Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

О.В. ЗАСЯДКО, О.В. МОРОЗ

ПРОФЕССИОАНЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Краснодар
2020

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143.81 я 73
З 369

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор
Р.З. Камалян
Кандидат физико-математических наук, доцент
А.В. Братчиков

Засядко, О.В., Мороз, О.В.
З 369 Профессиональная направленность математической подготовки студентов экономических специальностей: учеб.-метод. пособие / О.В. Засядко, О.В. Мороз. Краснодар: КубГУ, 2020. 127 с.: ил. 200 экз.

Предлагаемое пособие представляет собой основу учебно-информационного комплекса курса «Линейная алгебра и элементы линейного программирования». Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач, задачи с экономическим содержанием. Настоящее пособие предназначено для организации мониторинга освоения знаний по курсу математического анализа посредством индивидуальных заданий типовых расчетов.
Адресуется студентам I курса экономических направлений

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143.81 я 73

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель курса «Линейная алгебра» – ознакомить студентов с базовыми понятиями линейной алгебры, аналитической геометрии, методами оптимизации, а также элементами линейного программирования, необходимыми для решения теоретических и практических задач экономики; развития навыков самостоятельной работы с литературой; воспитания абстрактного мышления; умения строго излагать свои мысли, а также для подготовки к изучению специальных курсов, использующих математический аппарат.

Каждая глава пособия, охватывающий ту или иную тему, содержит необходимые понятия и определения, а также разобранные примеры.

Заключительный параграф работы содержит задачи – типовые расчеты (по всем темам курса). Студенты могут использовать задачи этого раздела при подготовке к контрольным и зачетным работам. Каждый типовой расчет рекомендуется выполнять поэтапно, по мере изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

Изучаемые темы курса:

1. *Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.*

1.1. Операции над векторами. Базис. Разложение вектора по базису. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Пространство R^n.

1.2. Предмет аналитической геометрии. Метод координат. Простейшие задачи аналитической геометрии. Преобразование координат на плоскости.

1.3. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении. Уравнение прямой проходящей через две заданные точки. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Прямая и плоскость в пространстве.

1.4. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

1.5. Определители 2-го и 3-го порядков. Понятие определителя n-го порядка. Свойства определителей и способы их вычисления. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки (столбца). Применение определителей к решению систем линейных уравнений (формулы Крамера).

1.6. Матрицы их классификация. Действия над матрицами. Обратная матрица. Применение обратной матрицы к решению систем линейных уравнений. Ранг матрицы. Элементарные преобразования и их применение для нахождения ранга матрицы.

1.7. Определение n-мерного векторного пространства. Примеры. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис. Разложение вектора по базису. Понятие о базисном миноре. Скалярное произведение векторов в пространстве R^n. Длина вектора. Угол между векторами. Ортогональная система векторов. Ортонормированный базис. Собственный вектор и собственные значения матрицы. Линейная модель обмена.

1.8. Линейные уравнения с n неизвестными. Основные понятия. Метод Гаусса. Условия совместимости и определенности систем линейных уравнений.

1.9. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная совокупность решений однородной системы линейных уравнений.

1.10. Балансовая модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

2. Линейное программирование.

2.1. Введение в линейное программирование.

2.2. Симплексный метод решения задач линейного программирования.

2.3. Двойственность в линейном программировании.

1. ВЕКТОРЫ. ПРЯМАЯ. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Векторы

Определение. **Вектором** называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. **Длиной (модулем) вектора** называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора вычисляется по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.1)$$

►*Пример 1.1.* Даны точки $A(3;-1;2)$ и $B(-1;2;1)$. Найти длину вектора AB.

Решение.

По формуле 1.1 найдем искомую длину вектора AB

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}.$$

Ответ: $\sqrt{26}$ ◄[1]

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, $b \neq 0$, является пропорциональность их соответствующих координат: $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $a_3=\lambda b_3$.

►*Пример 1.2.* Проверить коллинеарность векторов $\overline{a} = \{2;-1;3\}$ и $\overline{b} = \{-6;3;-9\}$.

Решение.

Для того чтобы векторы были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны. Проверим пропорциональность координат данных векторов: $\frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9}$ – верно. Следовательно, они коллинеарны. ◄

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные модули.

Определение. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

*Определение***.** **Суммой** векторов a и b называется такой третий вектор c, что при совмещенных началах этих трех векторов,

[1] Начало и конец решения примеров соответственно обозначим знаками ►, ◄.

векторы a и b служат сторонами параллелограмма, а вектор c – его диагональю (рис. 1.1).

Сложение векторов в соответствии с рис. 1.1 называется **сложением по правилу параллелограмма.** Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над координатами. Координаты суммы векторов $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ равны суммам соответствующих координат: $a + b = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$.

Однако бывает более удобным использовать для сложения **правило треугольника**, которое становится ясным из рис. 1.2. Из того же рисунка видно, что результаты сложения по правилу параллелограмма и по правилу треугольника одинаковы.

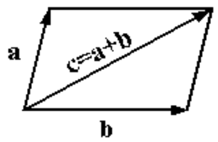


Рис.1.1. Сложение векторов

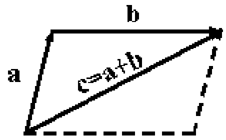


Рис.1.2. Правило треугольника

Определение. **Разностью** векторов a и b называется сумма $a+(-b)$.

Определение. **Произведением** вектора a на *вещественное число* λ называется вектор b, определяемый условием $|b| = |\lambda| \cdot |a|$. Координаты произведения вектора a на число λ равны произведениям координат а на λ: $\lambda a = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$.

►*Пример 1.3.* Вычислить: $a-2b+c$, если $a\,(5;1)$, $b\,(1;2)$, $c\,(-2;3)$.

Решение.

$a-2b+c = (5;\ 1) - (2;\ 4) + (-2;\ 3) = (1;\ 0)$.◄

Множество всех векторов пространства с введенными в нем операциями сложения и умножения на число образует **векторное пространство** (линейное пространство). В векторной алгебре важное значение имеет понятие линейной зависимости векторов.

Определение. Векторы $a, b, \ldots, c$ называются **линейно зависимыми** векторами, если существуют числа $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что справедливо равенство: $\alpha a + \beta b + \ldots + \gamma c = 0$. (1.2)

Для линейной зависимости двух векторов необходима и достаточна их коллинеарность, для линейной зависимости трех векторов необходима и достаточна их компланарность. Если один из векторов $a, b, ..., c$ нулевой, то они линейно зависимы.

Определение. Векторы $a, b, ..., c$ называются **линейно независимыми**, если из равенства 1.2 следует, что числа $\alpha, \beta, ..., \gamma$ равны нулю. На плоскости существует не более двух, а в трехмерном пространстве не более трех линейно независимых векторов.

Совокупность трех (двух) линейно независимых векторов e_1, e_2, e_3 трехмерного пространства (плоскости), взятых в определенном порядке, образует **базис.** Любой вектор $\boldsymbol{a}$ единственным образом представляется в виде суммы: $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$.

Два вектора $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе.

Определение. Скалярным произведением (a, b) ненулевых векторов a и b называют произведение их модулей на косинус угла φ между ними

$$(a, b) = |\, a \,|\cdot|\, b \,| \cos\varphi, \qquad (1.3)$$

где φ – угол между векторами, не превосходящий π. Если $a = 0$ или $b = 0$, то скалярное произведение полагают равным нулю.

Для вычисления скалярных произведений векторов часто пользуются декартовыми прямоугольными координатами, т.е. координатами векторов в базисе, состоящем из единичных взаимно перпендикулярных векторов (ортов) i, j, k (ортонормированный базис). Скалярное произведение векторов $a = \{a_1, a_2\ a_3\}$ *и* $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, заданных в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1.4)$$

Косинус угла φ между ненулевыми векторами $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ может быть вычислен по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(a, b)}{|\, a \,||\, b \,|}, \text{ где } |\, a \,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \text{ и } |\, b \,| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}. \qquad (1.5)$$

►*Пример 1.4.* Определить угол между векторами $a = (1; 1; 0)$ и $b = (1; 0; 1)$

Решение.

Применяя формулу 1.5, имеем

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \varphi = 60^0. \blacktriangleleft$$

Определение. Косинусы углов вектора *a* = *{a₁, a₂, a₃}* с векторами базиса *i, j, k* называют направляющими косинусами вектора *a*

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\gamma = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \quad (1.6)$$

Направляющие косинусы обладают следующим свойством:

$$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1. \quad (1.7)$$

►*Пример 1.5.* Вектор составляет с осями координат *Ox* и *Oz* углы $\alpha = 120^0$ и $\gamma = 45^0$. Какой угол он составляет с осью *Oy*?

Решение.

Если даны углы между осями координат и вектором, значит можно найти направляющие косинусы

$\cos\alpha = \cos 120^0 = -\sin 30^0 = -\dfrac{1}{2}$, $\cos\gamma = \cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Применяя формулу 1.7, имеем $(-\dfrac{1}{2})^2 + \cos^2\beta + (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ $\cos\beta = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^0$ или $\beta = 120^0$.◄

Прямая на плоскости

Пусть дан отрезок AB и точка C – внутри этого отрезка. Концы отрезка имеют координаты $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Данная точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$, где AC и CB – длины отрезков. Тогда **координаты точки деления** отрезка находятся по формулам

$$x_C = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ \ \lambda \neq -1. \quad (1.8)$$

В данном случае играет роль, какую точку мы будем считать первой, а какую – второй.

Если точка С – середина отрезка, то **координаты точки середины отрезка** *АВ* можно найти по формулам

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

► *Пример 1.6.* Даны точки А (–2; 1) и В (3; 6). Найти координаты точки М, если известно, что $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$.

Решение.

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-2+\frac{3}{2}3}{1+\frac{3}{2}} = 1; \qquad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{1+\frac{3}{2}6}{1+\frac{3}{2}} = 4.$$ М (1; 4). ◄

Определение. Уравнение **y = kx + b** (1.9) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом.** Число **k** = tgα называется **угловым коэффициентом** прямой.

Уравнение **Ax** + **By** + **C** = **0** (1.10) называется **общим уравнением прямой.**

Определение. Уравнение **y** – **y$_0$ = k (x–x$_0$)** (1.11) называется **уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении,** или **уравнением пучка прямых** с центром в точке М (x_0; y_0). Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Оу.

► *Пример 1.7.* Составить уравнение прямой, проходящей через точку М (2; 1) и образующей с осью Ох угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

Найдем угловой коэффициент прямой k = $tg\frac{\pi}{4} = 1$. Зная коэффициент прямой и точку, через которую она проходит, найдем, используя формулу (1.11), искомое уравнение прямой y = x – 1 – искомое уравнение. ◄

Определение. Уравнение $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (1.12) называют **уравнением прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Предполагается, что в этом уравнении $x_2 \neq x_1$ и $y_2 \neq y_1$.

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки M_1 (x_1; y_1) и M_2 (x_2; y_2), параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, и прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

► *Пример 1.8.* Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку А (-2;3).

Решение.

Воспользуемся формулой (1.12). $\frac{y-0}{3-0} = \frac{x-0}{-2-0}$; $\frac{y}{3} = \frac{x}{-2}$; $-2y=3x$; $y = -\frac{3}{2}x$ – искомое уравнение прямой. ◄

Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}. \qquad (1.13).$$

Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_2 = k_1$.

Условием перпендикулярности прямых является равенство $1 + k_1k_2 = 0$.

► *Пример 1.9.* Даны прямые 1) 4x + 6y + 7 = 0;
2) 3x – 5y + 7 = 0; 3) 10x + 6y – 3 = 0; 4) 20x – 30y – 11 = 0.

Найти параллельные и перпендикулярные прямые среди данных.

Решение.

Для начала приведем уравнения данных прямых к виду уравнений с угловым коэффициентом: 1) $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$; 2) $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$;
3) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$; 4) $y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{30}$. Получили, что коэффициенты первой и четвертой прямой равны, а коэффициент второй прямой обратно пропорционален коэффициенту третьей прямой, взятому с противоположным знаком. Отсюда делаем вывод, что параллельными являются первая и четвертая, а перпендикулярными – вторая и третья прямые. ◄

Кривые второго порядка

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат.

Определение. **Кривой второго порядка** называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второго порядка

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0, \qquad (1.14)$$

где a, b, c, d, f, g – вещественные числа, и хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля.

Определение. **Окружностью** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой **центром** окружности (рис. 1.3). Уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (1.15)$$

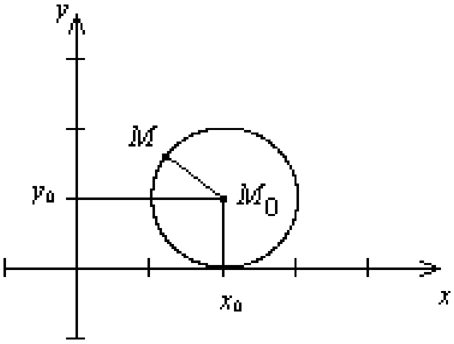


Рис. 1.3. Окружность

► *Пример 1.10.* Изобразить кривую $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$.

Решение.

Выделив полные квадраты, получим $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$. Таким образом, точка $M_0(1;-3)$ является центром данной окружности, а ее радиус равен 2 (рис. 1.4).

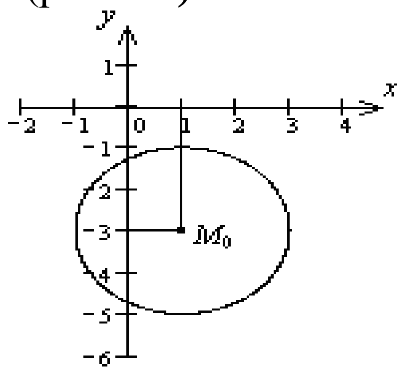


Рис. 1.4. Окружность, заданная уравнением $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$ ◄

Определение. **Эллипсом** называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых **фокусами эллипса**, есть величина постоянная (рис. 1.5). Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1.16)$$

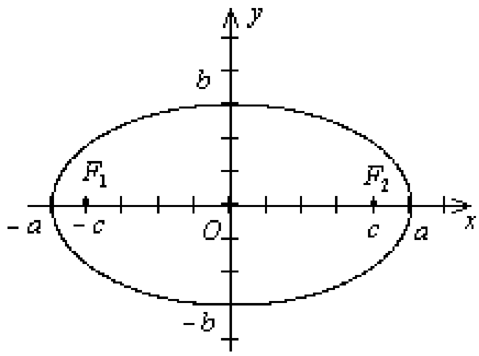


Рис. 1.5. Эллипс

Фокусами в выбранной системе координат являются точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Определение. Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются **вершинами** эллипса, центр симметрии – **центром** эллипса, отрезок между двумя вершинами, содержащий фокусы, называется **большой осью** эллипса, половина его длины – **большой полуосью** эллипса. Отрезок между вершинами на оси симметрии, не содержащей фокусов, называется **малой осью** эллипса, половина его длины – **малой полуосью**. Величина $\varepsilon=\frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** эллипса.

Если эллипс задан каноническими уравнениями, то его вершины имеют координаты $(-a;0)$, $(a;0)$, $(0;-b)$, $(0;b)$, большая полуось равна a, малая полуось равна b. Величина c– половина расстояния между фокусами, определяется из формулы

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad (1.17)$$

► *Пример 1.11.* Построить кривую $4x^2+9y^2=36$. Найти фокусы и эксцентриситет.

Решение.

Разделим обе части уравнения на 36. Получаем уравнение

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$. Это – каноническое уравнение эллипса, $a = 3$, $b = 2$. Делаем чертеж (рис. 1.6)

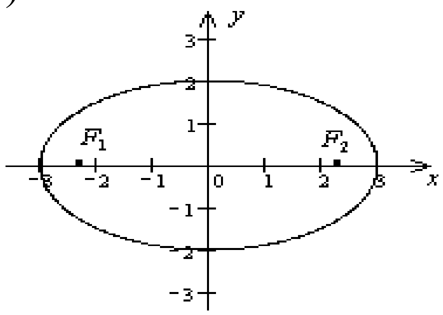


Рис. 1.6. Эллипс, заданный уравнением $4x^2+9x^2=36$

Из соотношения (1.17) находим $c^2=a^2-b^2=9-4=5$, $c=\sqrt{5}$. Фокусы $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$, эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.◄

Определение. **Гиперболой** называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек той же плоскости, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная (рис. 1.7). Уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.18}$$

Величина *b* определяется из формулы

$$b=\sqrt{c^2-a^2} \tag{1.19}$$

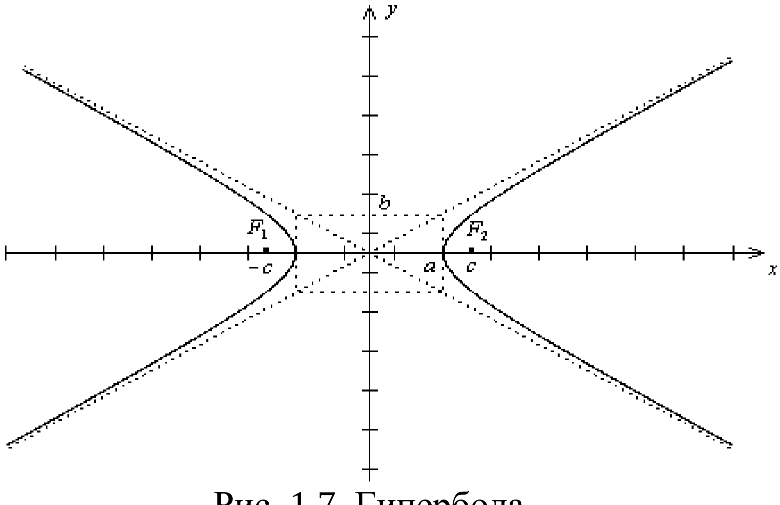


Рис. 1.7. Гипербола

Определение. Точки пересечения гиперболы, заданной каноническим уравнением (1.18), с осью Ox называются **вершинами** гиперболы, отрезок между ними называется **действительной осью** гиперболы. Отрезок оси ординат между точками $(0;-b)$ и $(0;b)$ называется **мнимой осью**. Числа a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы. Начало координат называется ее центром. Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** гиперболы. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются **сопряженными**. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называют асимптотами гиперболы.

► *Пример 1.12.* Построить гиперболу $4x^2 - y^2 = 4$, найти ее фокусы и эксцентриситет.

Решение.

Разделим обе части уравнения на 4. Получаем уравнение $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$, $a = 1$, $b = 2$. Проводим асимптоты $y = \pm 2x$ и строим гиперболу (рис. 1.8).

