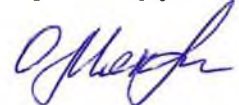


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

На правах рукописи



Мякишева Ольга Александровна

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОГО
ЗОНДИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Глушков Е.В.

Краснодар 2019

Оглавление

Введение	4
1. Краевые задачи динамической теории упругости для тел, погруженных в акустическую среду	20
§1.1. Уравнения движения и граничные условия	20
§1.2. Функции Грина для упругого слоя в акустической среде	24
§1.2.1 Поле кругового источника	30
2. Интегральные представления волновых полей для системы слоистый упругий волновод – акустическая среда – источник	34
3. Асимптотические представления волновых полей в дальней зоне	37
§3.1. Нормальные моды	37
§3.1.1 Дисперсионные свойства	37
§3.1.2 Экспериментальное измерение дисперсионных характеристик волн Лэмба	43
§3.1.3 Бегущие и вытекающие волны	47
§3.1.4 Отсутствие низкочастотной моды A_0	50
§3.2. Асимптотика объёмных волн на основе метода стационарной фазы	52

§3.3. Асимптотика объёмных волн с учетом сближения особенностей	56
4. Амплитудно-частотные и энергетические характеристики волновых полей, возбуждаемых бесконтактным преобразователем	60
§4.1. Анализ гармонических волновых полей	60
§4.2. Энергетические характеристики	63
§4.2.1 Поток энергии через поверхность	63
§4.2.2 Поток энергии в дальней зоне	72
§4.2.3 Линии тока энергии	74
§4.3. Задачи настройки параметров излучателя и максимизации энергии возбуждаемых волн определенного типа	76
§4.4. Перенос энергии обратными волнами	79
Заключение	85
Литература	87

Введение

В акустоэлектронике и мехатронике используются ультразвуковые поверхностные акустические волны (ПАВ). Они распространяются вдоль границ упругого тела на сравнительно большие расстояния от источника и взаимодействуют с неоднородностями (дефектами) любой природы, выявляя тем самым их местоположение [17, 142]. Рассеянные дефектом ПАВ несут информацию о его виде, размере, форме и ориентации, позволяя создавать на этой основе системы обнаружения и оценки потенциальной опасности дефектов, зарождающихся в элементах тонкостенных конструкций (судостроение, аэрокосмические изделия, ёмкости для химреактивов и радиоактивных отходов и т.п.). К настоящему времени разработка таких систем постоянного волнового контроля состояния элементов конструкций с помощью сети активных пьезодатчиков, возбуждающих и регистрирующих ультразвуковые ПАВ, сформировалась в самостоятельное направление научно-технического развития — Structural Health Monitoring (SHM) [102, 125, 139]. Преимущество SHM технологий по сравнению с традиционной ультразвуковой (УЗ) дефектоскопией заключается в возможности контролировать большие площади конструкций с помощью сравнительно редкой сети встроенных активных пьезосенсоров.

Несмотря на успехи, достигнутые за последние десятилетия в области неразрушающего контроля, здесь еще остается много нерешенных или малоисследованных проблем особенно при использовании SHM-технологий для контроля инженерных конструкций, эксплуатируемых в сложных окружающих условиях. Влияние окружающей акустической среды (жидкости или газа) приводит к значительному усложнению волновых явлений в упругих структурах: за счет передачи энергии в окружающую среду усиливается за-

тухание распространяющихся колебаний, происходит появление новых типов бегущих волн, что требует учета данных эффектов в математических и компьютерных моделях и при проведении экспериментов, необходимых для развития SHM-систем.

Наряду со встроенными пьезоисточниками в последние годы в SHM все шире применяются бесконтактные преобразователи (air-coupled transducers — АСТ) [91, 96, 117] в сочетании с сетью пассивных пьезосенсоров и активно идет развитие акустической микроскопии [55, 90]. Такие бесконтактные преобразователи нередко рассматриваются как альтернатива дорогостоящей лазерной доплеровской виброметрии [134], а акустические микроскопы используются при исследовании внутреннего строения биологических и композитных материалов и других объектов [51, 118].

Взаимодействие акустического пучка, генерируемого АСТ преобразователем или линзой акустического микроскопа, с упругой структурой приводит к появлению бегущих волн, распространяющихся вдоль волновода, погруженного в акустическую жидкость. Так например, АСТ преобразователи, перемещаемые вдоль поверхности специальными манипуляторами, используются для инспекции больших площадей, например, подводной части корпуса судна или обшивки авиалайнера [84, 121]. Еще одной областью приложения таких устройств является определение физико-механических характеристик материалов на основе вытекающих волн Лэмба [118, 143].

Одной из первых работ, посвященных исследованию прохождения звуковой волны через изотропный слой конечной толщины, была статья Н. Reissner [140], вышедшая в 1938 году. Им было представлено решение для прохождения плоской волны через упругую пластину, погруженную в акустическую среду, в зависимости от угла падения волны, частоты и толщины пластины.

В том же году F. Levi и N. Nath [127] получили эквивалентное решение для такой же задачи.

Первые экспериментальные работы по прохождению и отражению звука были проведены R.W. Boyle совместно с D.K. Froman [88] и D.O. Sproule [89] в 1930-х годах. Эти экспериментальные исследования подтвердили основные предположения о математическом решении задачи отражения плоских волн, изложенной Лордом Рэлеем [128]. Позже в 1940-1960-х годах подобные измерения по прохождению звуковых волн через металлическую пластину в жидкости были выполнены F.H. Sanders [145], M.F.M. Osborne и S.D. Hart [132], J.B. Smyth и R.B. Lindsay [153], R.D. Fay и O.V. Fortier [97]. Проведенные эксперименты показали необходимость учета наличия источника в математических моделях, описывающих эти волновые процессы.

В настоящее время стандартным подходом к решению задач волнового взаимодействия с упругими пластинами является применение классических аналитических методов, которые дают физически наглядное описание волновой структуры решения при практически небольших вычислительных затратах. Так простота и наглядность лучевого метода [8–11, 15], в основе которого лежат явные асимптотические представления, делают его незаменимым при расчете волновых полей на высоких частотах. В рамках лучевого метода получены точные решения для отражения плоских волн от системы плоскопараллельных слоев, изучены свойства коэффициентов отражения и прозрачности для плоских волн, отражение и преломление сферических волн и волновых пучков. Отражение волны, заданной лучевым разложением, от границы изучалось многими авторами, например, В.А. Фоком [77], А.С. Алексеевым и Н.В. Цепелевым [2], М.М. Поповым [135], Н. Bertoni и Т. Tamir [87], Т.Ј. Plona, L.E. Pitts и W.G. Mayer [133]. Н.Я. Кирпичниковой исследова-

ны волны, идущие от точечного источника, расположенного вблизи границы раздела упругой среды и жидкости [47]. И.В. Андроновым [4] была рассмотрена задача дифракции на идеально мягком отрезке в высокочастотном приближении при почти скользящем падении плоской волны. Полученное асимптотическое разложение поля позволяет проследить переход от классической асимптотики, справедливой для касательного падения, к геометрической асимптотике, описывающей рассеяние при падении под конечным (не малым) углом. Решение подобной задачи, но на основе параболического уравнения, было представлено А.И. Корольковым и А.В. Шаниным [49]. На основе модели Кирхгофа В.Л. Вешев, Д.П. Коузов и В.Г. Яковлева [16] построили низкочастотную асимптотику волновых чисел для пластин, расположенных на поверхности жидкости. Асимптотические методы позволяют решать задачи восстановления формы дефекта по характеристикам рассеянного акустического поля [14, 19, 69], т.е. решать обратные задачи.

Если относительное (в длинах волн) расстояние от источника до пластины невелико, то формулы, полученные для высокочастотного приближения, становятся неприменимыми для анализа взаимодействия сферических волн с пластиной. Строгий учет близко расположенного источника существенно затрудняет как математическую постановку задачи, так и ее решение.

Наряду с падающими, отраженными и прошедшими объемными акустическими волнами, в погруженной пластине, как и в свободной, возбуждаются бегущие волны (нормальные моды). В 1940-50-х годах были выведены и изучены дисперсионные уравнения, описывающие их распространение вдоль изотропной пластины конечной толщины, погруженной в идеальную жидкость [131, 146]. Их анализ показал, что, в отличие от случая свободной пластины, корни дисперсионного уравнения становятся комплексными и вместо

незатухающих волн Лэмба соответствующие им нормальные моды описывают вытекающие бегущие волны, распространяющиеся с экспоненциальным затуханием. В 1964 году Л.Г. Меркулов [57] исследовал затухание вытекающих волн Лэмба, которое обусловлено потерями на излучение в окружающую в жидкость и вывел явные асимптотические представления для мнимой части волновых чисел, определяющих декремент затухания. S.I. Rokhlin, D.E. Chimenti, A.H. Nayfeh [141] изучили поведение вытекающих волн Лэмба, распространяющихся вдоль погруженной в жидкость пластины, в зависимости от отношения плотностей пластины и жидкости. Анализ дисперсионных уравнений для анизотропных пластин, погруженных в акустическую среду, был проведен A.L. Shuvalov, O. Poncelet, M. Deschamps [151, 152].

При контакте упругого и жидкого полупространств при любых сочетаниях их параметров всегда существует волна Стоунли, которую в этом случае называют «волной Шолте-Стоунли» или «волной Шолте-Гоголадзе». Эта волна была найдена независимо J.G. Schölte [147] в 1947 году и В.П. Гоголадзе [40] в 1948 году. Позже было показано [149], что по поверхности изотропного упругого слоя, полностью погруженного в акустическую жидкость, распространяются две бегущие волны: антисимметричная волна Шолте-Стоунли A и симметричная волна Шолте-Стоунли S , скорость которых меньше скорости звука в окружающей среде. Из всех нормальных мод, возбуждаемых в пластине, только эти волны переносят энергию на бесконечность.

Одним из основоположников структурной акустики в нашей стране считается Л.М. Лямшев. В своих работах по рассеиванию звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости он учитывал не только изгибные колебания, но и принимал во внимание поперечные. Им были обнаружены и описаны незеркальное отражение звука продольно колеблющимися пластинами, резо-

нансное рассеяние звука оболочками в жидкости [53], рассмотрены задачи излучения и рассеяния звука оболочками в движущейся среде [54]. Позже большой вклад в развитие структурной акустики внес Е.Л. Шендеров. Основные результаты его исследований отражены в двух монографиях [79, 80], в которых излагаются основные методы, используемые при расчетах звуковых полей, излучаемых и дифрагированных телами, а также проанализировано взаимодействие звука с упругими телами и прохождение звуковых волн через многослойные упругие пластины и оболочки, которые в общем случае могут быть и с анизотропными упругими свойствами. Е.Л. Шендеров проанализировал особенности прохождения сферической звуковой волны, излучаемой точечным источником, через упругий слой [81]. Точное решение было построено на основе разложения сферической волны по плоским волнам.

В случае многослойных пластин в 1950-е годы W.T. Thomson [154], N.A. Haskell [119] и Г.И. Петрашенем [62] были развиты матричные алгоритмы для вычисления характеристик прохождения и отражения через них упругих волн, которые в дальнейшем модифицировались и совершенствовались многими авторами. На основе этого метода было, в частности, показано [98], что коэффициенты отражения и прохождения через однородный плоскопараллельный упругий слой, ограниченный с обеих сторон одинаковыми акустическими полупространствами, могут иметь простые выражения, зависящие от акустического импеданса.

В нашей стране широкое применение при расчете коэффициентов отражения и преломления плоских волн системой слоев получил матричный метод, развитый Л.А. Молотковым [58]. Этот метод в случае плоских, цилиндрических или сферических однородных слоев и окружающих их сред позволяет получить точные интегральные представления решения уравне-

ний теории упругости и гидроакустики. При удовлетворении всех граничных условий матричный метод позволяет обойти вычисление определителей высоких порядков. Матричный метод распространен также на вертикально-неоднородные среды, на трансверсально-изотропные среды и на среды со слабо искривленными границами. Он позволяет учитывать действие источников колебаний, расположенных на свободной поверхности или внутри полупространства.

Развитием матричного метода Томпсона-Хасекелла-Петрашеня можно считать и импедансный метод расчета волновых характеристик твердых слоистых сред, предложенный в работах М.М. Мачевариани, В.В. Тютюкина, А.П. Шкварникова [56], В.В. Тютюкина [74] и И.Е. Краснушкина [50]. Использование этого метода в теоретических и экспериментальных исследованиях позволяет в ряде случаев существенно упростить получение необходимых результатов. Особенно это относится к таким задачам, в которых не требуется знание самих акустических полей, а требуется определить только их относительные характеристики, такие, как коэффициент отражения плоской звуковой волны от слоисто-неоднородной среды, резонансные частоты и волновые числа упругих слоисто-неоднородных волноводов. Численная реализация импедансного метода расчета коэффициента отражения звуковых волн от непрерывно-слоистых твердых сред была сделана В.Ю. Приходько и В.В. Тютюкиным [63]. В работе Ю.И. Бобровницкого и В.В. Тютюкина [13] получены выражения для расчета потока мощности и плотности энергии нормальных волн в составных волноводах, содержащих жидкость, проанализированы зависимости от частоты долей потока и плотности энергии, относящихся к жидкости.

В 1974 году М. Schoenberg [148] предложил метод решения задачи от-

ражения и прохождения плоских волн через слоистую среду, которая состоит из материалов, обладающих анизотропией упругих свойств наиболее общего типа (характеризующейся 21 упругой постоянной). Этот метод дает строгое решение, но является весьма громоздким, особенно для случая наклонного падения волн на слоистую среду. Позже Ф.И. Соляник [67] разработал более компактный метод расчета коэффициентов отражения и прохождения плоских волн через слоистую анизотропную среду уже при произвольных углах падения, на основе усовершенствованного матричного метода W.T. Thomson [154] для вычисления коэффициентов для произвольного числа изотропных слоев, предложенного Б.В. Тартаковским и О.Г. Швилкиной [70]. Прохождение плоской звуковой волны через упругий анизотропный слой рассматривалась в работах М.П. Лонкевича [52], С.А. Скобельцына и Л.А. Толоконникова [66, 73].

Техника модального анализа [42, 43, 83, 85] позволяет получить дисперсионные характеристики и собственные формы каждой из бегущих волн (нормальных мод), распространяющихся в рассматриваемом погруженном волноводе. Модальный анализ обеспечивает исчерпывающее описание распространения бегущих волн вдоль однородных участков волновода с помощью явных аналитических представлений, однако он не дает возможность учесть источник (собственные формы мод получаются с точностью до постоянных множителей) и не применим для зоны, прилегающей к источнику или содержащей локальные неоднородности. Исследование свойств низших нормальных волн в упругом слое на жидком полупространстве было проведено В.Т. Гринченко и Г.Л. Комиссаровой [41].

Необходимость учета источника колебаний существенно затрудняет применение аналитических методов для определения амплитудных и энергетических

ческих характеристик возбуждаемых им объемных и бегущих волн. Количественные результаты для связной системы источник – акустоупругая среда могут быть получены с помощью современных коммерческих пакетов программ (ANSYS, Abacus, Comsol Multiphysics и др.), реализующих прямые численные методы (конечные и граничные элементы, конечные разности и т.п.) [94, 120, 122, 124]. Прямые численные методы рассматриваются как универсальный инструмент моделирования, применимый для объектов произвольной формы с произвольной неоднородностью физических свойств. Однако, к сожалению, их непосредственное применение к задачам распространения объёмных и бегущих волн может быть затруднительным. Сложная пространственная структура волновых полей требует большого количества элементов или ячеек для их удовлетворительной аппроксимации. В результате, использование численных методов для протяженных погруженных волноводов сложной структуры приводит к резкому росту требуемого числа элементов, что делает их слишком затратными. Кроме того, необходимы демпфирующие или идеально подобранные слои, чтобы избежать нежелательного фиктивного отражения от границ области сеточной аппроксимации. К тому же численные методы не дают такого же ясного физического представления о волновой структуре решения как аналитические решения. Выделение волн различного типа из суммарного волнового поля, анализ распределение энергии источника между возбуждаемыми волнами, построение диаграмм направленности для отраженных и прошедших волн, уходящих на бесконечность, и др. требует дополнительной, не всегда простой, обработки полученных численных результатов.

Чтобы избежать возникающих трудностей некоторые авторы объединяют модели упругих тел на основе численных методов с аналитическими мо-

делями распространения волн в акустической среде. Так бесконтактная система неразрушающего контроля моделировалась МКЭ в работе [124], где бесконтактный преобразователь описывается нормальным напряжением, которое локально прикладывается к поверхности исследуемого образца, а бесконтактный приемник – интегрированием нормальных перемещений по соответствующим областям, выбранным на поверхности пластины. В работе [82] используется гибридный метод, который объединяет в себе метод конечных элементов и лучевой метод. МКЭ требует больше вычислительных затрат, чем лучевой метод, где можно использовать оптимизированные алгоритмы быстрого преобразования Фурье или явные аналитические выражения. Использование гибридного подхода особенно удобно для описания распространения волн в дальней зоне.

В диссертационной работе математическое моделирование проводится на основе интегрального подхода, который занимает промежуточное положение между лучевой теорией и модальным анализом с одной стороны и прямыми численными методами решения волновых задач с другой стороны, сочетая их достоинства [7, 18]. В 1970–1980-х годах интегральный подход был реализован для многослойных и градиентных сред, для которых трудно или невозможно выписать Фурье-символ матрицы Грина K в явном виде. Разработка методов решения подобных задач, возникающих в сейсмоакустике и геофизике, активно проводилась в те годы в НИИ механики и прикладной математики Ростовского государственного университета [1, 3, 5, 20, 21, 23, 39, 46]. Особое значение для их реализации имеет обеспечение быстродействия и численной устойчивости алгоритмов вычисления матрицы K для всего диапазона изменения входных параметров. В частности, были предложены и реализованы алгоритмы построения матрицы Грина, эффективность которых обеспечива-

лась выносом экспоненциальных составляющих за рамки вычислительного процесса [5].

В рамках данного подхода возбуждаемые и рассеиваемые волновые поля представляются через поверхностные интегралы, содержащие фундаментальные решения (функции Грина) для рассматриваемых погруженных волноводных структур. Асимптотические формулы, получаемые из точных интегральных представлений, строятся с помощью метода стационарной фазы и теории вычетов. Разработанные математические и компьютерные модели реализуются в виде программных комплексов, для верификации которых численно проверяются уравнения, граничные условия и энергетический баланс, а также проводится сопоставление с независимыми результатами других авторов и экспериментальными данными.

Целью диссертационной работы является построение методами интегрального подхода решения краевых задач, возникающих при моделировании пространственных (3D) волновых полей, возбуждаемых бесконтактным преобразователем в погруженном в акустическую среду упругом слое s , в общем случае, произвольной анизотропной многослойной структурой (композитные пластины), вывод интегральных и асимптотических представлений решения, создание на этой основе эффективных компьютерных моделей и исследование процессов возбуждения и распространения объемных, бегущих, а также вытекающих волн в связной системе: слоистый упругий волновод – акустическая среда – источник.

Для достижения поставленных целей:

1. В общей постановке (пространственная многослойная анизотропная пластина, погруженная в акустическую жидкость) получены явные инте-

гральные и асимптотические представления функции Грина рассматриваемой динамической задачи теории упругости и на этой основе разработаны и реализованы эффективные компьютерные модели для анализа амплитудно-частотных и энергетических характеристик всех типов волн, возбуждаемых заданным источником (отраженные и прошедшие акустические волны, вытекающие волны Лэмба и незатухающие волны Шолте-Стоунли).

2. На основе сопоставления с независимыми численными и экспериментальными результатами проведена верификация разработанных моделей.
3. Изучен энергетический баланс системы источник-среда-волновод, исследованы резонансные эффекты, проанализирован механизм перераспределения волновой энергии между объемными и бегущими волнами на частотах резонансного прохождения акустических сигналов через упругую пластину.
4. Исследованы закономерности проявления эффекта обратных волн в погруженном волноводе, изучен перенос энергии квазиобратными бегущими волнами.
5. Разработана и реализована методика определения оптимальных параметров возбуждения бегущих волн бесконтактным преобразователем; показано, что они в общем случае не совпадают с хорошо известными в структурной акустике частотами максимума энергии, отдаваемой источником, работающим вблизи упругой преграды.
6. Исследовано влияние анизотропии упругих свойств на диаграммы направленности бегущих волн, возбуждаемых бесконтактным излучате-

лем, и на декремент затухания вытекающих волн Лэмба; показано существование направлений их распространения без экспоненциального затухания, обусловленного оттоком энергии в окружающую среду.

7. Исследован дискуссионный вопрос о существовании/несуществовании низкочастотной незатухающей антисимметричной моды A_0 .

Диссертационная работа общим объемом 110 страниц имеет следующую структуру: введение, четыре главы основной части, заключение и список литературы, включающий 160 источника. Работа содержит 37 рисунков.

В **первой главе** диссертации в рамках линейной теории упругости формулируются динамические краевые задачи для тел, погруженных в акустическую среду. В общей трехмерной постановке выводится функция Грина для многослойного анизотропного упругого слоя, погруженного в акустическую среду. Приводится описание математических моделей источников, рассматриваемых в работе.

Вторая глава посвящена описанию интегрального подхода, который используется для решения рассматриваемых краевых задач динамической теории упругости. Приводятся интегральные представления волновых полей, а также численные сопоставления с результатами других авторов.

В **третьей главе** исследуются дисперсионные свойства погруженного волновода. На основе ранее полученных интегральных представлений для волновых полей выводятся асимптотические формулы в дальней от источника зоне. Асимптотика бегущих волн строится в соответствии с леммой Жордана и теорией вычетов. Оценка методом стационарной фазы дает асимптотическое представление в дальней зоне для отраженного и прошедшего акустических полей в виде сферических волн. Также строятся асимптоти-

ческие представления, учитывающие сближение особенностей. Приводятся сопоставления с численными результатами других авторов для упругой пластины, погруженной в акустическую жидкость.

В **четвертой главе** анализируются энергетические характеристики волновых полей на основе построенного в предыдущих главах их представления через функцию Грина. Проводится сравнение полученных результатов с результатами других авторов. Анализируется зависимость осредненного за период колебаний количества энергии, переносимой каждой из возбуждаемых волн различного типа (акустические объёмные волны, вытекающие волны Лэмба и волны Шолте-Стоунли), от относительных размеров источника, расстояния до пластины и частоты, а также структура энергетических потоков и пространственное распределение волновой энергии. Подробнее рассматриваются обратные волны и резонансные эффекты. Показано, что эффекты, связанные с обратной волной проявляются нечетко, поскольку происходит изменение траекторий, по которым движутся полюса обратной волны. Рассмотрены энергетические свойства вытекающих обратных волн.

На защиту выносятся:

1. Математическая модель, описывающая взаимодействие волнового поля, возбуждаемого бесконтактным круговым источником, с упругим анизотропным слоистым волноводом.
2. Численно-аналитическая схема решения краевых задач о бесконтактном динамическом взаимодействии ультразвукового источника с погруженным анизотропным слоистым волноводом.
3. Результаты численного параметрического анализа амплитудно-частотных и энергетических характеристик возбуждаемых волновых полей.

4. Результаты исследования резонансных эффектов, связанных с обратными модами и модами с нулевой групповой скоростью.
5. Результаты исследования структуры потоков волновой энергии в рассматриваемой системе источник-среда-волновод.
6. Результаты исследования общих закономерностей изменения распределения суммарной мощности источника между возбуждаемыми волнами различного типа при варьировании его положения, размера и частоты.
7. Факт отсутствия низкочастотной бегущей моды A_0 в погруженной упругой пластине.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях:

- 2019 International Congress on Ultrasonics (ICU 2019) (г. Брюгге, Бельгия, 2019 г.) [116];
- The 13th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics (г. Вена, Австрия, 2017 г.) [113];
- International conference «Days on Diffraction 2015-2018» (г. Санкт-Петербург, 2015-2019 гг.) [99, 112, 114, 115];
- X Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2014 г., 2015 г., 2017 г., 2019 г.) [31, 32, 35, 38];
- XVIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2016 г.) [28];
- XX Зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, 2017 г.) [37, 44];
- XXI и XXV международный симпозиум «Динамические и технологические

проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (г. Кременки, 2015 г., 2019 г.) [27, 33];

– XIV и XV объединенная научная конференция студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики «Прикладная математика XXI века» (г. Краснодар, 2014 г., 2015 г.) [59, 60].

Публикации. Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертационной работе, опубликованы в работах [27, 28, 31-35, 37, 38, 44, 59-61, 99, 105, 110-116, 129]. Из них две статьи [34, 61] в изданиях непосредственно из списка ВАК, 8 работ в изданиях индексируемых в Web of Science [34, 111] (квартили Q2 и Q1) и Scopus [99, 110, 112, 114, 115, 129], которые также учитываются ВАК. Остальные работы – это статьи, индексируемые РИНЦ [27, 33, 37, 44, 105], или тезисы конференций [31, 32, 35, 38, 59, 60, 116]. Также получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [159, 160].

Диссертационная работа проводилась в рамках выполнения проектов РФФИ (№ 14-08-00370, 16-41-230744, 16-41-230769), при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (№ 1.189.2014/К, 9.1022.2017/ПЧ), Российского научного фонда (№ 17-11-01191) и были также поддержаны индивидуальным грантом международного фонда G-RISC (№ M-2016b-6, 2016 г.), стипендиями Президента Российской Федерации (2018-2019 гг.) и администрации Краснодарского края (2017-2019 гг.).

ГЛАВА 1. Краевые задачи динамической теории

упругости для тел, погруженных в акустическую среду

§1.1. Уравнения движения и граничные условия

Для моделирования волновых процессов, возникающих при акустическом зондировании материалов с использованием акустических микроскопов и бесконтактных акустических преобразователей, необходимо решение краевых задач динамической теории упругости для тел, погруженных в акустическую жидкость с источником. В настоящей работе рассматривается многослойная упругая пластина, погруженная в акустическую среду. В декартовой

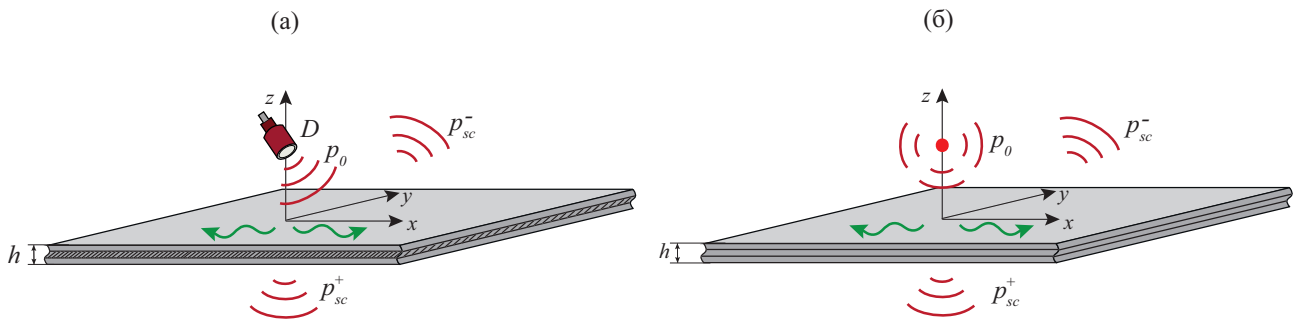


Рис. 1.1: Зондирование бесконтактным преобразователем (а); точечный источник, задающий функцию Грина $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ (б) (см. раздел 1.1)

системе координат $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ волновод толщины h занимает объём V : $-\infty < x, y < +\infty, -h \leq z \leq 0$ (рис. 1.1). Источник моделируется распределением некоторой силы в ограниченной области D , которая может быть как плоской, так и вогнутой поверхностью излучающего элемента акустического микроскопа [71] или АСТ преобразователя. Предполагается, что центр источника расположен на расстоянии d от поверхности пластины. Колебания частиц упругой или акустической среды относительно положе-

ния равновесия при прохождении волн описываются вектором перемещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, компоненты которого непрерывные функции координат \mathbf{x} и времени t .

Решение задачи о нестационарных гармонических колебаниях упругого слоя строится в виде обратного преобразования Фурье

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_\omega^{-1}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ – частотный спектр, который определяется из решения краевой задачи для установившихся гармонических колебаний $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$ многослойной упругой пластины, погруженной в акустическую жидкость.

