - Т. 52, № 4. - С. 470-479.
18. Глушков Е.В. Волновой неразрушающий контроль скрытых дефектов и очагов коррозии в слоистых металлополимерных материалах / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Ерёмин, А.А. Евдокимов // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. - Ростов-на-Дону, 2013. - С. 149-153.
19. Глушков Е.В. Метод слоистых элементов в динамической теории упругости / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Еремин, В.В. Михаськив // Прикладная математика и механика. - 2009. - Т. 73, вып. 4. - С. 622-634.
20. Глушков Е.В. Моделирование возбуждения бегущих волн в слоистых упругих структурах контактными и бесконтактными пьезоактуаторами / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Еремин, А.А. Евдокимов и др. // Материалы XXI международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" имени А.Г. Горшкова. - Витячи, 2015. - Т. 2. - С. 24-25.
21. Глушков Е.В. Поверхностные волны в материалах с функционально-

- градиентными покрытиями / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, С.И. Фоменко, Ч. Жанг // Акуст. журн. - 2012. - Т. 58, № 3. - С. 370–385.
22. Глушков Е.В. Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве // Прикл. математика и механика. - 1983. - Т. 47. - № 1. - С. 94–100.
23. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - Краснодар: Кубанск. гос. ун-т, 1990. - 72 с.
24. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. К определению динамической контактной жёсткости упругого слоя // Прикл. математика и механика. - 1990. - Т. 54. - Вып. 3. - С. 474–479.
25. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // Акуст. журн. - 2006. - Т. 52. - № 3. - С. 314–325.
26. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акустический журнал. - 2018. - Т. 64. - № 1. - С. 3–12.
- Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Hybrid Numerical-Analytical Scheme for Calculating Elastic Wave Diffraction in Locally Inhomogeneous Waveguides: transl. from Russian // Acoustical Physics. - 2018. - Vol. 64. - № 1. - P. 3–12.
27. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Моделирование распространения бегущих волн в структурах с локальными неоднородностями на основе гибридной численно-аналитической схемы // Совре-

- менные проблемы механики сплошной среды. Тр. XVIII междунар. конф. - Ростов-на-Дону, 2016. - С. 150-154.
28. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Распределение и движение корней дисперсионного уравнения волн Лэмба в комплексной плоскости // XX Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы доклада. - Екатеринбург, 2017. - С. 99.
29. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Распределение энергии пьезоактуатора между бегущими волнами, возбуждаемыми в упругом слое // Прикладная механика и техническая физика. - 2015. - Т. 56. - № 6. - С. 84-93.
- Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Distribution of the energy of a piezoelectric actuator between traveling waves excited in an elastic layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. - 2015. - Vol. 56. - № 6. - P. 84-93.
30. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А., Фоменко С.И. Распределение энергии поверхностного источника между волнами Лэмба // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XVII междунар. конф. - Ростов-на-Дону, 2014. - С. 137-141.
31. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кваша О.В. Создание направленного излучения бегущих волн системой пьезокерамических накладок на упругом слое // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И. И. Воровича - Ростов-на-Дону, 2005. - С. 62-66.

32. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кривонос А.С. Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // Прикладная математика и механика. - 2010. - Т. 74. - № 3. - С. 419–432.
33. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И. Влияние пористости на характеристики волн релеевского типа в многослойном полупространстве // Акуст. журн. - 2011. - Т. 57. - № 2. - С. 234–245.
34. Глушкова Н.В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. - Краснодар: Кубанский государственный университет, 2000. - 220 с.
35. Голуб М.В. Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности / М.В. Голуб, А.Н. Шпак, И. Бюте, К.-П. Фритцен // Механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8. – № 4. – С. 397-407.
36. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наукова думка, 1981. - 294 с.
37. Евдокимов А.А. Определение комплексных резонансных частот при взаимодействии пьезоактуатора с упругим слоем // Материалы XIII объединенной научной конференции студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики "Прикладная математика XXI века". - Краснодар, 2013. - С. 92-94.
38. Евдокимов А.А. Распределение и движение корней дисперсионного уравнения для волн Лэмба в комплексной плоскости // Экологический вестник научных центров ЧЭС. - 2017. - № 3. - С. 30-37.