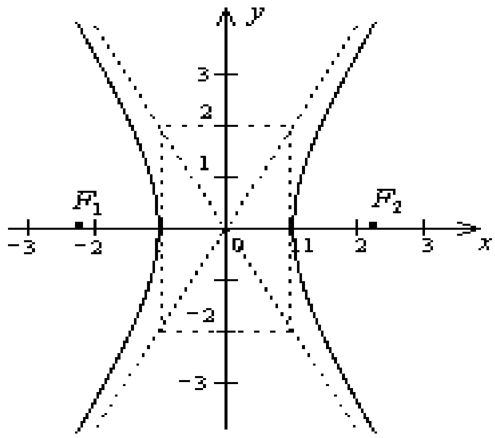


Рис. 1.8. Гипербола $4x^2 - y^2 = 4$

Из формулы (1.19) получим $c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Тогда фокусы $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$, эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$. ◄

Определение. **Параболой** называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки этой плоскости, называемой **фокусом,** равно расстоянию до фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости и называемой **директрисой** параболы. Уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px \qquad (1.20)$$

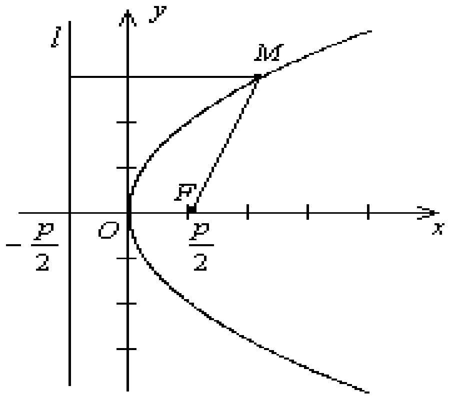


Рис. 1.9. Парабола

Парабола имеет фокус $F(\frac{p}{2};0)$ и директрису $x=-\frac{p}{2}$, фокальный радиус $r=x+\frac{p}{2}$. Парабола $x^2=2py$ симметрична относительно оси Oy.

► *Пример 1.13.* Построить параболу $y^2=3x$. Найти ее фокус и директрису.

Решение.

Уравнение является каноническим уравнением параболы. Значит $2p=3$, $p=1{,}5$. Осью параболы служит ось Ox, вершина находится в начале координат, ветви параболы направлены вдоль оси Ox. Для построения найдем несколько точек параболы. Для этого придаем значения переменной y и находим значения x. Возьмем точки $(\frac{1}{3};1)\ (\frac{4}{3};2), (3;3)$. Учитывая симметрию относительно оси Ox, рисуем кривую (рис. 1.10)

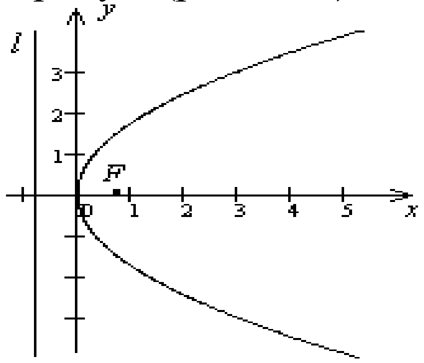


Рис. 1.10. Парабола, заданная уравнением $y^2=3x$

Фокус F лежит на оси Ox на расстоянии $\frac{p}{2}$ от вершины, т. е.

имеет координаты $(0{,}75;0)$. Директриса l имеет уравнение $x=-\frac{p}{2}$, или $x=-0{,}75$. ◄

2. Определители, их свойства

Определение. **Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется **квадратной**. Элементы квадратной матрицы $A(n \times n)$ a_{11}, $a_{22}, \dots$ a_{nn} образуют главную диагональ.

Определение. Любой квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число det A (или |A|, или Δ), называемое ее **определителем** следующим образом:

1) n = 1. $A=(a_1)$; $\det A = a_1$.

2) n = 2. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. (2.1)

3) n = 3. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

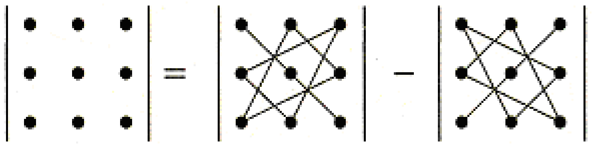
$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2.2)$$

► *Пример 2.1*. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение.

Данной матрице соответствует определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6-5(-3)=27$. ◄

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так:



Основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали	Основания равнобедренных треугольников параллельны побочной диагонали

► *Пример 2.2.* Найти определитель $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$\det A = 5\cdot 1(-3) + (-2)(-4)6 + 3\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1 - 3(-2)(-3) - 0(-4)5 = 9$. ◄

При расчетах удобно использовать следующие **свойства определителей:**

1. Определитель диагональной, а также верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

2. Если в матрице две строки (два столбца) меняются местами, то ее определитель меняет знак.

3. Если к одной из строк матрицы прибавить другую, умноженную на число (отличное от нуля), то определитель не изменится. Такое же утверждение справедливо для столбцов.

4. Если в строке (столбце) матрицы все элементы имеют общий множитель, то его выносят за знак определителя.

5. Если матрица содержит нулевую строку или равные (пропорциональные) строки, то ее определитель равен нулю. Такое же утверждение справедливо для столбцов.

Определитель также можно посчитать при помощи разложения по какой-либо строчке или столбцу. Для этого введем некоторые определения.

Определение. **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный из исходной матрицы путем вычеркивания в ней *i-й* строки *и j-го* столбца.

Определение. **Алгебраическим дополнением** к элементу a_{ij} называется число, вычисляемое по следующей формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\,. \qquad (2.3)$$

С учетом этих обозначений можно посчитать определитель 3-го порядка, разложив его, например, по первой строке

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (2.4)$$

► *Пример 2.3*. Найти минор M_{31} и алгебраическое дополнение A_{23} для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислить определитель при помощи разложения по какой-либо строке или столбцу.

Решение.

Минор M_{31} для данной матрицы – это определитель матрицы,
полученной из исходной путем вычеркивания 3-й строки и 1-го столбца. Поэтому $M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 - (-1)(-1) = -6 - 1 = -7.$

Далее, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$, M_{23} – это определитель матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания 2-й строки и 3-го столбца. Поэтому $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - (-3)3) = -(10 + 9) = -19.$

Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ при помощи разложения, например, по 2-й строке. Имеем

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(-10) - (-3)(-6) + (-1)23 = -61$$

. ◄

3. Операции над матрицами

Определение. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется **диагональной**.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется **единичной.**

Квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется **верхней (нижней) треугольной матрицей**.

► *Пример 3.1*. Приведем примеры матриц:

$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ – верхняя треугольная; $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – диагональная; $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная; $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ – нижняя треугольная. ◄

Определение. Матрицы *A, B* называются **равными** (*A* = *B*), если они имеют одинаковую размерность и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами:

1. Чтобы умножить матрицу $A(m\times n)$ на отличное от нуля вещественное число *k*, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

2. Чтобы найти сумму матриц $A(m\times n)$, $B(m\times n)$ (одной и той же размерности!), необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах)

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

►*Пример 3.2*. Найти $2A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Сначала умножаем матрицу A на число 2, затем матрицу B на число (–1), затем находим сумму полученных матриц

$$2A-B=2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$ ◄

3. Произведение AB можно определить только для матриц размерности $A(m\times n)$, $B(n\times p)$, при этом $AB = C$, матрица C имеет размерность $C(m\times p)$ и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы A на *j-й* столбец матрицы B

$$c_{ij} = A_i B^j \ (i=1,2,...m;\ j=1,2,...p).$$

►*Пример 3.3.* Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Размерность матрицы A – (3×2), матрицы B – (2×2). Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Пусть $C = AB = (c_{ij})$. Используя правила скалярного произведения векторов, получаем

$c_{11}=(-1,1)(1,3)=-1\cdot 1+1\cdot 3=2$; $c_{12}=(-1,1)(-2,4)=-1(-2)+1\cdot 4=6$;

$c_{21}=(0,4)(1,3)=0+4\cdot 3=12$; $c_{22}=(0,4)(-2,4)=0+4\cdot 4=16$;

$c_{31}=(2,1)(1,3)=2\cdot 1+1\cdot 3=5$; $c_{32}=(2,1)(-2,4)=2(-2)+1\cdot 4=0$.

Таким образом, $AB=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. ◄

Определение. **Транспонированной** к матрице $A(m \times n)$ называется матрица $A^T(n \times m)$, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

►*Пример 3.4.* Для матрицы $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ транспонированная матрица имеет вид $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.◄

К элементарным преобразованиям матриц относятся следующие действия:

1) перемена местами двух строк матрицы;

2) вычеркивание нулевой строки матрицы (строки, в которой все элементы равны нулю);

3) умножение всех элементов одной строки матрицы на одно и то же число, отличное от нуля;

4) прибавление к элементам одной строки матрицы соответствующих элементов другой ее строки, умноженных на одно и то же отличное от нуля число.

Так как вычеркивание нулевой строки приводит к изменению размера матрицы, говорить о равенстве матриц при подобных преобразованиях нельзя, поэтому имеет место следующее определение:

Определение. 1. Матрицы А и В называются **эквивалентными**, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

2. Матрица $A(m \times n)$ называется **ступенчатой**, если в каждой ее строке есть элемент, в столбце которого все элементы ниже являются нулями, а в последней строке есть хотя бы один ненулевой элемент.

►*Пример 3.5.* Ступенчатыми являются такие матрицы, как $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и им подобные. ◄

Определение. **Рангом** $r(A)$ матрицы $A(m \times n)$ называют число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы.

Определение. Для квадратной матрицы $A(n\times n)$ **обратной** к ней является матрица A^{-1} того же размера, удовлетворяющая равенствам $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, где E – единичная матрица соответствующего размера.

►*Пример 3.6.* Проверить, что матрица $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ является обратной к матрице $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем сначала произведения этих матриц:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3+5(-1) & 2\cdot 5+5(-2)\\ -1\cdot 3+(-3)(-1) & -1\cdot 5+(-3)(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2+5(-1) & 3\cdot 5+5(-3)\\ -1\cdot 2+(-2)(-1) & -1\cdot 5+(-2)(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Итак, $AB=BA=E$ и $B=A^{-1}$.◄

Квадратная матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю. Обратную матрицу можно найти по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & \dots & A_{n1}\\ \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

►*Пример 3.7.* Найти обратную для матрицы A $\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot 2+4\cdot(-1)\cdot 5+1\cdot 1\cdot 1-5\cdot 2\cdot 1-1\cdot 4\cdot 3-1\cdot 2\cdot(-1)=-27.$$

Находим алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0,\qquad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=18,\qquad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-9,$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3,\qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=1,\qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-6,\qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-11,\qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7.$$

Используя формулу (3.3), получаем $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 18 & -9\\ 3 & 1 & -8\\ -6 & -11 & 7\end{pmatrix}$ ◄

4. Решение линейных систем

Формулы Крамера

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}.$$

Неизвестные x,y и z данной системы можно найти по формулам Крамера

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}, \tag{2.5}$$

где $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ – определитель, составленный из коэффициентов при x, y и z исходной системы уравнений;

$\Delta x=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ – определитель, получаемый из определителя Δ путем замены столбца из коэффициентов при x на столбец свободных членов;

$\Delta y=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}$ – определитель, получаемый из определителя Δ путем замены столбца из коэффициентов при y на столбец свободных членов;

$\Delta z=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$ – определитель, получаемый из определителя Δ путем замены столбца из коэффициентов при z на столбец свободных членов.

Причем:

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

2. Если $\Delta = 0$, то система либо не имеет решений, либо их бесчисленное множество, т.е.:

1) если при $\Delta = 0$, и $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений (так как одно уравнение является следствием другого);

2) если при $\Delta = 0$ хотя бы один из определителей $\Delta x, \Delta y$ или Δz отличны от 0, то система не имеет решений.

► *Пример 2.4.* Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60.$$

По формулам Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{180}{60} = 3$; $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{60}{60} = 1$; $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{60}{60} = 1$. Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, следовательно решение найдено верно. ◄

Метод Гаусса. Метод Жордана – Гаусса

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (4.1)$$

Определение. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (4.1), называется **матрицей системы,** вектор $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ – **вектором свободных членов**, а вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – **вектором неизвестны**х. Таким образом в матричном виде система (4.1) записывается так: $AX = B$.

Определение. Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, она называется **совместной** (соответственно, система **несовместная**, если она вообще не имеет решений). Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (4.1) будем называть **приведенной**, если в каждой строке есть ненулевой элемент такой, что все остальные элементы этого столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть **ведущими (базисными),** а оставшиеся неизвестные назовем **свободными.**

Цель алгоритма решения системы (4.1) методом Гаусса – путем элементарных преобразований свести исходную систему к ступенчатому виду, т. е. равносильной системе, решение которой можно выписать непосредственно. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда в эквивалентной ей системе ступенчатого вида нет уравнений вида $0 = c$, где $c \neq 0$. Если это выполнено, то при заданных значениях свободных неизвестных главные неизвестные определяются однозначно.

►*Пример 4.1.* Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}.$$

Решение.

Составим расширенную матрицу системы и при помощи элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$

откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$. ◄

►*Пример 4.2.* Решить методом Жордана – Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1. \\ x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение.

Для решения системы линейных уравнений методом Жордана – Гаусса записываем исходную систему уравнений в виде таблицы, где элементы $\tilde{a}_i$ получаются путем суммирования элементов текущей строки

№ итерации	x_1	x_2	x_3	a_{i0}	$\tilde{a}_i$
	2	–1	1	3	5
	$\boxed{1}$	3	–2	1	3
	0	1	2	8	11

I	0	–7	5	1	–1
	1	3	-2	1	3
	0	$\boxed{1}$	2	8	11
II	0	0	$\boxed{19}$	57	76
	1	0	-8	-23	-30
	0	1	2	8	11
III	0	0	1	3	4
	1	0	0	1	2
	0	1	0	2	3

Каждая последующая итерация метода начинается с выбора разрешающего элемента в предыдущей части таблицы. Для упрощения вычислений удобно в качестве разрешающего выбирать элемент, равный 1. Если же такой выбор окажется невозможным, то для уменьшения погрешностей при округлениях лучше в качестве разрешающего принимать элемент, наибольший по абсолютной величине. I итерацию начинаем с выбора элемента $a_{21}=1$, который выделяем рамкой. Далее рассчитываем элементы разрешающей второй строки по формуле $a'_{qk} = \dfrac{a_{qk}}{a_{qp}}$, где $к$ = 0,1,2, …, т.е. путем деления их всех на разрешающий элемент. Поскольку в данном примере $a_{qp} = a_{21} = 1$, все элементы разрешающей строки переписываются без изменения. Наконец, вычисляются элементы остальных строк по формуле $a'_{ik} = a_{ik} - \dfrac{a_{qk}a_{ip}}{a_{qp}}$, где

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1,2, \ldots, \\ k = 0,1,2, \ldots, \end{array} \right\}.$$

Так, например $a'_{12} = -1 - \dfrac{3 \cdot 2}{1} = -7$; $a'_{13} = 1 - \dfrac{2(-2)}{1} = 5$; $a'_{10} = 3 - \dfrac{1 \cdot 2}{1} = 1$; $\tilde{a}'_1 = 5 - \dfrac{3 \cdot 2}{1} = -1$ и т.д.

Расчет по последней формуле практически удобно производить, пользуясь мнемоническим «правилом прямоугольника», наглядно показанным на рис. 4.1

	$к$-й столбец		p-й столбец	
i-я строка	a_{ik}		a_{ip}	
q-я строка	a_{qk}		$\boxed{a_{qp}}$	

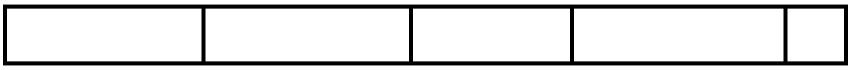


Рис. 4.1. Правило прямоугольника

При этом сначала отмечаются единичные столбцы (в том числе и «новый» единичный столбец на месте разрешающего), а затем вычисляются элементы по строкам. После определения последнего контрольного элемента строки производится сравнение его с суммой всех предшествующих элементов. Так, например для 1-й строки получаем –7+5+1= –1 и $\tilde{a}_1' = -1$, следовательно расчет произведен правильно и можно перейти к вычислениям элементов следующей строки.

На II итерации разрешающим выбран элемент $a_{32}' = 1$ и на III итерации – элемент $a_{32}'' = 19$. После III итерации все три строки стали разрешающими. Система оказалась определенной, имеющей решение $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Теорема 4.1 **(Кронекера – Капелли)**. Система линейных уравнений (4.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е. выполняется равенство $r(A) = r(A|B)$. (4.2)

Для совместной системы число $r = r(A) = r(A|B)$ назовем **рангом системы**.

Теорема 4.2 (о количестве решений). Пусть система линейных уравнений (4.1) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r = n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется **общим решением системы**.

►*Пример 4.2.* Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместимость и найти решение, если она совместна, методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}.$$

Решение.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 = C_3 - 2C_1]{C_2 = C_2 + 4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{C_3 = C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 = C_3 / 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Преобразуем расширенную матрицу системы

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 – во второй и x_1 – в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B)=r(A)=3=r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2-11C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \xrightarrow[C_2=-C_2/6]{C_1=C_1-C_2/6} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2=-1 \\ x_3=1 \\ x_1=3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров

X= (3; 1; 1). ◄

►*Пример 4.3.* Для системы линейных алгебраических уравнений найти общее и два частных решения

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 10x_1+12x_2+3x_3+10x_4=16 \end{cases}.$$

Решение.

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3=C_3-3C_1]{C_2=C_2-2C_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A|B)=r(A)=3=r$, число неизвестных *n=4* и в соответствии с теоремой 4.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 – в первой строке, x_1 – во второй, x_4 – в третьей. Свободная неизвестная – x_2. Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_2]{C_2=C_2-4C_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1=C_1-3C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -8 - 4x_2 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_o = (3;\ \ x_2;\ \ -8-4x_2;\ \ 1)$, x_2 – произвольное вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2 = 0$ имеем $X_{ch} = (3;0;-8;1)$, а при $x_2 = -1$, $X_{ch} = (3;-1;-4;1)$.◄

5. Применение матриц и систем линейных уравнений в экономике. Элементы линейного программирования

Общая форма задачи линейного программирования

Найти оптимальное значение целевой функции $L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \le (\ge, =) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \le (\ge, =) b_2, \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \le (\ge, =) b_m, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 & (k \le n). \end{cases} \tag{5.1}$$

Допустимое решение – это совокупность чисел (план) $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (5.1).