Для гармонических колебаний зависимость от времени имеет вид $\cos(\theta(\mathbf{x}) - \omega t)$, где ω – круговая частота колебаний, θ – сдвиг фазы. В дальнейшем используется комплексная форма записи. Для каждой из компонент вектора смещений $u = w_1(\mathbf{x}) \cos(\theta - \omega t)$ вводится обозначение:

$$u(\mathbf{x}, t) = w_1 \operatorname{Re}[e^{i(\theta - \omega t)}] = \operatorname{Re}[we^{-i\omega t}],$$

где $w = w_1 e^{i\theta}$ – комплексная амплитуда величины u . С помощью комплексных амплитуд и временного множителя $e^{-i\omega t}$ записываются также и компоненты тензоров напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} , которые характеризуют механическое состояние среды. Все линейные операции над данными величинами сводятся к операциям над их комплексными амплитудами. Такая запись удобна тем, что одновременно описывает амплитуду и сдвиг фаз и при этом позволяет уйти от временной зависимости, что значительно упрощает запись выражений. Для частотных спектров под \mathbf{u} , σ_{ij} , ε_{ij} , p и т.п. понимаются их комплексные амплитуды.

В линейной теории упругости перемещения, деформация и напряжения

связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \quad i, j, m, n = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

и геометрическими соотношениями Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{F_1, F_2, F_3\}$ — вектор объёмных сил, $\rho(\mathbf{x})$ — плотность, $C_{ijmn}(\mathbf{x})$ — модули упругости материала. В тензорной записи предполагается суммирование по одинаковым индексам, а для производных по координатам используется обозначение $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Вектор-столбцы обозначены жирным шрифтом. Наряду с цифровой индексацией компонент векторов и тензоров в дальнейшем будут также использоваться их традиционные обозначения $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\} = \{u, v, w\}$, σ_{xx} , ε_{yz} и т.д.

Уравнения движения (1.2) сводятся к уравнениям Навье-Ляме относительно перемещений \mathbf{u} :

$$\mathcal{L}\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} + \mathbf{F} = 0. \quad (1.5)$$

В анизотропном случае дифференциальный оператор Ляме имеет вид:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} \equiv \frac{1}{2}(C_{ijmn}(u_{m,nj} + u_{m,nj}))_{i=1}^3.$$

В изотропном случае, когда упругие свойства тела одинаковы во всех направлениях, закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (1.6)$$

где $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $\delta = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ — символ Кронекера. λ, μ — упругие модули (константы Ляме), а уравнения движения (1.2) принимают вид:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} \equiv (\lambda + 2\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u}.$$

В акустической среде поле давления $p(\mathbf{x})$ вне области источника D в верхнем и нижнем полупространствах $z \geq 0$ и $z \leq -h$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца [45]:

$$\Delta p + \kappa_0^2 p = 0, \quad (1.7)$$

где $\kappa_0 = \omega_0/c_0$ — волновое число, c_0 — скорость звука в акустической среде. Поле давления, генерируемое источником, расположенным над пластиной, представляется в виде:

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_0(\mathbf{x}) + p_{sc}^-(\mathbf{x}), & z \geq 0, \\ p_{sc}^+(\mathbf{x}), & z \leq -h, \end{cases} \quad (1.8)$$

где p_0 — поле источника в безграничной среде, а p_{sc}^- и p_{sc}^+ — поле отраженных от пластины и прошедших сквозь неё объёмных волн. Здесь и далее, верхние индексы минус и плюс используются для акустических полупространств $z \geq 0$ и $z \leq -h$ соответственно.

На верхней и нижней границах волновода заданы условия непрерывности вертикальных смещений u_z и нормальных напряжений σ_z :

$$u_z = \frac{1}{\rho_0\omega^2} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \sigma_z = -p \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = -h. \quad (1.9)$$

Также предполагается отсутствие касательных напряжений:

$$\tau_{xz} = 0 \text{ и } \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = -h. \quad (1.10)$$

В случае контакта пластины с акустической жидкостью только с одной стороны $z = 0$, ее нижняя поверхность считается свободной от напряжений, т.е. $p_{sc}^+ = 0$.

В общем случае рассматривается M -слойный волновод толщины h : $V = \bigcup_{m=1}^M V_m$, где $V_m : -\infty < x, y < +\infty, z_{m+1} \leq z \leq z_m, z_1 = 0, z_{M+1} = -h$. Между слоями предполагается непрерывность перемещений и напряжений, т.е. слои между собой жестко сцеплены:

$$[\mathbf{u}]_m = 0, \quad [\boldsymbol{\tau}]_m = 0, \quad m = 2, 3, \dots, M, \quad (1.11)$$

где $[\mathbf{u}]_m = \lim_{z \rightarrow z_m^-} \mathbf{u} - \lim_{z \rightarrow z_m^+} \mathbf{u}$ и $[\boldsymbol{\tau}]_m = \lim_{z \rightarrow z_m^-} \boldsymbol{\tau} - \lim_{z \rightarrow z_m^+} \boldsymbol{\tau}$ обозначают соответственно скачки смещений \mathbf{u} и напряжений $\boldsymbol{\tau}$ на границах раздела слоёв $z = z_m$. Нижняя граница волновода $z = z_M$ граничит с акустическим полупространством.

Замыкают постановку задачи условия излучения на бесконечности, вытекающие из принципа предельного поглощения [18, 65].

§1.2. Функции Грина для упругого слоя в акустической среде

Скалярное поле давлений $p(\mathbf{x})$ и векторное поле смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, генерируемые источником, заданным в области D , можно представить в виде интегралов по этой области от произведения функции Грина для поля давлений $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ и вектор-функции Грина для поля смещений $\mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ на функцию распределения заданной нагрузки q_0 :

$$p(\mathbf{x}) = \int_D g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_D \mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (1.12)$$

Данное представление справедливо для любой плоской или изогнутой двумерной области D . В работе рассматривается три вида источников, отлича-

ющихся конкретным видом области D :

- а) точечный источник: $q_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, область D вырождается в точку \mathbf{x}_0 , задающую расположение источника, $\delta(\mathbf{x})$ – двумерная дельта-функция Дирака;
- б) горизонтальный круговой источник: $q_0 = q_0(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; область D – круг радиуса a ($r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$), расположенный на расстоянии d от пластины ($z = d$);
- в) наклонный круговой источник: как выше, но область D повернута вокруг оси y на угол θ .

Функции $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ и $\mathbf{g}_u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ определяются как решение связной краевой задачи с дельта-функцией в правой части уравнения Гельмгольца вместо q_0 :

$$\Delta g + \kappa_0^2 g = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}). \quad (1.13)$$

В уравнениях и граничных условиях они стоят на месте p и \mathbf{u} соответственно. Вектор-функция \mathbf{g}_u , определённая как решение в слое $-h \leq z \leq 0$, доопределяется во внешней акустической среде соотношением

$$\mathbf{g}_u = \nabla g / (\rho_0 \omega^2) \text{ при } z \geq 0 \text{ и } z \leq -h. \quad (1.14)$$

Аналогично представлению (1.8), функция Грина давления g для источника, расположенного в точке $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ верхнего полупространства ($\zeta = d > 0$, d – расстояние от источника до пластины), также представляется как сумма падающего поля $g_0(\mathbf{x})$ и отраженного $g_{sc}^-(\mathbf{x})$: $g = g_0 + g_{sc}^-$. Сферические объёмные волны, излучаемые точечным источником, описываются классическим частным решением уравнения Гельмгольца [72]

$$g_0 = -\frac{1}{4\pi R} e^{i\kappa_0 R}, \quad R = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|. \quad (1.15)$$

Применение преобразования Фурье \mathcal{F}_{xy} по горизонтальным координатам x и y к уравнениям и граничным условиям позволяет получить интегральные представления функций Грина через их Фурье-символы $G = \mathcal{F}_{xy}[g]$ и $\mathbf{G}_u = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{g}_u]$:

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_{xy}^{-1}[G] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} G(\alpha_1, \alpha_2, z; \boldsymbol{\xi}) e^{-i(\alpha_2 x + \alpha_1 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.16)$$

и аналогично для \mathbf{g}_u . Контуры интегрирования Γ_1 и Γ_2 идут вдоль вещественных осей комплексных плоскостей α_1 и α_2 , обходя вещественные полюса ζ_n подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения.

Для получения Фурье-символов G и \mathbf{G}_u используются разработанные ранее алгоритмы построения символа матрицы Грина K упругого стратифицированного полупространства $z \leq 0$ [5, 29, 30, 36]. Матрица K определяет связь между Фурье-символами поверхностных напряжений $Q = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{q}]$, где $\mathbf{q} = \boldsymbol{\tau}|_{z=0}$ и смещений $U = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{u}]$:

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}, z) = K(\boldsymbol{\alpha}, z)\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}), \quad z \leq 0, \quad (1.17)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ – вектор параметров обратного преобразования Фурье. В соответствии с граничными условиями $\mathbf{q} = (0, 0, q)^T$, т.е. в соотношении (1.17) работает только третий столбец \mathbf{K}_3 матрицы K .

Учитывая условия непрерывности (1.9), Фурье-символ $Q = \mathcal{F}_{xy}[q]$ выражается через Фурье-символ $G_0 = \mathcal{F}_{xy}[g_0]$ поля источника (1.15) при $z = 0$:

$$G_0(\boldsymbol{\alpha}, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\kappa_0 R}}{R} e^{i(\alpha_1(x+\xi) + \alpha_2(y+\eta))} dx dy. \quad (1.18)$$

Далее осуществляется переход к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, & r = \sqrt{x^2 + y^2}, & 0 \leq r < \infty, \\ y = r \sin \varphi, & \varphi = \operatorname{arctg}(y/x), & 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (1.19)$$

и

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \cos \gamma, & \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, & 0 \leq \alpha < \infty, \\ \alpha_2 = \alpha \sin \gamma, & \gamma = \operatorname{arctg}(\alpha_2/\alpha_1), & 0 \leq \gamma < 2\pi. \end{cases} \quad (1.20)$$

Учитывая формулу [12]

$$\int_0^{2\pi} e^{ir \cos(\varphi-\gamma)} d\gamma = 2\pi J_0(\alpha r), \quad (1.21)$$

представление (1.18) сводится к однократному интегралу вида

$$G_0(\alpha, z) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\kappa_0 \sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}}}{\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}} J_0(\alpha r) r dr. \quad (1.22)$$

Используя далее формулу (2.12.23) [64], оно преобразуется к явному выражению

$$G_0(\alpha, z) = -\frac{e^{-\sigma_0 |z-\zeta|}}{2\sigma_0} e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)}, \quad (1.23)$$

где

$$\sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_0^2}, \quad \operatorname{Re} \sigma_0 \geq 0, \quad \operatorname{Im} \sigma_0 \leq 0, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Соответственно, при $z = 0$ Фурье-символ поля точечного источника имеет вид:

$$G_0(\alpha, 0) = -\frac{e^{-\sigma_0 \zeta}}{2\sigma_0} e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)},$$

и Фурье-символ Q неизвестной нагрузки q на границе $z = 0$ несложно получить из условия непрерывности (1.9) в следующем виде:

$$Q(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{Q} e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)}, \quad \tilde{Q}(\boldsymbol{\alpha}, \zeta) = -\Delta e^{-\sigma_0 \zeta} / \Delta_0, \quad (1.24)$$

$$\Delta_0 = \sigma_0 \Delta - \rho_0 \omega^2 \hat{K}_{33}(\boldsymbol{\alpha}, 0).$$

Здесь $\hat{K}_{33}(\boldsymbol{\alpha}, z)$ и $\Delta(\boldsymbol{\alpha})$ – числитель и знаменатель элемента K_{33} матрицы K : $K_{33} = \hat{K}_{33}/\Delta$.

Подставляя полученное представление Q в соотношение (1.17) и учитывая вид Фурье-символа поля давления отраженных волн $P_{sc}^- = c_1 e^{-\sigma_0(z+\zeta)}$, где $c_1 = (\Delta_0 - 2\sigma_0\Delta)/(2\sigma_0\Delta_0)$, получаем явное представление Фурье-символов функций Грина g и \mathbf{g}_u :

$$G(\boldsymbol{\alpha}, z; \boldsymbol{\xi}) = \left[\tilde{G}_0 + \tilde{G}_{sc}^- \right] e^{i(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta)}, \quad z \geq 0, \quad (1.25)$$

$$\tilde{G}_0(\boldsymbol{\alpha}, z; \zeta) = -\frac{e^{-\sigma_0|z-\zeta|}}{2\sigma_0}, \quad \tilde{G}_{sc}^-(\boldsymbol{\alpha}, z; \zeta) = -\frac{\rho\omega^2\hat{K}_{33} + \sigma_0\Delta}{2\sigma_0\Delta_0} e^{-\sigma_0(z+\zeta)},$$

$$\mathbf{G}_u(\boldsymbol{\alpha}, z; \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}_3 Q, \quad z \leq 0. \quad (1.26)$$

Эти представления справедливы для произвольного анизотропного вертикально-неоднородного упругого слоя, контактирующего с верхним акустическим полупространством $z \geq 0$. В случае контакта нижней поверхности слоя с вакуумом, K – матрица Грина упругого слоя конечной толщины h , а в случае полностью погруженного волновода – матрица Грина многослойного полупространства $z \leq 0$, в котором нижнее полупространство $z \leq -h$ – акустическая среда.

Для использования представлений (1.25)-(1.26) требуются эффективные алгоритмы вычисления элементов K_{33} . Для этой цели хорошо зарекомендовали себя развитые ранее численно-устойчивые методы быстрого вычисления матрицы K в случае многослойных [5, 7, 29], функционально-градиентных [36] и произвольно-анизотропных [30, 104] сред. В изотропном случае компоненты вектора-столбца $\mathbf{K}_3 = (-i\alpha_1 S, -i\alpha_2 S, R)^T$ выражаются через две функции $S(\boldsymbol{\alpha}, z)$ и $R(\boldsymbol{\alpha}, z)$, конкретный вид которых зависит от строения пластины (однородная, многослойная).

В случае однородного изотропного слоя, лежащего на акустическом полупространстве, функции $S(\boldsymbol{\alpha}, z)$ и $R(\boldsymbol{\alpha}, z)$ могут быть выписаны в явном виде через известные Фурье-символы элементов матрицы Грина для слоя, к верхней и нижней грани которого $z = 0$ и $z = -h$ приложены нормальные нагрузки q_1 и q_2 [25]. Фурье-символы вызванных ими смещений имеют вид:

$$\begin{aligned} U_x &= -i\alpha_1(S_1Q_1 + S_2Q_2)/\Delta_L, \\ U_y &= -i\alpha_2(S_1Q_1 + S_2Q_2)/\Delta_L, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$U_z = (R_1Q_1 + R_2Q_2)/\Delta_L, \quad -h \leq z \leq 0,$$

где

$$\begin{aligned} S_1(\alpha, z) &= -i[\sigma_{12}(\alpha^2\gamma^2c_2 + \gamma^4c_1) - \sigma_{12}\gamma^4cc_{21} + \alpha^2\sigma_{12}^2ss_{21} - \\ &\quad - \alpha^2\sigma_{12}\gamma^2cc_{12} + \gamma^6ss_{12}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1(\alpha, z) &= \sigma_1[-\alpha^2(\sigma_{12}\gamma^2s_1 + \gamma^4s_2) + \alpha^2\sigma_{12}\gamma^2cs_{21} - \gamma^6sc_{21} + \\ &\quad + \alpha^2\gamma^4cs_{12} - \alpha^4\sigma_{12}sc_{12}], \end{aligned}$$

$$S_2(\alpha, z) = S_1(\alpha, -z - h), \quad R_2(\alpha, z) = R_1(\alpha, -z - h),$$

$$\Delta_L = 2\mu[-2\alpha^2\sigma_{12}^2\gamma^4 - (\gamma^8 + \alpha^4\sigma_{12})s_1(h)s_2(h) + 2\alpha^2\sigma_{12}\gamma^4c_1(h)c_2(h)],$$

$$\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2, \quad s_n(z) = \text{sh}(\sigma_n z), \quad c_n(z) = \text{ch}(\sigma_n z),$$

$$ss_{mn}(z) = s_m(z)s_n(z + h), \quad cc_{mn}(z) = c_n(z)c_m(z + h),$$

$$sc_{mn}(z) = s_m(z)c_n(z + h), \quad cs_{mn}(z) = c_m(z)s_n(z + h), \quad m, n = 1, 2,$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \kappa_2^2/2, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad \sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}, \quad \kappa_1 = \omega h/c_p, \quad \kappa_2 = \omega h/c_s.$$

В нижнем полупространстве

$$P(\alpha, z) = -Q_2 e^{\sigma_0(z+h)}, \quad U_z(\alpha, z) = -\sigma_0 Q_2 e^{\sigma_0(z+h)} / (\rho_0 \omega^2), \quad z \leq -h.$$

Условие непрерывности U_z при $z = -h$ позволяет выразить Q_2 через $Q_1 = Q$:

$$Q_2 = -\rho_0 \omega^2 R_{1,h} Q / \Delta,$$

где $\Delta = \sigma_0 \Delta_L - \rho_0 \omega^2 R_{2,h}$, $R_{n,h} = R_n(\alpha, -h)$, $n = 1, 2$. В результате функции S и R в пределах слоя принимают вид

$$S(\alpha, z) = (S_1 \Delta + \rho_0 \omega^2 R_{1,h} S_2) / (\Delta \Delta_L),$$

$$R(\alpha, z) = (R_1 \Delta + \rho_0 \omega^2 R_{1,h} R_2) / (\Delta \Delta_L), \quad -h \leq z \leq 0.$$

(1.28)

В акустическом полупространстве

$$R(\alpha, z) = \hat{R}(\alpha, z) / \Delta, \quad S(\alpha, z) = \hat{S}(\alpha, z) / \Delta, \quad z \leq -h,$$

(1.29)

$$\hat{R} = -R_{1,h} \sigma_0 e^{\sigma_0(z+h)}, \quad \hat{S} = \sigma_0 \hat{R},$$

и в силу соотношения (1.13)

$$G_{sc}^+(\alpha, z; \xi) = \rho_0 \omega^2 S Q = \tilde{G}_{sc}^+ e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta)}, \quad z \leq -h,$$

(1.30)

$$\tilde{G}_{sc}^+(\alpha, z; \zeta) = -\rho_0 \omega^2 \hat{S} e^{\sigma_0 \zeta} / \Delta_0.$$

§1.2.1 Поле кругового источника

Излучающая пластина бесконтактного преобразователя моделируется равномерно-распределенной нагрузкой $q_0 = F / (\pi a^2)$, Фурье-символ $Q_0(\alpha) = \mathcal{F}_{xy}[q_0]$ которой легко получить в явном виде. Для горизонтального преобразователя (рис. 1.2а) интегрирование $q_0 e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}$ по круговой области D даёт:

$$Q_0 = F \hat{Q}_0 / (\pi a^2) = 2F J_1(a\alpha) / (a\alpha). \quad (1.31)$$

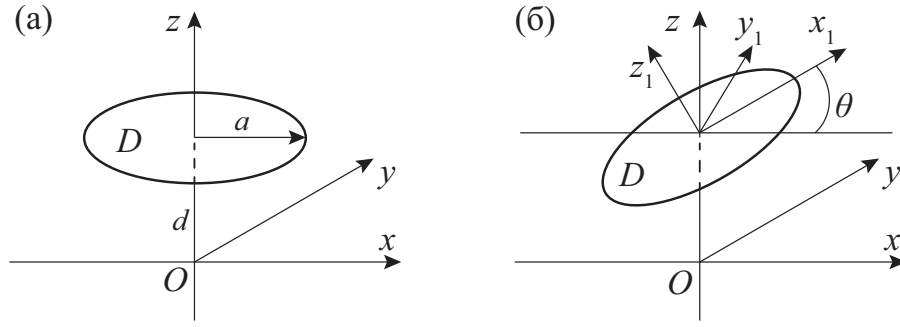


Рис. 1.2: Область D , в которой задается распределенная нагрузка q_0 в случае горизонтального (а) и наклонного (б) излучателя

Здесь использованы цилиндрические координаты (1.19)-(1.20) и формула (1.21):

$$\hat{Q} = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i\alpha a \cos(\psi-\gamma)} d\gamma r dr = 2\pi \int_0^a J_0(\alpha r) r dr = 2\pi \frac{J_1(a\alpha)a}{\alpha}, \quad \hat{Q}(0) = \pi a. \quad (1.32)$$

В случае наклонной области D (рис. 1.2б) удобно перейти к локальной системе координат \mathbf{x}_1 , которая связана с координатами \mathbf{x} глобальной системы соотношениями:

$$\mathbf{x}_1 = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_c + C^{-1}\mathbf{x}_1, \quad C(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}. \quad (1.33)$$

Здесь $\mathbf{x}_c = (0, 0, d)$ – глобальные координаты центра кругового преобразователя, $C(\theta)$ – матрица поворота на угол θ . В локальных координатах

$$p_0(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} P_0(\alpha_1, \alpha_2, z_1) Q_0(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.34)$$

где $P_0 = -e^{-\sigma_0|z_1|}/(2\sigma_0)$.

Для перехода к глобальным координатам, в которых применяется преобразование Фурье \mathcal{F}_{xy} , используется техника, предложенная в работе [103], которая позволяет избавиться от многократных интегралов. Преобразование

Фурье применяется сначала по всем трём пространственным координатам

$$p_0(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_3} \hat{P}_0(\boldsymbol{\alpha}) Q_0(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}_1)} d\boldsymbol{\alpha}. \quad (1.35)$$

Здесь

$$\hat{P}_0(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{F}_{z_1}[P_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(\alpha_1, \alpha_2, z_1) e^{i\alpha_3 z_1} dz_1, \quad (1.36)$$

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – вектор параметров преобразования Фурье; $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}_1) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1$.

Явный вид $\hat{P}_0(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{F}_{z_1}[P_0(\alpha_1, \alpha_2, z_1)]$ легко выводится, поскольку преобразование Фурье \mathcal{F}_{z_1} действует только на экспоненту $e^{-\sigma_0|z_1|}$, входящую в $P_0(\alpha_1, \alpha_2, z_1)$:

$$\mathcal{F}_{z_1}[e^{-\sigma_0|z_1|}] = 2\sigma_0/\delta_0(\boldsymbol{\alpha}),$$

где $\delta_0 = \alpha_3^2 + \sigma_0^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 - \kappa_0^2$; $\hat{P}_0(\boldsymbol{\alpha}) = -1/\delta_0(\boldsymbol{\alpha})$.

Суть используемой техники в том, что при повороте на угол θ в пространстве \mathbf{x} такой же поворот, но в противоположную сторону делается в пространстве $\boldsymbol{\alpha}$: $\boldsymbol{\alpha} = C\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Такая замена переменных не изменяет структуру показателя экспоненты в соотношении (1.34):

$$(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}_1) = (C\boldsymbol{\beta}, C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)) = (\boldsymbol{\beta}, C^{-1}C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)) = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}_c)$$

и длину вектора параметров преобразования Фурье: $|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}|$, $|\boldsymbol{\beta}|^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$. В частности,

$$\delta_0(\boldsymbol{\alpha}) = \delta_0(\boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\beta}|^2 - \kappa_0^2 = \beta_3^2 + \hat{\sigma}_0^2(\boldsymbol{\beta}),$$

где $\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{\beta^2 - \kappa_0^2}$, $\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$.

В глобальных координатах волновое поле источника (1.34) принимает

вид:

$$p_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_3} \frac{Q_0(\alpha_1, \alpha_2)}{\beta_3^2 + \hat{\sigma}_0^2} e^{-i(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z - \beta_3 d)} d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3. \quad (1.37)$$

В соответствии с леммой Жордана контур Γ_3 замыкается в верхнюю или нижнюю полуплоскость в зависимости от убывания функции $e^{-i\beta_3(z-d)}$ и интеграл (1.37) по контуру Γ_3 заменяется вычетом в полюсе $\zeta = \pm i\hat{\sigma}_0$:

$$p_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \Psi(\beta_1, \beta_2, z) Q_0(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\beta_1 x + \beta_2 y)} d\beta_1 d\beta_2, \quad (1.38)$$

$$\Psi = \begin{cases} -\pi \frac{e^{\hat{\sigma}_0(z-d)}}{\hat{\sigma}_0}, & z \leq d, \quad \beta_3 = i\hat{\sigma}_0, \\ \pi \frac{e^{-\hat{\sigma}_0(z-d)}}{\hat{\sigma}_0}, & z \geq d, \quad \beta_3 = -i\hat{\sigma}_0. \end{cases}$$

Нагрузка $Q_0(\alpha_1, \alpha_2)$ не осесимметричная, параметры α_1 и α_2 определяются как $\alpha_1 = \beta_1 \cos \theta + i\hat{\sigma}_0 \sin \theta$, $\alpha_2 = \beta_2$. При дальнейшей замене $\beta_1 = \beta \cos \gamma$ и $\beta_2 = \beta \sin \gamma$ получается

$$p_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \Psi(\beta, z) \hat{Q}_0(\beta, \gamma) d\beta, \quad (1.39)$$

$$\hat{Q}_0 = F \int_0^{2\pi} \frac{J_0(a\sqrt{\beta \cos \gamma \cos \theta + i\hat{\sigma}_0 \sin \theta + \beta^2 \sin^2 \gamma})}{a\sqrt{\beta \cos \gamma \cos \theta + i\hat{\sigma}_0 \sin \theta + \beta^2 \sin^2 \gamma}} d\gamma.$$

Таким образом, волновое поле возбуждаемое горизонтальным или наклонным преобразователем в верхнем полупространстве $z \geq 0$, упругом слое $-h \leq z \leq 0$ и нижнем полупространстве $z \leq -h$, выражается с помощью функций Грина, Фурье-символ которой в этих областях в общем случае имеет вид:

$$P_{sc}^-(\boldsymbol{\alpha}, z; d) = -\frac{\rho\omega^2 \hat{K}_{33} + \sigma_0 \Delta}{2\sigma_0 \Delta_0} e^{-\sigma_0(z+d)} Q_0, \quad z \geq 0,$$

$$U(\boldsymbol{\alpha}, z; d) = \mathbf{K}_3 Q Q_0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad (1.40)$$

$$P_{sc}^+(\boldsymbol{\alpha}, z; d) = \omega^2 \rho_0 K_{13} e^{\sigma_0(z+h)} Q_0, \quad z \leq -h,$$

где Q_0 имеет вид (1.31) или (1.39) для горизонтального или наклонного источника соответственно.

ГЛАВА 2. Интегральные представления волновых полей для системы слоистый упругий волновод – акустическая среда – источник

В данной главе приводятся интегральные представления волновых полей, а также численное сопоставление с результатами других авторов.

Интегральное представление решения краевой задачи с распределенным источником, описывающего поле отраженных волн p_{sc}^- , поле смещений внутри пластины \mathbf{u} и поле прошедших волн p_{sc}^+ , имеет вид:

$$p_{sc}^-(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \tilde{G}_{sc}^-(\boldsymbol{\alpha}, z; d) Q_0(\boldsymbol{\alpha}) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad z \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{G}_u(\boldsymbol{\alpha}, z; d) Q_0(\boldsymbol{\alpha}) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad -h \leq z \leq 0, \quad (2.2)$$

$$p_{sc}^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \tilde{G}_{sc}^+(\boldsymbol{\alpha}, z; d) Q_0(\boldsymbol{\alpha}) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad z \leq -h. \quad (2.3)$$

В изотропном случае подынтегральные функции в плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ зависят только от радиальной координаты $\alpha = |\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, что позволяет свести двукратные контурные интегралы (2.1)–(2.3) к однократным интегралам по α [18]. Для этого делается переход к цилиндрическим координатам (1.19)–(1.20) и используется формула (1.21). Тогда, интегральные представления (2.1)–(2.3) принимают вид:

$$\begin{aligned} p_{sc}^-(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} \tilde{G}_{sc}^-(\alpha, z; d) Q_0(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad z \geq 0, \\ u_r(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} S(\alpha, z) \tilde{Q}(\alpha, d) Q_0(\alpha) J_1(\alpha r) \alpha^2 d\alpha, \quad -h \leq z \leq 0, \\ u_z(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} R(\alpha, z) \tilde{Q}(\alpha, d) Q_0(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad -h \leq z \leq 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$p_{sc}^+(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} \tilde{G}_{sc}^+(\alpha, z; d) Q_0(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad z \leq -h.$$

Контур Γ_+ идет вдоль вещественной полуоси $\text{Re}\alpha \geq 0$, $\text{Im}\alpha = 0$ и отклоняется от неё вниз при обходе вещественных полюсов в соответствии с принципом предельного поглощения.