39. Евдокимов А.А. Распределение энергии волн Лэмба, возбуждаемых полосовым пьезоактуатором в упругом слое // Прикладная математика XXI века. Материалы XV объединённой научной конференции студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики. - Краснодар, 2015. - С. 119-121.
40. Евдокимов А.А. Энергия волн // Прикладная математика XXI века. Материалы XIV объединённой научной конференции студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики. - Краснодар, 2014. - С. 83-86.
41. Ерофеев В.И., Ключева Н.В., Солдатов И.Н. Волны в слое, возбуждаемые периодической тангенциальной нагрузкой // Прикладная механика и техническая физика. - 2005. - Т. 46. - № 4. - С. 109-115.
42. Зильберглейт А.С., Нуллер Б.М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. - 1977. - Т. 234. - № 2. - С. 333-335.
43. Зоммерфельд А. Электродинамика. - М.: Ин. Лит., 1958. - 502 с.
44. Ивченко Е.Л., Поддубный А.Н. Резонансные трехмерные фотонные кристаллы // Физика твердого тела. - 2006. - Т. 48 - № 3. - С. 540-547.
45. Игумнов Л.А., Марков И.П. Гранично-элементный расчет электро-механических полей трехмерной пьезоупругой керамики // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. - 2014. - Т. 4 - № 3(1). - С. 86-90.
46. Исакович М.А. Общая акустика. - М.: Наука, 1973. - 502 с.

47. Кваша О.В. Исследование взаимодействия пьезокерамических элементов с упругими волноводами. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. - Краснодар: Кубанский государственный университет, 2007. - 126 с.
48. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973. — 736 с.
49. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1977. – 416 с.
50. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 708 с.
51. Мэзон У. Физическая акустика: Методы и приборы ультразвуковых исследований // М.: Мир. - Т. 1, ч. А., 1966. – 592 с.
52. Общее описание продукта COMSOL Multiphysics: официальный сайт компании COMSOL INC. [Электронный ресурс]. 2018. URL: <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics> (дата обращения: 16.05.2018).
53. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1988. - 472 с.
54. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Том 2. Специальные функции. - 2-е издание - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 664 с.
55. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. - 1951. - Т. 80. - № 3. - С. 345–347.

56. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Физматлит, 2005. - 336 с.
57. Соловьев А.Н., Зьюнг Л.В. Конечно-элементное моделирование и анализ пьезоэлектрического устройства накопления энергии в форме круглой пластины с пьезоэлементами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. - 2013. - Т. 4 - № 1. - С. 112–119.
58. Сыромятников П.В. Динамика сложных многослойных гетерогенных сред. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. - Краснодар: Кубанский государственный университет, 2016. - 428 с.
59. Сыромятников П.В. Моделирование возмущений поверхности упругой полугораниченной среды, вызываемых подвижным осциллирующим источником // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. - 2016. - № 4. - С. 82–91.
60. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. - 576 с.
61. Умов Н.А. Избранные сочинения. - М.: Гостехтеоретиздат, 1950. - 575 с.
62. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. - М.: Физ-мат. лит., 1959. - 364 с.
63. Хан Х. Теория упругости. - М.: Мир, 1988. - 344 с.
64. Шпак А.Н. Моделирование динамики пьезоэлектрического актуатора/сенсора методом конечных элементов с использованием полиномов

- Чебышева // Экологический вестник научных центров ЧЭС. - 2015.
- Т. 4. - С. 75-85.
65. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solid. Amsterdam: North-Holland, 1973. - P. 425.
66. Ahmad Z.A.B, Vivar-Perez J.M., Gabbert U. Semi-analytical finite element method for modeling of lamb wave propagation // CEAS Aeronautical Journal. – 2013. – Vol. 4. - № 1. – P. 21-33.
67. Alves Costa P., Calcada R., Silva Cardoso A. Track-ground vibrations induced by railway traffic: In-situ measurements and validation of a 2.5D FEM-BEM model // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2012. – Vol. 32. – P. 111–128.
68. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids. New York: Wiley, 1973. Vol. 1. - P. 423.
69. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids. New York: Wiley, 1973. Vol. 2. - P. 414.
70. Beard M.D., Lowe M.J.S. Non-destructive testing of rock bolts using guided ultrasonic waves // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. - 2003. - Vol. 40. P. 527–536.
71. Becache E., Fauqueux S., Joly P. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves // Journal of Computational Physics. - 2003. - Vol. 188. - № 2. - P. 399–433.
72. Berenger J. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. - 1994. - Vol. 114. - № 2. - P. 185–200.