Оптимальное решение – это план, при котором целевая функция принимает свое максимальное (минимальное) значение.

Для решения задач линейного программирования (ЗЛП) с двумя переменными используется графический метод

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min);$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le (\ge) b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le (\ge) b_2 \\
\dots \quad \dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le (\ge) b_m \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

Он основан на геометрическом представлении допустимых решений и целевой функции задачи.

Каждое из неравенств ЗЛП (5.2) определяет на координатной плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость (рис. 5.1), а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется **областью допустимых решений**. Область допустимых решений всегда представляет собой выпуклую фигуру. Графически она может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучом, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи (5.2) область допустимых решений является пустым множеством.

Замечание. Любое равенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$ входящее в систему ограничений задачи (5.2), можно представить в виде системы двух неравенств

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1.
\end{cases}
$$

Целевая функция $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ при фиксированном значении $Z(X) = L$ определяет на плоскости прямую линию $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Изменяя значения L, мы получим семейство параллельных прямых, называемых **линиями уровня**.

Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ с координатами из коэффициентов целевой функции при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня (см. рис. 5.1). Направление вектора $\bar{c}$ совпадает с направлением возрастания целевой функции. Направление убывания целевой функции противоположно направлению вектора $\bar{c}$.

По направлению (против направления) вектора $\bar{c}$ в области допустимых решений производится поиск оптимальной точки $X^* = (x_1^*, x_2^*)$. Оптимальной считается точка, через которую проходит линия уровня $L_{\max}(L_{\min})$, соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции $Z(X)$. Оптимальное решение всегда находится на границе области допустимых решений, например в последней вершине многоугольника области допустимых решений, через которую пройдет целевая прямая, или на всей его стороне.

При поиске оптимального решения задач ЛП возможны следующие ситуации: существует единственное решение задачи; существует бесконечное множество решений (альтернативный оптимум); целевая функция не ограничена; область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

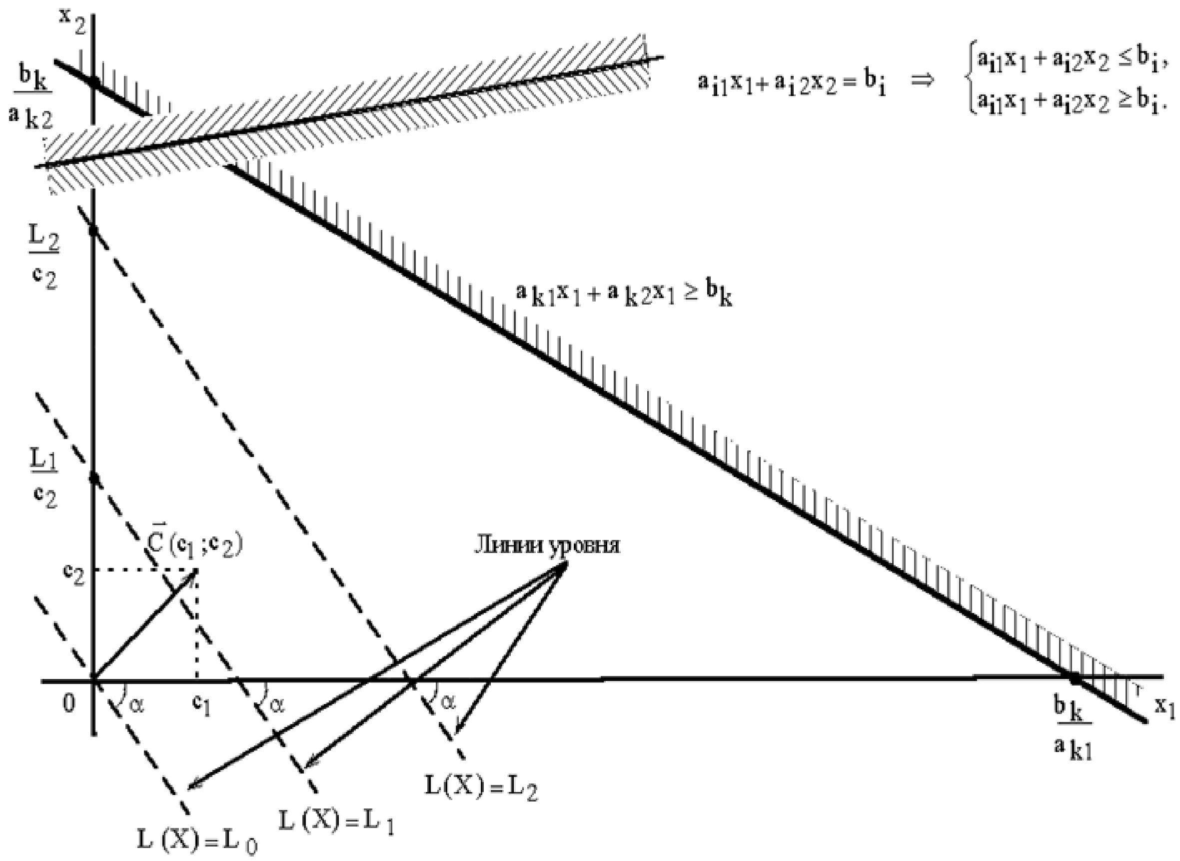


Рис. 5.1. Графическая интерпретация задачи линейного программирования

Алгоритм графического метода решения ЗЛП

1. В ограничениях задачи (5.2) замените знаки неравенств на знаки точных равенств и постройте соответствующие прямые.

2. Найдите и заштрихуйте полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений – неравенств задачи (5.2). Для этого подставьте в конкретное неравенство координаты какой-либо точки [например, (0; 0)], и проверьте истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинное, то надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку; иначе (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси x_1 и правее оси x_2, т.е. в I квадранте.

Ограничения – равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой, поэтому выделите на графике такие прямые.

3. Определите область допустимых решений как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделите ее.

4. Если область допустимых решений – не пустое множество, то постройте целевую прямую, т.е. любую из линий уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, где L – произвольное число, например кратное c_1 и c_2, т.е. удобное для проведения расчетов.

5. Постройте вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$. Если целевая прямая и вектор $\bar{c}$ построены верно, то они будут перпендикулярны.

6. При поиске максимума целевой функции передвигайте целевую прямую в направлении вектора $\bar{c}$, при поиске минимума целевой функции – против направления вектора $\bar{c}$. Последняя по ходу движения вершина области допустимых решений будет точкой минимума или максимума целевой функции. Если такой точки (точек) не существует, то сделайте вывод о неограниченности целевой функции на множестве планов сверху (при поиске максимума) или снизу (при поиске минимума).

7. Определите координаты точки минимума или максимума целевой функции $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ и вычислите значение целевой функции $Z(X^*)$. Для вычисления координат оптимальной точки

X^* решите систему уравнений прямых, на пересечении которых находится X^*.

►*Пример 5.1.* Найти оптимальное решение ЗЛП

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

Построим для каждого неравенства соответствующие прямые ограничения (рис. 5.2).

Определим область допустимых решений. Например, подставим точку (0; 0) в исходное ограничение (3), получим $0 \le 1$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, содержащую точку (0; 0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3).

Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис. 5.2). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, является многоугольник ABCDEF.

Целевую прямую можно построить по уравнению $3x_1 + 2x_2 = 0$.

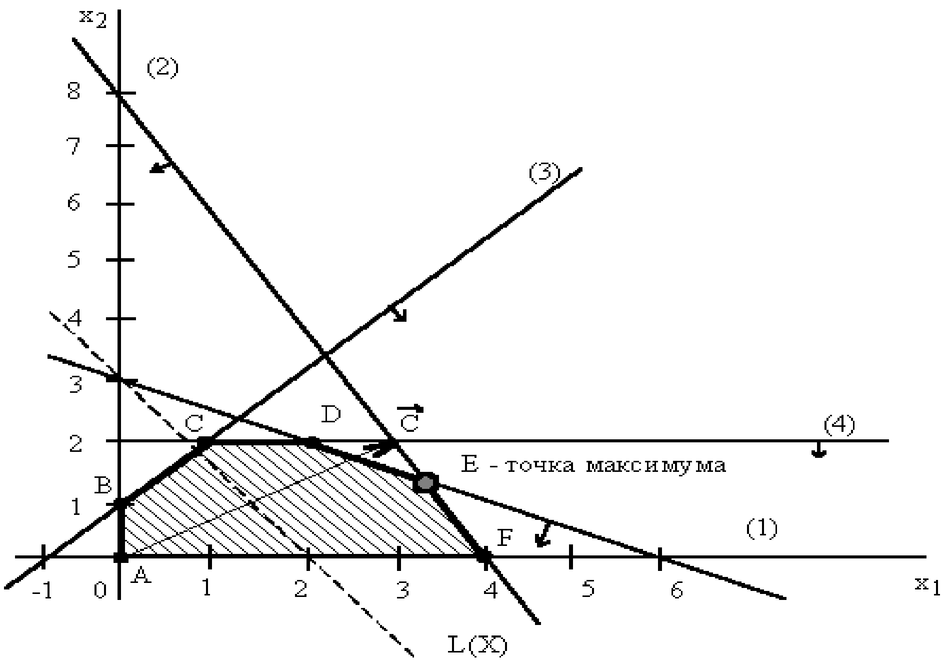


Рис. 5.2. Графическое решение примера 5.1

Строим вектор $\bar{c}(3;\ 2)$. Точка E – это последняя вершина многоугольника допустимых решений ABCDEF, через которую проходит целевая прямая, двигаясь по направлению вектора $\bar{c}$. Поэтому E – это точка максимума целевой функции. Определим координаты точки E из системы уравнений прямых ограничений (1) и (2).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3\frac{1}{3}, \\ x_2 = 1\frac{1}{3}. \end{cases} \qquad E(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}).$$

Максимальное значение целевой функции равно $Z(E) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$. ◄

►*Пример 5.2.* Найти оптимальное решение ЗЛП $Z(X) = -2x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16, & (1) \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, & (2) \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Построим ограничения (рис. 5.3). Целевую прямую построим по уравнению $-2x_1 - x_2 = 0$.

Определим область допустимых решений. Ограничение-равенство (4) допускает только точки, лежащие на прямой (4).

Рис. 5.3. Графическое решение примера 5.2

Подставим точку (0; 0) в ограничение (3), получим $0 \ge 9$, что является ложным неравенством, поэтому стрелкой обозначим полуплоскость, не содержащую точку (0; 0), т.е. расположенную выше прямой (3). Аналогично определим и укажем допустимые полуплоскости для остальных ограничений (см. рис. 5.3). Анализ полуплоскостей, допустимых остальными ограничениями-неравенствами, позволяет определить, что область допустимых решений – это отрезок AB.

Строим вектор $\bar{c}(-2;\ -1)$. Для поиска минимума целевой функции двигаем целевую прямую против направления вектора $\bar{c}$. Точка B – это последняя точка отрезка AB, через которую проходит целевая прямая, т.е. B – точка минимума целевой функции.

Определим координаты точки B из системы уравнений прямых ограничений (3) и (4).

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \approx 3{,}46 \\ x_2 \approx 1{,}85 \end{cases}.$$

Минимальное значение целевой функции равно $Z(3{,}46; 1{,}85) = -2 \cdot 3{,}46 - 1 \cdot 1{,}85 \ = \ -8{,}77$.

При поиске точки максимума целевой функции будем двигать целевую прямую по направлению вектора $\bar{c}$. Последней точкой отрезка AB, а значит и точкой максимума, будет A. Определим координаты точки A из системы уравнений прямых ограничений (1) и (4)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 16, & (1) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \approx 2{,}6 \\ x_2 \approx 2{,}57 \end{cases}.$$

Максимальное значение целевой функции равно $Z(2{,}6;\ 2{,}57) = -2 \cdot 2{,}86 - 1 \cdot 2{,}57 \ = -8{,}29$. ◄

Симплекс-метод

Симплекс-метод представляет собой итеративную процедуру решения задач ЛП (5.1), записанных в стандартной форме, система уравнений в которой с помощью элементарных операций над матрицами приведена к каноническому виду

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2, \\
\qquad \ldots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m, \\
\quad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 & (k \leq n).
\end{cases} \tag{5.3}
$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$, входящие с единичными коэффициентами только в одно уравнение системы и с нулевыми - в остальные, называются **базисными.** В канонической системе каждому уравнению соответствует ровно одна базисная переменная. Остальные $n-m$ переменных $(x_{m+1}, \cdots, x_n)$ называются свободными переменными.

Любой вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, удовлетворяющий всем ограничениям (5.3), называется **допустимым решением.** Допустимое решение $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ называется **опорным решением** задачи ЛП, если все векторы A_k, соответствующие компонентам $x_k > 0$, в совокупности линейно независимы. **Базисным решением** называется решение, полученное при нулевых значениях свободных переменных, т.е. $x_i = 0, i = m+1, \ldots, n$. Базисное решение называется **допустимым базисным решением**, если значения входящих в него базисных переменных неотрицательны, т.е. $x_i = b_j \geq 0,$ $j = 1, 2, \ldots, m.$ Для приведения системы к каноническому виду можно использовать два типа элементарных операций над строками: 1) умножение любого уравнения системы на положительное или отрицательное число, 2) прибавление к любому уравнению другого уравнения системы, умноженного на положительное или отрицательное число.

В исходной задаче ЛП ограничения часто имеют вид не равенств, а неравенств. В некоторых инженерных задачах не все переменные являются неотрицательными. Ограничения в виде неравенств можно преобразовать в равенства при помощи введения так называемых **остаточных** или **избыточных** переменных. Неравенства вида $\leq$ преобразуются в равенства прибавлением остаточной переменной. Неравенства вида $\geq$ преобразуются в равенства вычитанием избыточной переменной. Переменные, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, следует заменять разностью двух неотрицательных: $x_i = x_i^1 - x_i^2$, где $x_i^1 \geq 0, x_i^2 \geq 0$.

Алгоритм симплекс-метода:

1. Выбираем исходное опорное решение. Заполняем первоначальную таблицу симплекс-метода:

Таблица 5.1

c_b	x_b	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n	b_i
	базис	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	
c_1	x_1	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	a_{1n}	b_1
c_2	x_2	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_m	x_m	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}	b_m
									L

2. Вычисляем вектор относительных оценок Δ при помощи **правила скалярного произведения** $\Delta_j = \overline{c_б}\,\overline{A_j} - \overline{c_б}$ или $\Delta_j = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} x_{kj} - c_j$, где $\overline{c_б}$ – вектор оценок базисных переменных; A_j – j-й столбец в канонической системе, соответствующей рассматриваемому базису. Дополняем первоначальную таблицу Δ – строкой.

Таблица 5.2

c_b	x_b	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n	b_i
	базис	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	
c_1	x_1	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	a_{1n}	b_1
c_2	x_2	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...		…	...	...	...
c_m	x_m	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}	b_m
Δ	0	0	...	0		$c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	...	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,n}$	L

Если все оценки $c_j \geq 0$ $, i = 1, \cdots, n$, то текущее допустимое решение – максимальное (минимальное). Решение найдено.

3. В противном случае в базис необходимо ввести небазисную переменную x_r с наибольшим по модулю значением Δ_j вместо одной из базисных переменных (табл. 5.3).

4. При помощи правила *минимального отношения* $\min \frac{b_i}{a_{ir}}$ оп-

ределяем переменную x_p, выводимую из базиса. Если коэффициент a_{ir} отрицателен, то $\frac{b_i}{a_{ir}} = \infty$. В результате пересечение столбца, где находится вводимая небазисная переменная x_r и строки, где находится выводимая базисная переменная x_p,определит положение разрешающего элемента таблицы (табл. 5.4).

Таблица 5.3

		c_1	...	c_r	...	c_n	$\underline{b}_i$	$\underline{b}_i/\underline{a}_{ir}$	
	базис	x_1	...	x_r	...	x_n			
c_1	x_1	1	...	$\underline{a}_{1r}$	...	$\underline{a}_{1n}$	$\underline{b}_1$	$\underline{b}_1/\underline{a}_{1r}$	
c_2	x_2	0	...	$\underline{a}_{2r}$	...	$\underline{a}_{2n}$	$\underline{b}_2$	$\underline{b}_2/\underline{a}_{2r}$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	
c_m	x_m	0	...	$\underline{a}_{mr}$	...	$\underline{a}_{mn}$	$\underline{b}_m$	$\underline{b}_m/\underline{a}_{nr}$	**min**
Δ		0	$c_r - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,r}$	...	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,n}$	L			
				max					

5. Применяем элементарные преобразования для получения нового допускаемого базового решения и новой таблицы. В результате разрешающий элемент должен равняться 1, а остальные элементы столбца ведущего элемента принять нулевое значение.

6. Вычисляем новые относительные оценки с использованием правила скалярного преобразования и переходим к шагу 4.

►*Пример 5.5.* Решить симплекс-методом задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} 4x_1 + 1{,}5x_2 \le 24, \\ 1200x_1 + 150x_2 \le 6000, \\ 20x_1 + 20x_2 \le 200, \\ x_1 \ge 2 \end{cases} \qquad 5000x_1 + 2500x_2 \to \max,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение.

Приведем задачу к каноническому виду

$$5000x_1 + 2500x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max.$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 1{,}5x_2 + x_3 = 24, \\ 1200x_1 + 150x_2 + x_4 = 6000, \\ 20x_1 + 20x_2 + x_5 = 200, \\ x_1 - x_6 = 2 \end{cases} \qquad x_{1..6} \ge 0.$$

Составляем исходную симплекс-таблицу

Таблица 5.4

c_b	x_b	5000	2500	0	0	0	0	$\underline{b}_i$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
		4	1,5	1	0	0	0	24
		1200	150	0	1	0	0	6000
		20	20	0	0	1	0	200
		1	0	0	0	0	-1	2

1. Задача не имеет исходного опорного решения. Находим его, преобразовав матрицу с помощью элементарных преобразований.
2. Вычисляем вектор оценок Δ.