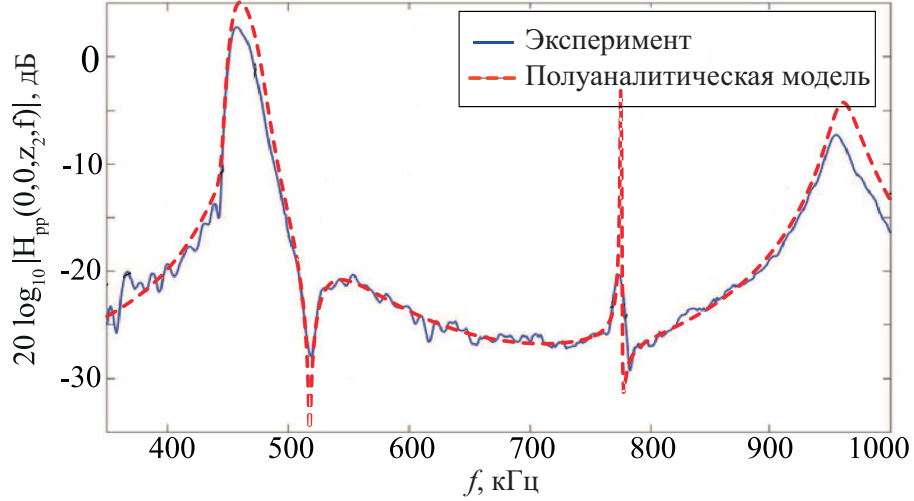


Рис. 2.1: Сопоставление численных результатов, полученных на основе построенной полуаналитической модели (пунктирная линия), с экспериментальными результатами работы [82] (сплошная линия)

Для верификации разработанной модели особенно полезными оказались результаты работы [82], в которой численно и экспериментально исследуется взаимодействие волнового поля, излучаемого АСТ трансдюсером, с погруженной в воду стальной пластиной. В этой работе численное моделирование проводится с помощью метода конечных элементов (МКЭ) с учётом реального строения источника (корпус, излучающая пластина и другие элементы конструкции). Результаты, полученные на основе представлений (2.4), в которых источник моделируется распределенной нагрузкой q_0 , показали такое же хорошее совпадение с экспериментальными данными как и МКЭ модели-

рование, что подтверждает их практическую применимость. Сопоставление проводится для коэффициента прохождения $\kappa_T = 20\lg|H_{pp}(0, 0, z_2, f)|$, где $H_{pp} = p(\mathbf{x}_2)/p(\mathbf{x}_1)$ для точек \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , взятых на верхней границе пластины ($z_1 = 0$), и в воде на глубине 100 мм от её нижней границы (-106.05 мм); бесконтактный преобразователь радиуса $a = 15$ мм расположен на расстоянии $d = 270$ мм от пластины толщины $h = 6.05$ мм.

Сплошной линией на рис. 2.1 показана экспериментальная частотная зависимость коэффициента κ_T [82], пунктирной – рассчитанная по формулам (2.4). Максимумы резонансного прохождения, исследованию которого посвящена работа [82], наблюдаются на частотах появления новых вытекающих волн Лэмба (на частотах отсечки) $f = 457$ и $f = 956$ кГц.

ГЛАВА 3. Асимптотические представления волновых полей в дальней зоне

В этой главе представлены дисперсионные характеристики бегущих волн, распространяющихся вдоль изотропной и анизотропной пластины как свободной, так и погруженной в акустическую жидкость. Выводятся асимптотические формулы на основе ранее полученных интегральных представлений для волновых полей в дальней от источника зоне. Асимптотика бегущих волн Шолте-Стоунли строится в соответствии с леммой Жордана и теорией вычетов. Оценка методом стационарной фазы дает асимптотическое представление в дальней зоне для отраженного и прошедшего акустических полей p_{sc}^- и p_{sc}^+ в виде сферических волн. Также строятся асимптотические представления, учитывающие сближения стационарной точки с почти вещественными полюсами. Проводится численное сопоставление с результатами других авторов.

§3.1. Нормальные моды

§3.1.1 Дисперсионные свойства

В интегралах (2.4) общий знаменатель элементов матрицы K сокращается с Δ , входящей в числитель Q вида (1.24), и общим знаменателем всех подынтегральных функций становится Δ_0 . Поэтому волновые числа ζ_n определяются из характеристического уравнения

$$\Delta_0 = \sigma_0 \Delta - \rho_0 \omega^2 \hat{K}_{33}(\alpha, 0) = 0, \quad (3.1)$$

которое в случае однородного изотропного волновода совпадает с классическим характеристическим уравнением для погруженной пластины [131, 149].

При $\rho_0\omega^2 \rightarrow 0$ оно вырождается в дисперсионное уравнение $\Delta_L = 0$ для не нагруженного жидкостью упругого слоя (рис. 3.1а); A_n и S_n обозначают антисимметричные и симметричные фундаментальные ($n = 0$) и высшие ($n = 1, 2, \dots$) моды (волны Лэмба). Для пластины, погружённой в акустическую среду, распространение бегущих волн сопровождается переизлучением волновой энергии в окружающую среду, поэтому волны Лэмба трансформируются в вытекающие бегущие волны, которые уже не переносят энергию на бесконечность из-за её оттока в акустическую среду возбуждаемыми в процессе их распространения объёмными волнами.

Математически на трансформацию волн Лэмба в вытекающие бегущие волны указывает появление у волновых чисел ζ_n ненулевой мнимой части, определяющей декремент их затухания $\delta_n = 2\pi\text{Im}\zeta_n/\text{Re}\zeta_n$ [57, 141]. При переходе к дисперсионному уравнению (3.1) чисто вещественные корни дисперсионного уравнения волн Лэмба сдвигаются с вещественной оси в комплексную плоскость α . Типичный вид получающихся дисперсионных кривых показан на рис. 3.1б. Сплошными и пунктирными линиями изображены вещественная и мнимая части $\text{Re}\zeta_n$ и $\text{Im}\zeta_n$ комплексных волновых чисел ζ_n в зависимости от безразмерной круговой частоты $\omega = 2\pi fh/c_s$, где c_s – скорость поперечных волн в упругой среде.

Вещественные части дисперсионных кривых вытекающих бегущих волн расположены ниже луча $\kappa_0 = \omega/c_0$ (их фазовая скорость больше скорости звука c_0). Они мало отличаются от дисперсионных кривых классических волн Лэмба для свободной упругой пластины, а амплитуда мнимых частей сравнительно мала (см. рис. 4в; практически такие же кривые приведены на рис. 8 [122], хорошее качественное совпадение наблюдается также с кривыми рис. 2 [57], построенными методом возмущения по малому параметру).

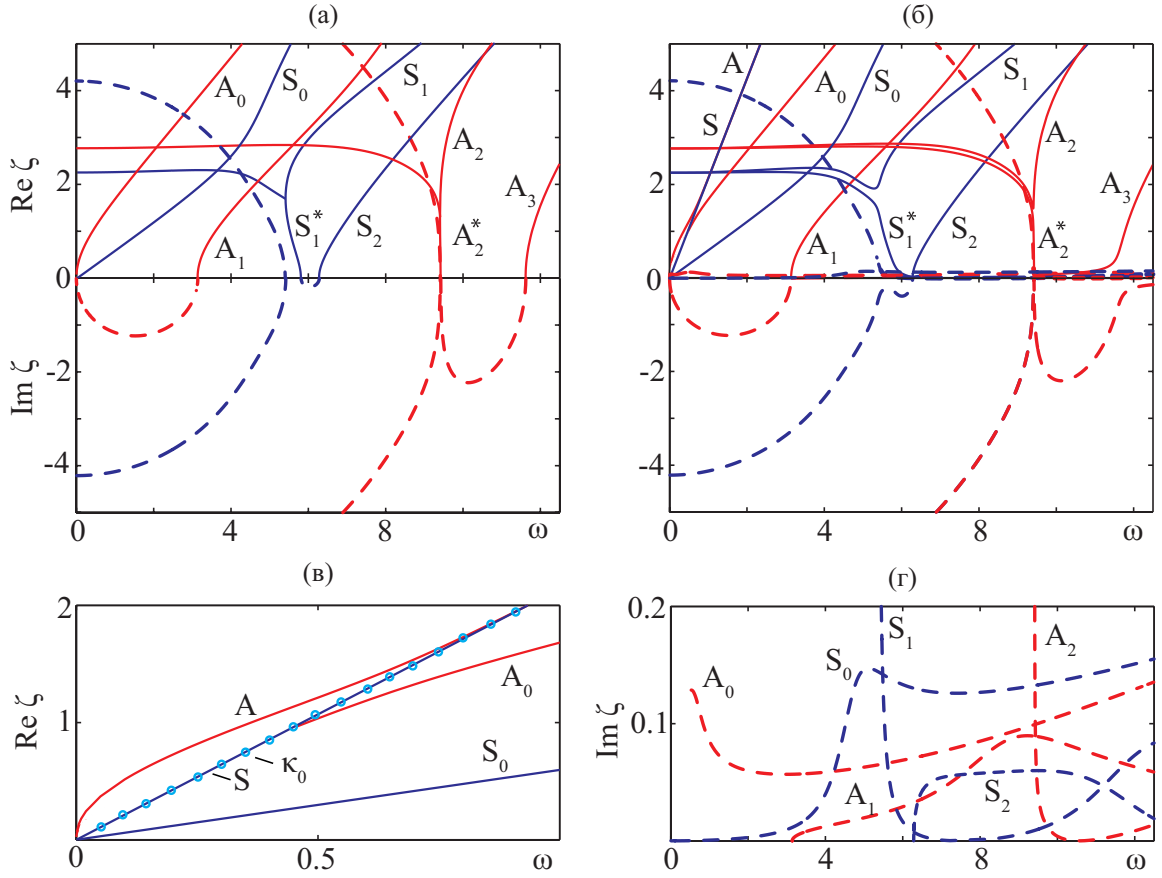


Рис. 3.1: Вещественные ($\text{Re } \zeta_n$ — сплошные линии) и мнимые ($\text{Im } \zeta_n$ — пунктирные линии) части комплексных волновых чисел ζ_n для свободной стальной пластины (а) и для такой же пластины, погружённой в воду (б); увеличенные фрагменты для чисто вещественных дисперсионных кривых волн Шолте-Стоунли A и S (в) и для мнимых частей $\text{Im } \zeta_n$ вытекающих волн Лэмба (г)

Здесь и ниже, если не оговорено иное, численные результаты приводятся в безразмерном виде, получающемся при отнесении линейных размеров к толщине пластины h , скоростей — к скорости c_s и плотностей — к плотности пластины ρ ; безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi fh/c_s$, где f — размерная частота. Безразмерные параметры стальной пластины: $c_p = 1.85$, $c_s = 1$, $\rho = 1$ и $h = 1$; акустической жидкости (вода): $c_0 = 0.47$ и $\rho_0 = 0.125$.

Кроме вытекающих волн в случае погруженного слоя появляются две новые незатухающие бегущие волны Шолте-Стоунли [131, 149] (чисто веще-

ственные кривые для антисимметричной волны A и симметричной S , рис. 3.1в). Эти волны распространяются с почти такой же фазовой скоростью, что и объёмные акустические волны в жидкости, поэтому их вещественные дисперсионные кривые, идущие выше луча $\kappa_0 = \omega/c_0$, тесно прижимаются к нему с ростом частоты, но не сливаются. В то время как энергия, полученная вытекающими волнами Лэмба от источника, рассеивается вверх и вниз, не доходя вместе с ними до бесконечности, волны Шолте-Стоунли обеспечивают перенос энергии вдоль пластины на бесконечность.

Приведенные выше дисперсионные кривые для изотропной металлической пластины не зависят от направления распространения, соответствующих бегущих волн, определяемого углом φ цилиндрической системы координат (1.19) (так же, как и все другие характеристики, включая амплитуды объёмных и бегущих волн). В случае композитных пластин, анизотропия ее упругих свойств вызывает угловую зависимость.

Приведенные ниже численные примеры показывают, как анизотропия упругих свойств влияет на различные волны и волновые характеристики. В качестве примера выбрана волокно-армированная композитная пластина толщины $h = 2.25$ мм и плотности $\rho = 1522$ кг/м³, погруженная в воду: $c_0 = 1472$ м/с и $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Волокна ориентированы вдоль оси x . Такой композитный материал является трансверсально-изотропной средой с плоскостью изотропии (y, z) . Его упругие свойства определяются коэффициентами жесткости [ГПа]:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 121.77 & C_{22} &= 10.51 & C_{33} &= 10.51, \\ C_{12} &= 3.63 & C_{13} &= 3.63 & C_{23} &= 5.29, \\ C_{44} &= 2.61 & C_{55} &= 4.95 & C_{66} &= 4.95. \end{aligned}$$

В изотропном случае символ Фурье \hat{K}_{33} и, следовательно, знаменатель Δ_0 не зависят от угла γ (осесимметричность в плоскости (α_1, α_2)), анизотропия упругих свойств делает их зависимыми. Рисунок 3.2 иллюстрирует степень зависимости дисперсионных кривых от угла γ , обусловленную анизотропией упругих свойств композитной пластины. Наряду с изменением дисперсионных кривых эффект анизотропии упругих свойств проявляется в появлении псевдо- SH мод, которые в изотропном случае поляризованы строго горизонтально, и поэтому могут быть возбуждены только касательной нагрузкой.

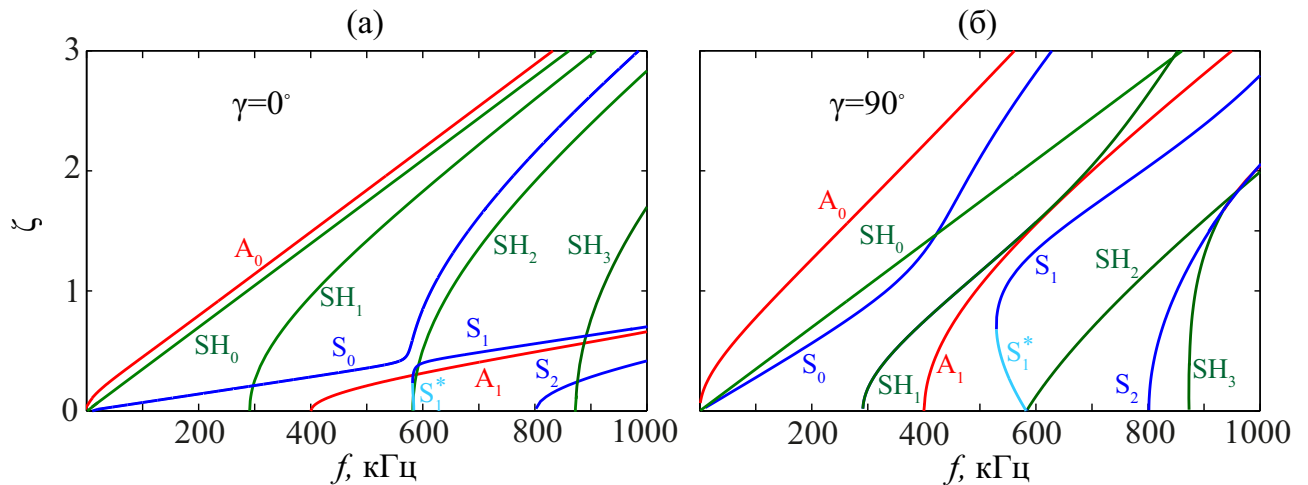


Рис. 3.2: Дисперсионные кривые для свободной анизотропной пластины в направлениях $\gamma = 0^\circ$ (а) и $\gamma = 90^\circ$ (б) в плоскости (α, γ)

Чтобы более полно показать влияние анизотропии упругих свойств на угловые диаграммы волновых характеристик, были выбраны три пробные частоты: $f = 50, 200$ и 350 кГц и построены угловые диаграммы волновых чисел $\zeta_n(\gamma)$ фундаментальных мод Лэмба (рис. 3.3-3.4) и волн Шолте-Стоунли A, S (рис. 3.5).

Анализ угловых диаграмм для вещественных частей волновых чисел

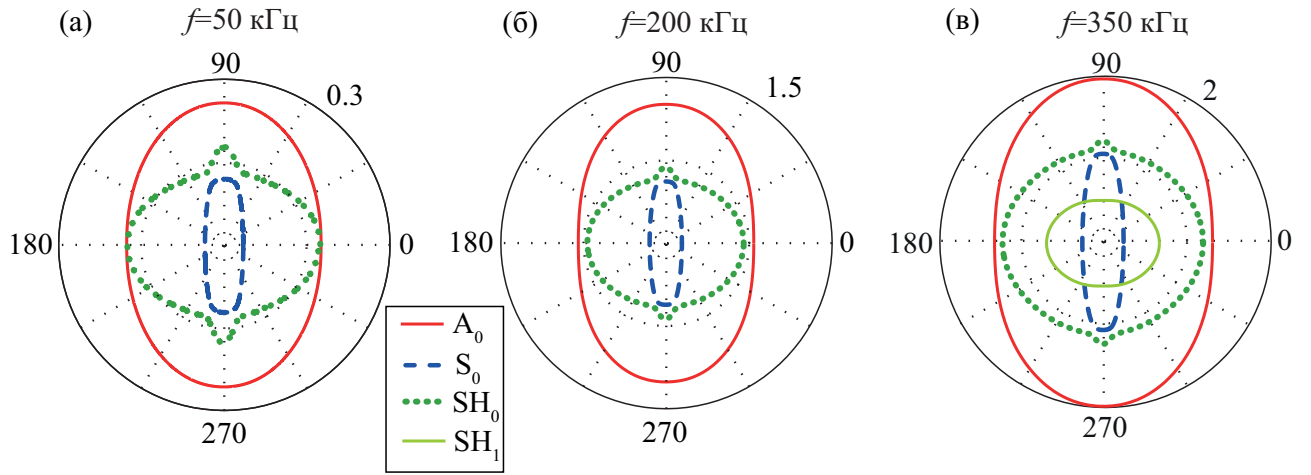


Рис. 3.3: Угловые диаграммы волновых чисел фундаментальных волн Лэмба для свободной и погруженной анизотропной пластины (в масштабе рисунка они практически совпадают)

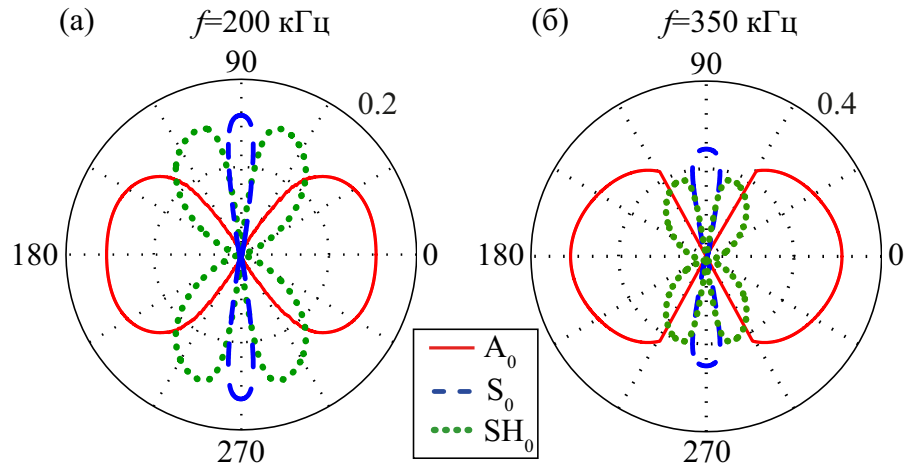


Рис. 3.4: Угловые диаграммы мнимых частей волновых чисел фундаментальных вытекающих волн Лэмба $\text{Im}\zeta_n(\gamma)$ для погруженной анизотропной пластины: результаты для S_0 и SH_0 умножены на 10 для частоты $f = 200$ кГц и на 2 для $f = 350$ кГц; для частоты $f = 50$ кГц $\text{Im}\zeta_n(\gamma) < 10^{-8}$

(рис. 3.3) показывает, что правильные окружности изотропного случая превращаются в гладкие эллипсоподобные кривые, форма которых слабо зависит от частоты. Угловые диаграммы мнимых частей $\text{Im}\zeta_n$, которые появляются из-за влияния жидкости, определяют затухание вытекающих волн Лэмба,

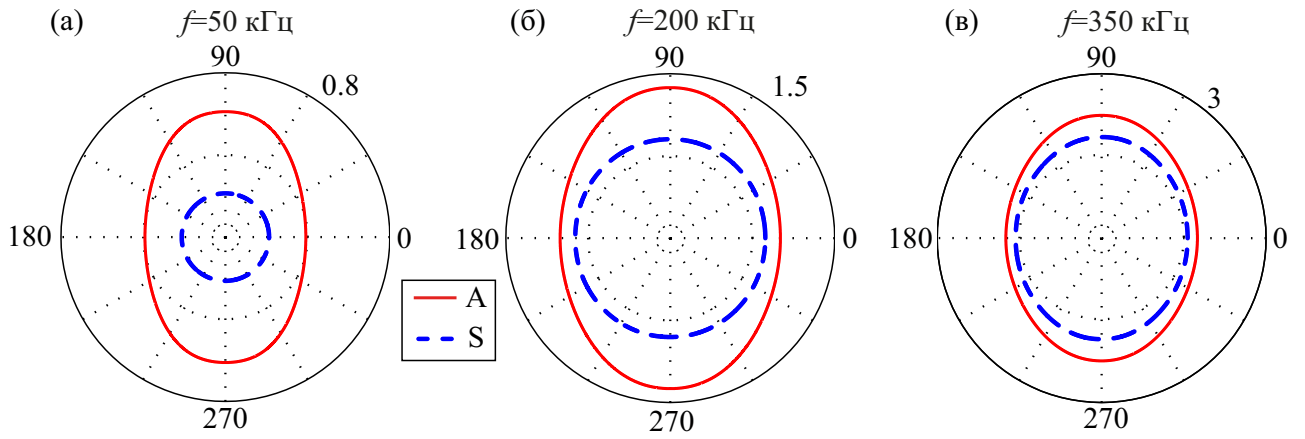


Рис. 3.5: Угловые диаграммы $\zeta_n(\gamma)$ волновых чисел волн Шолте-Стоунли A и S

и имеют более сложную форму (рис.3.4). Интересно, что, в отличие от изотропного случая, здесь имеются углы γ , для которых $\text{Im}\zeta_n = 0$. Для соответствующих направлений φ (в рассматриваемом случае это главные направления $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270°), вытекающие волны вырождаются в обычные бегущие волны, распространяющиеся в этих направлениях без экспоненциального затухания.

Что касается волн Шолте-Стоунли, то угловые диаграммы волнового числа моды A имеют эллиптическую форму, в то время как форма диаграмм для моды S на низких частотах остаются круговыми, но с ростом частоты тоже принимают эллиптическую форму (рис. 3.5).

§3.1.2 Экспериментальное измерение дисперсионных характеристик волн Лэмба

Экспериментальные измерения дисперсионных характеристик фундаментальных симметричных и антисимметричных (S_0 и A_0) мод Лэмба для анизотропных пластин из слоистых волоконно-армированных композиционных материалов были выполнены в ходе месячного исследовательского визита в

Институт механики Университета им. Г. Шмидта, Гамбург, Германия (HSU, <https://www.hsu-hh.de/>) при поддержке стипендии фонда G-Risc. Измерения проводились на оборудовании, предоставленном для этой цели директором Института проф. Р Ламмерингом (Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering, <https://www.hsu-hh.de/mechanik/team/rolf-lammering>) в рамках налаженного долгосрочного сотрудничества с ИММИ КубГУ. Обучение использованию оборудования (лазерный виброметр, система обработки данных) и измерения проводились под непосредственным руководством вед. научн. сотрудника ИММИ, к.ф.-м.н. А.А. Еремина, также находящегося с исследовательским визитом в HSU. Полученные экспериментально дисперсионные характеристики для волновых чисел и фазовых или групповых скоростей фундаментальных антисимметричных и симметричных мод или для их углов распространения служат входными данными для метода определения эффективных упругих модулей композитных пластин, которые используются в качестве входных параметров для дальнейших расчетов [95, 106, 126, 156, 158].

На первом этапе восстанавливались дисперсионные характеристики волновых чисел и фазовых или групповых скоростей фундаментальных мод A_0 и S_0 исследуемых пластин. Немецкая группа предоставила два типа материалов: однородная алюминиевая пластина толщины 2 мм и волокноармированная композитная пластина с перекрестной укладкой однонаправленных препрегов толщины 1,125 мм. Для возбуждения бегущих волн использовались тонкие пьезоактивные элементы (PWAS) круговой формы, приклеенные к поверхности исследуемого образца. В определенных точках поверхности пластины с помощью сканирующего лазерного виброметра Polytec PSV-500 измерялась вертикальная компонента скорости смещения поверхности образца при прохождении возбуждаемых бегущих волн.

Экспериментальная зависимость волновых чисел бегущих волн от частоты f для фиксированного угла φ была получена с использованием преобразований Фурье по пространственным координатам и по времени. Для этого на пластине сканировались узкие длинные полосы в направлениях $\varphi = 0^\circ, 90^\circ$ для волокно-армированной композитной пластины и $\varphi = 0^\circ$ для алюминиевой. Область сканирования схематически отмечена красными точками на рис. 3.6 и начинается на расстоянии около 50 мм от пьезоэлемента, действие которого аппроксимируется набором точечных источников.

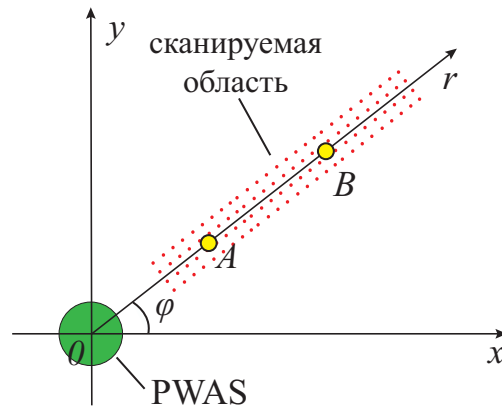


Рис. 3.6: Схематическое изображение точек, в которых были сделаны измерения

К экспериментально полученной вертикальной компоненте скорости v_z применяется пространственно-временное преобразование Фурье. Локальные максимумы полученной функции $H(f, \zeta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} v_z(x, t) e^{i(\zeta x + 2\pi f t)} dx dt$ дают дисперсионные кривые волновых чисел в частотной области. Экспериментальные результаты, полученные для однородной алюминиевой пластины, показаны на рис. 3.7 в виде линий уровня, где более темные зоны соответствуют более высоким значениям функции H . Теоретические дисперсионные кривые волновых чисел волн Лэмба показаны на рис. 3.7 сплошными линиями.

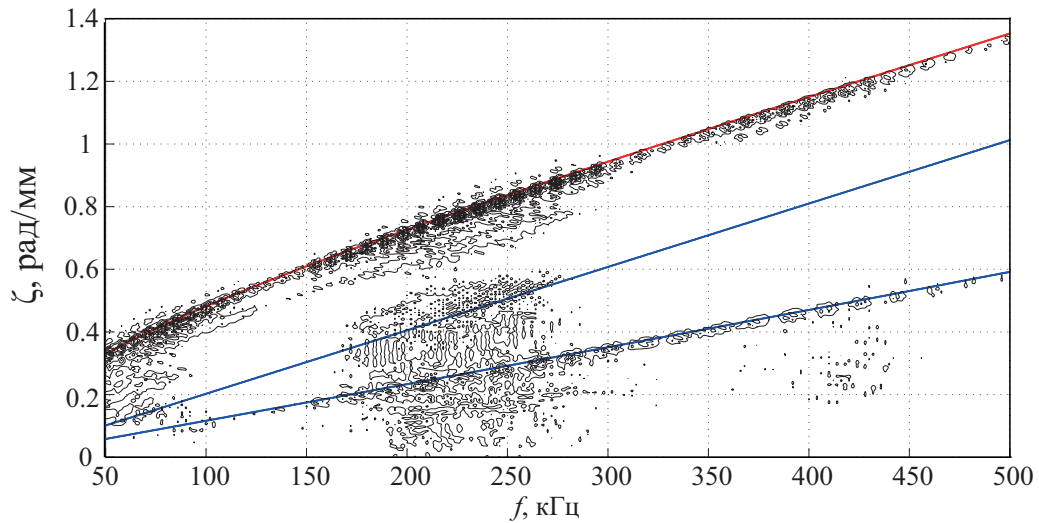


Рис. 3.7: Линии уровня функции $|H(f, \zeta)|$, полученной на основе экспериментальных данных для алюминиевой пластины

Другая экспериментальная методика [144] была использована для измерения характеристик дисперсии групповой скорости для выбранных углов наблюдения. Вертикальная компонента скорости перемещения измерялась в двух точках А и В вдоль каждой радиальной траектории (рис. 3.6). После этого к полученным данным применялось вейвлет-преобразование с вейвлетом Габора. Время прибытия пиков скейлограммы вейвлет-преобразования дает время прихода от источника до точек А и В на различных центральных частотах. На рисунках 3.8 и 3.9 показаны дисперсионные кривые групповых скоростей бегущих волн A_0 и S_0 для алюминиевой и композитной ($\varphi = 0^\circ, 90^\circ$) пластины соответственно. Теоретические кривые показаны сплошными линиями, а экспериментальные значения нанесены круговыми маркерами. Видно хорошее согласование между теоретическими и экспериментальными результатами для фундаментальных мод A_0 и S_0 .