73. Castaings M., Lowe M. Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media // J. Acoust. Soc. Am. – 2008. – Vol. 123 - № 2. – P. 696-708.
74. Curie J., Curie P. Developpement, par pression, de l'electricite polaire dans les cristaux hemiedres a faces inclinees// Comptes rendus (in French). - 1880 - P. 294–295.
75. Duczek S. Development, Validation and Comparison of Higher Order Finite Element Approaches to Compute the Propagation of Lamb Waves Efficiently / S. Duczek, C. Willberg, D. Schmicker, U. Gabbert // Key Engineering Materials. – 2012. – Vol. 518. – P. 95-105.
76. Fathi A., Poursartip B., Kallivokas L. Time-domain hybrid formulations for wave simulations in three-dimensional PML-truncated heterogeneous media // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 2015. - Vol. 101. - P. 165–198.
77. Figotin A., Godin Yu.A., Vitebsky I. Two-dimensional tunable photonic crystals // Physical Review B. – 1998. – Vol. 57. - № 5. – P. 2841–2848.
78. Finnveden S., Fraggstedt M. Waveguide finite elements for curved structures // J. Sound Vib. - 2008. - Vol. 312 P. 644–671.
79. Fomenko S.I. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals / S.I. Fomenko, M.V. Golub, Ch. Zhang, T.Q. Bui et al. // Solids and Structures. - 2014. - Vol. 51. - P. 2491–2503.
80. Francois S. A 2.5D coupled FE–BE methodology for the dynamic interaction between longitudinally invariant structures and a layered

- halfspace / S. Francois, M. Schevenels, P. Galvin, G. Lombaert et al. // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2010. – Vol. 199. – P. 1536-1548.
81. Fu Y. Advances in piezoelectric thin films for acoustic biosensors, acoustofluidics and lab-on-chip applications / Y. Fu, J. Luo, N. Nguyen, A. Walton et al. // Progress in Materials Science. - 2017. - Vol. 89. - P. 31–91.
82. Gao L., Liu K., Liu Y. A meshless method for stress-wave propagation in anisotropic and cracked media // International Journal of Engineering Science. – 2008. – Vol. 45. – P. 601–616.
83. Giurgiutiu V. Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors. 2nd ed. - Boston: Elsevier Acad. Press, 2014. - P. 1024.
84. Giurgiutiu V. Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // J. Intell. Material Systems Structures. - 2005. - Vol. 16. - P. 291–305.
85. Givoli D. High-order local non-reflecting boundary conditions: a review // Wave Motion. – 2004. – Vol. 39. – P. 319-326.
86. Glushkov E.V. Guided wave generation in laminated elastic substrates with piezoelectrical coatings and patches / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Evdokimov, Ch. Zhang // Proceedings of International Congress on Ultrasonics. - Metz, 2015. - Vol. 70. - P. 945-948.
87. Glushkov E.V. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate /

- E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, O.V. Kvasha, W. Seemann // Smart Materials Structures. - 2007. - Vol. 16, № 3. - P. 650-664.
88. Glushkov E.V. Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, R. Lammering et al. // Smart Mater. Struct. - 2011. - Vol. 20, № 1. - 015020 (11pp).
89. Glushkov E.V. Laminate element method and its application to the study of guided wave resonance phenomena in layered elastic structures with defects / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, R. Lammering. // Proceedings of the VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. - Crete, 2016. - Vol. 2. - P. 3753-3760.
90. Glushkov E.V. Low-cost simulation of guided wave propagation in notched plate-like structures / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, V. Giurgiutiu // Journal of Sound and Vibration. - 2015. - V. 352. - P. 80-91.
91. Glushkov E.V. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, M.V. Golub, A. Bostrom. // J. Ac. Soc. Am. - 2006. - Vol. 119, № 6. - P. 3589-3598.
92. Glushkov E.V. Resonance blocking and passing effects in two-dimensional elastic waveguides with obstacles / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, M.V. Golub, A.A. Eremin // J. Acoust. Soc. Am. - 2011. - Vol. 130(1) - P. 113-121.

93. Glushkov E.V. Source energy distribution and successive forwarding in layered and functionally graded elastic substructures / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, S.I. Fomenko, A.A. Evdokimov // International conference "Days of diffraction 2014". Book of Abstracts. - St. Peterburg, 2014. - P. 40.
94. Glushkov E.V. Trapped mode effects in notched plate-like structures / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, R. Lammering // J. Sound Vibr. - 2015. - V. 358. - P. 142–151.
95. Glushkov E.V. Ultrasonic Guided Wave Characterization and Inspection of Laminate Fiber-Reinforced Composite Plates/ E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, A.A. Evdokimov et al. // Springer Proceedings of International Conference on Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications, PHENMA 2015. - Azov, 2016. - Vol. 175. - P. 449-457.
96. Glushkov E.V. Wave energy trapping and localization in a plate with a delamination / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, M.V. Golub, J. Moll et al. // Smart Mater. Struct. - 2012. - Vol. 21(12). - 125001. (12 pp).
97. Glushkov E.V., Glushkova N.V. On the efficient implementation of the integral equation method in elastodynamics // Journal of Computational Acoustics. - 2001. - Vol. 9 - № 3. - P. 889-898.
98. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Eremin A.A. Laminate element method for elastic guided wave diffraction simulation // Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI) - Barcelona, 2014. - Vol. 3. - P. 2700-2707.

99. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Layered Structures with Obstacles and Embedded Guides: FEM-Analytic Approach // Book of Abstracts. 13th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics. - Vienna, 2017. - P. 239.
100. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Wauer J. Wave propagation in an elastically supported string with point-wise defects: gap-band and pass-band effects, ZAMM // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. - 2011. - Vol. 91(1). - P. 4–22.
101. Gopalakrishnan S., Chakraborty A., Mahapatra D.R. Spectral Finite Element Method Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures // Springer-Verlag London Limited, 2008. – 440 p.
102. Gravenkamp H. The computation of dispersion relations for three-dimensional elastic waveguides using the scaled boundary finite element method / H. Gravenkamp, H. Man, C. Song, J. Prager // J. Sound Vib. - 2013. - Vol. 332. - P. 3756–3771.
103. Gravenkamp H., Birk C., Song C. Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method // J. Comput. Phys. - 2015. - Vol. 295. P. 438–455.
104. Gravenkamp H., Birk C., Van J. Modeling ultrasonic waves in elastic waveguides of arbitrary cross-section embedded in infinite solid medium // Comput. Struct. - 2015. - Vol. 149. - P. 61–71.
105. Gresil M., Giurgiutiu V. Time-domain hybrid global–local concept for guided-wave propagation with piezoelectric wafer active sensor // Journal

- of Intelligent Material Systems and Structures. – 2013. – Vol. 24. - № 15.
– P. 1897–1911.
106. Ham S., Lai B., Bathe K.-J. The method of finite spheres for wave propagation problems // Computers and Structures. – 2014. – Vol. 14. – P. 1-14.
107. Hayashi T., Inoue D. Calculation of leaky lamb waves with a semi-analytical finite element method // Ultrasonics. - 2014. - Vol. 54 - P. 1460–1469.
108. Hayashi T., Song W.-J., Rose J.L. Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example // Ultrasonics. - 2003. - Vol. 41 - P. 175–183.
109. Indeitsev D. Trapping modes of oscillations in an infinitely long waveguide with a submerged object in the form of a massive die // J. Acoust. Soc. Am. – 1999. – Vol. 105. - № 2. – P. 1196.
110. Karmazin A. Study of Piezo-Excited Lamb Waves in Laminated Composite Plates / A. Karmazin, E. Kirillova, P. Syromyatnikov, E Gorshkova // Advanced Materials. Physics, Mechanics and Applications. Springer Proceedings in Physics. - 2014. - Vol. 152 - Ch. 13 - P. 149–162.
111. Komatitsch D. High-order finite-element seismic wave propagation modeling with MPI on a large GPU cluster / D. Komatitsch, G. Erlebacher, D. Goddeke, D. Micea // Journal of Computational Physics. – 2010. – Vol. 229, № 20. – P. 7692-7714.

112. Lamb H. On Waves in an Elastic Plate // The Royal Society. - 1917. - Vol. 93. - iss. 648. - P. 114–128.
113. Leinov E., Lowe M.J.S., Cawley P. Ultrasonic isolation of buried pipes // Journal of Sound and Vibration - 2016. - Vol. 363. - P. 225–239.
114. Linton C.M., Evans D.V. Trapped modes above a submerged horizontal plate // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. - 1991. - Vol. 44. - № 3. - P. 487–506.
115. Liu G.R., Achenbach J.D. Strip element method to analyze wave scattering by cracks in anisotropic laminated plates // J. Appl. Mech. - 1995. - Vol. 62. P. 607–613.
116. Liu Y. Fast Multipole Boundary Element Method: Theory and Applications in Engineering // Cambridge University Press, 2009. – 255 p.
117. Manolis G., Polyzos D. (editors) Recent Advances in Boundary Element Methods // Springer Science+Business Media B.V., 2009. – 470 p.
118. Marzani A. Semi-analytical Finite Element Formulation for Modeling Stress Wave Propagation in Axisymmetric Damped Waveguides / A. Marzani, E. Viola, I. Bartoli, F. Lanza di Scalea et al. // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol. 318, № 3. – P. 488-505.
119. Mazzotti M. A coupled SAFE-2.5D BEM approach for the dispersion analysis of damped leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section / M. Mazzotti, I. Bartoli, A. Marzani, E. Viola // Ultrasonics. – 2013. – Vol. 53. – P. 1227-1241.
120. Mazzotti M., Bartoli I., Marzani A. Ultrasonic leaky guided waves in fluid-coupled generic waveguides: hybrid finite-boundary element dispersion