Таблица 5.5

c_b	x_b	5000	2500	0	0	0	0	$\underline{b}_i$	$\underline{b}_i/\underline{a}_{ir}$
	базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_3	0	1,5	1	0	0	**4**	16	$\underline{16/4 = 4}$
0	x_4	0	150	0	1	0	1200	4800	$4800/1200 = 4$
0	x_5	0	20	0	0	1	20	160	$160/20 = 8$
5000	x_1	1	0	0	0	0	–1	2	–
Δ		0	–2500	0	0	0	$\underline{-5000}$	L=10000	

3. Анализируя табл. 5, видим, что отрицательными являются оценки Δ_2, Δ_6, причем Δ_6 является наибольшей по модулю из них. В столбцах с отрицательными оценками присутствуют положительные элементы. Это означает, что данное опорное решение не оптимально, и нет основания утверждать, что целевая функция задачи не ограничена сверху на допустимом множестве. Вектор x_6 следует ввести в базис. Затем ищем вектор, который следует вывести из базиса. Для этого находим отношения b_i/a_{ir} и выбираем минимальное. Таковыми оказались x_3 и x_4. Выводим из базиса, например, x_3. Разрешающий элемент выделен жирным шрифтом. Заполняем симплекс-таблицу, соответствующую новому опорному решению

Таблица 5.6

c_b	x_b	5000	2500	0	0	0	0	$\underline{b}_i$	$\underline{b}_i/\underline{a}_{ir}$
	базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_6	0	0,375	0,25	0	0	1	4	$4/_{0,375} = {}^{32}/_3$
0	x_4	0	- 300	-300	1	0	0	0	–
0	x_5	0	**<u>12,5</u>**	-5	0	1	0	80	$\underline{{}^{80}/_{12.,5} = 6.4}$
5000	x_1	1	0,375	0,25	0	0	0	6	$6/_{0,375} = 16$
Δ		0	<u>- 625</u>	1250	0	0	0	L=30000	

4. Из табл. 6 видим, что отрицательной оценкой является Δ_2, следовательно новый опорный план $x^* = (6{,}0{,}0{,}0{,}80{,}4)$ неоптимальный и его можно улучшить, если ввести в базис вектор x_2

Таблица 5.7

c_b	x_b	5000	2500	0	0	0	0	$\underline{b}_i$
	базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_6	0	0	0,4	0	-0,6	1	1,6
0	x_4	0	0	-420	1	480	0	720
2500	x_2	0	1	-0,4	0	1,6	0	6,4
5000	x_1	1	0	0,4	0	-0,6	0	3,6
Δ		0	0	1000	0	1000	0	L=34000

5. В новой симплекс-таблице все Δ_j неотрицательны, следовательно полученный опорный план $x^* = (3{,}6;\ 6{,}4;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1{,}6)$ является оптимальным, а L=34000 – максимальное значение целевой функции.

6. Оптимальным допустимым решением исходной задачи является вектор $x^* = (3{,}6;\ 6{,}4)$.◄

►*Пример 5.6.* Найти оптимальный план выпуска продукции для исходных данных, приведенных в следующей таблице:

Используемые станки	Нормы времени, ч		Ресурс времени, ч
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	0	36
Сверлильные	2	1	83
Шлифовальные	2	5	183
Прибыль, р.	5	9	

Решение.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 количество выпущенных шкафов, через x_2 – количество выпущенных столов, а через z – общую прибыль, полученную от реализации всей готовой продукции, в рублях. Имеем получим задачу линейного программирования $z = 5x_1 + 9x_2 \to \max,$ при ограничениях на ресурс времени работы оборудования каждого вида

$$\begin{cases} x_1 \le 36 \\ 2x_1 + x_2 \le 83 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 183 \end{cases}, \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

Задача содержит две переменные x_1 и x_2, и поэтому может быть решена графическим и симплексным методами. Графическое решение показано на рис. 5.6. Допустимая область в виде многоугольника OABCD строится по системе ограничений и условиям неотрицательности переменных. Вектор p(5; 9) строится по коэффициентам целевой функции, он показывает направление возрастания функции z и для удобства может быть продолжен.

Из графика следует, что оптимальный план выпуска продукции соответствует точке B(29; 25). А это в свою очередь означает выпуск 29 шкафов и 25 столов, что приносит наибольшую прибыль $z_{\max} = 5 \cdot 29 + 9 \cdot 25 = 370$ р.

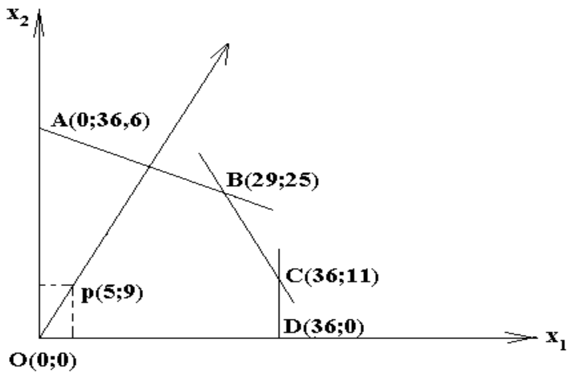


Рис. 5.6. Графическое решение задачи линейного программирования с двумя переменными

Решим задачу симплексным методом. Для этого в каждое ограничение-неравенство введем неотрицательную балансовую переменную, характеризующую время простоя станка соответствующего вида. Тогда получим задачу линейного программирования в канонической форме:

$z = 5x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 36 \\ 2x_1 + \ x_2 \quad + x_4 \quad = 83 \\ 2x_1 + 5x_2 \quad + x_5 = 183 \end{cases}, \quad x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0.$$

Составим симплексную таблицу и будем совершать симплексные преобразования, пока не получим неотрицательную оценочную строку

c_i	Базис	5	9	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	1	0	1	0	0	36
0	x_4	2	1	0	1	0	83
0	x_5	2	$\boxed{5}$	0	0	1	183
Δ		–5	–9	0	0	0	0
0	x_3	1	0	1	0	0	36
0	x_4	$\boxed{8/5}$	0	0	1	–1/5	232/5
9	x_2	2/5	1	0	0	1/5	183/5
Δ		–7/5	0	0	0	9/5	1647/5
0	x_3	0	0	1	–5/8	1/8	7
5	x_1	1	0	0	5/8	–1/8	29
9	x_2	0	1	0	–1/4	1/4	25
Δ		0	0	0	7/8	13/8	370

В результате получили оптимальный план выпуска продукции: шкафов необходимо выпустить x_1 = 29 ед., столов – x_2 = 25 ед. При этом фрезерные станки будут простаивать в течение времени x_3 = 7 ч. Общая прибыль равна 370 р. В оценочной строке получены также оценки ресурсов времени станков, а именно: эти оценки соответственно равны y_1 = 0, y_2 = 7/8, y_3 = 13/8. Это значит, что для наибольшего увеличения прибыли целесообразнее всего увеличивать ресурс времени работы шлифовальных станков.

Из первой симплекс-таблицы находим первое опорное решение X_1=(0; 0; 36; 83; 183), соответствующее на графике началу координат O(0; 0). Из второй симплекс-таблицы находим второе опорное решение X_2=(0; 183/5; 36; 232/5; 0), соответствующее на графике вершине A(0; 36,6).

Из третьей симплекс-таблицы находим третье опорное решение X_3=(29; 25; 7; 0; 0), соответствующее на графике вершине B(29; 25).

Пусть z′ – общее время простоя станков, тогда соответствующая математическая модель имеет вид $z' = x_3 + x_4 + x_5 \to \min$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 36 \\ 2x_1 + \ x_2 \quad + x_4 \quad = 83 \\ 2x_1 + 5x_2 \quad + x_5 = 183 \end{cases}, \quad x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0.$$

Пусть z″ – общая прибыль за вычетом штрафа за простой станков, если за 1 ч простоя фабрика платит штраф в размере 10 р., тогда соответствующая математическая модель имеет вид $z'' = 5x_1 + 9x_2 - 10(x_3 + x_4 + x_5) \to \max$ при тех же ограничениях. ◄

Двойственные задачи

Рассмотрим пару задач линейного программирования, связанных между собой симметричными зависимостями. Целевая функция одной задачи (1) максимизируется, другой (2) − минимизируется. Все ограничения-неравенства задачи (1) записывают в виде ≤, все ограничения-неравенства задачи (2) – в виде ≥.

Задачи (1) и (2) называют ***парой двойственных задач*** линейного программирования, если выполнены следующие соотношения:

1. В задаче (1) *n* неизвестных и *m* ограничений (без учета условий неотрицательности), в задаче (2) – *m* неизвестных и *n* ограничений (без учета условий неотрицательности).
2. Ограничения задачи (1) находятся во взаимооднозначном соответствии с переменными задачи (2). Переменные задачи (1) находятся во взаимооднозначном соответствии с ограничениями задачи (2).

3. Переменные задачи (1) обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Переменные задачи (2) – через $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

4. Матрицы ограничений задач (1) и (2) взаимотранспонированы.

Если a_{ij} – это коэффициенты при переменной x_i в *i*-м ограничения задачи (1), $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$; то в задаче (2) коэффициент a_{ij} стоит при переменной y_i в *j*-м ограничении.

5. Правые части системы ограничений задачи (1) – это коэффициенты целевой функции задачи (2); коэффициенты целевой функции задачи (1) – это правые части системы ограничений задачи (2).

6. Если b_i – правая часть *i*-го ограничения задачи (1), то b_i – коэффициент при y_i в целевой функции задачи (2), $i = 1, \ldots, m$. Если c_j – коэффициент при x_i в целевой функции задачи (1), то c_j – правая часть *j*-го ограничения задачи (2), $j = 1, \ldots, n$.

7. Каждому ограничению-неравенству задачи (1) соответствует условие неотрицательности ассоциированной с этим ограничением переменной задачи (2). Каждому ограничению-равенству задачи (1) соответствует переменная задачи (2) без ограничений на знак. И, напротив, каждому ограничению-неравенству задачи (2) соответствует неотрицательная переменная задачи (1), каждому ограничению-равенству задачи (2) соответствует переменная задачи (1) произвольного знака.

Задача (1) называется ***двойственной*** задаче (2); задача (2) называется ***двойственной*** задаче (1).

Из определения двойственной пары следует, что отношение двойственности взаимное, задача, двойственная двойственной, совпадает с исходной задачей.

► *Пример 5.6.* Построить задачу, двойственную к ЗЛП примера 5.5.

Решение.

Прямая задача

Двойственная задача

$$\begin{cases} 4y_1 + 1200y_2 + 20y_3 + y_4 \geq 5000, \\ 1{,}5y_1 + 150y_2 + 20y_3 \geq 2500. \end{cases}$$

$$F(x) = 24y_1 + 6000y_2 + 200y_3 - 2y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 1{,}5x_2 \le 24, \\ 1200x_1 + 150x_2 \le 6000, \\ 20x_1 + 20x_2 \le 200, \\ x_1 \ge 2. \end{cases}$$

$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0.$ ◄

$F(x) = 5000x_1 + 2500x_2 \to \max,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Теоремы двойственности

Рассмотрим симметричную двойственную пару задач

$$Z = (\bar{c}, \bar{x}) \to \max; \quad A\bar{x} \le \overline{A_0}; \quad \bar{x} \ge 0; \qquad (5.4)$$

$$W = (\overline{A_0}, \bar{y}) \to \min; \quad A^T \bar{y} \ge \bar{c}; \quad \bar{y} \ge 0. \qquad (5.5)$$

Теорема 5.1 **(основное неравенство теории двойственности)**.

Если $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – произвольные допустимые решения пары двойственных задач (5.4), (5.5), то

$$Z = (\bar{c}, \bar{x}) \le W(\overline{A_0}, \bar{y}). \qquad (5.6)$$

Следствие 1. Если допустимые решения $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ пары двойственных задач (5.4) и (5.5) таковы, что $(\bar{c}, \bar{x}) = (\overline{A_0}, \bar{y})$, то $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – оптимальные решения этих задач.

Следствие 2. Если целевая функция Z задачи (5.4) не ограничена сверху на допустимом множестве задачи, то у задачи (5.5) нет ни одного допустимого решения. Если целевая функция W задачи (5.5) не ограничена снизу на допустимом множестве задачи, то у задачи (5.4) нет ни одного допустимого решения.

Теорема 5.2 **(первая теорема двойственности).**

Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая имеет решение, причем оптимальные значения целевых функций совпадают $Z_{\max} = W_{\min}$.

Теорема 5.3 (**вторая теорема двойственности**).

Допустимые решения $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ пары двойственных задач оптимальны тогда и только тогда, когда значения целевых функций Z и W на этих решениях совпадают

$$Z_{\max} = (\bar{c}, \bar{x}) = (\overline{A_0}, \bar{y}) = W_{\min}.$$

Двойственный симплекс-метод

При решении задачи (5.4) симплекс-методом идет перебор допустимых решений задачи (5.5). На всех итерациях, кроме последней, векторы $\overline{y} = \overline{c}^*_{баз} B^{-1}$ не являются допустимыми решениями задачи (5.4). При этом выполняются следующие условия: если $x_j > 0$ (т.е. x_j – базисная переменная), то $\Delta_j = 0$. Это означает, что j-е ограничение двойственной задачи превращается в строгое равенство на векторе $\overline{y}$.

Можно предложить симметричный алгоритм, основанный на переборе допустимых решений задачи (5.4). Перебор осуществляется с помощью симплекс-таблиц, в каждой из которых все оценки Δ_j неотрицательны, $\Delta_j \geq 0$ (обеспечение допустимости вектора $\overline{y}$). Но значения переменных x_j хотя и удовлетворяют системе ограничений задачи (5.4) $A\overline{x} = \overline{A_0}$, но не удовлетворяют условию $x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$ (среди правых частей есть отрицательные). На каждом новом векторе $\overline{y}$ целевая функция w задачи (5.5) меньше, чем на предыдущем. Через конечное число шагов находится $W_{\min}$, что означает одновременное определение $Z_{\max}$ и оптимального решения $\overline{x}$ (все правые части симплекс-таблицы становятся неотрицательными). Описанный алгоритм называется ***двойственным симплекс-методом***.

►*Пример 5.7*. Рассмотрим ЗЛП: $Z = 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \to \max$; $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30;\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -10;\quad x_1, \ldots, x_4 \geq 0.$

Запишем математическую модель двойственной задачи
$W = 30y_1 - 10y_2 \to \min$; $2y_1 - y_2 \geq 2$; $3y_1 - 2y_2 \geq 6$; $y_1 \geq 2; y_2 \geq -1.$

Составим первую симплекс-таблицу.

Базисные переменные	$c_{баз}$	2	6	2	–1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	2	3	1	0	30
x_4	–1	–1 (1/2)	**–2** (1)	0 (0)	1 (–1/2)	–10 (5)
Z		3	2	0	0	70

Вектор $\overline{x}$ = (0; 0; 30; –10) недопустим, так как $x_4 < 0$. Но вектор $\overline{y_1} = (\Delta_3 + 2; \Delta_4 - 1) = (0 + 2; 0 - 1) = (2; -1)$ – допустимое решение двойственной задачи. $W = 30y_1 - 10y_2 = 70 = Z$. Перейдем к вектору $\overline{y_2}$, на котором целевая функция W уменьшится.

Сначала выберем уравнение, в котором заменяется базисная переменная. Условимся уменьшать целевую функцию W, выбирая правую часть и соответствующий опорный элемент отрицательными.

Имеется только одна отрицательная правая часть (во втором уравнении), поэтому замену переменной проведем во втором уравнении (если бы в левой части второго уравнения все коэффициенты были бы неотрицательны, то задача не имела бы ни одного допустимого решения, ведь уравнение вида $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = -b$, где $a_1, \ldots, a_n, b \ge 0$ не имеет неотрицательных решений).

Есть две возможности выбрать новую базисную переменную: или x_1, или x_2. Сделаем выбор, исходя из требования неотрицательности всех оценок Δ_j, $j = 1, \ldots, n$, по формуле пересчета $\Delta_j' - \dfrac{x_{rj}}{x_{rs}}\Delta_s \ge 0$, где $r-$ номер уравнения, в котором заменяется базисная переменная; $s -$ номер новой базисной переменной.

Так как Δ_j, $\Delta_j \ge 0$ и было условлено, что $x_{rs} < 0$, то наверняка $\Delta_j \ge 0$, когда $x_{rj} > 0$. Если же $x_{rj} < 0$, то условие пересчета можно записать в виде $\dfrac{\Delta_s}{|x_{rs}|} \le \dfrac{\Delta_j}{|x_{rj}|}$.

Таким образом, отношение $\dfrac{\Delta_s}{|x_{rs}|}$ должно быть минимальным из всех отношений $\dfrac{\Delta_j}{|x_{rj}|}$, таких, что $x_{rj} < 0$. В нашем случае имеем: $\min\left(\dfrac{3}{|-1|}; \dfrac{2}{|-2|}\right) = 2$. Новой базисной переменной становится переменная x_2. Построим следующую таблицу:

Базисные переменные	$c_{баз}$	2	6	2	–1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	0,5	0	1	1,5	15

x_2	6	0,5	1	0	–0,5	5
Z		2	0	0	1	60

Вектор $\overline{x} = (0;\ 5;\ 15;\ 0)$ — допустимое и оптимальное решение задачи. Вектор $\overline{y_2} = (\Delta_3 + 2;\ \Delta_4 - 1) = (2;\ 0)$ — допустимое и оптимальное решение двойственной задачи $Z_{\max} = 2\times 15 + 6\times 5 = 60 = 2\times 30 = W_{\min}$. ◄

6. ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Типовой расчет № 1

Векторы. Прямая. Кривые второго порядка

Во всех заданиях N – номер варианта.

Задание 1

На плоскости относительно некоторого базиса даны координаты трех векторов:

при N – четном: $\bar{a}\left(\dfrac{N+4}{2};1\right)$, $\bar{b}\left(\dfrac{N-4}{2};2\right)$, $\bar{c}\left(\dfrac{N-10}{2};3\right)$;

при N – нечетном: $\bar{a}\left(\dfrac{N+7}{2};2\right)$, $\bar{b}\left(\dfrac{N-5}{2};3\right)$, $\bar{c}\left(\dfrac{N-11}{2};1\right)$.

1. Найти координаты векторов $\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c}$; $2\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}$.
2. Проверить, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис на плоскости. Найти координаты вектора $\bar{c}$ в этом базисе.
3. Определить при каком значении параметра α векторы $\bar{a}$ и $m(-2;\alpha)$ будут коллинеарными.
4. Найти координаты вектора $\bar{b}(\bar{a}\bar{c})-\bar{c}\,(\bar{a}\bar{b})$.
5. Вычислить $\bar{a}^2-\bar{b}\bar{c}$, $\bar{b}^2+(\bar{a}+3\bar{c})\bar{b}$.
6. Найти косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2

В пространстве относительно некоторого базиса даны координаты трех векторов:

при N – четном: $\bar{a}\left(2;\dfrac{N-4}{2};3\right)$, $\bar{b}\left(1;\dfrac{N+4}{2};-2\right)$, $\bar{c}\left(3;\dfrac{N+6}{2};-2\right)$;

при N – нечетном: $\bar{a}\left(2;\dfrac{N+7}{2};-3\right)$, $\bar{b}\left(3;\dfrac{N-5}{2};4\right)$, $\bar{c}\left(-1;\dfrac{N+1}{2};5\right)$.