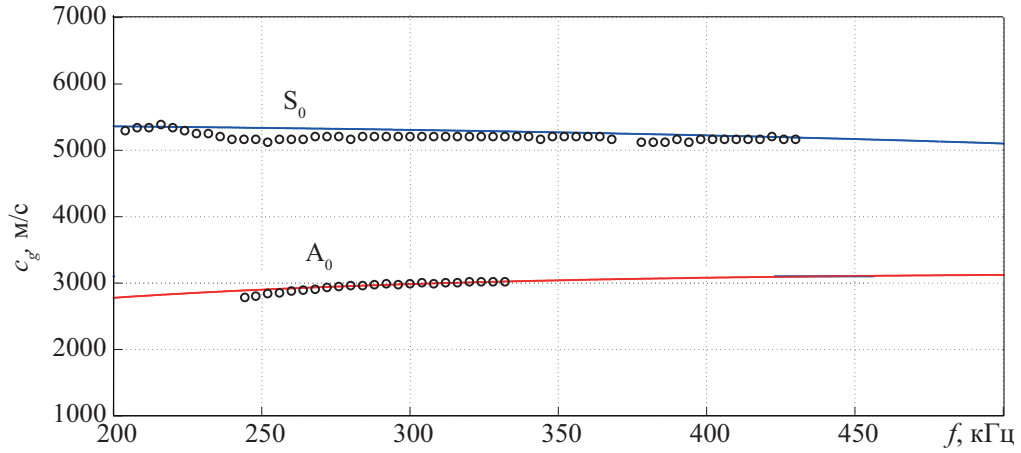


Рис. 3.8: Дисперсионные кривые групповых скоростей, рассчитанные теоретически (сплошная линия) и измеренные экспериментально (круговые маркеры) для алюминиевой пластины

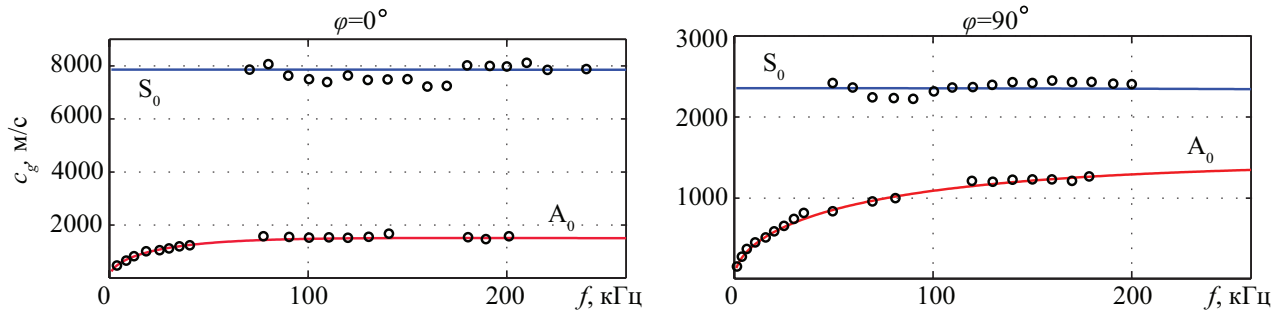


Рис. 3.9: То же для композитной пластины для направлений вдоль и поперек армирующих нитей $\varphi = 0^\circ$ и 90°

§3.1.3 Бегущие и вытекающие волны

Корни ζ_n характеристического уравнения $\Delta_0(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ (полюса подынтегральных функций (2.1) - (2.3)) дают вклад в асимптотику в дальней от источника зоне. Вычеты в этих полюсах описывают цилиндрические бегущие волны, которые распространяются вдоль пластины в горизонтальном направлении $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

В случае осесимметричной нагрузки для применения теории вычетов

необходимо в представлении (2.4) сделать разворот контура интегрирования из полубесконечного в бесконечный [18]. В силу равенств $J_m(\alpha r) = \frac{1}{2}[H_m^{(1)}(\alpha r) + H_m^{(2)}(\alpha r)]$ и $H_m^{(2)}(-\alpha r) = (-1)^{m+1}H_m^{(1)}(\alpha r)$ контур Γ_+ переходит в симметричный относительно начала координат контур Γ_- . Интеграл по получившемуся контуру $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$ замыкается в верхнюю комплексную полуплоскость α за счет экспоненциального убывания подынтегральной функции, которое обеспечивается поведением функции Ханкеля $H_m^{(1)}(\alpha r)$:

$$H_m^{(1)}(\alpha r) = (-i)^m \sqrt{2/(i\pi\alpha r)} e^{i\alpha r} [1 + O(|\alpha r|^{-1})], |\alpha r| \rightarrow \infty.$$

В соответствии с теоремой Коши о вычетах интеграл по замкнутому кон-

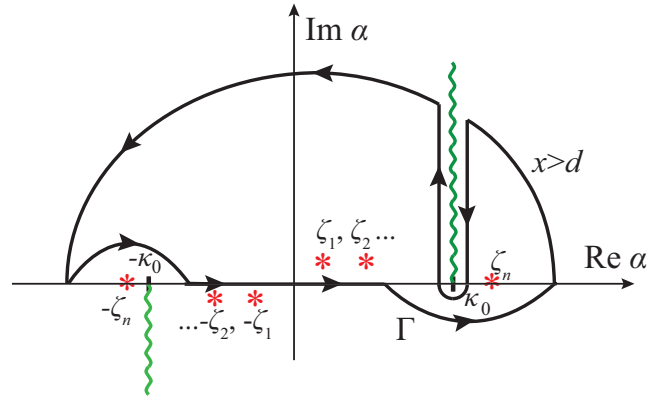


Рис. 3.10: Замыкание контура Γ в верхнюю полуплоскость

туру Γ заменяется суммой вычетов в полюсах ζ_n , попадающих во внутрь этого контура (рис. 3.11), и учитывая, что в силу леммы Жордана интеграл по полуокружности равен нулю, асимптотика бегущих волн, возбуждаемых источником p_0 в изотропном случае имеет вид:

$$\mathbf{u}(r, z) = \sum_n \mathbf{b}_n(z) e^{i\zeta_n r} / \sqrt{\zeta_n r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} (\dots) d\alpha, \quad \zeta_n r \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{b}_n = i\hat{K}_3(\zeta_n, r) e^{-i\sigma_0(\zeta_n)d} \zeta_n / (2\Delta'_0(\zeta_0)).$$

Выражение (3.2) помимо суммы вычетов содержит также и интеграл по

берегам разрезов \mathcal{L} , поскольку подынтегральная функция в (2.4) имеет точку ветвления $\pm\kappa_0$. Контур \mathcal{L} идет вдоль берегов разреза, который соединяет точку ветвления κ_0 и $\kappa_0 + i\infty$ по правому берегу вниз, по левому – вверх. На рисунке 3.11 представлены вертикальные перемещения $|u_z(r, z)|$ на поверхности стальной пластины $z = 0$ и $z = -h$, погруженной в воду, при высоте точечного источника $d = 2$ и частоте $\omega = 4$. Результаты получены непосредственно численным интегрированием представления (2.4) (сплошная красная линия) и с помощью асимптотики (3.2) без учета (сплошная зеленая линия) и с учетом интеграла по берегам разреза (пунктирная синяя линия). В средней зоне для верхней поверхности пластины $z = 0$ обязательно надо учитывать интеграл по берегам разреза, но при $z = -h$ можно ограничиться только суммой вычетов.

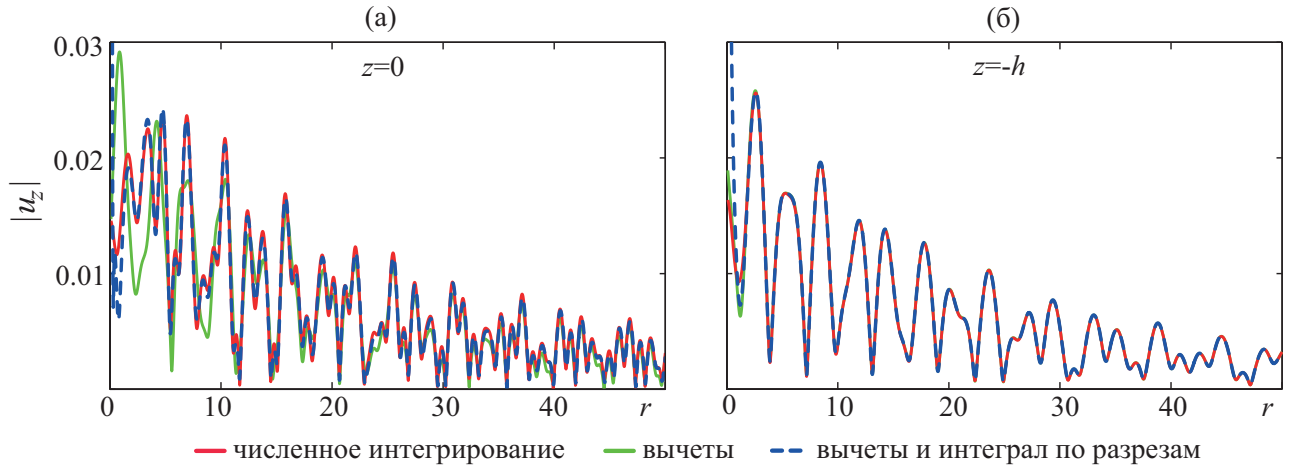


Рис. 3.11: Вертикальные перемещения $|u_z(r, z)|$ на поверхности пластины $z = 0$ (а) и $z = -h$ (б)

В анизотропном случае амплитудные коэффициенты \mathbf{b}_n и волновые числа ζ_n зависят от полярного угла φ . Асимптотика бегущих волн получается объединением теории вычетов с методом стационарной фазы. Используя этот метод, бегущие волны, возбуждаемые осесимметричной вертикальной

нагрузкой $q_0(r)$ в анизотропной слоистой пластине, могут быть получены в следующем виде [30, 104, 107]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) + O((\zeta_n r)^{-1}), \quad \zeta_n r \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M_n} \mathbf{a}_{nm}(\varphi, z) e^{i s_{nm}(\varphi) r} / \sqrt{r \zeta_n}.$$

Здесь, $s_{nm}(\varphi) = s_n(\beta_{nm})$, $s_n(\beta) = \zeta_n(\theta) \sin \beta$, $\theta = \beta + \varphi + \pi/2$, β_{nm} — корни уравнения

$$\zeta_n(\theta) \cos \beta + \zeta_n'(\theta) \sin \beta = 0, \quad (3.4)$$

где ζ_n' — производная ζ_n по угловому аргументу. Число слагаемых $M_n \geq 1$ определяется числом корней β_{nm} .

Каждое слагаемое $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ связано с полюсом ζ_n , $M_n > 1$, описывающим цилиндрические бегущие волны с амплитудными коэффициентам \mathbf{a}_{nm} и волновыми числами s_{nm} . Амплитудные коэффициенты \mathbf{a}_{nm} выражаются через вычеты элементов \mathbf{K}_3 в полюсах ζ_n и через Фурье-символ $Q(\alpha, \gamma)$ в точках $\alpha = -s_{nm}$ и $\gamma = \varphi$:

$$\mathbf{a}_{nm} = \mathbf{b}_{nm}(\varphi, z) Q(-s_{nm}, \varphi), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{b}_{nm} = \sqrt{-i \zeta_n / (2\pi s_{nm}''(\beta_{nm}))} \zeta_n \operatorname{res} \mathbf{K}_3(\alpha, \theta_{nm} z) |_{\alpha=\zeta_n}.$$

§3.1.4 Отсутствие низкочастотной моды A_0

Для свободного слоя дисперсионная кривая моды A_0 выходит из начала координат вертикально вверх (рис. 3.1a), поэтому в случае погруженного волновода должен существовать некоторый низкочастотный диапазон $0 < \omega < \omega_0$, в котором $\operatorname{Re} \zeta_n > \kappa_0$, т.е. ее фазовая скорость меньше c_0 . С физической точки зрения такая волна должна распространяться без переизлучения энергии в окружающую среду (волновое число остается веществен-

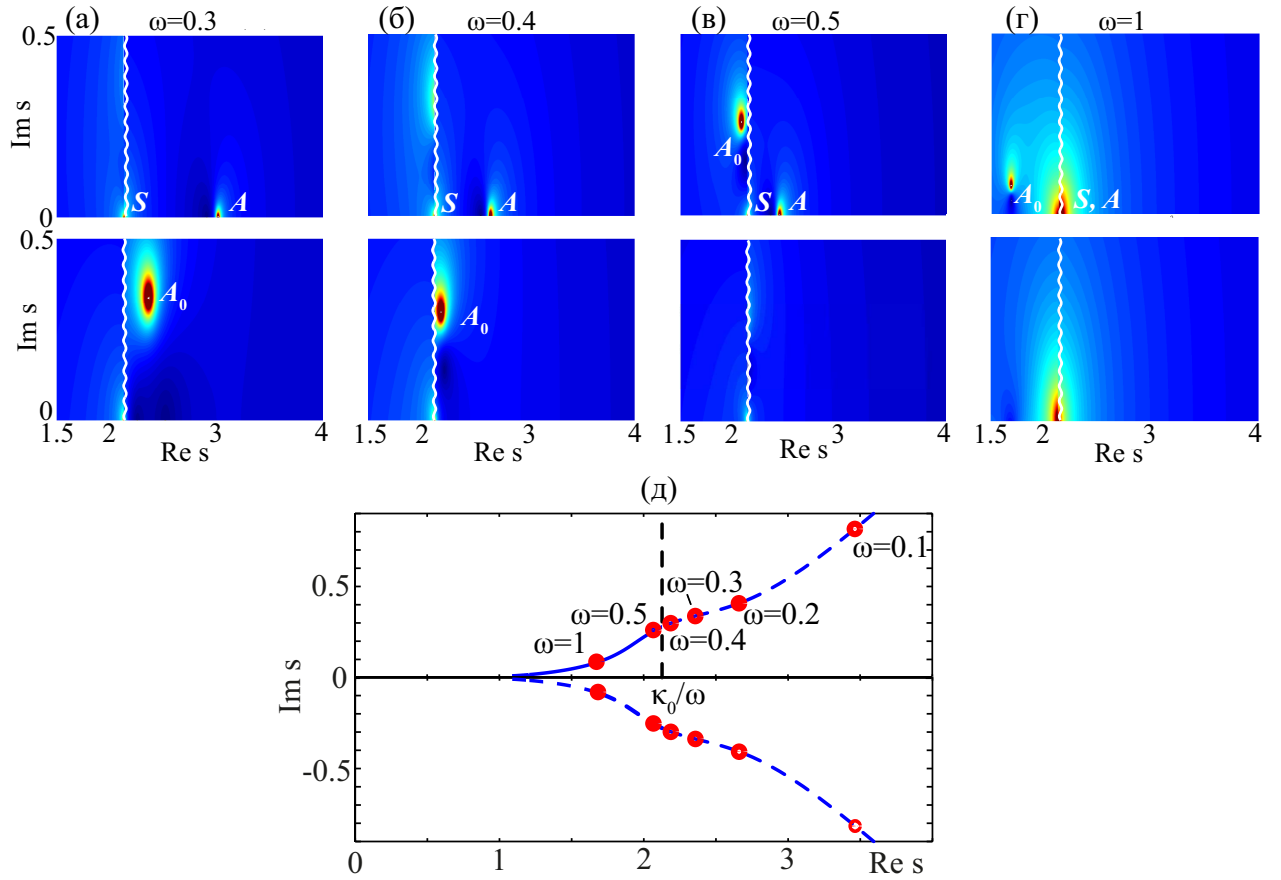


Рис. 3.12: Положение полюса ζ_n/ω моды A_0 на физическом (вверху) или нефизическом (внизу) Римановом листе комплексной плоскости медленности $s = \zeta/\omega$ при различных значениях безразмерной частоты ω (а-г) и обобщающий график траектории движения комплексно-сопряженной пары полюсов ζ_n/ω и ζ_n^*/ω моды A_0 при изменении частоты ω (д) (сплошная линия – движение полюса на физическом листе, пунктирная линия – на нефизическом); вертикальные волнистые линии на (а)-(г) и пунктирная линия на (д) – разрез функции $\sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_0^2}$, выделяющий ее однозначные ветви (Римановы листы)

ным). На основании таких рассуждений многие исследователи настаивают на том, что в низкочастотном диапазоне наряду с незатухающими волнами Шолте-Стоунли (моды A и S) вдоль погруженной пластины может распространяться также и незатухающая антисимметричная волна (мода A_0 ; см., например [100]). Однако, численный анализ показывает, что соответствующий корень ζ_n , как и парный ему комплексно-сопряженный корень ζ_n^* , на

низких частотах оказывается на нефизическом листе римановой поверхности, который отделяется от физического листа разрезом $\text{Re } \alpha = \kappa_0$, $\text{Im } \alpha > 0$, идущим в комплексной плоскости медленности $s = \zeta/\omega$ из точки ветвления $\kappa_0/\omega = 1/c_0$ вертикально вверх (рис. 3.12). Соответственно, дисперсионная кривая моды A_0 начинается на рис. 3.1в с частоты $\omega_0 = 0.44$, на которой этот корень выходит на физический лист. На рисунке 3.12а-г показано положение полюса A_0 в плоскости $s = \alpha/\omega$ на нескольких характерных частотах (верхний ряд – физический лист, нижний – нефизический). На рисунке 3.12д хорошо видно как с ростом частоты полюс моды A_0 переходит с нефизического листа на физический, пересекая разрез κ_0/ω при $\omega = 0.44$, в то время как парный ему полюс,двигающийся в нижней полуплоскости комплексной плоскости волновых чисел, остается на нефизическом листе.

§3.2. Асимптотика объёмных волн на основе метода стационарной фазы

Асимптотическая оценка интегралов (2.1) и (2.3) методом стационарной фазы [76] дает простые представления для отраженного и прошедшего волновых полей p_{sc}^- и p_{sc}^+ в дальней от источника зоне:

$$p_{sc}^\pm(\mathbf{x}) = a^\pm(\varphi, \psi) \frac{e^{i\kappa_0 R^\pm}}{R^\pm} [1 + O(\frac{1}{\kappa_0 R^\pm})], \quad \kappa_0 R^\pm \rightarrow \infty,$$

$$a^\pm = \frac{i|\cos \psi|}{2\pi} \tilde{G}_{sc}^\pm(\boldsymbol{\alpha}_0) Q_0(\boldsymbol{\alpha}_0) \kappa_0, \quad \boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}), \quad (3.6)$$

$$\alpha_{1,0} = -\kappa_0 \cos \varphi \sin \psi, \quad \alpha_{2,0} = -\kappa_0 \sin \varphi \sin \psi.$$

Здесь используется две системы сферических координат (R^\pm, φ, ψ) с радиусами $R^\pm = |\mathbf{x} \pm \mathbf{x}_0|$ и центрами в точке расположения источника $\mathbf{x}_0 = (0, 0, d)$ для прошедшего поля p_{sc}^+ и в зеркальной точке $-\mathbf{x}_0 = (0, 0, -d)$ для отражен-

ного поля давлений p_{sc}^- :

$$\begin{aligned} x &= R^\pm \cos \varphi \sin \psi, & y &= R^\pm \sin \varphi \sin \psi, \\ z &= R^\pm \cos \psi \mp d, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$0 \leq \psi < \pi/2 \quad \text{для } p_{sc}^- \quad \text{и} \quad \pi/2 < \psi \leq \pi \quad \text{для } p_{sc}^+.$$

Амплитудные коэффициенты $a^\pm(\varphi, \psi)$ определяются значением подынтегральных функций \tilde{G}_{sc}^\pm в стационарной точке $\boldsymbol{\alpha}_0$ осциллирующих экспонент $\exp[i(\pm\sqrt{\kappa_0^2 - \boldsymbol{\alpha}^2}(z \pm d) - \alpha_1 x - \alpha_2 y)]$, $|\boldsymbol{\alpha}| < \kappa_0$.

В случае изотропной пластины отраженное поле осесимметрично, поэтому значения $P^\pm(\boldsymbol{\alpha}_0)$ зависят только от $\alpha_0 = |\boldsymbol{\alpha}_0| = \kappa_0 \sin \psi$, т.е. только от азимутального угла ψ , и не зависят от полярного угла φ .

В литературе широко представлены характеристики звукового давления, излучаемого металлической пластиной, погруженной в акустическую среду, которые можно использовать для тестовых сравнений. На рисунке 3.13 представлено сравнение с результатами работы [150], в которой был рассмотрен случай стальной пластины, контактирующей с жидкостью только с одной стороны (упругий слой лежит на акустическом полупространстве). В качестве источника рассматривается вертикальная нагрузка $\sigma_{zz} = F_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, приложенная к поверхности пластины со стороны жидкости $z = -h$ (рис. 3.13а) и вакуума $z = 0$ (рис. 3.13б). Для дальней от источника зоны приводятся графики зависимости нормированного акустического давления от частоты в направлении строго вниз ($\psi = \pi$), графики представлены в логарифмическом масштабе. В соответствии с асимптотикой (3.6), рис. 3.13а-б представляют собой графики зависимостей отношения амплитудных коэффициентов $|a^\pm(\psi = \pi, \omega)/a^\pm(\psi = \pi, 0)|$ от нормированной частоты f/f_c , нормированных на начальное значение при $f = 0$; $f_c = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\rho h/D}$ — критическая частота, на

которой длина поперечной (изгибной) волны в пластине совпадает с длиной акустической волны, D – изгибная жесткость пластины.

Результаты, полученные в рамках разработанных моделей для волновода на акустическом полупространстве, описываемого упрощенными уравнениями теории тонких пластин Кирхгофа–Лява и полной системой уравнений Ляме, на рис. 3.13 отмечены маркерами, показывающими полное совпадение со результатами работы [150]. Сопоставление двух моделей подтверждает, что теория тонких пластин дает хорошее приближение в низкочастотном диапазоне, но ее нельзя использовать при высоких частотах $f > f_c$, где давление характеризуется резонансными максимумами и минимумами, которые не учитываются в модели тонкой пластины. Эти максимумы и минимумы наблюдаются на частотах резонансов и анти-резонансов для волн сжатия, проходящих сквозь пластину в поперечном направлении.

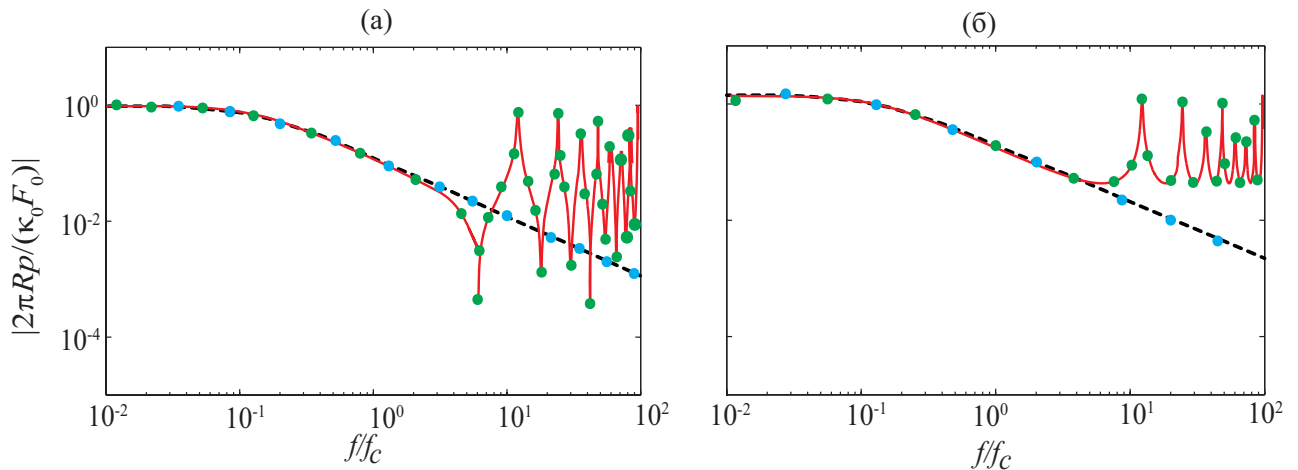


Рис. 3.13: Относительное давление в дальнем поле на расстоянии R от поверхности $z = -h$ (а) и $z = 0$ (б): тестовые сопоставления с результатами работы [150] для пластины Кирхгофа (пунктир) и упругого слоя (сплошные линии) при одностороннем нагружении жидкостью; результаты, полученные на основе представлений (14), нанесены круговыми маркерами; источник – точечная нагрузка амплитуды F_0 , приложенная со стороны жидкости (а) и вакуума (б)

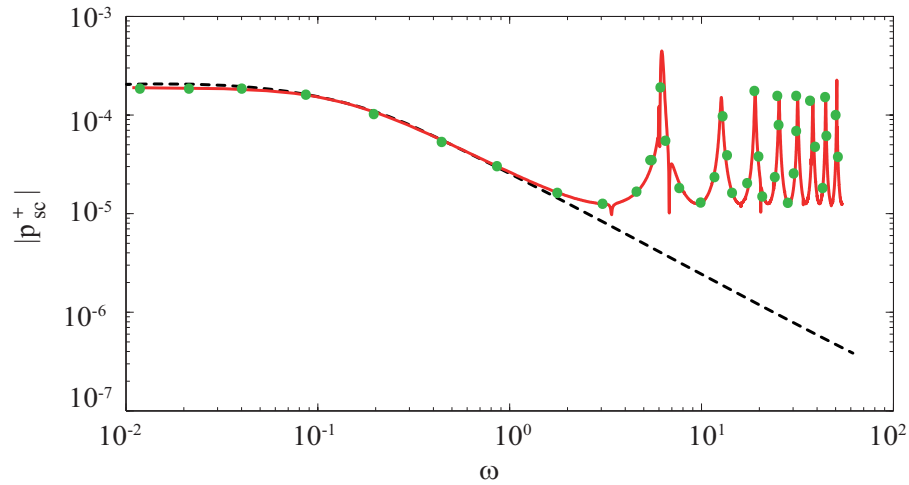


Рис. 3.14: Частотная зависимость амплитуды прошедших волн для пластины, полностью погруженной в акустическую жидкость: интегральное представление (сплошная линия), асимптотика (маркеры); теория тонких пластин Кирхгофа (пунктирная линия)

В случае пластины, полностью погруженной в жидкость с удаленным источником ($d > 0$), акустическое давление p_{sc}^+ показывает резонансные максимумы на тех же безразмерных круговых частотах $\omega_n = n\pi c_p/h$, как и в предыдущем случае полупогруженной пластины. В качестве примера на рисунке 3.14 представлена частотная зависимость амплитуды давления прошедшего волнового поля $p_{sc}^+(\mathbf{x})$, возбуждаемого точечным источником, расположенным на расстоянии $d/h = 10$; точка наблюдения $\mathbf{x}/h = (0, 0, -200)$. Сплошная линия показывает результаты расчетов, на основе численного интегрирования представления (2.3). Маркерами показаны результаты, полученные в рамках асимптотического представления (3.6), а пунктирная линия соответствует модели тонкой пластины, которая как и ранее показывает применимость только на низких частотах $0 < \omega < 1$.