- analysis and experimental validation // J. Appl. Phys. - 2014. - Vol. 115. - 143512. (10 p.).
121. Moulin E., Assaad J., Delebarre C. Modeling of Lamb waves generated by integrated transducers in composite plates using a coupled finite element–normal modes expansion method // J. Ac. Soc. Am. – 2000. – Vol. 107 - № 1. – P. 87-94.
 122. Nadella K.S., Cesnik C.E.S. Local interaction simulation approach for modeling wave propagation in composite structures // CEAS Aeronautical Journal. – 2013. – Vol. 4. - № 1. – P. 35-48.
 123. Ostachowicz W. Guided Waves in Structures for SHM: The Time-Domain Spectral Element Method / W. Ostachowicz, P. Kudela, M. Krawczuk, A. Zak // Chichester:John Wiley and Sons, 2012. – 448 p.
 124. Packo P. Lamb wave propagation modelling and simulation using parallel processing architecture and graphical cards / P. Packo, T. Bielak, A.B. Spencer, W.J. Staszewski et al. // Smart Mater. Struct. - 2012. - Vol. 21, № 7. - 075001 (13pp).
 125. Pagneux V., Maurel A. Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness // Proc. R. Soc. A. - 2006. - Vol. 462. - P. 1315-1339.
 126. Pavlakovic B.N., Lowe M.J.S., Cawley P. High-frequency low-loss ultrasonic modes in embedded bars // J. Appl. Mech. - 2001. - Vol. 68. - P. 67–75.
 127. Raghavan A., Cesnik C.E.S. Review of guided wave structural health monitoring // Shock Vibrat. Digest. - 2007. - Vol. 39. № 2. P. 91–114.

128. Rogers C.A. Intelligent Material Systems - The Dawn Of a New Materials Age // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. - 1993. - Vol. 4. - P. 4-12.
129. Schmidt M.-P. SAW based phononic crystal sensor, technological challenges and solutions / M.-P. Schmidt, A. Oseev, R. Lucklum, M. Zubtsov et al. // Microsystem Technologies. - 2016. - Vol. 22(7). - P. 1593–1599.
130. Semblat J., Lenti L., Gandomzadeh A. A simple multi-directional absorbing layer method to simulate elastic wave propagation in unbounded domains // Internat. J. Numer. Methods Engrg. – 2011. – Vol. 85. – P. 1543–1563.
131. Skelton E., Adams S., Craster R. Guided elastic waves and perfectly matched layers // Wave Motion. – 2007. – Vol. 44. – P. 573-592.
132. Sorokin B.P. Excitation of hypersonic acoustic waves in diamond-based piezoelectric layered structure on the microwave frequencies up to 20 GHz / B.P. Sorokin, G.M. Kvashnin, A.S. Novoselov, V.S. Bormashov et al. // Ultrasonics. - 2017. - Vol. 78. - P. 162-165.
133. Treyssede F. Elastic waves in helical waveguides // Wave Motion. - 2008. - Vol. 45 - P. 457–470.
134. Treyssede F. Spectral element computation of high-frequency leaky modes in three-dimensional solid waveguides // Journal of Computational Physics. - 2016. - Vol. 314 - P. 341–354.
135. Ursell F. Trapping modes in the theory of surface waves // Mathematical

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. - 1951. - Vol. 47(2).
- P. 347–358.

136. Vasseur J.O. Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in twodimensional periodic composite media / J.O. Vasseur, P.A. Deymier, G. Frantziskonis, G. Hong et al. // J. Phys.: Condens. Matter. – 1998. – Vol. 10. – P. 6051–6064.
137. Velichko A., Wilcox P.D. A generalized approach for efficient finite element modeling of elastodynamic scattering in two and three dimensions // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. – Vol. 128. - № 3. – P. 1004-1014.
138. Wunsche M. On two hypersingular time-domain BEM for dynamic crack analysis in 2D anisotropic elastic solids / M. Wunsche, Ch. Zhang, F. Garcia-Sanchez, A. Saez et al. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2009. – Vol. 198(33–36). – P. 2812–2824