1. Найти координаты векторов $2\bar{a}+5\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{b}(\bar{a}\bar{c})$.
2. Вычислить $\bar{a}^2+\bar{b}^2-\bar{b}\bar{c}$; $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.
3. Найти косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 3

На плоскости относительно декартовой системы координат даны координаты трех точек:

при N – четном: $A\left(\dfrac{N+4}{2};1\right)$, $B\left(\dfrac{N+10}{2};4\right)$, $C\left(\dfrac{N+4}{2};7\right)$;

при N – нечетном: $A\left(1;\dfrac{N+1}{2}\right)$, $B\left(4;\dfrac{N+7}{2}\right)$, $C\left(1;\dfrac{N+13}{2}\right)$.

Найти:

1. Координаты вектора $\overline{CA}$.
2. Координаты точек M_1, M_2, M_3, делящих отрезки AB, BC, AC в отношениях $\lambda = 2, \lambda = \dfrac{1}{2}, \lambda = -3$, соответственно.
3. Координаты центра тяжести треугольника ABC.
4. Длину отрезка AB.
5. Площадь треугольника ABC.
6. Угол B.

Задание 4

На плоскости относительно декартовой системы координат даны координаты вершин треугольника:

при N – четном: $A\left(\dfrac{N+8}{2};7\right)$, $B\left(\dfrac{N-8}{2};1\right)$, $C\left(\dfrac{N-2}{2};-3\right)$;

при N – нечетном: $A\left(3;\dfrac{N+13}{2}\right)$, $B\left(-5;\dfrac{N+1}{2}\right)$, $C\left(-2;\dfrac{N-7}{2}\right)$.

Найти:

1. Уравнения сторон треугольника.
2. Уравнение прямой BN, параллельной стороне AC.
3. Уравнение медианы CD.
4. Уравнение высоты AE.
5. Угол B.
6. Написать уравнение окружности с центром в A, для которой BC служит касательной.

Задание 5

Относительно декартовой системы координат даны координаты точки:

при N – четном: $A\left(\frac{N}{2};\frac{N+2}{2}\right)$;

при N – нечетном: $A\left(\frac{N+3}{2};\frac{5-N}{2}\right)$.

Найти:

1. Угловой коэффициент прямой l_1, проходящей через точку A параллельно вектору $\bar{a}\,(1;3)$.

2. Уравнение прямой l_2, проходящей через точку A под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой l_1.

3. Уравнение прямой l_3, проходящей через точку A и отсекающей на осях координат равные отрезки.

4. Косинус угла между прямыми l_1 и l_3.

5. Уравнение прямой l_4, проходящей через начало координат параллельно прямой l_2.

6. Расстояние между прямыми l_2 и l_4.

7. Координаты точки B пересечения прямых l_3 и l_4.

8. Расстояние от точки B до прямой l_1.

Задание 6

Определить, какие линии задаются уравнениями. Найти их геометрические характеристики. Построить линии.

1	$x^2-y^2=5$	**2**	$(x+y)^2=2xy+3$	**3**	$x^2+\frac{y^2}{3}=4$
4	$x^2=5+y^2$	**5**	$x^2-3=4-y^2$	**6**	$\frac{x^2}{2}+(y-1)^2=5$
7	$x=\frac{y^2}{16}$	**8**	$(x+3)^2-4=5-y^2$	**9**	$(x+3)^2+(y-3)^2=4$
10	$(x-y)^2=4-2xy$	**11**	$x^2-5=y^2$	**12**	$x=\frac{y^2}{100}$
13	$(x+y)^2=x^2+2xy-4x$	**14**	$x=\frac{y^2}{4}$	**15**	$(x+y)^2=x^2+2xy+8x$
16	$x^2+y^2=6$	**17**	$x^2-3y^2=9$	**18**	$(x-1)^2+(y+3)^2=4$
19	$x^2-\frac{y^2}{4}=9$	**20**	$23x^2-46y^2=23$	**21**	$(x-1)^2+(y+2)^2=100$

22	$x^2-\frac{y^2}{2}=10$	**23**	$\frac{x^2}{2}-y^2=7$	**24**	$x^2+2y^2=8$
25	$(x+3)^2+(y-3)^2=4$	**26**	$(x-3)^2+(y+4)^2=3$	**27**	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=3$
28	$3x^2-y^2=9$	**29**	$(x-y)^2=3-2xy$	**30**	$x^2-3=2y^2$

Задание 7

Составить каноническое уравнение эллипса или гиперболы, зная, что расстояние между фокусами равно $2c$, большая полуось равна a.

При N – четном: $c=\frac{N}{2}, a=\frac{N+2}{2}$;

при N – нечетном: $c=\frac{N+1}{2}, a=\frac{N+5}{2}$.

Найти:

1. Эксцентриситет эллипса; эксцентриситет гиперболы.
2. Уравнения директрис эллипса и гиперболы.
3. Расстояние от правого фокуса эллипса до ближайшей директрисы.
4. Длину отрезка асимптоты гиперболы, заключенного между её центром и директрисой.
5. Расстояния от фокусов гиперболы до её асимптот.
6. Уравнение сопряженной гиперболы; её эксцентриситет, уравнения директрис.

Задание 8

В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, зная, что расстояние от фокуса до директрисы равно N.

Найти:

1. Координаты фокуса.
2. Уравнение директрисы.
3. Координаты точек пересечения параболы с окружностью

$$x^2+y^2=3N^2.$$

Задание 9

1. Составить уравнение и построить геометрическое место точек, находящихся к точке A(3, 0) вдвое ближе, чем к прямой $x = 12$.

2. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки A (– 4, 0) втрое дальше, чем от начала координат.

3. Составить уравнение геометрического места точек, равноотстоящих от точек M(1, 5) и N(3, – 3).

4. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки A(5, 0) относятся как 2 : 1.

5. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки A (– 1, 0) вдвое меньше расстояния ее от прямой $x = -4$.

6. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки A (2, 0) и от прямой $5x + 8 = 0$ относятся как 5 : 4.

7. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки A (4, 0), чем от точки B(1, 0).

8. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки A (2, 0) и от прямой $2x + 5 = 0$ относятся как 5 : 4.

9. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки A (3, 0) вдвое меньше расстояния ее от точки B (26, 0).

10. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки A (0, 2) и от прямой $y - 4 = 0$.

11. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равно отстоит от оси ординат и от окружности $x^2 + y^2 = 4x$.

12. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равно удалена от точки A (2, 6) и от прямой $y + 2 = 0$.

13.Определить траекторию точки М, которая при своем движении всегда остается вдвое ближе к точке А (1, 0), чем к точке В (4, 0). Построить линию.

14. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки А (0, 1) и прямой $y + 5 = 0$.

15. Тело движется так, что в любой момент времени одинаково удалено от точки А (2, 0) и прямой $x - 6 = 0$. Найти уравнение траектории движения тела.

16. Тело движется так, что в любой момент времени находится ближе к точке А (4, 0), чем к точке В (–4, 0), на две единицы масштаба. Найти уравнение траектории движения тела.

17. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки А (–2, 0) вдвое меньше расстояния ее от прямой $x = 3$.

18. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки А (2, 1) и от прямой $4x + 6 = 0$ относятся как 3 : 4.

19. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой втрое дальше от точки В (–2, 0), чем от точки А (4, 1).

20. Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от точки В(1, 0) и от прямой $2x + 5 = 0$ относятся как 4 : 5.

21. Построить геометрическое место точек, расстояние от которых до точки А (2, 0) вдвое меньше расстояния до точки С(23, 0).

22. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки В (2, 0) и от прямой $y - 2 = 0$.

23. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от оси ординат и от окружности
$(x - 1)^2+y^2=4$.

24. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки С (1, 5) и от прямой $y + 4 = 0$.

25. Составить уравнение и построить геометрическое место точек, находящихся к точке В (2, 1) вдвое ближе, чем к прямой $x = 7$.

26. Составить уравнение окружности, которая имеет центр на пересечении прямых $4x - 3y + 10 = 0$, $4x - 3y - 30 = 0$ и равный 6 радиус.

27. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки A (–3, 1) втрое дальше, чем от начала координат.

28. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек M (–1, 6) и N (4, –7).

29. Определить траекторию точки M (x, y), движущейся так, что разность квадратов расстояний от нее до биссектрис координатных углов остается равной 8.

30. Написать уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний от которых до прямой $3x + 4y = 0$ и до оси Ox остается постоянной и равной 2,4.

Типовой расчет № 2
Определители, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Формулы Крамера

Задание 1

Вычислить определители матриц K, F, C, A. Для матриц F, A найти миноры M_{33}, M_{11}, M_{23} и алгебраические дополнения A_{23}, A_{32}, A_{14}, A_{44} соответствующих элементов.

Провести вычисления непосредственно и с использованием MS Excel.

1–3 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7 & 0\\ -2 & -N & 4 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & N & 3\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & -3 & 3\\ 1 & N & 4\end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix}2 & -N\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.	**4–6** $A=\begin{pmatrix}1 & -N & 4 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & N & 2\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & -N & 1\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -N & 0 & -2\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix}5 & -1\\ N & 1\end{pmatrix}$.
7–9 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & N & 4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ N & 4 & 1\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ N & -4 & 3\\ 4 & 12 & -1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}N & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.	**10–12** $A=\begin{pmatrix}1 & -0 & -1 & 2\\ 2 & -1 & N & 1\\ 1 & 10 & 0 & -6\\ 1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & N & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}2 & -1 & N\\ 0 & 3 & -2\\ 5 & -4 & 8\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}3 & -N\\ -5 & 1\end{pmatrix}$.
13–15 $A=\begin{pmatrix}1 & N & 9 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 0 & -2\\ 3 & 4 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\ 5 & -1 & 0\\ 7 & N & 2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -9\\ 1 & -N & 0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}N & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.	**16–18** $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2 & -4\\ -3 & 4 & -5 & 3\\ -5 & 7 & -N & 5\\ 8 & -8 & 5 & -6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & N & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ N & -3 & 0\\ 1 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}5 & N\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

19–21 $A=\begin{pmatrix}2&7&3&0\\1&3&5&1\\1&N&0&-2\\5&-1&3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&N\\1&5&2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1&3&1\\N&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}3&-6\\1&N\end{pmatrix}$.	**22–24** $A=\begin{pmatrix}3&1&-8&0\\2&-2&-N&2\\1&11&1&-2\\1&0&-3&6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2&7&N\\5&-1&3\\0&2&1\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1&-N&6\\3&-4&5\\0&9&-1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}N&1\\3&0\end{pmatrix}$.
25–27 $A=\begin{pmatrix}N&-5&-2&0\\-4&7&4&2\\4&-9&-3&3\\2&-6&-3&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&4&7\\3&-6&1\\5&-N&0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&1&1\\N&-1&4\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&N\\3&-1\end{pmatrix}$.	**28–30** $A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&-1&-5&-6\\1&-3&-N&-7\\2&1&-1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&5&1\\6&3&0\\5&-2&N\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1&3&2\\N&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}3&-4\\N&-4\end{pmatrix}$.

Задание 2

Найти неизвестное число x из следующих уравнений:

1 $\begin{vmatrix}x^2&4&9\\x&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0$	**2** $\begin{vmatrix}1&3&x\\4&5&-1\\2&-1&5\end{vmatrix}=0$	**3** $\begin{vmatrix}-x&1&x\\0&-x&-1\\x&1&-x\end{vmatrix}=0$	**4** $\begin{vmatrix}x^2&3&2\\x&-1&1\\0&1&4\end{vmatrix}=0$
5 $\begin{vmatrix}3&x&-4\\2&-1&3\\x+10&1&1\end{vmatrix}=0$	**6** $\begin{vmatrix}x&8&x\\3&10&x\\4&4&-2\end{vmatrix}=28$	**7** $\begin{vmatrix}1&x&-1\\3&7&x\\x&3&-7\end{vmatrix}=0$	**8** $\begin{vmatrix}3&2&-1\\x&2&9\\x&x&2\end{vmatrix}=0$
9 $\begin{vmatrix}3&4&-5\\x&7&-2\\2&-1&x\end{vmatrix}=0$	**10** $\begin{vmatrix}5&6&3\\4x&1&x\\7&4&5\end{vmatrix}=4$	**11** $\begin{vmatrix}5&x&2\\-1&2&4\\7&x&6\end{vmatrix}=68$	**12** $\begin{vmatrix}8&x&1\\10&x&1\\4&3&-2\end{vmatrix}=14$

13 $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 3 & 7 & x \\ x & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$	**14** $\begin{vmatrix} x & x & x \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2$	**15** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ x & 1 & x \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4$	**16** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} = 2$
17 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & x & -2 \\ x & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$	**18** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & x \\ x & 0 & 5 \end{vmatrix} = -8$	**19** $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ -3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$	**20** $\begin{vmatrix} x & -x & x \\ x & x & -x \\ x & -x & -x \end{vmatrix} = -4$
21 $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & x \end{vmatrix} = 0$	**22** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$	**23** $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 0$	**24** $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$
25 $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**26** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$	**27** $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**28** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$
29 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ x & 7 & -2 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 4$	**30** $\begin{vmatrix} 3 & x+5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6+x & -3 & x \end{vmatrix} = 1$		

Задание 3

Вычислить определитель матрицы А двумя способами: 1) получением нулей в i-й строке и разложением по элементам этой строки; 2) получением нулей в j-м столбце и разложением по элементам этого столбца.

1 $i=2,\ j=3,\ A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	**2** $i=3,\ j=1,\ A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3 $i=4,\ j=2,\ A=\begin{pmatrix}4&2&4&4\\3&4&1&1\\3&-2&4&-2\\2&2&2&3\end{pmatrix}$	**4** $i=2,\ j=3,\ A=\begin{pmatrix}-1&3&3&-2\\-3&3&-2&-2\\4&-1&4&2\\3&1&2&1\end{pmatrix}$
5 $i=3,\ j=1,\ A=\begin{pmatrix}3&2&-1&-1\\-2&2&-2&2\\-4&3&-4&3\\3&1&4&4\end{pmatrix}$	**6** $i=1,\ j=4,\ A=\begin{pmatrix}3&-3&2&-3\\4&-1&1&1\\4&-2&4&-2\\-1&-4&2&-2\end{pmatrix}$
7 $i=4,\ j=1,\ A=\begin{pmatrix}2&3&-5&-4\\0&3&0&-3\\4&4&4&5\\-10&3&5&4\end{pmatrix}$	**8** $i=3,\ j=1,\ A=\begin{pmatrix}3&2&4&-2\\9&2&0&3\\4&3&-1&-3\\10&1&3&5\end{pmatrix}$
9 $i=3,\ j=2,\ A=\begin{pmatrix}1&2&4&-1\\-3&2&0&1\\2&3&-1&3\\1&1&3&5\end{pmatrix}$	**10** $i=4,\ j=2,\ A=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$
11 $i=1,\ j=3,\ A=\begin{pmatrix}1&1&2&6\\3&-1&-1&-4\\2&3&-1&-2\\1&2&3&-2\end{pmatrix}$	**12** $i=2,\ j=1,\ A=\begin{pmatrix}3&1&2&1\\6&2&-1&3\\2&2&-1&-2\\1&2&3&-1\end{pmatrix}$
13 $i=4,\ j=1,\ A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&2&3\\1&2&0&4\\1&3&4&0\end{pmatrix}$	**14** $i=2,\ j=3,\ A=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&6&1\\1&1&1&-4\end{pmatrix}$
15 $i=3,\ j=3,\ A=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&2&-2&2\\1&2&3&3\\2&7&3&5\end{pmatrix}$	**16** $i=1,\ j=1,\ A=\begin{pmatrix}12&6&-4&0\\6&2&2&5\\3&4&8&1\\4&2&3&-2\end{pmatrix}$

17 $i=2, j=4, A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 6 & 6\\ 3 & 6 & 5 & -4\\ 0 & 3 & 7 & 2\\ 1 & 3 & 3 & -2\end{pmatrix}$	**18** $i=3, j=4, A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
19 $i=4, j=3, A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$	**20** $i=1, j=2, A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ -2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$
21 $i=1, j=3, A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$	**22** $i=4, j=4, A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$
23 $i=2, j=3, A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ -2 & -2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$	**24** $i=1, j=3, A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
25 $i=3, j=2, A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$	**26** $i=2, j=1, A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
27 $i=1, j=4, A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$	**28** $i=3, j=4, A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$
29 $i=3, j=2, A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**30** $i=4, j=2, A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ -2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Задание 4

Вычислить определитель четвертого порядка, используя как алгебраические дополнения, так и элементарные преобразования матриц.

1 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -7 & 8 & -9 \\ -1 & 3 & -5 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}$	**2** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$	**3** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & -1 & -1 \\ 3 & 88 & 99 & 100 \end{vmatrix}$
4 $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 29 & 3 \\ 7 & 7 & 28 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	**5** $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 12 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	**6** $\begin{vmatrix} 18 & 28 & 13 & 7 \\ 8 & 18 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$
7 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$	**8** $\begin{vmatrix} -1 & 12 & 33 & 8 \\ 6 & -7 & -28 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	**9** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 12 \\ -2 & 5 & -3 & 8 \\ -3 & 7 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$
10 $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$	**11** $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$	**12** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
13 $\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	**14** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	**15** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$
16 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & 7 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$	**17** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -6 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 9 & 3 \end{vmatrix}$	**18** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

19 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	**20** $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -2 & 3 \\ 12 & 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$	**21** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$
22 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	**23** $\begin{vmatrix} 12 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -3 \\ 16 & 7 & 3 & -5 \end{vmatrix}$	**24** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
25 $\begin{vmatrix} -7 & 4 & 8 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 7 & 13 \end{vmatrix}$	**26** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -7 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & -5 & -3 \\ 5 & -9 & 0 & 5 \end{vmatrix}$	**27** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
28 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \end{vmatrix}$	**29** $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 & 4 \\ 12 & -7 & 2 & 3 \\ 33 & -28 & 4 & 1 \\ 8 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	**30** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 & -8 \\ 2 & 6 & 7 & -3 \\ 15 & 0 & 8 & 19 \end{vmatrix}$

Задание 5

Варианты 1–15

С первого склада каждому из трех получателей отправлено по x единиц груза, со второго склада – по y единиц, с третьего – по z единиц груза. $A=(a_{ij})$ – матрица транспортных расходов (a_{ij} – затраты на перевозку единицы груза с i- го склада j- му получателю). Определить x, y, z если первый получатель затратил на перевозку b_1, второй – b_2, третий – b_3 денежных единиц. Найти решение системы методом Крамера.