§3.3. Асимптотика объёмных волн с учетом сближения особенностей

При построении асимптотики интегралов типа (2.3) необходимо учитывать, что если подынтегральная функция \tilde{G}_{sc}^{\pm} имеет хотя бы один полюс ζ_n , близкий к вещественной оси левее точки ветвления κ_0 ($|\operatorname{Re}\zeta_n| < \kappa_0$, $|\operatorname{Im}\zeta_n/\operatorname{Re}\zeta_n| \ll 1$), то существуют направления ψ , для которых происходит сближение двух особенностей: стационарной точки $\alpha_0 = \kappa_0 \sin \psi$ и данного полюса, и асимптотика (3.6), построенная методом стационарной фазы, становится неприменимой [76]. В таком случае для вывода корректной асимптотики близкие к вещественному отрезку $(-\kappa_0, \kappa_0)$ полюса ζ_n выделяются из подынтегральной функции в явном виде, и асимптотики для слагаемых, имеющих особенности, и для оставшейся гладкой функции \hat{G}_{sc}^{\pm} строятся различными методами [76, 78, 99, 109].

В качестве примера, демонстрирующего основные этапы данного подхода, ниже приводится вывод асимптотики для вертикальной компоненты смещений $u_z^{\pm}(x, z)$ для прошедших и отраженных волн в дальней от источника зоне в случае плоской постановки задачи: $\mathbf{x} = (x, z)$. Исходя из соотношения (1.14), связывающего функции Грина смещений и давлений в акустической среде, вертикальная компонента смещений отраженного и прошедшего поля, возбуждаемого точечным источником, в двумерном случае может быть представлена в виде:

$$u_z^{\pm}(\mathbf{x}) = \pm \frac{1}{2\pi\omega^2\rho_0} \int_{\Gamma} \sigma_0 \tilde{G}_{sc}^{\pm}(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3.8)$$

Вещественные и близкие к вещественной оси полюса выделяются из подын-

тегральной функции $\tilde{G}_{sc}^{\pm}(\alpha)$ в явном виде:

$$\tilde{G}_{sc}^{\pm}(\alpha) = \hat{G}_{sc}^{\pm}(\alpha) + \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{G}_{sc,n}^{\pm}}{\alpha - \zeta_n}, \quad (3.9)$$

где $\hat{G}_{sc}^{\pm}(\alpha) = \tilde{G}_{sc}^{\pm}(\alpha) - \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{G}_{sc,n}^{\pm}}{\alpha - \zeta_n}$, $\tilde{G}_{sc,n}^{\pm} = \text{res } \tilde{G}_{sc}^{\pm}|_{\alpha=\zeta_n}$, N – число комплексных полюсов $\pm\zeta_n$, вещественная часть которых лежит в диапазоне $(-\kappa_0, \kappa_0)$ и мнимая часть мала ($|\text{Re } \zeta_n| \gg |\text{Im } \zeta_n|$).

Подынтегральная функция $\hat{G}_{sc}^{\pm}(\alpha)$ не имеет полюсов рядом с вещественным отрезком $(-\kappa_0, \kappa_0)$. Асимптотика интеграла с такой подынтегральной функций строится стандартным методом стационарной фазы для осциллирующих интегралов с гладкими подынтегральными функциями, который дает асимптотику вида (3.6).

Пусть полюс $\eta = \zeta_n$ расположен достаточно близко к стационарной точке, но далеко от точки ветвления $\pm\kappa_0$. Асимптотика интегралов с подынтегральной функцией $\tilde{G}_{sc,n}^{\pm}/(\alpha - \zeta_n)$ определяется на основе асимптотических представлений для эталонных осциллирующих интегралов с почти вещественной полярной особенностью [76, 78]:

$$F(\lambda, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta) \frac{e^{-i\lambda\beta^2}}{\beta - \eta} d\beta, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (3.10)$$

Асимптотика интеграла (3.10) имеет вид:

$$F(\lambda, \eta) = \begin{cases} s\pi i f(\beta) w(d), & \text{Im} d > 0, \\ s\pi i f(\beta) (-w(-d) + 2e^{-d^2}), & \text{Im} d < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Здесь $w(z)$ – функция Федеевой [68], выражающаяся через интеграл Френеля:

$$w(z) = e^{-z^2} [1 - \text{erf}(-iz)], \quad \text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz,$$

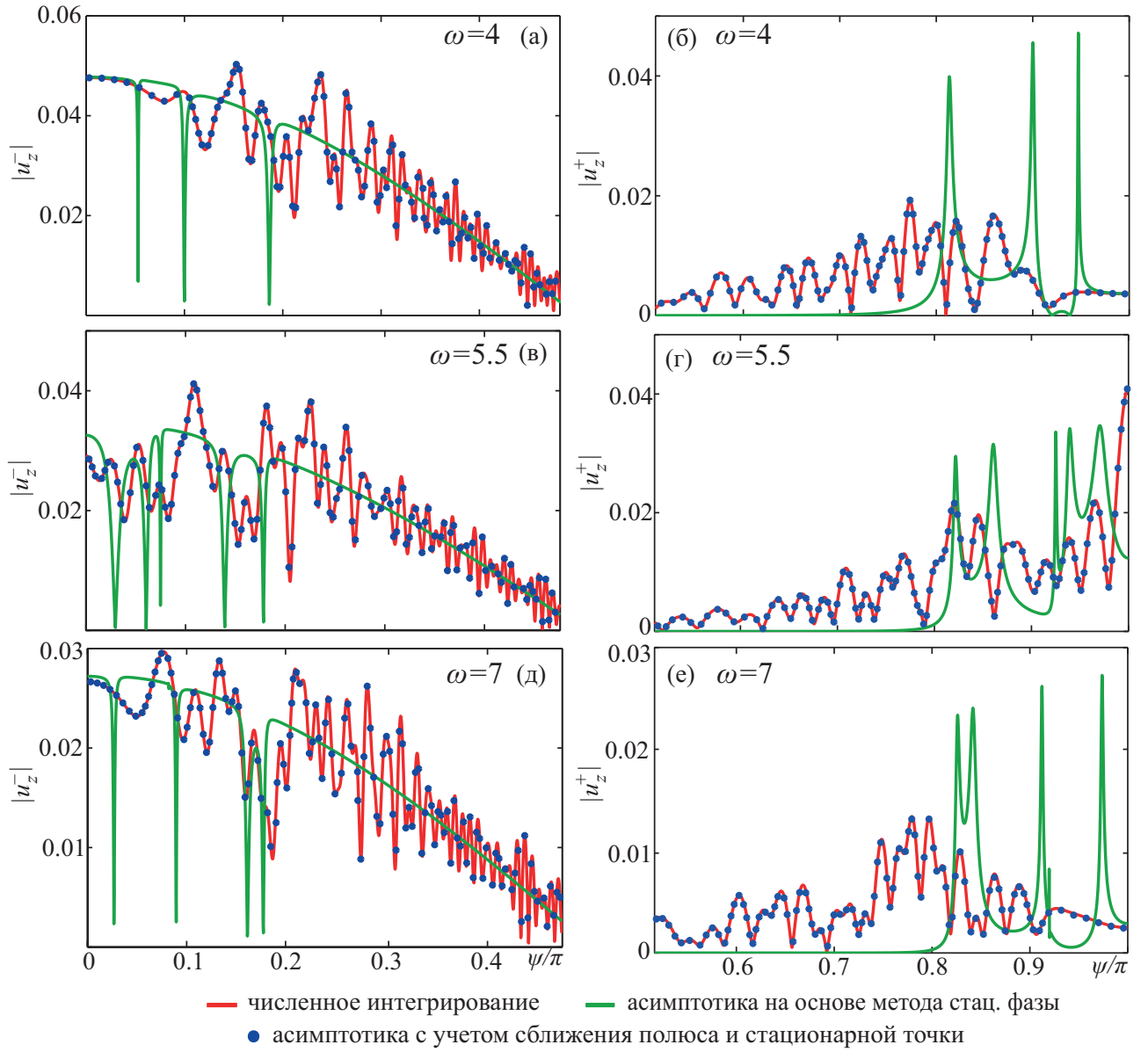


Рис. 3.15: Тестовые сопоставления результатов, полученных с помощью двух видов асимптотик, с результатами численного интегрирования; вертикальные перемещения $|u_z^\pm(\psi)|$ в дальней от источника зоне

где $d = \eta s \sqrt{i\lambda}$ и $s = \text{sign}(\text{Im } \eta)$, а η – полюс.

На рисунке 3.15 представлены тестовые сравнения результатов, полученных с помощью двух видов асимптотик, с результатами численного интегрирования, которые в данном контексте можно считать точным решением. Результаты приводятся на трех безразмерных частотах $\omega = 4, 5.5, 7$ для рассто-

яния $R^\pm = 50\lambda_0$ ($\lambda_0 = 2\pi c_0/\omega$ – длина волны в акустической жидкости) для стальной пластины, погруженной в воду с точечным источником. Видно хорошее согласование между результатами, полученными на основе численного интегрирования и с помощью асимптотики, выведенной с учетом сближения особенностей, тогда как асимптотика только на основе метода стационарной фазы не дает нужного результата.

ГЛАВА 4. Амплитудно-частотные и энергетические характеристики волновых полей, возбуждаемых бесконтактным преобразователем

В настоящей главе анализируются гармонические волновые поля и их энергетические характеристики. Анализ проводится на основе построенного в предыдущих главах представления волновых полей через функцию Грина. Проводится сравнение полученных результатов с результатами других авторов. Анализируется зависимость осредненного за период колебаний количества энергии, переносимой каждой из возбуждаемых волн различного типа (акустические объёмные волны, вытекающие волны Лэмба и волны Шолте-Стоунли), от относительных размеров источника, расстояния до пластины и частоты, а также структура энергетических потоков и пространственное распределение волновой энергии.

§4.1. Анализ гармонических волновых полей

Наряду с приведенными выше тестовыми примерами (рис. 2.1, 3.11 и 3.13-3.15), для проверки адекватности построенной модели проводились дополнительные сопоставления с экспериментальными и численными результатами работы [82]. На рисунке 4.1 представлено пространственное распределение волнового поля давления на частотах максимального прохождения $f = 457$ и $f = 956$ кГц. Для удобства используется такая же система координат, что и в работе [82], из которой взяты рисунки 4.1а и 4.1б., построенные на основе результатов, полученных гибридным методом (FEM-ASM), в то время как изображения 4.1в и 4.1г получены с помощью интегрального пред-

ставления (2.4). Видно качественное совпадение структуры возбуждаемых и проходящих через пластину акустических пучков. Различия обусловлены использованием различных моделей источника: в МКЭ модель работы [82] входила полная КЭ-дискретизация АСТ преобразователя, детали которой в статье не приводятся, в то время как рисунки 4.1в-г получены для источника, моделируемого равномерным распределением ($q_0 = 1$) в круговой области D : $r < a$.

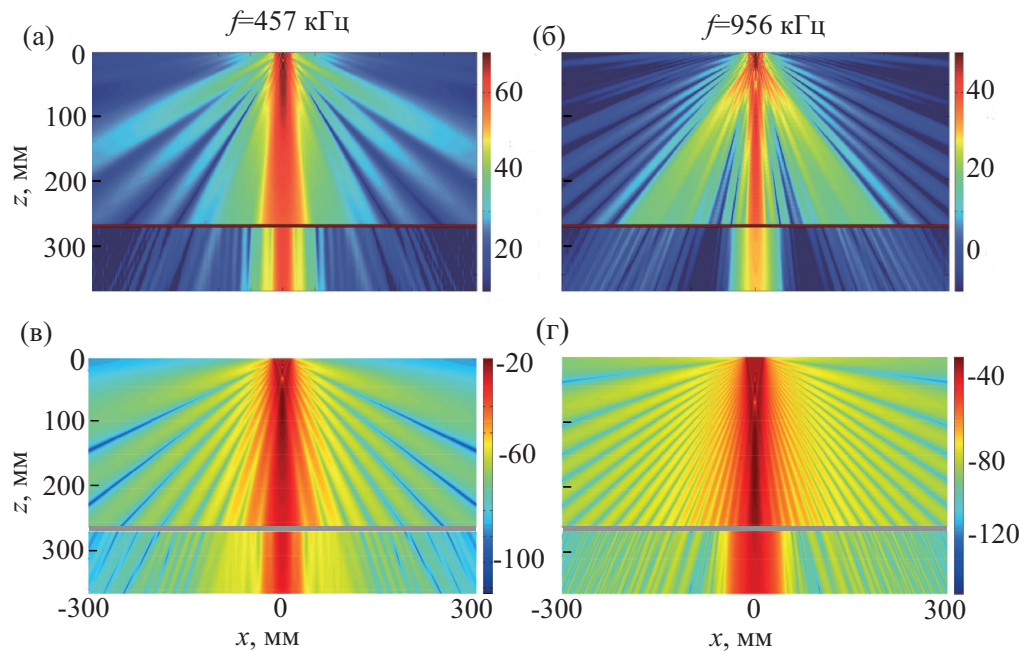


Рис. 4.1: Пространственное распределение амплитуды звукового давления в падающем и прошедшем волновом поле ($20 \lg |p_0|$ при $z > 0$ и $20 \lg |p_{sc}^+|$ при $z < -h$), построенные на основе модели FEM-ASM (а, б) [82] и на основе разработанной полуаналитической модели для источника, моделируемого распределенной нагрузкой $q_0 = 1$ (в, г)

Следует отметить, что, как и в используемой для верификации работе [82], на рис. 4.1 над пластиной показано только прямое поле источника p_0 без отраженного поля p_{sc}^- , учет которого резко меняет вид распределения давления над пластиной. Акустические лучи, отраженные от пластины, на-

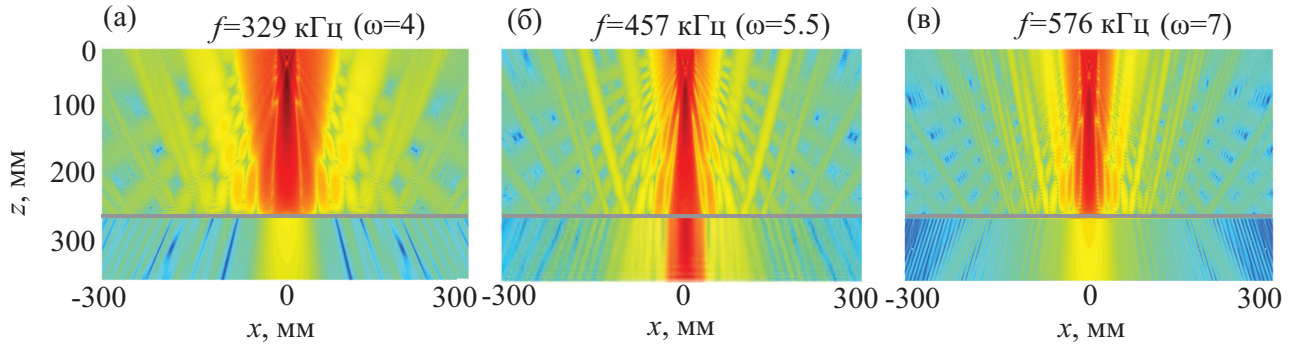


Рис. 4.2: Пространственное распределение амплитуды полного волнового поля $p(\mathbf{x})$ на частотах до, внутри и после диапазона обратной моды S_1^*

кладываются на пучки, излучаемые преобразователем, образуя решетчатый узор (рис. 4.2). Изображения (а), (б) и (в) на рис. 4.2 приведены для частот $f = 329, 457$ и 576 кГц, взятых до, внутри и сразу после диапазона обратной волны; соответствующие безразмерные частоты $\omega = 4, 5.5$ и 7 . Рисунок 4.2 иллюстрирует повышенное прохождение акустической энергии в окрестности частоты отсечки моды с нулевой групповой скоростью S_1^* (рис. 3.1). Хорошо видно, что вертикальные лучи, проникающие через пластину на нерезонансных частотах 329 и 576 кГц ($\omega = 4$ и 7), выглядят намного слабее, чем в диапазоне обратной волны.

В случае композитной волоконно-армированной пластины, анизотропия ее упругих свойств сильно влияет не только на диаграмму направленности (зависимость от φ) бегущих волн, но и на форму угловых диаграмм отраженных и прошедших объемных акустических волн p_{sc}^\pm . Математически зависимость от φ определяется знаменателем (3.1), который зависит от γ через $\hat{K}_{13}(\alpha, \gamma)$. На рис. 4.3 представлены угловые диаграммы для амплитудных коэффициентов $|a^\pm(\varphi, \psi = 45^\circ)|$ прошедшего и отраженного волнового поля p_{sc}^\pm , отнесенные к полю точечного источника p_0 , на частотах

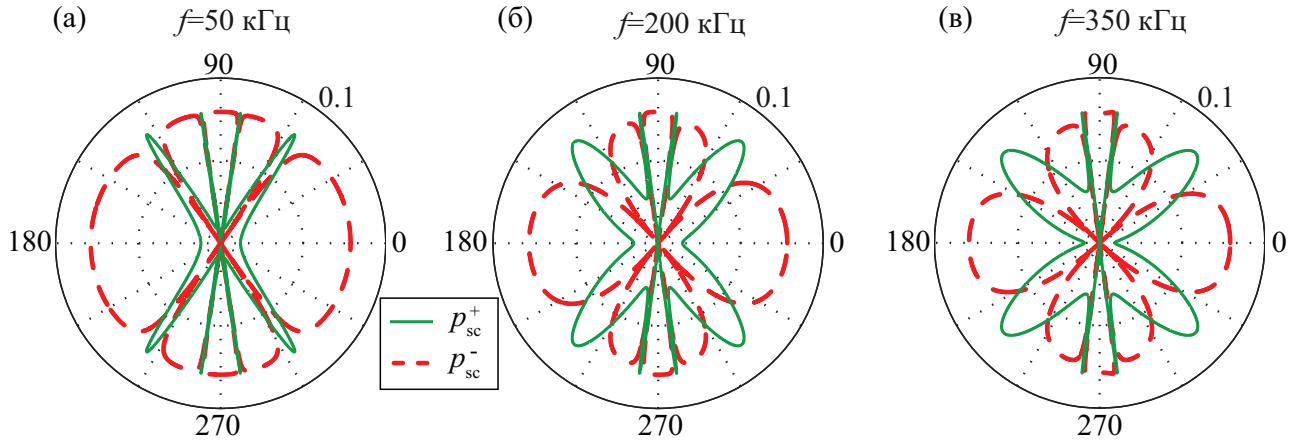


Рис. 4.3: Угловые диаграммы для амплитудных коэффициентов $|a^\pm(\varphi, \psi = 45^\circ)|$ прошедшего и отраженного волнового поля p_{sc}^\pm для погруженной анизотропной композитной пластины

$f = 50, 200, 350$ кГц для погруженной анизотропной композитной пластины. С ростом частоты энергия прошедших волн растет, но на главных направлениях ($\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$) основная часть энергии отражается, т.е. переносится отраженными волнами на бесконечность. Количество лепестков на диаграмме как для прошедшего, так и для отраженного волнового поля p_{sc}^\pm не меняется в зависимости от частоты.

§4.2. Энергетические характеристики

§4.2.1 Поток энергии через поверхность

Осреднённый за период колебаний поток энергии E , переносимой в поле гармонических колебаний через некоторую поверхность S , определяется поверхностным интегралом [48, 75]:

$$E = \int_S e_n dS_n, \quad e_n = (\mathbf{e}, \mathbf{n}) = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\boldsymbol{\tau}_n, \mathbf{u}). \quad (4.1)$$

Здесь e_n – нормальная компонента вектора плотности энергии \mathbf{e} (вектор Умова-Пойтинга [75]), $\boldsymbol{\tau}_n$ – вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} (в акустической среде $\boldsymbol{\tau}_n = -p\mathbf{n}$).

Энергия E_0 , поступающая от источника в среду (т.е. осредненная мощность источника), в общем случае вычисляется интегрированием плотности потока e_n по замкнутой поверхности S , окружающей источник; причем, в силу закона сохранения энергии результат не зависит от ее размера и формы. В качестве поверхности S в численных примерах рассматривались поверхность сферы (рис. 4.4а) и замкнутого цилиндра (рис. 4.4б).

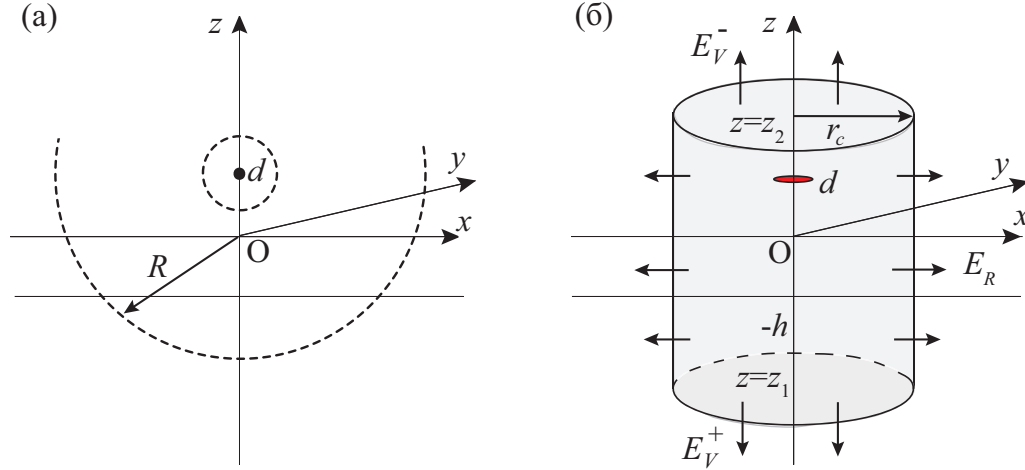


Рис. 4.4: Сферическая (а) и цилиндрическая (б) поверхности, через которые энергия источника E_0 уходит на бесконечность

В первом случае мощность источника легко получается путем интегрирования e_n по сфере S_ε : $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \varepsilon$ малого радиуса $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$E_0 = E_\infty + E_{sc}, \quad (4.2)$$

$$E_\infty = \frac{1}{8\pi\rho_0c_0}, \quad E_{sc} = \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im}[p_{sc}^-(\mathbf{x}_0)],$$

E_∞ – энергия точечного источника в безграничной акустической среде, а

E_{sc} — добавочное слагаемое, возникающая за счет интерференции прямого поля источника p_0 с отраженным полем p_{sc}^- пластины.

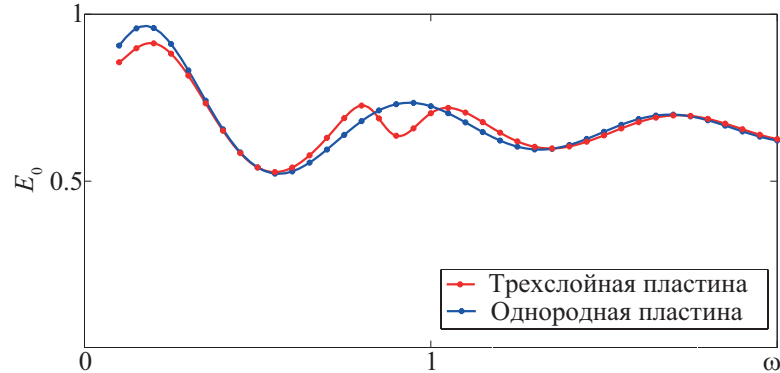


Рис. 4.5: Мощность источника E_0 , рассчитанная по формуле (4.2) (сплошная линия) и энергия E_s , уносимая через сферы радиусов $R = 0.1, 10, 100$ (формула (4.1), маркеры) для однородной и трехслойной пластины

На рисунке 4.5 показана частотная зависимость мощности источника E_0 и количества энергии E_s , уходящей на бесконечность от источника, расположенного в верхнем акустическом полупространстве на расстоянии $d = 2$ от пластины через поверхность сферы радиуса $R = 0.1, 10$ и 100 для однородной и трехслойной пластины. Безразмерные параметры однородной пластины: $c_p = 1.85$, $c_s = 1$, $\rho = 1$, $h = 1$; трехслойная пластина: состоит из двух внешних одинаковых слоев толщины $h_1 = h_3 = 0.25$ с такими же параметрами, и более мягкого среднего слоя толщины $h_2 = 0.5$ с параметрами $c_p = 0.37$, $c_s = 0.2$, $\rho = 0.5$; параметры жидкости: $c_0 = 0.47$, $\rho_0 = 0.125$. Расчеты показывают, что при любых значениях радиуса замкнутой сферы R количество энергии, уходящей на бесконечность, не меняется, т.е. баланс энергии сохраняется, что еще раз косвенно подтверждает корректность разработанной математической и реализующей ее компьютерной модели.

Для оценки энергии бесконтактного преобразователя удобно взять в ка-

честве S верхнюю и нижнюю поверхности круговой излучающей пластины D , что с учетом выражения для плотности потока энергии в акустической среде $e_z = \text{Im}[p'_z p^*]/(2\omega\rho_0)$ и выражений (1.25), (2.4) приводит к представлению:

$$E_0 = \frac{1}{4\rho_0\omega\pi} \text{Im} \int_{\Gamma} [2\tilde{G}'_{0,z}(\alpha, z)\tilde{G}_0^*(\alpha^*, z) + \tilde{G}_{sc}^{-*}(\alpha^*, z)] Q_0(\alpha) Q_0^*(\alpha^*) \alpha d\alpha, \quad (4.3)$$

где $z = \zeta$, а звездочкой сверху обозначены комплексно-сопряженные величины.

При выводе этой формулы, а также приведенных ниже формул (4.5)-(4.7) для энергии объемных и бегущих волн, применяется техника работы [22], детали реализации которой подробно обсуждаются также в статье [109].

Для анализа распределения энергии источника между возбуждаемыми волнами в качестве D используется поверхность цилиндра большого радиуса r_c (рис. 4.4б). Потоки энергии E_V^+ и E_V^- через горизонтальные поверхности цилиндра $z = z_1$ и $z = z_2$ дают часть энергии источника, уносимой на бесконечность прошедшими и отраженными объемными волнами p_{sc}^+ и p_{sc}^- , а поток E_R через боковую поверхность — долю энергии бегущих волн. При $\kappa_0 r_c \gg 1$ поток E_R фактически складывается только из энергии, переносимой модами A и S , так как количество энергии, переносимое вытекающими модами, убывает с расстоянием экспоненциально. Исходя из закона убывания амплитуды n -той моды

$$|\mathbf{u}_n| \sim O(e^{-\text{Im} \zeta_n r}), \quad r \rightarrow \infty,$$

степень уменьшения переносимой ей энергии $E_n(r)$ по отношению к начальному значению в ближней зоне $E_n(0)$ описывается следующей линейной зависимостью от расстояния r :

$$10 \lg |E_n(r)/E_n(0)| = -8.64 \text{Im} \zeta_n r \text{ (дБ)}$$

(здесь учтено, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды). Это соотношение позволяет оценить границу средней зоны, в которой вклад вытекающей волны еще заметен. Например, для мод, у которых $\text{Im } \zeta_n \approx 0.1$ (см. рис. 3.1г), потеря энергии более 50 дБ происходит на расстоянии $r/h > 60$.

В силу закона сохранения суммарное количество энергии через полную поверхность цилиндра E_c должно совпадать с энергией источника E_0 :

$$E_c = E_V^+ + E_V^- + E_R = E_0, \quad (4.4)$$

где E_V^+ и E_V^- – энергия прошедших и отраженных объемных волн, уносимая через горизонтальные поверхности замкнутого цилиндра $z = z_1$ и $z = z_2$ соответственно, а E_R – энергия бегущих волн, переносимая через боковую поверхность $r = r_c$ (рис. 4.4б)

При осевой симметрии вектор плотности энергии выражается через две не зависящие от полярного угла φ компоненты – радиальную e_r и вертикальную e_z : $\mathbf{e} = (e_r, e_z)$. Используя разработанную ранее технику вывода представлений для потоков энергии через горизонтальную плоскость и боковую поверхность цилиндра [22], выражения для E_V^\pm и E_R сводятся в этом случае к виду

$$E_V^+ = -\frac{1}{4\pi\rho_0\omega} \text{Im} \int_0^{\kappa_0} \sigma_0 |\tilde{G}_{sc}^+ Q_0|^2 \alpha d\alpha, \quad z \leq -h, \quad (4.5)$$

$$E_V^- = -\frac{1}{4\pi\rho_0\omega} \text{Im} \int_0^{\kappa_0} \sigma_0 |(\tilde{G}_0 + \tilde{G}_{sc}^-) Q_0|^2 \alpha d\alpha, \quad z \geq d, \quad (4.6)$$

$$E_R = \int_{z=z_1}^{z=z_2} \int_0^{2\pi} e_r(r, \varphi, z) r d\varphi dz = 2\pi \int_{z=z_1}^{z=z_2} e_r(r, z) r dz, \quad (4.7)$$

где

$$e_r = \begin{cases} \frac{\omega}{2} \text{Im}[\tau_{rr}u_r^* + \tau_{rz}u_z^*], & -h \geq z \geq 0, \\ \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im} \left[\frac{\partial p}{\partial r} p^* \right], & z > 0 \text{ и } z < -h. \end{cases}$$

В качестве примера распределения энергии кругового источника E_0 ($a = 3.75$, $d = 4$) между потоками E_V^- , E_V^+ и E_R на рис. 4.6а и его укрупненных фрагментах 4.6б и 4.6г приведены частотные зависимости этих величин и суммарного потока E_c (4.4), нормированные на мощность E_∞ такого же источника, но в безграничной акустической среде без пластины. Для количественной оценки изменения энергии источника с частотой на рис. 4.6в приведен график $E_\infty(\omega)/\hat{E}_0$, где $\hat{E}_0 = F/(8\pi\rho_0c_0)$ – мощность эквивалентного по силе точечного источника $q_0 = F\delta(\mathbf{x})$ в безграничной среде.