1 $A=\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\1&2&3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}10&17&17\end{pmatrix}$	**2** $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}7&1&6\end{pmatrix}$
3 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&2\\4&1&4\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}3&4&3\end{pmatrix}$	**4** $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&4\\5&1&2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}12&6&3\end{pmatrix}$
5 $A=\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\1&2&3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}13&22&20\end{pmatrix}$	**6** $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\7&5&0\\4&0&11\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}33&24&39\end{pmatrix}$
7 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\3&4&2\\2&1&1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}21&9&10\end{pmatrix}$	**8** $A=\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\1&2&3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}13&21&17\end{pmatrix}$
9 $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}11&4&11\end{pmatrix}$	**10** $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&3&3\\1&1&5\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}6&14&19\end{pmatrix}$
11 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&2\\4&1&4\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}8&11&22\end{pmatrix}$	**12** $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\1&0&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}4&11&7\end{pmatrix}$
13 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&3&2\\5&4&8\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1&4&2\end{pmatrix}$	**14** $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix}$
15 $A=\begin{pmatrix}3&5&7\\2&1&0\\4&3&2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}6&12&21\end{pmatrix}$	

Варианты 16–30

Матрица $A=(a_{ij})$, где a_{1j} – цена единицы товара α в j-ом магазине, a_{2j} – цена единицы товара β в j-м магазине, a_{3j} – цена единицы товара γ в j-м магазине. Один и тот же набор товаров стоит в j-м магазине. Сколько единиц товаров входит в набор? Найти решение системы методом Крамера.

16 $A=\begin{pmatrix}3&5&4\\1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}23&35&35\end{pmatrix}$	**17** $A=\begin{pmatrix}5&3&4\\2&1&3\\2&2&3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}27&19&30\end{pmatrix}$
18 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&4\\2&2&3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}17&27&30\end{pmatrix}$	**19** $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&3&4\\2&2&3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}27&17&30\end{pmatrix}$
20 $A=\begin{pmatrix}4&3&5\\3&1&2\\3&2&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}19&13&21\end{pmatrix}$	**21** $A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}15&9&10\end{pmatrix}$
22 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&3&4\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}16&8&6\end{pmatrix}$	**23** $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&3\\3&4&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}9&14&16\end{pmatrix}$
24 $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&4\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}6&1&4\end{pmatrix}$	**25** $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix}$
26 $A=\begin{pmatrix}3&5&5\\2&1&1\\4&3&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}7&10&14\end{pmatrix}$	**27** $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&11&6\end{pmatrix}$

28 $A=\begin{pmatrix}5&0&4\\3&2&5\\2&1&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}5&14&18\end{pmatrix}$	**29** $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\5&1&2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}13&10&11\end{pmatrix}$
30 $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&3\\3&4&1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}9&14&16\end{pmatrix}$	

Задание 6

Решить системы уравнений с помощью теоремы Крамера. Провести вычисления непосредственно и с использованием MS Excel.

1–3 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2\\3x_1+2x_2+2x_3=-2\\x_1-2x_2+x_3=1\end{cases}$	$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=4\\4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6\\8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12\\3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6\end{cases}$
4–6 $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=4\\3x_1+4x_2-2x_3=11\\3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\3x_1-x_2-x_3 2x_4=-4\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6\\x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4\end{cases}$
7–9 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5\\2x_1+x_2+x_3=1\\x_1+3x_2+4x_3=1\end{cases}$	$\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2\\x_1+x_2+5x_3+2x_4=1\\2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3\\x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3\end{cases}$
10–12 $\begin{cases}5x_1+2x_2+5x_3=4\\3x_1+5x_2-3x_3=-1\\-2x_1-4x_2-3x_3=1\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6\\2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8\\3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4\\2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8\end{cases}$
13–15 $\begin{cases}-2x_1+2x_2+3x_3=5\\-7x_1+3x_2+5x_3=9\\10x_1-7x_2-12x_3=-10\end{cases}$	$\begin{cases}7x_1+6x_2+3x_3+7x_4=3\\3x_1+5x_2+7x_3+2x_4=-1\\5x_1+4x_2+3x_3+5x_4=1\\5x_1+6x_2+5x_3+4x_4=2\end{cases}$

16–18 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 23 \end{cases}$
19–21 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$
22–24 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$
25–27 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -19 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -12 \end{cases}$
28–30 $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$

Типовой расчет № 3
Операции над матрицами

Задание 1

Варианты 1–7

Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей А. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей В. Каковы общие затраты предприятия на производство С единиц продукции каждого вида?

1 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&4\end{pmatrix}$, $B=(10\quad 15)$, $C(100,200,150)$	**2** $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\5&1&4\end{pmatrix}$, $B=(10\quad 15)$, $C(100,200,150)$	**3** $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&6\end{pmatrix}$, $B=(12\quad 25)$, $C(150,220,250)$	**4** $A=\begin{pmatrix}3&2&3\\3&4&4\end{pmatrix}$, $B=(19\quad 18)$, $C(230,100,190)$
5 $A=\begin{pmatrix}7&2&1\\1&1&4\end{pmatrix}$, $B=(21\quad 21)$, $C(190,240,160)$	**6** $A=\begin{pmatrix}5&1&3\\1&7&2\end{pmatrix}$, $B=(16\quad 19)$, $C(300,200,150)$	**7** $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\1&2&2\end{pmatrix}$, $B=(23\quad 18)$, $C(155,210,200)$	

Варианты 8–15

Определить затраты фирмы, производящей p_1 единиц продукции П1, p_2 – продукции П2 и p_3 – продукции П3, если нормы затрат сырья на производство единицы продукции каждого вида заданы матрицей А. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей В.

8 П=(80,90,130), $A=\begin{pmatrix}2&1&6\\3&4&5\end{pmatrix}$, $B=(17\quad 19)$.	**9** П=(85,80,130), $A=\begin{pmatrix}2&2&4\\3&4&6\end{pmatrix}$, $B=(16\quad 20)$.

10 $П=(70,90,230)$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B==\begin{pmatrix} 15 & 19 \end{pmatrix}$.	**11** $П=(80,60,100)$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B==\begin{pmatrix} 13 & 21 \end{pmatrix}$.
12 $П=(65,100,50)$, $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B==\begin{pmatrix} 11 & 18 \end{pmatrix}$.	**13** $П=(80,90,160)$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B==\begin{pmatrix} 12 & 16 \end{pmatrix}$.
14 $П=(40,80,120)$, $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B==\begin{pmatrix} 13 & 15 \end{pmatrix}$.	**15** $П=(30,90,140)$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B==\begin{pmatrix} 17 & 15 \end{pmatrix}$.

Варианты 16–22

Прибыль, полученная от затрат сырья на единицу продукции каждого вида некоторой фирмы, задана матрицей A, доход от единицы сырья каждого типа задан матрицей B. Определить прибыль фирмы, производящей изделия двух видов и использующей сырье двух типов, если фирма собирается производить C изделий первого вида и D – второго.

16 $A=\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 25 & 31 \end{pmatrix}$, $C=300$, $D=250$.	**17** $A=\begin{pmatrix} 12 & 17 \\ 17 & 13 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 65 & 21 \end{pmatrix}$, $C=400$, $D=270$.
18 $A=\begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 28 & 41 \end{pmatrix}$, $C=350$, $D=260$.	**19** $A=\begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 4 & 19 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 51 & 31 \end{pmatrix}$, $C=250$, $D=280$.
20 $A=\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 25 & 70 \end{pmatrix}$, $C=300$, $D=290$.	**21** $A=\begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 32 & 37 \end{pmatrix}$, $C=600$, $D=210$.
22 $A=\begin{pmatrix} 19 & 11 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 41 & 56 \end{pmatrix}$, $C=160$, $D=230$.	

Варианты 23–30

Предприятие производит продукцию двух видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей А. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей В. Каковы общие затраты предприятия на производство С единиц продукции первого вида и D единиц второго вида?

23 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 70 & 30 \end{pmatrix}$, C=100, D=150.	**24** $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 60 & 80 \end{pmatrix}$, C=200, D=160.
25 $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 45 & 80 \end{pmatrix}$, C=500, D=170.	**26** $A=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 50 & 90 \end{pmatrix}$, C=300, D=190.
27 $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 70 & 10 \end{pmatrix}$, C=400, D=120.	**28** $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 20 & 80 \end{pmatrix}$, C=600, D=130.
29 $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 76 & 32 \end{pmatrix}$, C=150, D=170.	**30** $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 53 & 30 \end{pmatrix}$, C=280, D=110.

Задание 2

Варианты 1–15

Три цеха выпускают продукцию 5 видов. Матрица плана А размерности (5×3) (a_{ij} – запланированное количество продукции i-го вида для j-го цеха). В – матрица размерности (1×5) – матрица цен продукции (b_{1j} – цена единицы количества продукции j-го вида). 1) Найти матрицу $C = BA$. Какой смысл имеют элементы этой матрицы? 2) Найти сумму элементов S этой матрицы и указать её смысл. 3) Найти матрицу $0{,}5C$ и указать смысл её элементов.

1 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\3&4&2\\1&1&3\\2&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\end{pmatrix}$	**2** $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&3&2\\1&4&2\\1&1&3\\0&2&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&5&2&3&2\end{pmatrix}$
3 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&4&3\\3&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&3&3&1\end{pmatrix}$	**4** $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&1\\1&1&2\\1&5&3\\2&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&3&3&1\end{pmatrix}$
5 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&2&1\\5&4&3\\1&2&3\\2&1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&4&1&3&1\end{pmatrix}$	**6** $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&2&3\\2&3&2\\5&4&3\\1&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\end{pmatrix}$
7 $A=\begin{pmatrix}4&0&1\\1&2&1\\3&2&2\\7&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&3&1&1\end{pmatrix}$	**8** $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&6&1\\1&5&2\\1&2&6\\1&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&4&2&0&1\end{pmatrix}$
9 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\5&2&1\\3&1&2\\2&1&3\\2&0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&7&2&2&1\end{pmatrix}$	**10** $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&1\\2&4&1\\1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&5&2&1&1\end{pmatrix}$

11 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&1\\1&4&2\\2&1&3\\3&1&2\end{pmatrix}, B=(1\quad 3\quad 1\quad 3\quad 1)$	**12** $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&2&1\\1&1&2\\2&4&3\\3&1&1\end{pmatrix}, B=(1\quad 3\quad 2\quad 5\quad 2)$
13 $A=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&6&1\\0&4&1\\3&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}, B=(2\quad 1\quad 1\quad 3\quad 1)$	**14** $A=\begin{pmatrix}4&2&1\\3&1&1\\2&5&2\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}, B=(3\quad 2\quad 4\quad 1\quad 1)$
15 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&1\\1&0&2\\1`&1&3\\2&1&1\end{pmatrix}, B=(6\quad 0\quad 2\quad 1\quad 1)$	

Варианты 16–30

Цех выпускает три вида изделий, при приготовлении любого изделия производят 5 операций. Матрица А размерности (5×3) – матрица затрат рабочего времени (a_{ij} – время i-й операции при изготовлении изделия j-го вида). В – матрица размерности (3×1) – матрица плана выпуска (b_{i1} – число изделий i - го вида намеченных к выпуску). 1) Найти матрицу $C = AB$. Какой смысл имеют элементы этой матрицы? 2) Найти сумму элементов s этой матрицы и указать её смысл. 3) Найти матрицу $2A$ и указать смысл её элементов.

16 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&1\\2&0&4\\1`&1&1\\3&4&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\5\\10\end{pmatrix}$	**17** $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&1\\2&0&4\\2&1&1\\3&5&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\3\\11\end{pmatrix}$	**18** $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&0&4\\1`&1&1\\3&4&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\6\\12\end{pmatrix}$
19 $A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&2&3\\1&1&1\\3`&4&1\\2&2&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\7\\10\end{pmatrix}$	**20** $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&0&4\\4&1&3\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\4\\9\end{pmatrix}$	**21** $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\3&1&4\\2&2&3\\1`&2&1\\4&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix}$
22 $A=\begin{pmatrix}4&4&2\\12&0&1\\2&1&4\\3`&2&1\\3&6&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$	**23** $A=\begin{pmatrix}5&1&2\\3&2&1\\1&1&6\\2`&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$	**24** $A=\begin{pmatrix}4&1&2\\3&2&1\\2&4&2\\1`&3&1\\0&3&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}$
25 $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\3&3&3\\1&2&1\\2`&5&2\\1&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix}$	**26** $A=\begin{pmatrix}5&1&2\\2&5&7\\1&1&2\\3`&2&4\\0&6&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}$	**27** $A=\begin{pmatrix}4&0&4\\3&3&3\\2&1&1\\4&5&2\\2&2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4\\3\\21\end{pmatrix}$
28 $A=\begin{pmatrix}3&1&6\\2&2&2\\1&3&3\\0&8&1\\1&1&7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}$	**29** $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\2&5&2\\5&1&1\\6&4&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6\\8\\9\end{pmatrix}$	**30** $A=\begin{pmatrix}7&0&4\\1&5&3\\6&1&1\\3&0&2\\2&2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$

Задание 3

Даны матрицы A, B, C, D, E, F, G.

1. Найти следующие комбинации этих матриц:

а) $L = 2C - F + EDB$; б) $I = A^T A$, в) $N = K^3$.

2. Проверить равенство $CF = FC$.

3. Найти значение заданного многочлена $P(C) = 3C^2 - 2C + 5E$ от заданной матрицы C (всюду в задании E – единичная матрица нужного размера)

1–3 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7 & 0\\ -2 & -N & 4 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ N & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & N & 3\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3 & 4\\ 2 & N & 0 & 3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0 & N\\ -2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & -3 & 3\\ 1 & N & 4\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}2 & -N\\ -2 & 4\end{pmatrix}$
4–6 $A=\begin{pmatrix}1 & -N & 4 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ N & -1 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & N & 2\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & -N & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1 & N\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & N\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -N & 0 & -2\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}5 & -1\\ N & 1\end{pmatrix}$
7–9 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & N & 4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & N & 2\\ -2 & 0 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ N & 4 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & N & 1 & 3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}3 & N\\ -2 & 7\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ N & -4 & 3\\ 4 & 12 & -1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}N & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

10–12

$$A=\begin{pmatrix}1 & -0 & -1 & 2\\ 2 & -1 & N & 1\\ 1 & 10 & 0 & -6\\ 1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 2\\ -N & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & N & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}N & -5 & 4 & 4\\ 3 & -4 & 0 & 7\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -N & -3\\ 8 & 3\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}2 & -1 & N\\ 0 & 3 & -2\\ 5 & -4 & 8\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}3 & -N\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

13–15

$$A=\begin{pmatrix}1 & N & 9 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 0 & -2\\ 3 & 4 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ -1 & 0 & N\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\ 5 & -1 & 0\\ 7 & N & 2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & -1\\ 5 & N & 2 & 3\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & N\\ -3 & 3\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -9\\ 1 & -N & 0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}N & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

16–18

$$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2 & -4\\ -3 & 4 & -5 & 3\\ -5 & 7 & -N & 5\\ 8 & -8 & 5 & -6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & N & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & N & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}7 & -1 & N & 5\\ 3 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 1 & -N\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ N & -3 & 0\\ 1 & 7 & 1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}5 & N\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

19–21

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 1\\ 1 & N & 0 & -2\\ 5 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & -N & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & N\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}4 & 3 & -3 & 4\\ 8 & 0 & -N & 2\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}5 & N\\ 0 & -4\\ -4 & 1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ N & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & N\end{pmatrix}$$

22–24 $$A=\begin{pmatrix}3&1&-8&0\\2&-2&-N&2\\1&11&1&-2\\1&0&-3&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-4&-1\\5&3&-2\\1&-2&0\\2&1&N\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-2&7&N\\5&-1&3\\0&2&1\end{pmatrix},$$ $$D=\begin{pmatrix}1&0&N&-3\\-2&-1&1&2\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}3&1\\N&-2\\1&3\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&-N&6\\3&-4&5\\0&9&-1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}N&1\\3&0\end{pmatrix}$$
25–27 $$A=\begin{pmatrix}N&-5&-2&0\\-4&7&4&2\\4&-9&-3&3\\2&-6&-3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&3&0\\-2&N&1\\3&0&-2\\4&1&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&4&7\\3&-6&1\\5&-N&0\end{pmatrix},$$ $$D=\begin{pmatrix}5&0&-1&1\\2&N&-1&3\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}1&N\\4&-1\\1&-3\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&1&1\\N&-1&4\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&N\\3&-1\end{pmatrix}$$
28–30 $$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&-1&-5&-6\\1&-3&-N&-7\\2&1&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&1\\-N&0&2\\-4&-1&-3\\0&1&5\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&5&1\\6&3&0\\5&-2&N\end{pmatrix},$$ $$D=\begin{pmatrix}7&2&-1&N\\1&-3&4&0\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}2&0\\-4&N\\1&-3\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&3&2\\N&1&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}3&-4\\N&-4\end{pmatrix}$$

Задание 4

Решить следующие матричные уравнения:

1–3 $$5\begin{pmatrix}7&2&1&5\\3&-2&4&-3\\2&1&N&2\end{pmatrix}+2X-\begin{pmatrix}5&4&3&0\\2&N&-2&-1\\1&0&2&4\end{pmatrix}=O$$
4–6 $$\begin{pmatrix}2&3\\-1&N\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&-N\\1&-2&1\end{pmatrix}-3X=\begin{pmatrix}-113&3&-20\\-N&-11&-7\\-27&33&-21\end{pmatrix}$$

7–9 $$2X-\begin{pmatrix}2&0&8\\N&-2&5\\1&4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&4&-2\\N&-2&4\end{pmatrix}^{T}+\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&N&0\end{pmatrix}=0$$	
10–12 $$\begin{pmatrix}1&3&N\\1&3&-1\\2&1&0\end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix}1&1&0\\3&3&-1\\4&1&N\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}N&3&0\\2&1&0\\0&-4&2\end{pmatrix}$$	
13–15 $$\begin{pmatrix}5&0&2&3\\4&1&5&3\\3&1&-1&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\N\\-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-N&2&1\end{pmatrix}=X-\begin{pmatrix}2&-3&2\\6&-N&0\\2&-1&3\end{pmatrix}^{T}$$	
16–18 $$\begin{pmatrix}-1&0&-1&4\\2&N&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-2&N\\0&5\\3&1\end{pmatrix}=2X-\begin{pmatrix}1&N\\-1&3\end{pmatrix}^{2}$$	
19–21 $$\begin{pmatrix}1&-2\\-1&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&N&7\\0&4&8\end{pmatrix}+2X=4\begin{pmatrix}-1&7\\3&1\\0&N\end{pmatrix}^{T}$$	
22–24 $$\begin{pmatrix}2&1&-2&3\\-2&N&-4&0\\-4&3&1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-4&1\\N&-3\\0&-1\end{pmatrix}-4X=\begin{pmatrix}1&N\\1&3\\1&0\end{pmatrix}^{T}$$	
25–27 $$3X-\begin{pmatrix}2&-3&6\\1&-1&3\\0&N&4\end{pmatrix}^{2}=2E$$	**28–30** $$\begin{pmatrix}3&1&1&4\\5&4&10&1\\1&7&N&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}-2X+\begin{pmatrix}N\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&N&0&1\end{pmatrix}=0$$

Задание 5

Найти матрицы, обратные к данным методом алгебраических дополнений и методом Гаусса, сделать проверку.