Данный и другие численные примеры показывают, что баланс энергии (4.4) сохраняется для любых горизонтальных плоскостей $z = z_1 < -h$, $z = z_2 > d$ и боковой поверхности цилиндра достаточно большого радиуса $\kappa_0 r_c \gg 1$ (круговые маркеры для E_c лежат на сплошной линии для E_0). Видно, что доля энергии прошедших через пластину и бегущих волн E_V^+ и E_R значительна только на низких частотах (рис. 4.6б), а для E_V^+ – и при резонансном прохождении в окрестности частот отсечки и в диапазонах обратных волн, например, при $\omega \approx 5.7$ на рис. 4.6а. Для остальных частот с ростом ω основная часть энергии отражается от поверхности пластины и уходит на бесконечность через верхнюю плоскость $z = z_2$ вместе с полем p_{sc}^- (E_V^- практически совпадает с E_0). Деформация пластины при этом фактически не влияет на мощность источника, на этих частотах она работает как жесткая преграда. Это согласуется с хорошо известными в структурной акустике законами рассеяния акустических волн на упругих телах – на высоких частотах

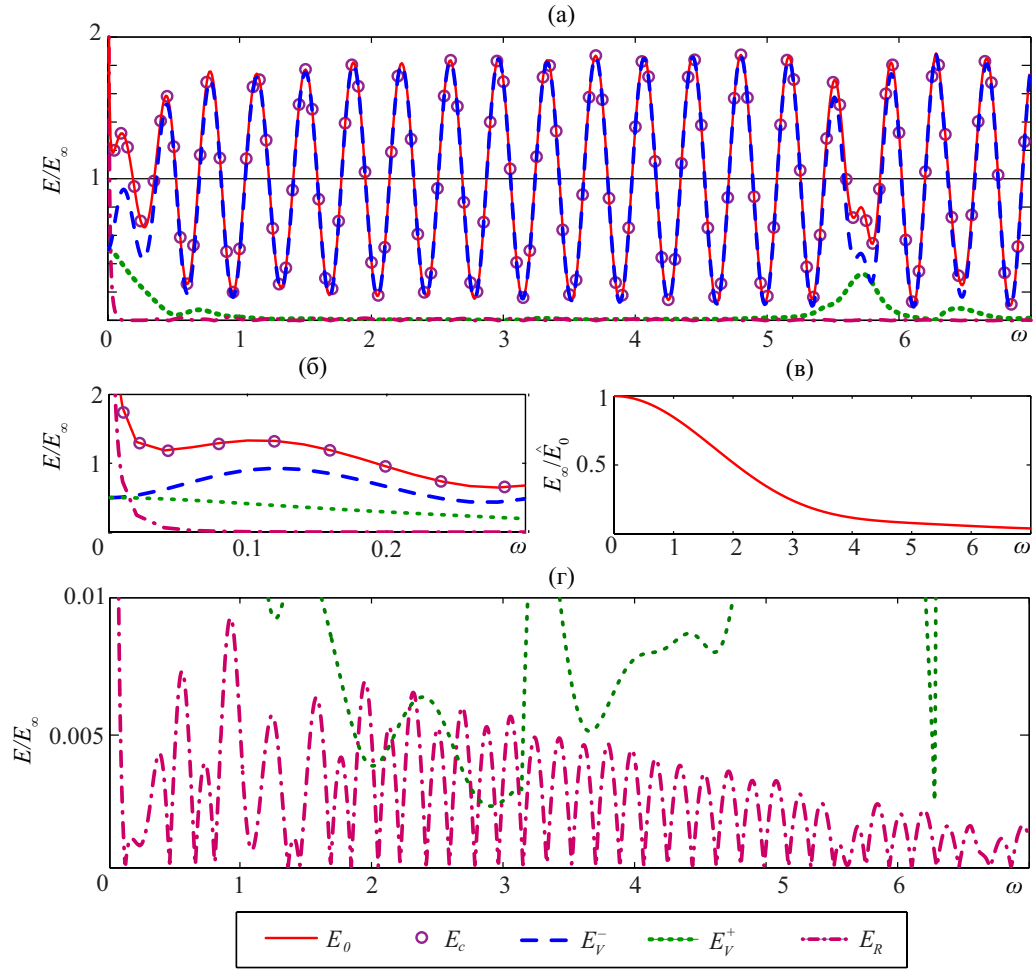


Рис. 4.6: Распределение энергии кругового преобразователя ($a = 3.75$, $d = 4$) между возбуждаемыми волнами (а), (б), (г): частотные зависимости для энергии источника E_0 (сплошная линия), суммарного потока через полную поверхность цилиндра E_c (круговые маркеры) и потоков энергии через его верхнюю E_V^- (штриховая линия), нижнюю E_V^+ (пунктирная линия) и боковую E_R (штрих-пунктир) поверхности по отдельности (все величины отнесены к энергии E_∞ такого же источника, но в безграничной среде (в), \hat{E}_0 – не зависящая от частоты энергия эквивалентного точечного источника); (б) и (г) укрупненные фрагменты, показывающие распределение энергии в низкочастотном диапазоне и долю энергии проходящих и бегущих волн E_V^+ и E_R

последние можно рассматривать как недеформируемые [80, 123, 155].

В зависимости от частоты отраженное поле p_{sc}^- складывается с прямым полем источника p_0 в фазе или противофазе. Соответственно, график E_0/E_∞ (рис. 4.6а) быстро выходит на режим колебаний вокруг единицы с минимума-

ми и максимумами близкими к нулю и двум. Периодичность их чередования слегка нарушается только при переходе через диапазон появления обратной волны (мода S_1^* на рис. 3.1а). Здесь же наблюдается и резонансное прохождение звука сквозь пластину (рост значений энергии прошедших волн E_V^+). Это тот же резонансный пик, что и на частоте $f = 457$ кГц на рис. 2.1 (безразмерная частота $\omega = 5.5$). Следующий максимум на частоте $f = 774$ кГц ($\omega = 9.4$) вызван появлением обратной волны A_2^* .

Распределение энергии бегущих волн между двумя модами Шолте-Стоунли E_A и E_S для различных расстояний точечного источника и размерного АСТ преобразователя от погруженной пластины приведены на рисунках 4.7 и 4.8 соответственно. При расположении источника вблизи пластины большую часть энергии переносит антисимметричная волна A , а с увеличением расстояния d энергия волн A и S становится сопоставимой. Такая тенденция наблюдается как в случае точечного источника (рис. 4.7), так и для распределенной нагрузки (рис. 4.8).

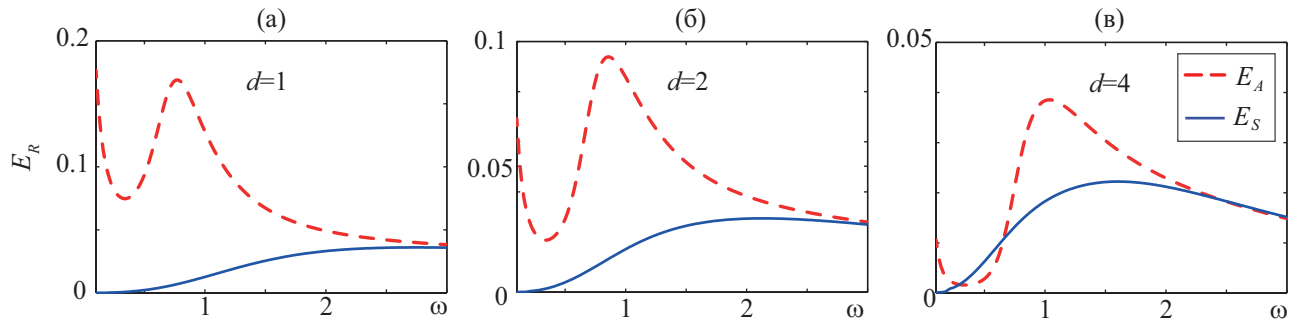


Рис. 4.7: Энергия E_A и E_S , уносимая на бесконечность волнами Шолте-Стоунли при расстоянии $d = 1, 2, 4$ точечного источника от пластины

Для исчерпывающего анализа распределения энергии волн Шолте-Стоунли на рис. 4.9 представлены вертикальные профили плотности энергии $\hat{e}_r(r, z) = e_r(r, z)/|\mathbf{e}|$ от z , рассчитанной отдельно для антисимметричной A и симмет-

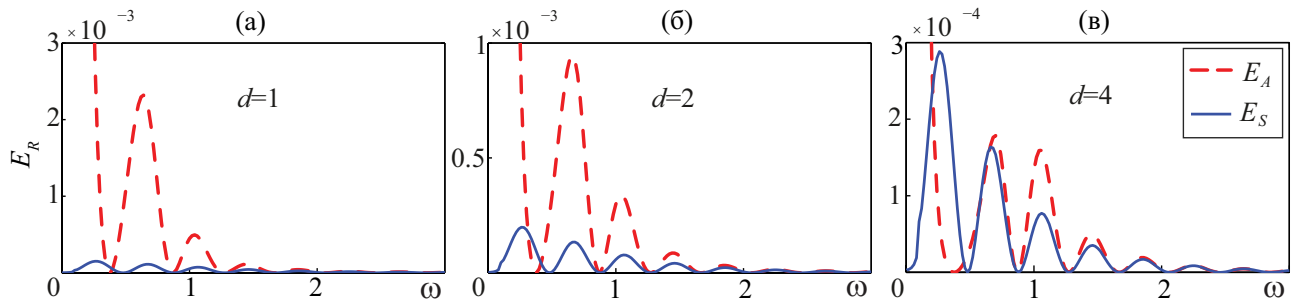


Рис. 4.8: Энергия E_A и E_S , уносимая на бесконечность волнами Шолте-Стоунли при различном расстоянии от пластины АСТ преобразователя с излучающим элементом радиуса $a = 3.75$: $d = 1, 2, 4$

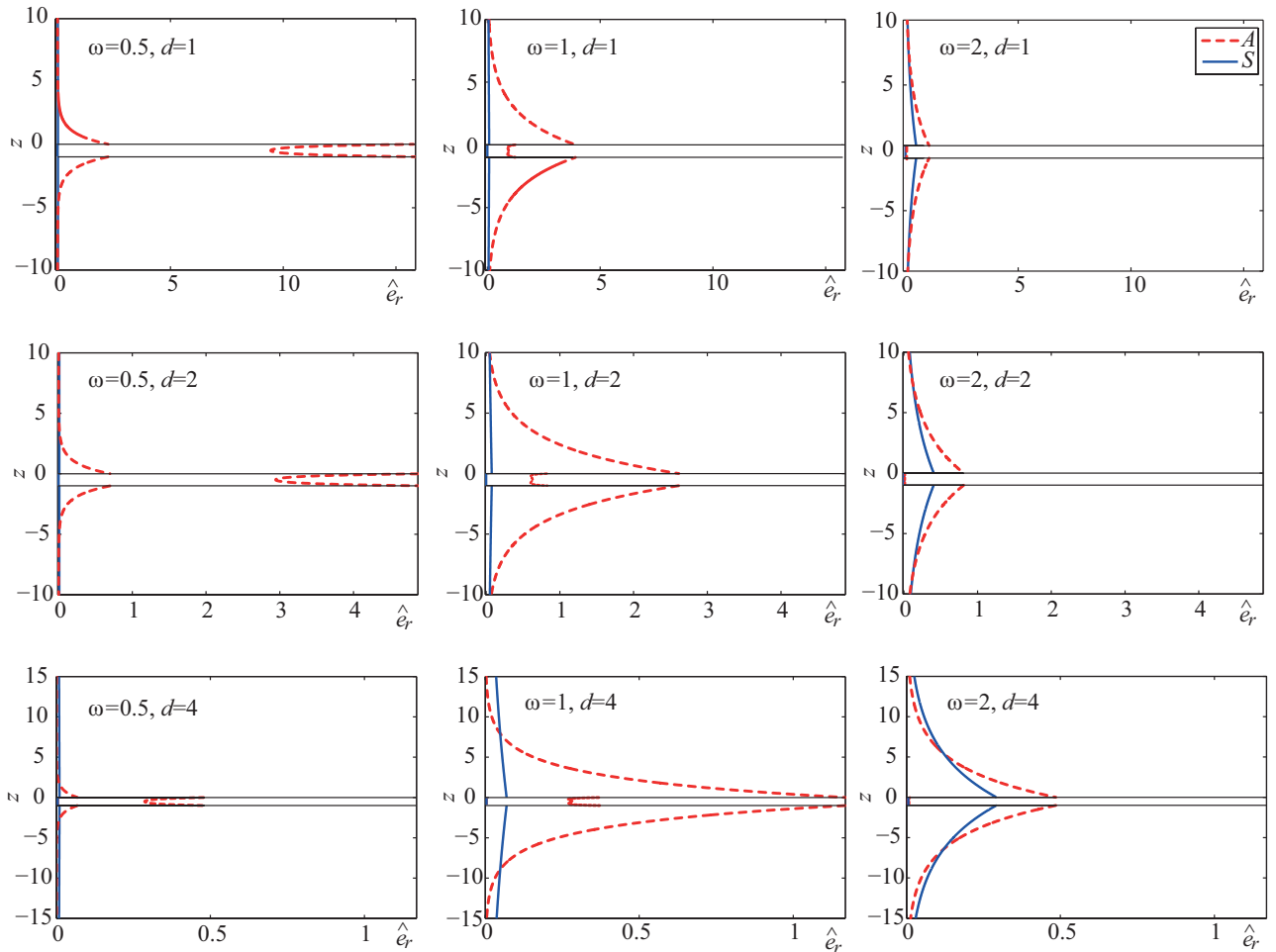


Рис. 4.9: Вертикальные профили плотности энергии $\hat{e}_r(r, z)$ мод A и S , возбуждаемых на частотах $\omega = 0.5, 1$ и 2 точечным источником, расположенным на расстоянии $d = 1, 2$ и 4 от пластины.

ричной S моды. Графики представлены для трех фиксированных частот $\omega = 0.5$ (левый столбец), $\omega = 1$ (средний столбец) и $\omega = 2$ (правый столбец) и для тех же расстояний $d = 1, 2, 4$, что и на рис. 4.7, в качестве нагрузки рассматривается точечный источник. Для выбранных частот энергия моды A больше, чем энергия моды S , как и на рис. 4.7. На низких частотах основная часть энергии моды A сосредоточена внутри пластины, но с ростом частоты большая часть энергии переносится за пределами пластины в окружающей акустической жидкости, концентрируясь на границах раздела двух сред.

§4.2.2 Поток энергии в дальней зоне

Для лучшего понимания распределения энергии источника между возбуждаемыми волнами удобно рассматривать ее как функцию двух переменных при остальных фиксированных, например, как функцию частоты ω и расстояния d (рис. 4.10 – 4.12) или частоты ω и радиуса излучателя a (рис. 4.15–4.16). Для удобства все эти величины нормированы на значение энергии точечного источника в безграничной акустической среде $E_\infty = 1/(8\pi c_0 \rho_0)$. Таким образом, на рисунках 4.10 – 4.12 представлены линии уровней функций $\hat{E}_0 = E_0/E_\infty$, $\hat{E}_V^+ = E_V^+/E_\infty$, $\hat{E}_V^- = E_V^-/E_\infty$ и $\hat{E}_R = E_R/E_\infty$.

На рис. 4.10 показана нормированная полная энергия $\hat{E}_0(\omega, d)$ точечного источника. Ее структура характеризуется чередующимися вогнутыми полосомами локальных максимумов и минимумов мощности источника, что определяется четным и нечетным числом акустических полуволен длины $\lambda = 2\pi c_0/\omega$, укладывающихся в расстояние d . На рис. 4.5 это чередование проявляется в виде волнообразных частотных зависимостей для фиксированных расстояний d .

На рис. 4.11 изображено нормированное количество энергии объемных

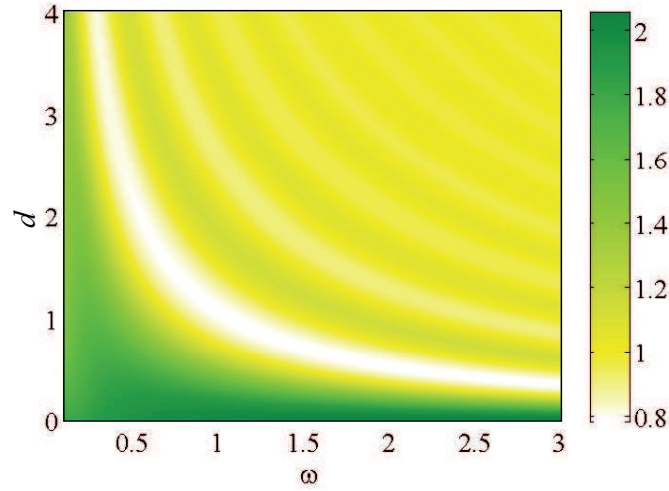


Рис. 4.10: Нормированная мощность точечного источника $\hat{E}_0(\omega, d)$

волн \hat{E}_V^+ и \hat{E}_V^- , проходящих через нижнюю и верхнюю горизонтальные плоскости $z = z_1$ (прохождение) и $z = z_2$ (отражение) соответственно. \hat{E}_V^+ не зависит от расстояния d (рис. 4.11а), а \hat{E}_V^- – зависит, т.к. поля p_0 и p_{sc}^- складываются то в фазе, то в противофазе. Это наглядно показывает, что большая часть энергии источника отражается от поверхности пластины, и только небольшая часть проходит через пластину, особенно на более высоких частотах.

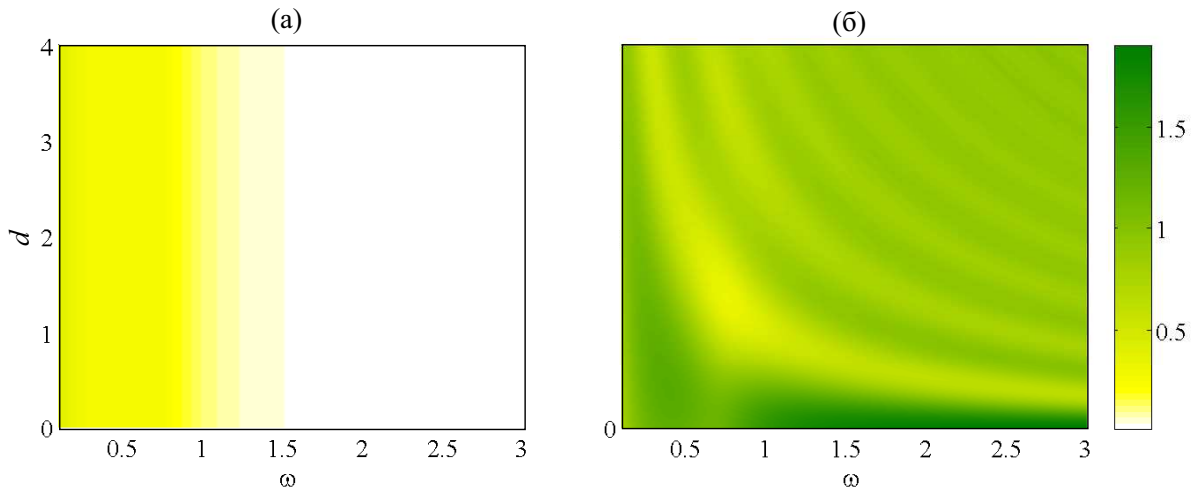


Рис. 4.11: Нормированная энергия объёмных волн $\hat{E}_V^+(\omega, d)$ и $\hat{E}_V^-(\omega, d)$

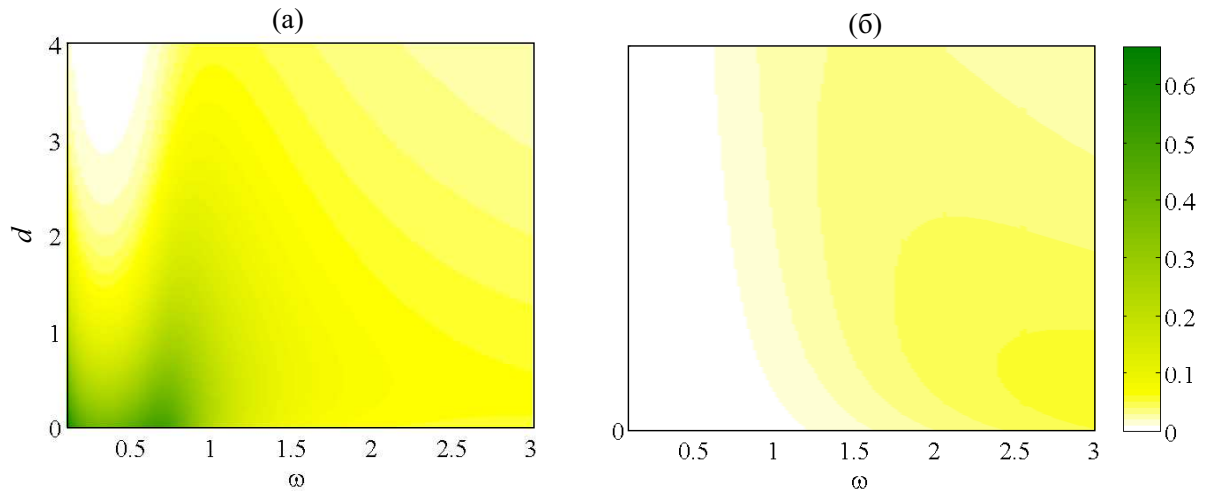


Рис. 4.12: Нормированная энергия $\hat{E}_A(\omega, d)$ и $\hat{E}_S(\omega, d)$ мод A и S

На рисунке 4.12 показана нормированная энергия \hat{E}_A и \hat{E}_S , переносимая на бесконечность антисимметричной и симметричной волнами Шолте-Стоунли (моды A и S) также в зависимости от ω и d , то есть слагаемые нормированной энергии бегущих волн E_R/E_∞ , переносимой через боковую поверхность цилиндра. С частотой доля моды S растет, а моды A – уменьшается, но их значения остаются одного порядка.

§4.2.3 Линии тока энергии

Поверхности акустического давления, приведенные на рисунках 4.1 – 4.2, дают представление о пространственном распределении акустической мощности, в то время как конкретные траектории усредненного по времени переноса энергии в гармоническом волновом поле могут быть визуализированы с помощью линий тока, которые определяются векторным полем $\mathbf{e}(\mathbf{x})$, где \mathbf{e} – вектор Умова-Пойнтинга (плотности потока энергии в каждой точке \mathbf{x}) [24, 86, 92, 109]. На рисунке 4.13 изображены линии тока энергии для полей давления, показанных на рис. 4.2а-б, т.е. на нерезонансной частоте $f = 329$

кГц ($\omega = 4$) и резонансной частоте $f = 457$ кГц ($\omega = 5.5$). Нижние увеличенные вставки (в) и (г) на рис. 4.13 показывают линии тока энергии внутри пластины. Увеличение переноса энергии через пластину на резонансной частоте происходит из-за появления энергетических вихрей, которые блокируют отток энергии вдоль пластины.

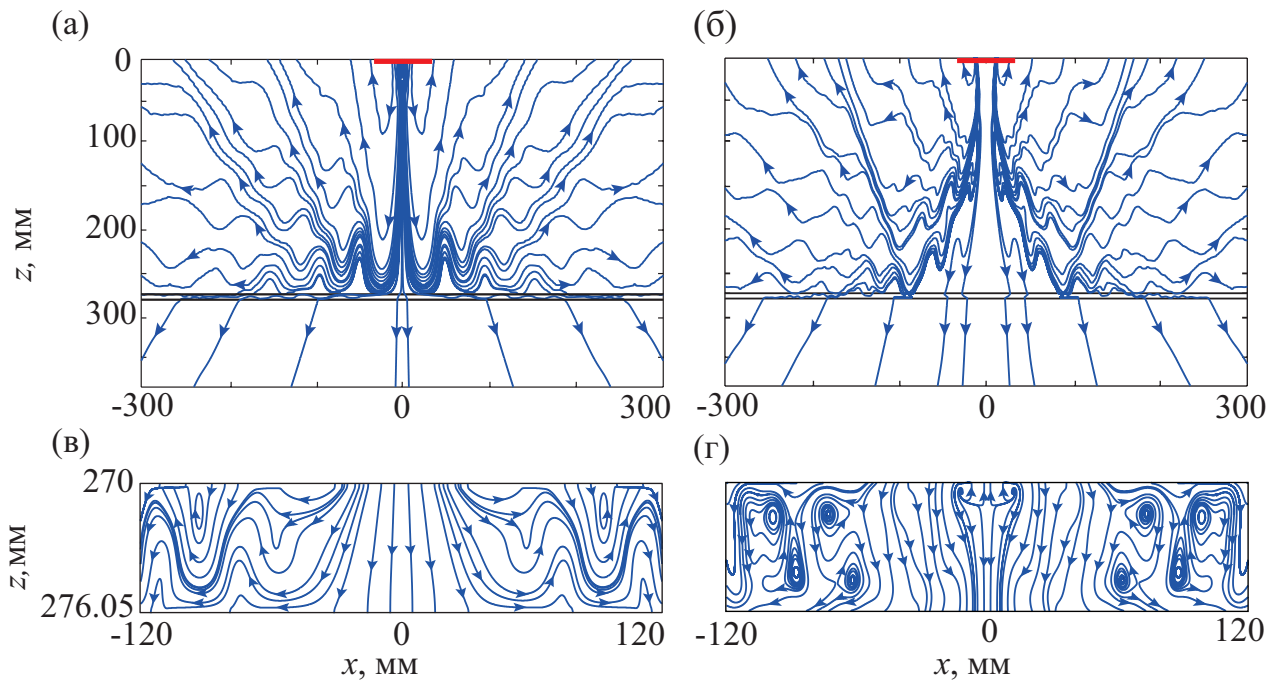


Рис. 4.13: Линии тока энергии для рисунков 4.2

На рисунке 4.14 приведен еще один пример типичной структуры линий тока энергии, но в безразмерных параметрах, для кругового преобразователя радиуса $a = 2.5$, расположенного относительно близко к пластине ($d = 4$; $\omega = 1$). В отличие от случая удаленного преобразователя, как на рис. 4.13, только немногие, близкие к центральной оси, линии тока энергии проходят через пластину, а другие либо поворачивают вбок, указывая траектории переноса энергии бегущими волнами вдоль пластины, либо разворачиваются вверх, показывая пути оттока энергии волн, отраженных от пластины. Под

источником наблюдается довольно широкая область, через которую линии тока идут сквозь пластину.

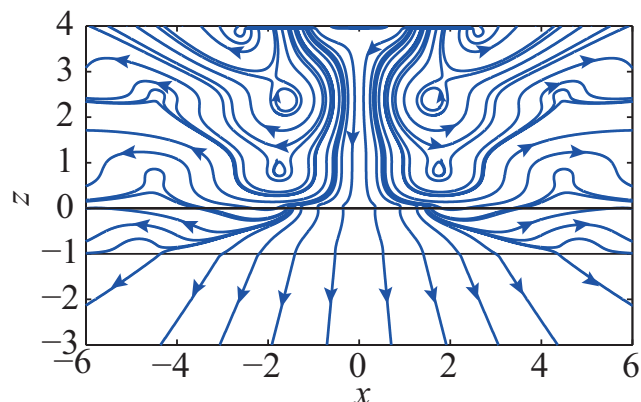


Рис. 4.14: Линии тока энергии для кругового преобразователя радиуса $a = 2.5$ при $d = 4$ и $\omega = 1$

§4.3. Задачи настройки параметров излучателя и максимизации энергии возбуждаемых волн определенного типа

Для пленочных пьезоактуаторов, приклеенных к поверхности упругой пластины, хорошо известен эффект чередования частот максимального и минимального излучения энергии, уносимой бегущими волнами определенного типа [101, 108, 138]. В первую очередь интерес здесь представляют амплитудно-частотные характеристики возбуждаемых фундаментальных антисимметричной и симметричной волн Лэмба — A_0 и S_0 . Для частот, на которых энергия A_0 и S_0 мод достигает локальных максимумов, в SHM используется специальный термин «sweet spots» («лучшие частоты») [101]. Их конкретные значения зависят от соотношения радиуса актуатора, толщины пластины и сочетания упругих свойств пьезонакладки и волновода. На плоскости частота-радиус (ω, a) графики зависимости общего количества энер-

гии пьезоактуатора $E_0(\omega, a)$ и энергии, уносимой модами A_0 и S_0 , выглядят как чередующиеся светлые и темные полосы минимальных и максимальных значений, структура которых резко меняется на частотах отсечки, т.е. при появлении каждой следующей высшей моды (см., например, рис. 4-5 работы [26]).

При использовании бесконтактных преобразователей возникает такая же задача определения лучших частот возбуждения бегущих волн, в которой появляются дополнительные параметры: расстояние от источника до поверхности инспектируемой структуры и соотношение ее упругих свойств и свойств окружающей среды.

Общие закономерности изменения суммарной мощности E_0 при варьировании положения и размера источника иллюстрируют линии уровня функций $E_0(\omega, d)/E_\infty$ (рис. 4.15а) и $E_0(\omega, a)/E_\infty$ (рис. 4.15б) (относительное по сравнению с безграничной средой изменение отдаваемой мощности источника E_0 как функция частоты и расстояния при фиксированном $a = 3.75$, и как функция частоты и размера при фиксированном $d = 4$). Горизонтальными пунктирными линиями показаны сечения этих поверхностей, дающие график $E_0(\omega)/E_\infty$ на рис. 4.6. Чередование максимумов и минимумов на рис. 4.15а, как и ожидалось, определяется четным или нечетным числом акустических полуволн длины $\lambda = 2\pi c_0/\omega$, укладываемых в расстояние d . Соответственно, полосы максимумов идут в плоскости (ω, d) вдоль гипербол с небольшим сдвигом при переходе через диапазон обратных волн и частоты отсечки моды S_2 (после $\omega = 5.5$). А вот рис. 4.15б демонстрирует отсутствие зависимости лучших частот, т.е. частот максимума энергии источника, от его радиуса a в отличие от случая контактного пьезоактуатора, для которого характерны такие же идущие вдоль гипербол полосы максимумов, как и на рис. 4.15а [26].

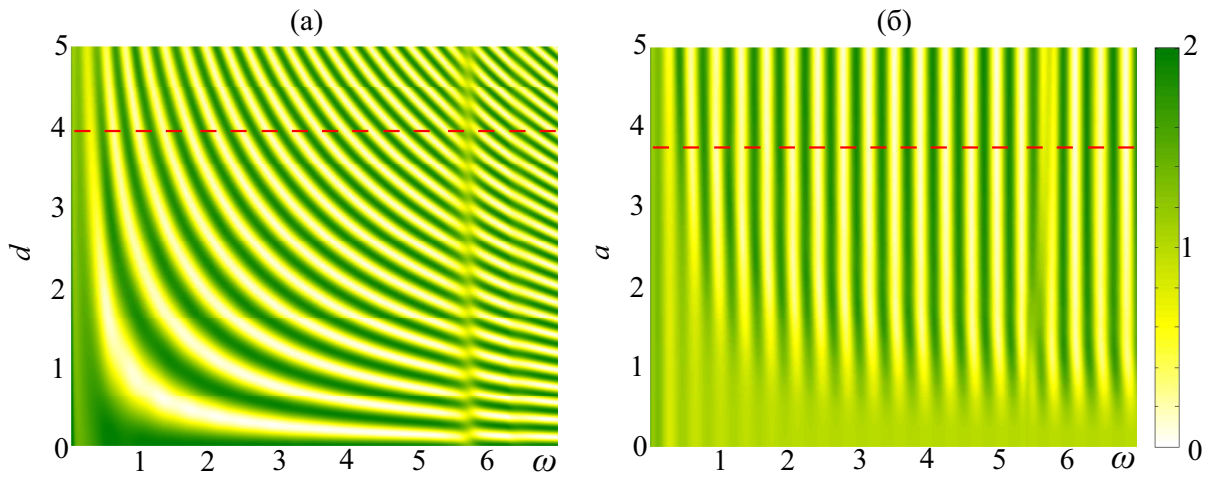


Рис. 4.15: Относительная мощность преобразователя E_0/E_∞ в зависимости от частоты ω и расстояния d при $a = 3.75$ (а) и частоты ω и радиуса a при $d = 4$ (б); график E_0/E_∞ на рис. 4.6а – сечение данных поверхностей вдоль показанных пунктиром горизонтальных прямых

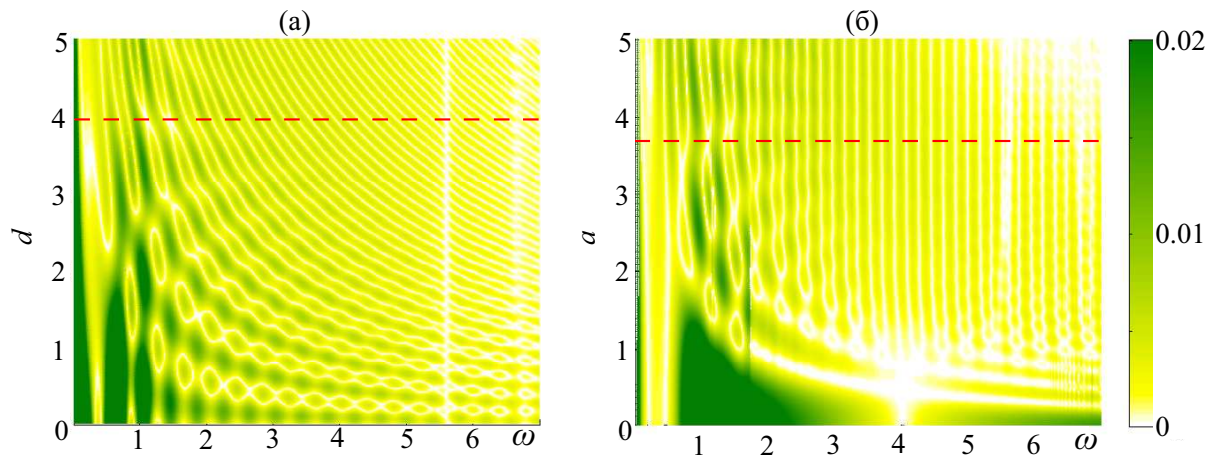


Рис. 4.16: Относительная энергия бегущих волн E_R/E_∞ в зависимости от частоты ω и расстояния d при $a = 3.75$ (а) и частоты ω и радиуса a при $d = 4$ (б); график E_R/E_∞ на рис. 4.6г – сечение данных поверхностей вдоль показанных пунктиром горизонтальных прямых

На укрупненном графике для энергии бегущих волн $E_R(\omega)/E_\infty$ (рис. 6г) видно такое же чередование максимумов и минимумов, как и у E_0 , т.е. для бегущих волн, возбуждаемых в пластине акустическим пучком, также суще-

ствуют периодически повторяющиеся лучшие частоты, однако их значения не совпадают с максимумами полной энергии E_0 , отдаваемой источником. Это означает, что работа источника на максимуме мощности совсем не обязательно приводит к возбуждению бегущих волн максимальной амплитуды. Полная картина зависимости энергии бегущих волн E_R/E_∞ от двух параметров (ω, d) или (ω, a) показана на рис. 4.16.

§4.4. Перенос энергии обратными волнами

Дисперсионная кривая моды S_1 на рисунке 3.1а имеет характерный изгиб в диапазоне $5.42 < \omega < 5.81$ с отрицательным наклоном касательной, указывающим на появление так называемой обратной волны S_1^* . На левом краю этого диапазона касательная становится вертикальной, что дает моду с нулевой групповой скоростью $v_n = d\omega/d\zeta_n$, в то время как фазовая скорость $c_n = \omega/\zeta_n$ ненулевая. На сегодняшний день явления, связанные с обратными волнами и модами с нулевой групповой скоростью (zero group velocity - ZGV) в слоистых упругих волноводах, хорошо изучены и нашли практическое применение [86, 109, 136, 137].

В погруженных волноводах незатухающие бегущие волны превращаются в вытекающие, поэтому левая граница диапазона обратной волны становится размытой и эффекты, связанные с ними и с ZGV, проявляются не так отчетливо. Причина такого явления заключается в изменении траекторий, по которым полюса обратной волны с ростом частоты выходят с комплексной плоскости на вещественную ось (рис. 4.17). Такая трансформация дисперсионных кривых уже отмечалась в работах [130, 141].

В случае свободного волновода регулярные полюса $\pm\zeta_n$ выходят на ве-

щественную ось через начало координат, а нерегулярные (дающие ZGV и обратные волны) – через ненулевую точку вещественной оси. Два нерегулярных комплексно-сопряженных полюса моды S_1 движутся навстречу друг другу и на вещественной оси при частоте $\omega = 5.42$ сливаются в ненулевой двукратный полюс $\zeta = 1.69$ (рис. 4.17а). Затем они расходятся в противоположных направлениях вдоль вещественной оси, образуя две бегущие волны: регулярную S_1 и обратную S_1^* (см. также соответствующие ветви на рис. 3.1а). Положительный регулярный полюс моды S_1 перемещается вправо, а полюс обратной волны S_1^* движется к началу координат (отрицательные полюса $-\zeta_n$ и $-\zeta_1^*$ центрально симметричны относительно начала координат). После встречи в начале координат с симметричным отрицательным полюсом нерегулярный вещественный полюс моды S_1^* движется по мнимой оси и выходит через начало координат на вещественную ось на частоте отсечки $\omega = 6.28$. После этого полюс перемещается вправо, становясь чисто вещественным полюсом моды S_2 (см. также рис. 4.17а).

Соответственно, при интегрировании контур Γ_+ должен отклоняться от вещественной оси для обхода регулярных и нерегулярных вещественных полюсов, как показано на рис. 4.17в. Такой выбор направления отклонения контура в интегральных представлениях обеспечивает отток волновой энергии от источника на бесконечность в диапазоне обратных волн для идеально упругого свободного волновода в соответствии с принципом предельного поглощения [18]. При замыкании контура интегрирования вверх пара полюсов ζ_n и $-\zeta_n^*$ всегда вместе попадает в замкнутый контур в отличие от пары регулярных полюсов $\pm\zeta_n$, из которых только один дает вклад в асимптотику бегущих волн (3.2). Следовательно, пара полюсов ζ_n и $-\zeta_n^*$ является неразрывной, и поэтому их вклад в асимптотику бегущих волн нельзя рассматривать по от-

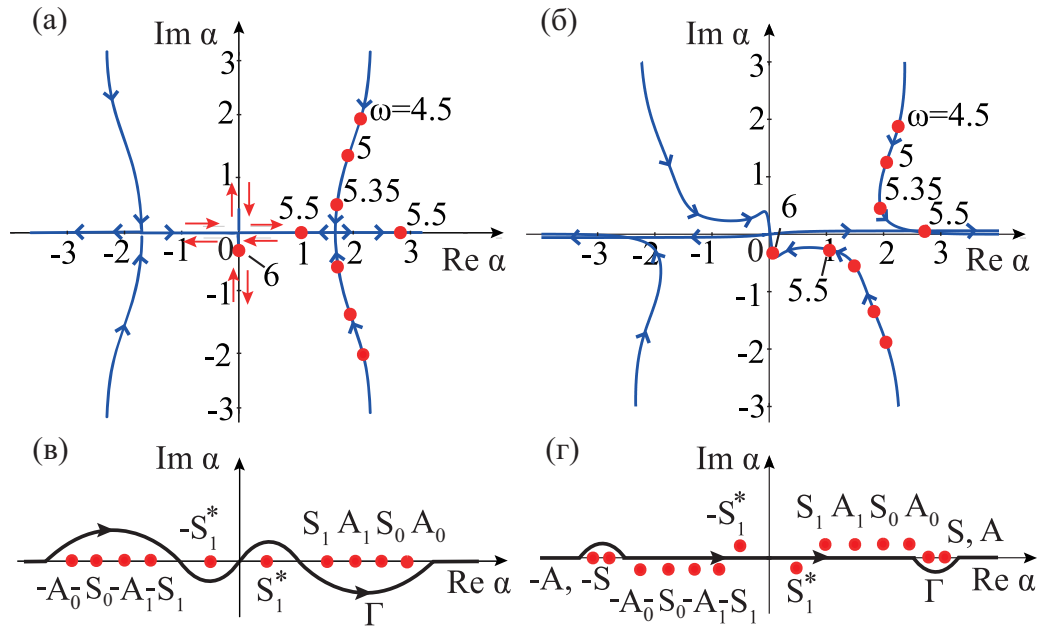


Рис. 4.17: Траектория движения полюсов, дающих моды S_1 и S_1^* в комплексной плоскости волнового числа α : (а) для свободного слоя, (б) для погруженного слоя; (в) и (г) вид контура интегрирования Γ , обходящего вещественные полюса в случае свободного и погруженного слоя

дельности.

В случае погруженной в жидкость пластины комплексные полюса, дающие моды S_1 и S_1^* , перестают быть комплексно-сопряженными (рис. 4.17б). С ростом частоты они также движутся навстречу друг другу, но зеркальная симметрия относительно вещественной оси больше не сохраняется, остается только центральная. Полюса не доходят до вещественной оси, а разворачиваются перед ней и движутся далее налево и направо, оставаясь в комплексной плоскости (вытекающие бегущие волны). Таким образом, полюса не встречаются и классическая ZGV мода с нулевой групповой скоростью не возникает. После прохождения начала координат полюс, соответствующий вытекающей обратной волне S_1^* , превращается в регулярный полюс моды S_2 , как и в случае свободного слоя, лишь с небольшим различием в смещении траектории

полюса в комплексную плоскость. Из-за этих смещений полюсов больше нет необходимости отклонять контур интегрирования от вещественной оси, чтобы обойти вещественные полюса, за исключением полюсов волн Шолте-Стоунли A и S , которые движутся по вещественной оси (рис. 4.17г).

Необычные энергетические свойства вытекающей обратной волны S_1^* описаны в работе [130]. Отмечается, что для вытекающей обратной волны обнаруживается поворот вектора плотности энергии $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ к источнику, т.е. вертикальный профиль плотности энергии $e_r(z)$ принимает отрицательные значения; схематически это показано на рис. 4 в работе [130]. На самом деле такое явление вполне естественно, и оно не нарушает энергетический баланс. Если такое может быть для отдельно взятой моды, то это еще не значит, что такая картина будет наблюдаться и для полного волнового поля, которое представляет собой сумму бегущих и объемных волн. В ближней к источнику зоне интерференция бегущих и идущих от источника объемных волн полностью меняет картину векторного поля $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ по сравнению с вертикальными профилями $e_r(z)$ отдельно взятых бегущих волн в дальней зоне. Идущие из бесконечности рукава обратных потоков энергии разворачиваются и снова уходят на бесконечность, не нарушая общего энергетического баланса [86, 109].

Картина переноса энергии неразрывной парой мод S_1 и S_1^* еще проще: здесь вообще не возникает обратных потоков энергии. Рассмотрим это более детально. На рис. 4.18– 4.19 показаны зависящие только от безразмерной координаты $z := z/h$ нормированные вертикальные профили плотности энергии вытекающих волн в дальней зоне $\hat{e}_r(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} e_r(z) r e^{2\text{Im}\zeta_n r}$. Сечение пластины занимает отрезок $-1 \leq z \leq 0$, а области $z \geq 0$ и $z \leq -1$ – акустическая среда. Как и указано в работе [130], вертикальные профили плотности

энергии $\hat{e}_r(z)$ для обратных вытекающих волн имеют противоположные направления при различных значениях z (рис. 4.18а, б). Однако, моды S_1 и S_1^* , как было отмечено выше, неразрывны и, в отличие от регулярных мод, каждую из которых можно возбудить по отдельности, они всегда входят вместе в общее представление возбуждаемого волнового поля. Соответственно, можно рассматривать только их суммарный профиль, который указывает на перенос энергии строго от источника на бесконечность для всех z (рис. 4.18в).

Профили потока энергии регулярных мод Лэмба обычно не имеют отрицательных участков (рис. 4.19), хотя иногда такое поведение также имеет место (например, профиль моды A_1 при частоте $\omega = 5.5$ и 7). Но, как отмечалось выше, в ближней зоне такие обратные потоки разворачиваются более мощным потоком энергии, идущим от источника.

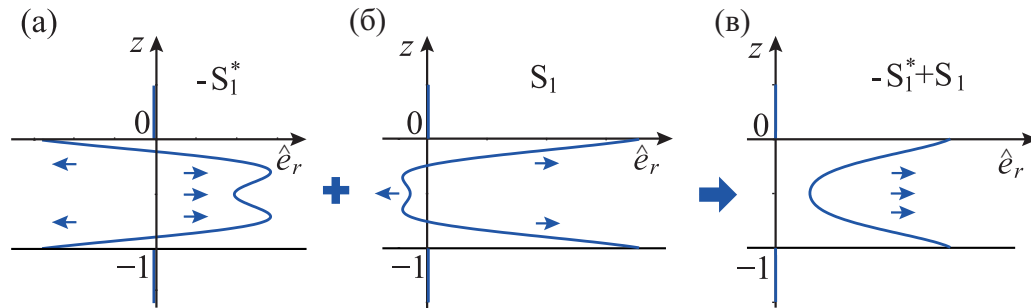


Рис. 4.18: Вертикальные профили плотности энергии $\hat{e}_r(z)$ для мод S_1 , S_1^* и их суммы на частоте $\omega = 5.5$

В общем волновом поле векторы \mathbf{e} , направленные к источнику, обычно указывают на появление энергетических вихрей, т.е. пространственных областей, в которых энергия циркулирует по замкнутым траекториям, т.е. зонам, через которые отсутствует отток и приток энергии [6, 86, 157]. Полный поток энергии через любое поперечное сечение такой вихревой области равен нулю; следовательно, энергетический баланс не нарушается. В редких слу-

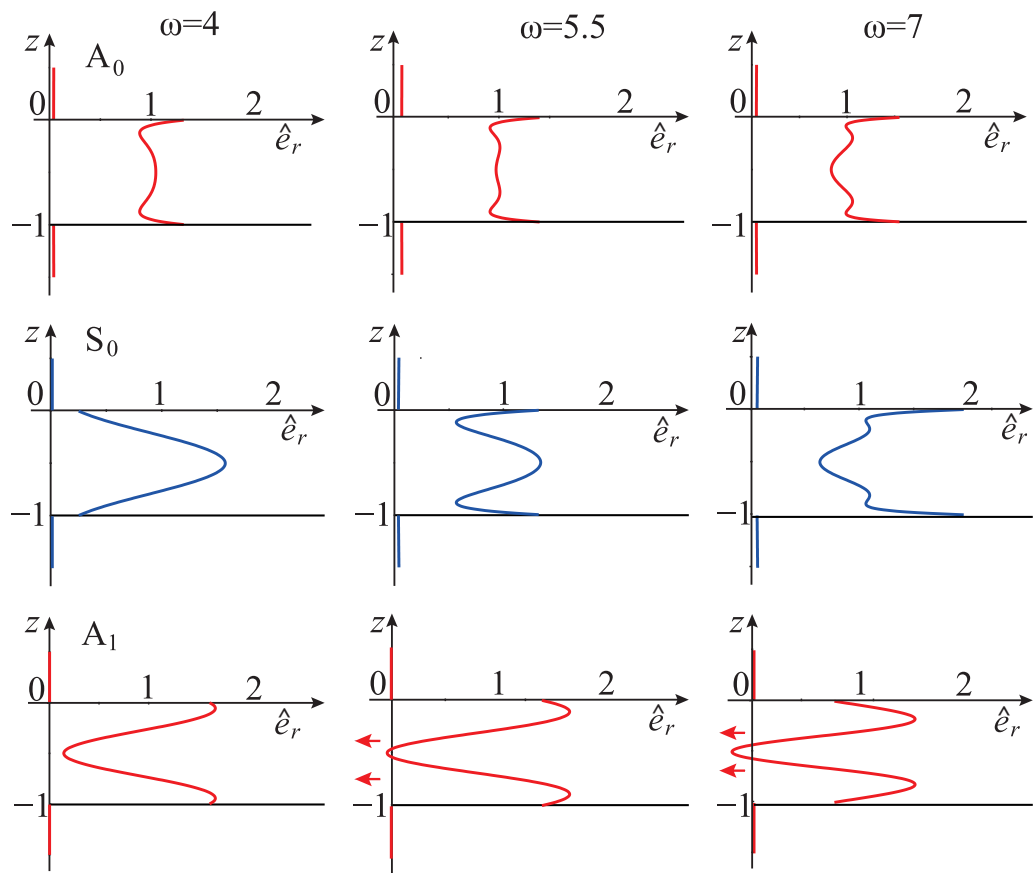


Рис. 4.19: Вертикальные профили плотности энергии $\hat{e}_r(z)$ для мод A_0 , S_0 и A_1 на частотах $\omega = 4, 5.5, 7$

чаях обратные потоки энергии, идущие из бесконечности, могут возникать в идеально упругих волноводах. Но в ближней зоне такой обратный поток обязательно разворачивается более мощным потоком энергии, идущим от источника [86, 109].

Заключение

В рамках выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. Выведены явные интегральные и асимптотические представления функции Грина рассматриваемой динамической задачи теории упругости и на этой основе разработаны и реализованы эффективные компьютерные модели для анализа амплитудно-частотных и энергетических характеристик всех типов волн, возбуждаемых заданным источником.
2. Произведена верификация разработанных моделей на основе сопоставления с независимыми численными и экспериментальными результатами.
3. Изучен энергетический баланс системы источник-среда-волновод, исследованы резонансные эффекты, проанализирован механизм перераспределения волновой энергии между объемными и бегущими волнами на частотах резонансного прохождения акустических сигналов через упругую пластину.
4. Исследованы закономерности проявления эффекта обратных волн в погруженном волноводе, изучен перенос энергии квазиобратными бегущими волнами.
5. Разработана и реализована методика определения оптимальных параметров возбуждения бегущих волн бесконтактным преобразователем.
6. Рассмотрено влияние анизотропии упругих свойств на диаграммы направленности объемных и бегущих волн, возбуждаемых бесконтактным излучателем, а также на угловые зависимости декремента затухания вытекающих волн Лэмба.

7. Установлен факт отсутствия низкочастотной незатухающей антисимметричной моды A_0 .

Основные результаты, полученные в рамках работы над диссертацией, опубликованы в работах [27, 28, 31-35, 37, 38, 44, 59-61, 99, 105, 110-116, 129]. Данные результаты получены совместно с профессором Е.В. Глушковым и профессором Н.В. Глушковой, которые сформулировали постановку рассматриваемых задач, предложили методику их решения и осуществляли общее руководство ходом исследований. Совместно с доцентом С.И. Фоменко получены уточненные асимптотики объемных волн в случае сближения особенностей [99]; под руководством доцента А.А. Еремина были проведены экспериментальные исследования [28, 110]. Лично автором осуществлена реализация методов решения рассмотренных задач, разработаны пакеты программ, проведены численные расчеты и анализ полученных результатов.

Автор выражает глубокую благодарность научным руководителям проф. Е.В. Глушкову и проф. Н.В. Глушковой за их неоценимую поддержку, помощь, ценные советы и обсуждение полученных результатов. Автор благодарит доцента С.И. Фоменко и доцента А.А. Еремина за обсуждение отдельных результатов и ряд ценных замечаний, а также коллектив Института математики, механики и информатики ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет».

Литература

1. Айзикович, С.М. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.В. Белоконь, Л.И. Кренев, И.С. Трубчик. — М.: Физматлит, 2006. — 240 с.
2. Алексеев, А.С. Интенсивность отраженных волн в слоисто-неоднородной упругой среде / А.С. Алексеев, Н.В. Цепелев // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. — 1956. — № 9. — С. 1022-1035.
3. Ананьев, И.В. Вибрация штампа на слое с переменными по глубине свойствами / И.В. Ананьев, В.А. Бабешко // Механика твердого тела. — 1978. — № 1. — С. 64–69.
4. Андронов, И.В. О высокочастотном рассеянии на полосе при почти скользящем падении / И.В. Андронов // Акуст. журн. — 2016. — Т. 62, № 4. — С. 393–398.
5. Бабешко, В.А. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1987. — Т. 27, № 1. — С. 93–101.
6. Бабешко, В.А. Анализ волновых полей, возбуждаемых в упругом стратифицированном полупространстве, поверхностными источниками / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова // Акуст. журн. — 1986. — Т. 32, № 6. — С. 366–371.
7. Бабешко, В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред /

- В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. — М.: Наука, 1989. — 344 с.
8. Бабич, В.М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае неоднородной анизотропной среды / В.М. Бабич // Вопр. динам. теории распротр. сейсм. волн. — 1961. — Т. 5. — С. 36–46.
 9. Бабич, В.М. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В.М. Бабич, В.С. Булдырев. — М.: Наука, 1972. — 456 с.
 10. Бабич, В.М. Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны / В.М. Бабич, В.С. Булдырев, И.А. Молотков. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та., 1985. — 272 с.
 11. Бабич, В.М. Упругие волны. Высокочастотная теория / В.М. Бабич, А.П. Киселев. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 320 с.
 12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1966. — 296 с.
 13. Бобровницкий, Ю.И. Энергетических характеристики составных волноводов / Ю.И. Бобровницкий, В.В. Тютекин // Акуст. журн. — 1986. — Т. 32, № 5. — С. 598–604.
 14. Боев, Н.В. Восстановление контура препятствий по характеристикам рассеянного акустического поля в коротковолновой области / Н.В. Боев, А.О. Ватульян, М.А. Сумбатян // Акуст. журн. — 1997. — Т. 43, № 4. — С. 458–462.

15. Бреховских, Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. — М.:Наука, 1973. — 342 с.
16. Вешев, В.А. Низкочастотная асимптотика волновых чисел пластины, колеблющейся в среде / В.А. Вешев, Д.П. Коузов, В.Г. Яковлева // Акуст. журн. — 1985. — Т. 31, № 5. — С. 662–664.
17. Викторов, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов. — М.: Наука, 1966. — 169 с.
18. Ворович, И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И.И. Ворович, В.А. Бабешко. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
19. Ворович, И.И. Восстановление образа дефекта по рассеянному волновому полю в акустическом приближении / И.И. Ворович, М.А. Сумбатьян // Изв. АН СССР. МТТ. — 1990. — № 6. — С. 79-84.
20. Ватульян, А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. — М.: Физматлит, 2007. — 223 с.
21. Ватульян, А.О. Обратные и некорректные задачи / А.О. Ватульян, О.А. Беляк, Д.Ю. Сухов, О.В. Явруян. — Ростов-н/Д.: Изд-во Южного федерального университета, 2011. — 232 с.
22. Глушков, Е.В. Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве / Е.В. Глушков // Прикл. математика и механика. — 1983. — Т. 47, № 1. — С. 94–100.
23. Глушков, Е.В. Интегральные преобразования и волновые процессы

/ Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова. — Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2017. — 201 с.