1 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2** $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$	**3** $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$	**4** $A=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}$
5 $A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\4&-2&7\\1&-2&0\end{pmatrix}$	**6** $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$	**7** $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&-2\\3&0&-1\end{pmatrix}$	**8** $A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\4&-2&7\\1&-2&0\end{pmatrix}$
9 $A=\begin{pmatrix}2&-4&3\\1&-2&4\\3&-1&5\end{pmatrix}$	**10** $A=\begin{pmatrix}2&-3&3\\1&3&-3\\1&0&1\end{pmatrix}$	**11** $A=\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$	**12** $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&-2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$
13 $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\-2&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$	**14** $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$	**15** $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}$	**16** $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&1&1\\1&3&1\end{pmatrix}$
17 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&-2&1\\3&1&1\end{pmatrix}$	**18** $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&3&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$	**19** $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$	**20** $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&0&2\\-2&1&1\end{pmatrix}$
21 $A=\begin{pmatrix}6&-2&6\\1&1&-1\\3&2&-2\end{pmatrix}$	**22** $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&5&-4\\4&1&-3\end{pmatrix}$	**23** $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&-3\\3&4&1\end{pmatrix}$	**24** $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&2\\3&1&1\end{pmatrix}$
25 $A=\begin{pmatrix}1&3&-6\\3&2&5\\2&5&-3\end{pmatrix}$	**26** $A=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&6&2\\4&-1&-3\end{pmatrix}$	**27** $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&-1&-3\\3&-2&1\end{pmatrix}$	**28** $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-4&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$
29 $A=\begin{pmatrix}2&-3&3\\1&3&-3\\1&0&1\end{pmatrix}$	**30** $A=\begin{pmatrix}2&-4&3\\1&-2&4\\3&-1&5\end{pmatrix}$		

Задание 6

Выяснить, можно ли найти обратную матрицу к матрицам C, F, K (задание 3). В случае положительного ответа найти их.

Задание 7

Решить матричное уравнение: а) методом Гаусса (элементарными преобразованиями); б) вычисляя (если это возможно) обратную матрицу. Проверить ответ, умножая матрицы вручную или с использованием MS Excel.

1 $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	**2** $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
3 $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 11 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	**4** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	**6** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$
7 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	**8** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
9 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$	**10** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
11 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	**12** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
13 $\begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	**14** $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

15 $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\2&3&5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6&0\\-1&1\\4&2\end{pmatrix}$	**16** $\begin{pmatrix}2&1&-3\\-1&0&4\\3&5&-6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&1\\3&-1\\2&0\end{pmatrix}$
17 $\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&-1\end{pmatrix}$	**18** $\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&3\\2&0&-1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\\4&0\end{pmatrix}$
19 $\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&5&0\\-1&2&8\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$	**20** $\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&1\\1&3&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\\2&3\end{pmatrix}$
21 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\0&3&5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6&1\\-1&3\\2&4\end{pmatrix}$	**22** $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&4\\-1&2&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\\3&2\end{pmatrix}$
23 $\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&4\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\1&4\end{pmatrix}$	**24** $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\2&3&5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6&1\\-1&0\\2&3\end{pmatrix}$
25 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2\\-1&8\\0&-1\end{pmatrix}$	**26** $\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&1&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&1\\0&8\\-1&2\end{pmatrix}$
27 $\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	**28** $\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&3\\-2&0&-1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1&1\\2&3\\4&0\end{pmatrix}$
29 $\begin{pmatrix}1&-1&2\\8&0&1\\1&3&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&0\\-1&1\\2&1\end{pmatrix}$	**30** $\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&3&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$

Типовой расчет № 4

Решение линейных систем
Фундаментальная система решений

Задание 1

Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместимость и найти решение, если она совместна, методом Гаусса. Выполнить проверку.

1 $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-7x_4=-6 \\ 4x_1+x_2-2x_3+3x_4=12 \\ 2x_1+5x_2+6x_3-4x_4=14 \\ x_1+3x_2-3x_3+x_4=2 \end{cases}$	**2** $\begin{cases} 3x_1+x_2+5x_3-7x_4=-6 \\ x_1+4x_2-2x_3+3x_4=12 \\ 5x_1+2x_2+6x_3-4x_4=14 \\ 3x_1+x_2-3x_3+x_4=2 \end{cases}$
3 $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+9x_4=3 \\ 3x_1-8x_2+3x_3+24x_4=7 \\ x_1-2x_2+2x_3+9x_4=4 \\ 2x_1-7x_2+2x_3+21x_4=8 \end{cases}$	**4** $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+4x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+6x_4=5 \\ x_1-3x_2-2x_3+4x_4=3 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=3 \end{cases}$
5 $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+9x_4=-3 \\ 3x_1+8x_2+9x_3+24x_4=-13 \\ 3x_1+10x_2+10x_3+27x_4=-6 \\ 4x_1+13x_2+12x_3+39x_4=-8 \end{cases}$	**6** $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3+9x_4=3 \\ 3x_1-8x_2-3x_3+24x_4=11 \\ x_1-4x_2-2x_3+9x_4=4 \\ 2x_1-5x_2-2x_3+15x_4=8 \end{cases}$
7 $\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3-7x_4=-6 \\ -2x_1+x_2+4x_3+3x_4=12 \\ 6x_1+5x_2+2x_3-4x_4=14 \\ -3x_1+3x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$	**8** $\begin{cases} -3x_1+x_2+x_3+2x_4=10 \\ 5x_1-2x_2+x_3-3x_4=8 \\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_4=9 \\ -x_1+2x_2+4x_3-4x_4=-1 \end{cases}$
9 $\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3-3x_4=8 \\ 4x_1-3x_2+x_3+3x_4=13 \\ -3x_1+x_2+x_3+2x_4=10 \\ -x_1+2x_2+4x_3-4x_4=-1 \end{cases}$	**10** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+4x_4=2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+6x_4=3 \\ x_1-x_2+2x_3+4x_4=3 \\ x_1-3x_2+x_3-6x_4=3 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+6x_4=-1 \\ 2x_1+3x_2-5x_3+8x_4=-2 \\ 3x_1+5x_2-6x_3+10x_4=-3 \end{cases}$	**12** $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3+16x_4=-4 \\ 4x_1+15x_2+8x_3+60x_4=-20 \\ 2x_1+9x_2+5x_3+32x_4=-6 \\ 4x_1+17x_2+8x_3+68x_4=-12 \end{cases}$
13 $\begin{cases} x_1-3x_2-3x_3+9x_4=3 \\ 3x_1-8x_2+9x_3+24x_4=11 \\ 3x_1-8x_2+10x_3+27x_4=12 \\ 2x_1-5x_2+6x_3+15x_4=8 \end{cases}$	**14** $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+4x_4=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3+6x_4=5 \\ 2x_1-3x_2+5x_3+8x_4=6 \\ x_1-x_2+2x_3+6x_4=3 \end{cases}$
15 $\begin{cases} x_1-3x_2-3x_3+9x_4=3 \\ 3x_1-8x_2-9x_3+24x_4=7 \\ 3x_1-10x_2-10x_3+27x_4=12 \\ 2x_1-7x_2-6x_3+21x_4=8 \end{cases}$	**16** $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3-x_4=7 \\ x_1+3x_2-7x_3+5x_4=6 \\ -2x_1+x_2-3x_3+2x_4=-1 \\ 4x_1+5x_2-x_3+x_4=15 \end{cases}$
17 $\begin{cases} 5x_1-4x_2+3x_3+2x_4=14 \\ 3x_1-2x_2+x_3+6x_4=26 \\ 4x_1-x_2+x_3+2x_4=13 \\ 3x_1-x_2+x_3-2x_4=-4 \end{cases}$	**18** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+6x_4=-1 \\ x_1+x_2-2x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+5x_2-3x_3+10x_4=-3 \end{cases}$
19 $\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3-3x_4=9 \\ 3x_1-3x_2+x_3+2x_4=8 \\ -x_1+2x_2+4x_3-4x_4=-1 \\ -3x_1+x_2+x_3+2x_4=10 \end{cases}$	**20** $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=10 \\ -2x_1+5x_2+x_3-3x_4=8 \\ -3x_1+4x_2+x_3+2x_4=9 \\ 2x_1-x_2+4x_3-4x_4=-1 \end{cases}$
21 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=3 \\ 3x_1+2x_2+2x_3+4x_4=2 \\ -5x_1-2x_2+3x_3-2x_4=5 \\ 4x_1-9x_2+5x_3+3x_4=26 \end{cases}$	**22** $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+4x_4=7 \\ 2x_1+4x_2+5x_3-3x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+3x_3+2x_4=-6 \\ 3x_1+4x_2+3x_3-3x_4=0 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+6x_4=-7 \\ 2x_1+5x_2+5x_3+8x_4=-2 \\ 3x_1+7x_2+6x_3+14x_4=-3 \end{cases}$	**24** $\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3+15x_4=26 \\ x_1+2x_2+3x_3+6x_4=24 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+11x_4=34 \\ 4x_1-x_2+3x_3+15x_4=24 \end{cases}$
25 $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3-x_4=10 \\ x_1+3x_2+2x_3-13x_4=2 \\ 5x_1-x_2-4x_3-7x_4=8 \\ x_1-2x_2-5x_3+7x_4=-4 \end{cases}$	**26** $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+9x_4=4 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-5x_4=10 \\ x_1-x_2+5x_3-15x_4=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3-6x_4=2 \end{cases}$
27 $\begin{cases} 3x_1+4x_2-3x_3=5 \\ x_1+x_2+2x_3-6x_4=-2 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=-6 \\ 4x_1+3x_2-2x_3-3x_4=1 \end{cases}$	**28** $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5 \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=1 \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12 \end{cases}$
29 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4 \\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-4 \\ x_1+8x_2+7x_3-7x_4=-8 \end{cases}$	**30** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3 \\ 3x_1-x_2-2x_3-3x_4=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4 \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7 \end{cases}$

Задание 2

Заданы затраты трех видов сырья (S_1, S_2, S_3) на производство каждого из трех видов продукции (P_1, P_2, P_3) и количество каждого вида сырья.

P_k \ S_i	P_1	P_2	P_3	Запасы сырья
S_1	6α	4α	5α	48β
S_2	4α	3α	α	29β
S_3	5α	2	3α	31β

Требуется определить план производства, который бы обеспечил полное использование сырья.

	Вариант														
$\alpha\beta$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α	0,6	8	10	7	0,5	1,5	0,2	6	0,9	3	0,4	0,1	9	0,3	0,7
β	6	8	1	7	50	15	10	6	9	3	4	1	9	3	7

	Вариант														
$\alpha\beta$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α	0,8	1	2	4	5	4	7	4	3	3	2	3	3	5	2
β	8	10	10	4	50	12	14	16	6	12	24	9	6	10	6

Задание 3

На базе находится товар трех видов A, B, C, которым она снабжает ларьки, магазины и универмаги. За определенный период торговые организации могут реализовать товар в количестве, указанном в таблице. Сколько ларьков, магазинов и универмагов может обеспечить база, чтобы полностью продать товар. Решение найти методом Жордана – Гаусса.

Товар	Ларек	Магазин	Универмаг	Количество товара на базе
A	m–2	m–1	m+4	n–2
B	m+1	m	m+7	n+9
C	m	m+2	m+1	n+5

	Вариант														
mn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m	3,6	7	11	3,2	12	19	4,2	4	21	4,6	8	15	2,4	20	9
n	19	35	55	16	60	95	21	20	105	23	40	75	12	100	45

	Вариант														
mn	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m	4,4	3	10	3,4	16	5	2,8	13	18	3,6	22	14	2,6	17	6
n	22	15	50	17	80	25	14	65	90	18	110	70	13	85	30

Задание 4

Решить системы методом Жордана – Гаусса

1 $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=4, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=6, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=6, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=14. \end{cases}$	**2** $\begin{cases} 5x_1+7x_2+4x_3+6x_4+6x_5=2, \\ 15x_1+30x_2+7x_3+8x_4+3x_5=-13, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+8x_4+9x_5=9, \\ 6x_1+9x_2+3x_3+4x_4+3x_5=-1. \end{cases}$
3 $\begin{cases} 6x_1+5x_2+7x_3+5x_4+3x_5=6, \\ 14x_1+5x_2+3x_3+9x_4-x_5=2, \\ 4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+4x_5=7, \\ 8x_1+5x_2+4x_3+7x_4+2x_5=2. \end{cases}$	**4** $\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4+9x_5=23, \\ 3x_1+20x_2+5x_3-2x_4+6x_5=-8, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4+3x_5=1, \\ 9x_1+4x_2+3x_3-2x_4+6x_5=12. \end{cases}$
5 $\begin{cases} 13x_1-4x_2-x_3-4x_4-6x_5=8, \\ 11x_1-2x_2+x_3-2x_4-3x_5=7, \\ 5x_1+4x_2+7x_3+4x_4+6x_5=4, \\ 7x_1+2x_2+5x_3+2x_4+3x_5=5. \end{cases}$	**6** $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+5x_5=6, \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=7, \\ x_1-3x_2-5x_3-7x_5=-4, \\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4+x_5=6. \end{cases}$
7 $\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4+5x_5=7, \\ 6x_1+2x_2+2x_3-x_4=-2, \\ -3x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=5, \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=-5. \end{cases}$	**8** $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1. \end{cases}$
9 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3. \end{cases}$	**10** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=1, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=-1, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=-2. \end{cases}$
11 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-2x_4+4x_5=1, \\ 13x_1+8x_2+4x_3-3x_4+6x_5=9, \\ 5x_1+4x_2+2x_3-3x_4+6x_5=3, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=2. \end{cases}$	**12** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+6x_4+9x_5=2, \\ x_2-2x_3+2x_4+3x_5=-7, \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4+3x_5=3, \\ 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4+6x_5=1. \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=1, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=4, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=5. \end{cases}$	**14** $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=-1, \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=1, \\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-4x_5=-4, \\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=-2. \end{cases}$
15 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=-2, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=7, \\ 2x_1-4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=1. \end{cases}$	**16** $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=4, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=6, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=2, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=5. \end{cases}$
17 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6. \end{cases}$	**18** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_5=2, \\ x_1-x_2-3x_3-4x_4-3x_5=-4, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=1, \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-5x_5=-7. \end{cases}$
19 $\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=10, \\ 8x_1+4x_2+2x_4+3x_5=5, \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=7. \end{cases}$	**20** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=1, \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=-1, \\ 4x_2-x_3+x_4-2x_5=-1. \end{cases}$
21 $\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=6, \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4+2x_5=4, \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=8. \end{cases}$	**22** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4+5x_5=8, \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=-2, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$
23 $\begin{cases} x_1-4x_2-4x_3+x_4-3x_5=-3, \\ x_1+7x_2+6x_3-2x_4+6x_5=2, \\ 9x_1+8x_2+4x_3-3x_4+9x_5=-7, \\ 7x_1+5x_2+2x_3-2x_4+6x_5=-6. \end{cases}$	**24** $\begin{cases} 8x_1-4x_2+3x_3+6x_4+8x_5=5, \\ 10x_1-5x_2+5x_3+9x_4+15x_5=10, \\ 4x_1-2x_2+x_3+2x_4+2x_5=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+7x_4+11x_5=8. \end{cases}$

25 $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$	**26** $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$$
27 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7. \end{cases}$$	**28** $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 4x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1. \end{cases}$$
29 $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$	**30** $$\begin{cases} 5x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$$

Задание 5

Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

1 $3x_1+x_2-4x_3+2x_4+x_5=0$ $2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0$ $x_1+11x_2+34x_4-5x_5=0$	$x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4$ $2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9$ $x_1+3x_2+x_3-x_4=5$
2 $7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0$ $x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0$ $2x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=0$	$x_1-4x_2+2x_3+3x_4=5$ $2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9$ $x_1-3x_2+2x_3+x_4-3x_5=4$
3 $x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0$ $5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0$ $3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0$	$x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1$ $3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4$ $2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3$
4	

$6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0$ $-4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0$ $2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0$	$x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4$ $2x_1-9x_2+2x_3+x_5=7$ $x_1-4x_2-x_3-4x_4+x_5=3$
5 $2x_1-2x_2+2x_3-x_4+x_5=0$ $x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0$ $4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0$	 $x_1+3x_2-x_3-2x_4=1$ $2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3$ $x_1+4x_2-3x_3-x_4=2$
6 $5x_1-2x_2+9x_3-4x_4-x_5=0$ $x_1+4x_2+2x_3+2x_4-5x_5=0$ $6x_1+2x_2+11x_3-2x_4-6x_5=0$	 $x_1+x_2+4x_3+2x_5=0$ $3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1$ $2x_1+3x_2-3x_3+3x_4-2x_5=1$
7 $12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0$ $24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0$ $x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0$	 $x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0$ $2x_1-3x_2+x_3+4x_4=1$ $3x_1-5x_2+3x_3+7x_4=1$
8 $x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0$ $2x_1+x_2+3x_3+x_4-5x_5=0$ $x_1+3x_2-x_3+6x_4-x_5=0$	 $x_1-x_2+4x_3+3x_4=0$ $3x_1-2x_2+x_3+3x_5=1$ $2x_1-x_2-3x_3-3x_4+2x_5=1$
9 $2x_1+3x_2+3x_3-3x_4-x_5=0$ $x_1+6x_2-x_3+x_4+2x_5=0$ $x_1+16x_2-6x_3+6x_4+7x_5=0$	 $x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0$ $3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1$ $2x_1-3x_2-x_3+x_4=1$
10 $x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0$ $x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=0$ $2x_1+3x_2+x_3=0$	 $x_1-3x_2+4x_3+3x_5=2$ $3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5$ $2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=3$
11 $8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0$ $3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0$ $5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0$	 $x_1-3x_2+x_3+2x_4=4$ $2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=7$ $x_1-2x_2+3x_3+x_4=3$
12 $x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0$ $2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0$ $3x_1+2x_2+2x_4=0$	 $x_1-x_2+3x_3+4x_4=0$ $4x_1-3x_2+x_3+2x_5=1$ $3x_1-2x_2-2x_3-4x_4+2x_5=1$