24. Глушков, Е.В. Эффект аномальной прозрачности границы вода–воздух для объемного излучателя / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, О.А. Годин // Акуст. журн. — 2013. — Т. 59, № 1. — С. 8–18.
25. Глушков, Е.В. Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, М.В. Голуб // Акуст. журн. — 2006. — Т. 52, № 3. — С. 314–325.
26. Глушков, Е.В. Распределение энергии пьезоактуатора между бегущими волнами, возбуждаемыми в упругом слое / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Евдокимов // Прикладная механика и техническая физика. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 84–93.
27. Глушков, Е.В. Моделирование возбуждения бегущих волн в слоистых упругих структурах контактными и бесконтактными пьезоактуаторами / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Евдокимов, А.А. Еремин, О.А. Мякишева // Материалы XXI международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (16-20 февраля, 2015, г. Кременки, Россия). — 2015. — Т. 2. — С. 24–25.
28. Глушков, Е.В. Определение и контроль изменения характеристик слоистых пластин на основе бесконтактного измерения волновых полей / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Еремин, О.А. Мякишева // Труды XVIII Международной конференции «Современные проблемы механи-

- ки сплошной среды» (7-10 ноября 2016, Ростов-на-Дону).— 2016. — Т. 1. — С. 145–149.
29. Глушков, Е.В. Метод слоистых элементов в динамической теории упругости / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Еремин, В.В. Михаськив // Прикладная математика и механика.— 2009. — Т. 73. — Вып. 4. — С. 622–634.
30. Глушков, Е.В. Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.С. Кривонос // Прикл. математика и механика. — 2010. — Т. 74. — С. 297–305.
31. Глушков, Е.В. К расчету волнового поля акустического микроскопа / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, О.А. Мякишева // Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (26-30 мая 2014, с. Дивноморское). — 2014. — С. 45.
32. Глушков, Е.В. Взаимодействие звуковых и ультразвуковых волн с многослойными упругими пластинами / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, О.А. Мякишева // Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (25-30 мая 2015, пос. Дивноморское). — 2015. — С. 31.
33. Глушков, Е.В. Математическое и компьютерное моделирование акустического зондирования слоистых упругих материалов / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, О.А. Мякишева // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики

конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (18-22 марта 2019, г. Кременки). — 2019. — Т. 1. — С. 67–68.

34. Глушков, Е.В. Распределение энергии ультразвукового излучателя между бегущими волнами, возбуждаемыми в погруженном упругом волноводе / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, О.А. Мякишева // Акуст. журн. — 2019. — Т. 65, № 6. — С. 723–735.
35. Глушков, Е.В. Ультразвуковое исследование анизотропных композитных материалов, погруженных в акустическую среду / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, О.А. Мякишева // Тезисы докладов XIV Всероссийской школы «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (27–31 мая 2019, пос. Дивноморское). — 2019. — С. 31.
36. Глушков, Е.В. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, С.И. Фоменко, Ч. Жанг // Акуст. журн. — 2012. — Т. 58, № 3. — С. 370–385.
37. Глушкова, Н.В. Интегральные и асимптотические представления волновых полей, возбуждаемых заданным источником в акустической жидкости с погруженной упругой пластиной / Н.В. Глушкова, С.И. Фоменко, О.А. Мякишева // Тезисы докладов. XX Зимняя школа по механике сплошных сред (13-16 февраля 2017, Пермь). — 2017. — С. 100.
38. Глушков, Е.В. Интегральные и асимптотические представления волновых полей в задачах акустического и бесконтактного зондирования упругих пластин / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, С.И. Фоменко, О.А. Мякишева // Тезисы докладов XII Всероссийской школы-семинара

- «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (29 мая – 3 июня 2017, пос. Дивноморское). — 2017. — С. 31.
39. Глушкова, Н.В. Распространение упругих волн в стратифицированных средах и их взаимодействие с поверхностными объектами: дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Ростовский гос. университет, Ростов-на-Дону. — 1981. — 204 с.
40. Гоголадзе, В.П. Волны Рэлея на границе сжимаемой жидкости и твердого упругого полупространства / В.П. Гоголадзе // Труды Сейсмол. ин-та АН СССР. — 1948. — Т. 127. — С. 27–32.
41. Гринченко, В.Т. Поверхностные волны в системе упругий слой на жидком полупространстве / В.Т. Гринченко, Л.Г. Комиссарова // Акустичний вісник. — 2005. — Т. 8, № 4. — С. 38–4.
42. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих средах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. — Киев: Наук. думка, 1981. — 284 с.
43. Дьелесан, Э. Упругие волны в твердых телах / Э. Дьелесан, Д.М. Руайе. — М.: Наука, 1982. — 424 с.
44. Еремин, А.А. Компьютерное моделирование и экспериментальное измерение высших мод Лэмба в слоистых композитных материалах / А.А. Еремин, О.А. Мякишева, Е.В. Глушков // Тезисы докладов. XX Зимняя школа по механике сплошных сред (13-16 февраля 2017, Пермь). — 2017. — С. 121.
45. Исакович, М.А. Общая акустика / М.А. Исакович. — М.: Наука, 1973. — 496 с.

46. Калинин, В.В. Динамика поверхности неоднородных сред / В.В. Калинин, Т.И. Белянкова. — М.: Физматлит, 2009. — 312 с.
47. Кирпичникова, Н.Я. Волны от точечного источника вблизи границы раздела упругой среды и жидкости / Н.Я. Кирпичникова // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2010. — Т. 379. — С. 47–66.
48. Киселев, А.П. Поток энергии упругих волн / А.П. Киселев // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1979. — Т. 89. — С. 120–123.
49. Корольков, А.И. Дифракция высокочастотной плоской волны на идеальной полосе при скользящем падении. Рассмотрение на основе параболического уравнения / А.И. Корольков, А.В. Шанин // Акуст. журн. — 2016. — Т. 62, № 4. — С. 399–407.
50. Краснушкин, И.Е. Метод пересчета импеданса в задачах о волнах в упругих телах / И.Е. Краснушкин // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 269. — С. 332–335.
51. Левин, В.М. Визуализация структуры нанокompозитов методами акустической микроскопии / В.М. Левин, Ю.С. Петронюк, Е.С. Мороков, С. Беллуччи, П. Кижур // Ученые записки физического факультета. — 2014. — Т. 5. — 145337–5 с.
52. Лонкевич, М.П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины / М.П. Лонкевич // Акуст. журн. — 1971. — Т. 17, № 1. — С. 85–92.
53. Лямшев, Л.М. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости / Л.М. Лямшев. — М.: Изд. АН СССР, 1955. — 71 с.

54. Лямшев, Л.М. Отражение звука от тонкой движущейся пластины / Л.М. Лямшев // Акуст. журн. — 1960. — Т. 6, № 4. — С. 505–507.
55. Маев, Р.Г. Акустическая микроскопия / Р.Г. Маев. — М.: Торус Пресс, 2005. — 402 с.
56. Мачевариани, М.М. Импедансный метод расчёта характеристик упругих слоисто-неоднородных сред / М.М. Мачевариани, В.В. Тютюкин, А.П. Шкварников // Акуст. журн. — 1971. — Т. 17, № 1. — С. 97–102.
57. Меркулов, Л.Г. Затухание нормальных волн в пластинах, находящихся в жидкости / Л.Г. Меркулов // Акуст. журн. — 1964. — Т. 10, № 2. — С. 206–212.
58. Молотков, Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах / Л.А. Молотков. — Л.: Наука, 1984. — 201 с.
59. Мякишева, О.А. Моделирование волнового поля акустического микроскопа / О.А. Мякишева // Материалы XIV объединенной научной конференции студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики «Прикладная математика XXI века» (9–12 апреля 2014, г. Краснодар). — 2014. — С. 92.
60. Мякишева, О.А. Моделирование взаимодействия акустического волнового поля с упругой пластиной, погруженной в акустическую жидкость / О.А. Мякишева // Материалы XV объединенной научной конференции студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики «Прикладная математика XXI века» (10–13 апреля 2015, г. Краснодар). — 2015. — С. 145.

61. Мякишева, О.А. Взаимодействие сферических волн с пластиной, погруженной в жидкость / О.А. Мякишева // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.— 2017. — Вып. 3. — С. 38–45.
62. Петрашень, Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах / Г.И. Петрашень. — Л.: Наука, 1980. — 280 с.
63. Приходько, В.Ю. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред / В.Ю. Приходько, В.В. Тютюкин // Акуст. журн. — 1986. — Т. 32, № 2. — С. 212-218.
64. Прудников, А.П. Интегралы и ряд. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычуов, О.И. Маричев. — М.: Наука, 1983. — 752 с.
65. Свешников, А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР.— 1951. — Т. 80, № 3. — С. 345-347.
66. Скобельцын, С.А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой / С.А. Скобельцын, Л.А. Толконников // Акуст. журн. — 1990. — Т. 36, № 4. — С. 740-744.
67. Соляник, Ф.И. Прохождение плоских волн через слоистую среду из анизотропных материалов / Ф.И. Соляник // Акуст. журн. — 1977. — Т. 23, № 6. — С. 933-938.
68. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и таблицами / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган; пер. с англ. В.А. Диткиной и Л.Н. Кармазиной. — М.: Наука, 1979.— 832 с.

69. Сумбатьян, М.А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике / М.А. Сумбатьян, А. Скалия.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 328 с.
70. Тартаковский, Б.В. О прохождении плоских волн через твердые слои. В сб.: Вибрации и шумы / Б.В. Тартаковский, О.Г. Швилкина.— М.: Наука, 1969. — С. 55-72.
71. Титов, С.А. Линзовый многоэлементный акустический микроскоп в режиме измерения параметров слоистых объектов / С.А. Титов, Р.Г. Маев, А.Н. Богаченков // Акуст. журн. — 2017. — Т. 63, № 5. — С. 546-552.
72. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
73. Толоконников, Л.А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем / Л.А. Толоконников // Прикладная механика и техническая физика. — 1999. — Т. 40, № 5. — С. 179-184.
74. Тютюкин, В.В. Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел / В.В. Тютюкин // Акуст. журн. — 1983. — Т. 29, № 4. — С. 529-536.
75. Умов, Н.А. Избранные сочинения / Н. А. Умов. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 492 с.
76. Федорюк, М.В. Метод перевала / М. В. Федорюк. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
77. Фок, В.А. Обобщение отражательных формул на случай отражения про-

извольной волны от поверхности произвольной формы / В.А. Фок // ЖЭТФ. — 1950. — № 4. — С. 54–62.

78. Фоменко, С.И. Асимптотика волновых полей в слоистом скваженном волноводе / С.И. Фоменко // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2007. — Т. 20, № 11. — С. 966–978.
79. Шендеров, Е.Л. Волновые задачи гидроакустики / Е.Л. Шендеров. — Л.: Судостроение, 1972. — 352 с.
80. Шендеров, Е.Л. Излучение и рассеяние звука / Е.Л. Шендеров. — Л.: Судостроение, 1989. — 304 с.
81. Шендеров, Е.Л. Прохождение сферической звуковой волны сквозь упругий слой / Е.Л. Шендеров // Акуст. журн. — 1991. — Т. 37, № 4. — С. 800-807.
82. Aanes, M. Beam diffraction effects in sound transmission of a fluid-embedded viscoelastic plate at normal incidence / M. Aanes, K.D. Lohne, P. Lunde, M. Vestrheim // J. Acoust. Soc. Am. — 2016. — Vol. 140, no. 1. — P. EL67.
83. Achenbach, J.D. Wave propagation in elastic solids / J.D. Achenbach. — North Holland, 1973. — 440 p.
84. Adebahr, W. 3d-robotized air-coupled ultrasound measurements of large components / W. Adebahr, Y. Bernhardt, M. Kreutzbruck // Proceeding of the 19th World Conference on Non-Destructive Testing (Germany, Munich, June 13th– June 17th, 2016) — 2016. — 8 p.

85. Auld, B.A. Acoustic Fields and Waves in Solids / B.A. Auld. — New York: Interscience, 1973.
86. Babeshko, V.A. Energy vortices and backward fluxes in elastic waveguides / V.A. Babeshko, E.V. Glushkov, N.V. Glushkova // Wave Motion. — 1992. — Vol. 16, no. 3. — P. 183–192.
87. Bertoni, H. Unified theory of Rayleigh-angle phenomena for acoustic beams at liquid-solid interfaces / H. Bertoni, T. Tamir // Applied Physics A: Materials Science and Processing. — 1973. — Vol. 2, no. 4. — P. 157–172.
88. Boyle, R.W. I. Transmission of sound energy and thickness of plate transmitter at normal incidence-ultrasonic method / R.W. Boyle, D.K. Froman // Canadian Journal of Research. — 1929. — Vol. 1, no. 1. — P. 405–424.
89. Boyle, R.W. II. Transmission of sound energy and thickness of plate transmitter at normal incidence-ultrasonic method / R.W. Boyle, D.O. Sproule // Canadian Journal of Research. — 1930. — Vol. 2, no. 1. — P. 3–12.
90. Briggs, A. Acoustic Microscopy / A. Briggs, O. Kolosov — Oxford: University Press, 2010.
91. Castaings, M. The generation, propagation, and detection of Lamb waves in plates using air-coupled ultrasonic transducers / M. Castaings, P. Cawley // J. Acoust. Soc. Am. — 1995. — Vol. 100, no. 5. — P. 3070–3077.
92. Chapman, D.M.F. Using streamlines to visualize acoustic energy flow across

- boundaries / D.M.F. Chapman // J. Acoust. Soc. Am. — 2008. — Vol. 124, no. 1. — P. 48–56.
93. Crighton, D.G. The 1988 Rayleigh medal lecture: fluid loading - the interaction between sound and vibration / D.G. Crighton // Journal of Sound and Vibration. — 1989. — Vol. 133, no. 1. — P. 1-27.
94. Delrue, S. Two-dimensional simulation of the single-sided air-coupled ultrasonic pitch-catch technique for non-destructive testing / S. Delrue, K.V.D. Abeele, E. Blomme, J. Deveugele, P. Lust, O.B. Matar // Ultrasonics. — 2010. — Vol. 50. — P. 188–196.
95. Eremin, A.A. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry / A.A. Eremin, E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, R. Lammering // Composite Structures. — 2015. — Vol. 125. — P. 449–458.
96. Fan, Z. The effects of air gap reflections during air-coupled leaky Lamb wave inspection of thin plates / Z. Fan, W. Jiang, M. Cai, W.M.D. Wright // Ultrasonics. — 2016. — Vol. 65. — P. 282–295.
97. Fay, R.D. Transmission of Sound through Steel Plates Immersed in Water / R.D. Fay, O.V. Fortier // J. Acoust. Soc. Am. — 1951. — Vol. 23, no. 3. — P. 339–346.
98. Folds, D.L. Transmission and reflection of ultrasonic waves in layered media / D.L. Folds, C.D. Loggins // J. Acoust. Soc. Am. — 1977. — Vol. 62. — P. 1102–1109.
99. Fomenko, S.I. Leaky and guided wave asymptotics in acoustics of fluid with

- an immersed elastic plate / S.I. Fomenko, O.A. Miakisheva // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (June 4–8, 2018, St. Petersburg). — 2018. — P. 209–213.
100. Freedman, A. Anomalies of the A0 leaky Lamb mode of a fluid-loaded, elastic plate / A. Freedman // Journal of Sound and Vibration. — 1995. — Vol. 183., no. 4. — P. 608–626.
101. Giurgiutiu, V. Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring / V. Giurgiutiu // J. Intell. Mater. Syst. Struct. — 2005. — Vol. 16. — P. 291–305.
102. Giurgiutiu, V. Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors / V. Giurgiutiu. — Oxford. UK: Elsevier Academic Press, 2014. — P. 1024.
103. Glushkov, E. An analytically based computer model for surface measurements in ultrasonic crack detection / E. Glushkov, N. Glushkova, A. Ekhlakov, E. Shapar // Wave Motion. — 2006. — Vol. 43 no. 6 — P. 458–473.
104. Glushkov, E.V. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin // J. Acoust. Soc. Am. — 2011. — Vol. 129 no. 5 — P. 2923–2934.
105. Glushkov, E.V. Ultrasonic Inspection of Anisotropic Laminate Plates Immersed in Acoustic Medium / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, O.A. Miakisheva // Book of Abstracts. 2018 International Conference on “Physics and Mechanics of New Materials and Their

Applications” (PHENMA 2018) (August 9 – 11th, 2018, Busan, Republic of Korea). — 2018. — P. 139.

106. Glushkov, E.V. Efficient mathematical representations for computing the forced wave dynamics of anisotropic laminated composites / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin // CEAS Aeronautical Journal — 2013. — Vol. 4 no. 1 — P. 11–19.
107. Glushkov, E.V. Group velocity of cylindrical guided waves in anisotropic laminate composites / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, R. Lammering // J. Acoust. Soc. Am. — 2014. — Vol. 35 no. 1 — P. 148–154.
108. Glushkov, E.V. Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, R. Lammering, M. Neumann // Smart Mater. Struct. 2011. — Vol. 20 no. 1 — 015020.
109. Glushkov, E.V. Wave energy transfer in elastic half-spaces with soft interlayers / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, S.I. Fomenko // J. Acoust. Soc. Am. — 2015. — Vol. 137, no. 4. — P. 1803–1812.
110. Glushkov, E.V. Advanced characterization of laminate fiber-reinforced composite materials with elastic guided waves and non-contact measurement techniques / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, R. Lammering, A.A. Eremin, O.A. Miakisheva // Advanced Materials, Techniques, Physics, Mechanics and Applications. Springer Proceedings in Physics. — 2017. — Vol. 193. — P. 285–292.
111. Glushkov, E.V. Backward waves and energy fluxes excited in acoustic

medium with an immersed plate / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, O.A. Miakisheva // Ultrasonics. — 2019. — Vol. 94. — P. 158–168.

112. Glushkov, E.V. Guided wave generation and source energy partition in acoustic fluid with an immersed elastic plate / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, O.A. Miakisheva // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (June 27 – July 1, 2016, St. Petersburg). — 2016. — P. 166-170.
113. Glushkov, E.V. Wave Generation and Source Energy Distribution in Acoustic Fluid with an Immersed Plate / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, O.A. Miakisheva // Book of Abstracts. 13th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics. (30 July - 03 August, 2017, Vienna, Austria). — 2017. — P. 262.
114. Glushkov, E.V. Resonance transmission and backward leaky waves in the coupled system: ultrasound transducer – acoustic fluid – immersed plate / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, O.A. Miakisheva // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (June 19 – 23, 2017, St. Petersburg). — 2017. — P. 134–140.
115. Glushkov, E.V. The interaction of sound and ultrasound waves with multilayered elastic plates immersed in acoustic fluid / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, O.A. Miakisheva // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (May 25-29, 2015, St. Petersburg). — 2015. — P. 74-78.
116. Glushkov, E.V. Analytically based study of ultrasonic sounding of an immersed plate: source energy partition, backward leaky waves and

- resonance phenomena / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, O.A. Miakisheva
// Abstract book. International Congress on Ultrasonics (September 03-06,
2019, Brugge, Belgium). — 2019. — P. 530.
117. Grandia, W.A. NDE applications of air-coupled ultrasonic transducers
/ W.A. Grandia // Ultrasonic Symposium: Proceedings. Seattle, WA. —
1995. — Vol. 1. — P. 697–709.
118. Habib, A. Mechanical characterization of sintered piezo-electric ceramic
material using scanning acoustic microscope / A. Habib, A. Shelke,
M. Vogel, U. Pietsch, Xin Jiang, T. Kundu // Ultrasonics. — 2012. — Vol.
52. — P. 989–995.
119. Haskell, N.A. The dispersion of surface waves in multilayered media /
N.A. Haskell // Bull. Seismol. Soc. Am. — 1953. — Vol. 43, no. 1. — P. 17–34.
120. Hosten, B. Finite element simulation of the generation and detection by air-
coupled transducers of guided waves in viscoelastic and anisotropic materials
/ B. Hosten, Ch. Biateau // J. Acoust. Soc. Am. — 2008. — Vol. 123, no.
4. — P. 1963–1971.
121. Huber, A. Non-destructive testing of future rocket boosters using air-coupled
ultrasound / A. Huber // Proceeding of the 19th World Conference on Non-
Destructive Testing (Germany, Munich, June 13th– June 17th, 2016). —
2016. — 9 p.
122. Inoue, D. Transient analysis of leaky Lamb waves with a semi-analytical
finite element method /D. Inoue, T. Hayashi // Ultrasonics. — 2015. — Vol.
62. — P. 80–88.

123. Junger, M.C. Sound structures and their interaction / M.C. Junger, D. Feit. — Boston, MA: MIT Press, 1986. — 462 p.
124. Ke, W. 3D Finite Element simulations of an air-coupled ultrasonic NDT system / W. Ke, M. Castaings, C. Bacon // NDT and E International. — 2009. — Vol. 42, no. 6. — P. 524–533.
125. Lammering, R. Lamb-wave based Structural Health Monitoring in polymer composites / R. Lammering, U. Gabbert, M. Sinapius, Th. Schuster, P. Wierach—Springer, 2018. — 479 p.
126. Lasn, K. Experimental determination of elastic constants of an orthotropic composite plate by using Lamb waves / K. Lasn, A. Klauson, F. Chati, D. Dcultot // Mechanics of Composite Materials. — 2011. — Vol. 47.— P. 435–446.
127. Levi, F. Zur Theorie des Durchgangs von Ultraschallwellen durch eine feste Platte / F. Levi, N. Nath // Helv. Phys. Acta. — 1938. — Vol. 11.— P. 408–431.
128. Lord Rayleigh. The theory of sound / Lord Rayleigh. 1896. — Vol. II.— 86 p.
129. Miakisheva, O.A. Ultrasonic Inspection of Wave Energy Evaluation for Ultrasonic Air-Coupled Material Characterization / O.A. Miakisheva, E.V. Glushkov, N.V. Glushkova // Advanced Materials, Techniques, Physics, Mechanics and Applications. Springer Proceedings in Physics. — 2018. — Vol. 207. — P. 389–402.
130. Nedospasov, I.A. Unusual energy properties of leaky backward Lamb waves

- in a submerged plate / I.A. Nedospasov, V.G. Mozhaev, I.E. Kuznetsova // Ultrasonics. — 2017. — Vol. 135. — P. 95–99.
131. Osborne, M.F.M. Transmission, Reflection, and Guiding of an Exponential Pulse by a Steel Plate in Water. I. Theory / M.F.M. Osborne, S.D. Hart // J. Acoust. Soc. Am. — 1945. — Vol. 17, no. 1. — P. 1–18.
132. Osborne, M.F.M. Transmission, Reflection, and Guiding of an Exponential Pulse by a Steel Plate in Water. II. Experiment / M.F.M. Osborne, S.D. Hart // J. Acoust. Soc. Am. — 1946. — Vol. 18, no. 1. — P. 170–184.
133. Plona, T.J. Ultrasonic bounded beam reflection and transmission effects at a liquidsolid-plate-liquid interface / T.J. Plona, L.E. Pitts, W.G Mayer // J. Acoust. Soc. Am. — 1976. — Vol. 59, no. 6. — P. 1324–1328.
134. Pohl, J. Laser-vibrometric analysis of propagation and interaction of lamb waves in CFRP-plates / J. Pohl, G. Mook // CEAS Aeronautical Journal. — 2013. — Vol. 4, no. 1. — P. 77–85.
135. Popov, M.M. Ray theory and Gaussian Beams for Geophysicists / M.M. Popov. Salvador-Bahia: EDUFBA — 2002.
136. Prada, C. Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity Lamb modes / C. Prada, D. Clorennec, D. Royer // J. Acoust. Soc. Am. — 2008. — Vol. 124, no. 1. — P. 203–212.
137. Prada, C. Influence of the anisotropy on zero-group velocity Lamb modes / C. Prada, D. Clorennec, T.W. Murray, D. Royer // J. Acoust. Soc. Am. — 2009. — Vol. 126, no. 2. — P. 620–625.

138. Raghavan, A. Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring / A. Raghavan, C.E.S. Cesnik // *Smart Mater. Struct.* — 2005. — Vol. 14. — P. 91–114.
139. Raghavan, A. Review of guided wave structural health monitoring / A. Raghavan, C.E.S. Cesnik // *Shock Vibrat. Digest.* — 2007. — Vol. 39, no. 2. — P. 1448–1461.
140. Reissner, H. Der senkrechte und schräge Durchtritt einer in einem flüssigen Medium erzeugten ebenen Dilatations (Longitudinal) Welle durch eine in diesem Medium befindliche planparallele feste Platte / H. Reissner // *Helv. phys. Acta.* — 1938. — Vol. 11. — P. 140.
141. Rokhlin, S.I. On the topology of the complex wave spectrum in a fluid-coupled elastic layer / S.I. Rokhlin, D.E. Chimenti, A.H. Nayfeh // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1989. — Vol. 85, no. 3. — P. 1074–1080.
142. Rose, J.L. A Baseline and Vision of Ultrasonic Guided Wave Inspection Potential / J.L. Rose // *Journal of Pressure Vessel Technology.* — 2002. — Vol. 124. — P. 273–282.
143. Safaeinili, A. Quantitative materials characterization using air-coupled leaky Lamb waves / A. Safaeinili O.I. Lobkis D.E. Chimenti // *Ultrasonics.* — 1996. — Vol. 34. — P. 393–396.
144. Sale, M. Guided waves based approach for the reconstruction of the elastic moduli of plates / M. Sale, P. Rizzo, A. Marzani // *IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS).* — 2009. — P. 1499–1502.

145. Sanders, F.H. Transmission of sound through thin plates / F.H. Sanders // Canadian Journal of Research. — 1939. — Vol. 17a, no. 9. — P. 179–193.
146. Schoch, A. Der Schalldurchgang durch Platten / A. Schoch // Acustica. — 1952. — Vol. 2. — P. 1–17.
147. Schölte, J.G. The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves / J.G. Schölte // Geophys. J. Intern — 1947. — Vol. 5. — P. 120–126.
148. Schoenberg, M. Plane wave propagation in stratified anisotropic media / M. Schoenberg // J. Acoust. Soc. Am. — 1974. — Vol. 55, no. 5. — P. 922–925.
149. Sessarego, J.-P. Two Scholte-Stoneley waves on doubly fluid-loaded plates and shells / J.-P. Sessarego, J. Sagéoli, C. Gazanhes, H. Überall // J. Acoust. Soc. Am. — 1997. — Vol. 101, no. 1. — P. 135–142.
150. Shen, C. A 3-D elasticity theory based model for acoustic radiation from multilayered anisotropic plates / C. Shen, F. X. Xin, T. J. Lu // J. Acoust. Soc. Am. — 2014. — Vol. 135, no. 5. — P. EL232-8.
151. Shuvalov, A.L. Analysis of the dispersion spectrum of fluid-loaded anisotropic plates: flexural-type branches and real-valued loops / A.L. Shuvalov, O. Poncelet, M. Deschamps // Journal of Sound and Vibration. — 2006. — Vol. 290. — P. 1175–1201.
152. Shuvalov, A.L. Analysis of the dispersion spectrum of fluid-loaded anisotropic plates: leaky-wave branches / A.L. Shuvalov, O. Poncelet, M. Deschamps // Journal of Sound and Vibration. — 2006. — Vol. 296. — P. 494–517.

153. Smyth, J.B. Supersonic Transmission at Oblique Incidence Through a Solid Plate in Water / J.B. Smyth, R.B. Lindsay // J. Acoust. Soc. Am. — 1944. — Vol. 16, no. 20. — P. 20–25.
154. Thomson, W.T. Transmission of elastic waves through a stratified solid material / W.T. Thomson // J. Appl. Phys. — 1950. — Vol. 21, no. 2. — P. 89-93.
155. Veksler, N.D. Resonance acoustic spectroscopy. — Berlin: Springer-Verlag, 1993. — 282 p.
156. Vishnuvardhan, J. Genetic algorithm based reconstruction of the elastic moduli of orthotropic plates using an ultrasonic guided wave single-transmitter-multiple-receiver SHM array / J. Vishnuvardhan, C.V. Krishnamurthy, K. Balasubramaniam // J. Smart Mater. Struct. — 2007. — Vol. 16 — P. 1639–1650.
157. Waterhouse, R.V. A criterion for an energy vortex in a sound field / R.V. Waterhouse, D.G. Crighton, J.E. Ffowcs-Williams // J. Acoust. Soc. Am. — 1987. — Vol. 81, no. 5. — P. 1323–1326.
158. Zhao, J. Reconstruction of the nine stiffness coefficients of composites using a laser generation based imaging method / J. Zhao, J. Qiu, H. Ji // Composites Science and Technology. — 2016. — Vol. 126 — P. 27–34.
159. Свидетельство о государственной регистрации № 2016615608 от 26 мая 2016. Программный комплекс для расчета мощности точечного источника в акустической среде с упругим слоем “Acoust EL” / Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Мякишева О.А.— № 2016612878; заявл. 01.04.2016. — 1 с.

160. Свидетельство о государственной регистрации № 2016616606 от 15 июня 2016. Программный комплекс для расчета мощности точечного источника в трехслойном акустическом пространстве “Acoust3” / Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Мякишева О.А. – № 2016613922; заявл. 20.04.2016.
– 1 с.