13 $7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0$ $x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0$ $5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0$	$x_1+4x_2-2x_3-3x_4=2$ $2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5$ $x_1+5x_2+x_3-x_4=3$
14 $x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0$ $2x_1-2x_2-6x_3-4x_4+x_5=0$ $3x_1-2x_2+3x_3+3x_4-x_5=0$	$x_1-2x_2+3x_3+4x_5=1$ $4x_1-7x_2+2x_3+4x_4=3$ $3x_1-5x_2-x_3+x_4-4x_5=2$
15 $x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0$ $2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0$ $x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0$	$x_1-x_2+3x_3+4x_4=0$ $2x_1-x_2+2x_3+x_4=1$ $4x_1-3x_2+8x_3+9x_4=1$
16 $2x_1+2x_2-2x_3+x_4-3x_5=0$ $3x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=0$ $x_1-3x_2+4x_3-2x_4+5x_5=0$	$x_1+x_2-3x_3-4x_4=1$ $4x_1+5x_2-2x_3-x_5=3$ $3x_1+4x_2+x_3+4x_4-x_5=2$
17 $x_1+2x_2-3x_3+10x_4-x_5=0$ $-x_1-2x_2+3x_3+10x_4+x_5=0$ $x_1+6x_2-9x_3+30x_4-3x_5=0$	$x_1-4x_2+2x_3+3x_4=5$ $2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9$ $x_1-3x_2+2x_3-2x_4=4$
18 $2x_1+x_2-x_3+7x_4+5x_5=0$ $x_1-2x_2+3x_3-5x_4-7x_5=0$ $3x_1-x_2+2x_3+2x_4-2x_5=0$	$x_1+2x_2-2x_3-3x_5=4$ $2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9$ $x_1+3x_2+x_3-4x_4+3x_5=5$
19 $2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0$ $x_1+11x_2+34x_4-5x_5=0$ $x_1-5x_2-2x_3-16x_4+3x_5=0$	$x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4$ $2x_1-9x_2+2x_3+x_4=7$ $x_1-4x_2-x_3-3x_4=3$
20 $3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0$ $x_1+11x_2-12x_3-5x_5=0$ $x_1-5x_2+2x_3+x_4+3x_5=0$	$x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1$ $3x_1+7x_2-2x_3+x_5=4$ $2x_1+5x_2+x_3+4x_4+x_5=3$
21 $x_1+3x_2-5x_3+9x_4-x_5=0$ $2x_1+7x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0$ $x_1+4x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0$	$x_1+x_2+4x_3+2x_4=0$ $3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1$ $2x_1+3x_2-3x_3+x_4=1$

22 $5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0$ $3x_1+x_2-3x_3+3x_4+4x_5=0$ $6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+5x_5=0$	 $x_1+3x_2-x_3-2x_5=1$ $2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3$ $x_1+4x_2-3x_3-3x_4+2x_5=2$
23 $3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5=0$ $7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5=0$ $x_1+x_2+x_3-7x_5=0$	 $x_1-x_2+4x_3+3x_4=0$ $3x_1-2x_2+x_3+2x_4=1$ $2x_1-x_2-3x_3-x_4=1$
24 $6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0$ $7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0$ $x_1+x_2-x_3-2x_4-3x_5=0$	 $x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0$ $2x_1-3x_2+x_3+4x_5=1$ $3x_1-5x_2+3x_3+3x_4+4x_5=1$
25 $3x_1-5x_2+2x_3+5x_4=0$ $7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0$ $5x_1+7x_2-4x_3-9x_4=0$	 $x_1-3x_2+4x_3+3x_4=2$ $3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5$ $2x_1-5x_2-3x_3-x_4=3$
26 $x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0$ $2x_1+2x_2+5x_3-x_4+3x_5=0$ $x_1+x_2+4x_3-5x_4+6x_5=0$	 $x_1-2x_2+2x_3+3x_5=0$ $3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1$ $2x_1-3x_2-x_3+4x_4-3x_5=1$
27 $x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0$ $x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=0$ $x_1+2x_2+11x_3-6x_4+x_5=0$	 $x_1-x_2+3x_3+4x_4=1$ $4x_1-3x_2+x_3+2x_4=1$ $3x_1-2x_2-2x_3-2x_4=1$
28 $6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0$ $4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0$ $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$	 $x_1-3x_2+x_3+2x_4=4$ $2x_1-5x_2+4x_3+3x_5=7$ $x_1-2x_2+3x_3-2x_4+3x_5=3$
29 $3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0$ $3x_1+2x_2-2x_3+x_4=0$ $3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0$	 $x_1-2x_2+3x_3+4x_4=1$ $4x_1-7x_2+2x_3+x_4=3$ $3x_1-5x_2-x_3-3x_4=2$
30 $x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0$ $x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0$ $2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0$	 $x_1+4x_2-2x_3-3x_5=2$ $2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5$ $x_1+5x_2+x_3-4x_4+3x_5=3$

Задание 6

Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений.

1 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$	**2** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$
3 $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$	**4** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$
5 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$	**6** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$
7 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$	**8** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$
9 $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 8x_1 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$	**10** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

11 $\begin{cases} x_1-4x_2-4x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_1+7x_2+6x_3-2x_4+6x_5=0,\\ 9x_1+8x_2+4x_3-3x_4+9x_5=0,\\ 7x_1+5x_2+2x_3-2x_4+6x_5=0. \end{cases}$	**12** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3+3x_4+5x_5=0,\\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=0,\\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=0. \end{cases}$
13 $\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0,\\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4+2x_5=0,\\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$	**14** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0,\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0,\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0,\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0. \end{cases}$
15 $\begin{cases} 5x_1+6x_2+x_3+10x_4+7x_5=0,\\ 5x_1+x_2+2x_3+5x_4+4x_5=0,\\ 4x_1+3x_2+x_3+7x_4+5x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+3x_5=0. \end{cases}$	**16** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0,\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0,\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0,\\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0. \end{cases}$
17 $\begin{cases} 13x_1-4x_2-x_3-4x_4-6x_5=0,\\ 11x_1-2x_2+x_3-2x_4-3x_5=0,\\ 5x_1+4x_2+7x_3+4x_4+6x_5=0,\\ 7x_1+2x_2+5x_3+2x_4+3x_5=0. \end{cases}$	**18** $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0,\\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=0,\\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=0,\\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=0. \end{cases}$
19 $\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4+9x_5=0,\\ 3x_1+20x_2+5x_3-2x_4+6x_5=0,\\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4+3x_5=0,\\ 9x_1+4x_2-3x_3-2x_4+6x_5=0. \end{cases}$	**20** $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=0,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=0,\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=0,\\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=0. \end{cases}$

21 $\begin{cases} 6x_1+5x_2+7x_3+5x_4+3x_5=0, \\ 14x_1+5x_2+3x_3+9x_4-x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+4x_5=0, \\ 8x_1+5x_2+4x_3+7x_4+2x_5=0. \end{cases}$	**22** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-3x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4-2x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3-17x_4+10x_5=0. \end{cases}$
23 $\begin{cases} 5x_1+7x_2+4x_3+6x_4+6x_5=0, \\ 15x_1+30x_2+7x_3+8x_4+3x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+8x_4+9x_5=0, \\ 6x_1+9x_2+3x_3+4x_4+3x_5=0. \end{cases}$	**24** $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3-7x_4-x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-2x_3-9x_4-x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-x_3-8x_4-3x_5=0. \end{cases}$
25 $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=0. \end{cases}$	**26** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-3x_2+2x_3+4x_4-6x_5=0, \\ 3x_1-12x_2+x_3-3x_5=0, \\ 7x_1+11x_2+2x_3+2x_4=0. \end{cases}$
27 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2x_4+4x_5=0, \\ 13x_1+8x_2+4x_3-3x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+2x_3-3x_4+6x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=0. \end{cases}$	**28** $\begin{cases} x_1-x_2-6x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=0, \\ 4x_1+x_2-5x_3+3x_4+6x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+3x_4+6x_5=0. \end{cases}$
29 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-6x_4+9x_5=0, \\ x_2-2x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4+6x_5=0. \end{cases}$	**30** $\begin{cases} x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=0, \\ 3x_1-4x_2+8x_3+7x_4-x_5=0, \\ 4x_1-7x_2+14x_3+10x_4-7x_5=0. \end{cases}$

Задание 7

Исследовать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ Nx_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

Задание 8

Привести матрицу к ступенчатому виду $\begin{pmatrix} N & -1 & 2 & 2 & 5 \\ N & -N & N & 0 & 3 \\ 2 & -2 & N & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 9

Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -N & -3 & 4 \\ 5 & N & -N & 7 \\ 7 & 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание 10

Найти собственные числа и собственные вектора матрицы А.

1 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	**2** $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
3 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	**4** $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
5 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	**6** $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
7 $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	**8** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
9 $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	**10** $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

11 $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	**12** $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
13 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**14** $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
15 $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	**16** $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
17 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	**18** $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
19 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**20** $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
21 $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$	**22** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$
23 $\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	**24** $\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
25 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	**26** $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
27 $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	**28** $\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$
29 $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	**30** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Типовой расчет № 5
Применение матриц и систем линейных уравнений в экономике

Задание 1

В таблице приведены данные о дневной производительности 5 предприятий, выпускающих 4 вида продукции с потреблением 3 видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья.

Вид изделия, №п/п	Производительность предприятий, изд. /день	Затраты видов сырья изделия, ед. веса / изд.						
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Количество рабочих дней в году	Цена видов сырья						
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Требуется определить:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;

3) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска продукции указанных видов и количеств.

По данным таблицы составить новую таблицу по следующим условиям:

– дневная производительность всех предприятий увеличивается на 100%;

– число рабочих дней в году для первого предприятия увеличивается на 50%, а для остальных – на 40%;

– цены на виды сырья уменьшаются соответственно на 10, 20 и 30%.

Определить суммы кредитования предприятий и их соответствующие процентные изменения.

Задание 2

В таблице приведены данные по балансу за некоторый промежуток времени между тремя отраслями промышленности. Необходимо: 1) найти векторы конечного потребления и валового выпуска; 2) найти матрицу коэффициентов прямых затрат; 3) определить является ли она продуктивной, используя два критерия продуктивности; 4) установить объём валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям возрастет соответственно до y_1, y_2, y_3 условных денежных единиц. Решить задачу одним из методов: Крамера, обратной матрицы, Гаусса, Жордана – Гаусса. 5) определить процентные изменения валовых выпусков, необходимых для обеспечения заданного увеличения компонент вектора конечного продукта.

1

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	5	35	40	100
2	10	10	20	10	50
3	15	5	20	60	100
	$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$				

2

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	35	5	40	100
2	20	10	10	60	100
3	20	15	5	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

3

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		

1	20	5	15	60	100
2	10	35	5	40	100
3	10	10	20	10	50
	$y_1 = 70, y_2 = 60, y_3 = 30$				

4

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	35	5	40	100
2	20	10	10	60	100
3	10	10	20	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

5

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	35	5	60	100
2	10	20	10	40	100
3	20	10	10	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

6

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	10	20	10	40	100
2	20	10	30	60	100
3	20	10	10	10	50
	$y_1 = 70, y_2 = 60, y_3 = 30$				

7

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	5	35	40	100
2	10	10	20	10	50
3	20	10	10	60	100
	$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$				

8

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		

1	20	35	35	40	100
2	5	5	20	10	50
3	10	10	10	60	100
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

9

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	5	15	20	60	100
2	20	5	35	40	100
3	10	10	20	10	50
	$y_1 = 70, y_2 = 60, y_3 = 30$				

10

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	35	5	20	40	100
2	20	10	10	60	100
3	10	20	10	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

11

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	35	5	40	100
2	10	20	10	60	100
3	10	10	20	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

12

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	5	15	60	100
2	20	5	35	40	100
3	20	10	10	10	50
	$y_1 = 70, y_2 = 60, y_3 = 30$				

13

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		

1	35	5	20	40	100
2	10	20	10	60	100
3	15	20	5	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

14

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	5	35	40	100
2	20	5	15	10	50
3	20	10	10	60	100
	$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$				

15

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	10	10	20	60	100
2	20	5	35	40	100
3	10	20	10	10	50
	$y_1 = 70, y_2 = 60, y_3 = 30$				

16

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	35	5	20	40	100
2	10	20	10	60	100
3	20	10	10	10	50
	$y_1 = 70, y_2 = 60, y_3 = 30$				

17

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	5	35	40	100
2	10	10	20	10	50
3	10	20	10	60	100
	$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$				

18

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		

1	20	10	10	10	50
2	35	5	20	40	100
3	10	10	20	60	100
	$y_1 = 30, y_2 = 60, y_3 = 70$				

19

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	30	1	20	40	100
2	20	10	10	60	100
3	10	10	20	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

20

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	5	35	40	100
2	10	20	10	10	50
3	20	10	10	60	100
	$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$				

21

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	10	10	20	10	50
2	35	5	20	40	100
3	5	15	20	60	100
	$y_1 = 70, y_2 = 60, y_3 = 30$				

22

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	35	5	20	40	100
2	15	5	20	60	100
3	10	10	20	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

23

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		

1	20	5	35	40	100
2	10	20	10	10	50
3	15	20	5	60	100
$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$					

24

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	10	5	35	40	100
2	35	10	10	10	50
3	20	20	10	60	100
$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$					

25

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	35	20	5	40	100
2	10	10	20	60	100
3	20	10	10	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

26

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	5	35	40	100
2	20	10	10	10	50
3	10	20	10	60	100
	$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$				

27

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	10	20	10	10	50
2	35	5	20	40	100
3	10	10	20	60	100
	$y_1 = 30, y_2 = 60, y_3 = 70$				

28

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		

1	35	5	20	40	100
2	5	20	15	60	100
3	10	10	20	10	50
	$y_1 = 60, y_2 = 70, y_3 = 30$				

29

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	10	15	15	10	50
2	35	20	5	40	100
3	20	10	10	60	100
	$y_1 = 30, y_2 = 60, y_3 = 70$				

30

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	15	12	10	10	100
2	10	3	15	30	100
3	10	5	10	5	50
	$y_1 = 70, y_2 = 60, y_3 = 30$				

Типовой расчет № 6
Векторы. Базис. Разложение по базису

Задание 1

Даны координаты точек A_1, A_2, A_3, A_4, B в системе координат $OXYZ$. Найти координаты векторов $\overline{A_1A_2} = \overline{a_1}$, $\overline{A_1A_3} = \overline{a_2}$, $\overline{A_1A_4} = \overline{a_3}$, $A_1B = \overline{b}$. Проверить, что векторы (a_1, a_2, a_3) образуют базис и найти разложение вектора $\bar{b}$ по этому базису.

№	A_1	A_2	A_3	A_4	B
1	(1; 1; 1)	(3; 6; 7)	(1; 5; 3)	(0; 4; –1)	(0; 7; 3)
2	(–1; 0; 2)	(6; 8; 1)	(6; 5; 4)	(4; 4; 5)	(7; 10; 6)
3	(2; –3; 4)	(–1; 1; 6)	(8; –6; 5)	(4; –5; 4)	(–7; 1; 4)
4	(–2; 4; 3)	(3; 7; –1)	(–3; 3; –3)	(–5; 0; –1)	(–4; –3; 5)
5	(–1;–2; 8)	(1; –5; 9)	(5; –1; 7)	(3; 1; 6)	(1; 2; 5)
6	(0;–4; –6)	(2; –5; –4)	(5; –5; –10)	(5; –1; –12)	(7; 6; –14)
7	(10; 0; 2)	(17;10; –12)	(15; 1; –1)	(11; –4; 2)	(10; –4; –6)
8	(7; 2; 0)	(12; 2; –2)	(10; 9; –10)	(8; 8; –7)	(9; 6; –3)
9	(0;2; –10)	(–3; –4; –8)	(1; 0;–10)	(–1; 7; –15)	(–8; 15;–23)
10	(1; 0; 8)	(–2; –4; 11)	(0; 1; –13)	(4; 5; –10)	(9; 9; –7)
11	(11; 4; 0)	(12;16; –15)	(10; 7; –4)	(7; 6; –1)	(2; 16; –10)
12	(8; 6; –2)	(8; 12; –5)	(6; 19; –13)	(4; 10; –8)	(0; –2; –1)
13	(–7; 1; 1)	(–7; 5; 4)	(–3; 9; 2)	(–5; 6; –6)	(–9; 4; –19)
14	(3; 5; 9)	(3; 11; 13)	(1; 5; 11)	(5; 9; 5)	(13; 23; –3)
15	(–8;3; –1)	(–10; 5; –2)	(–8;14; –13)	(-5; 6; –10)	(–1; –8; –5)
16	(0; 7; 7)	(7; 14; 2)	(5; 21; –6)	(3; 12; 5)	(6; 1; 22)
17	(11; 5; 6)	(15; 3; 11)	(19; 7; 9)	(17; 14; 10)	(17; 26; 17)
18	(3; 1; –2)	(7; 1; 4)	(–2; 1; –1)	(–1; –1; 1)	(5; –5; 11)
19	(4; –1; 0)	(10; 1; 11)	(7; 3; 9)	(5; –5; 0)	(7; –19; –7)
20	(14; 3; 8)	(16; -3; 10)	(26; 1; 18)	(23; 3; 16)	(19; 1; 14)
21	(4; –5; 2)	(2; –3; 0)	(5; 7; –3)	(1; –1; 2)	(–9;–15; 10)
22	(–2; 1; 3)	(0; –2; 4)	(7; 5; –2)	(4; –3; 2)	(0; –22; 11)
23	(0; 5; 2)	(1; –1; 3)	(4; 6; –5)	(1; –1; –1)	(–4; –21; 8)
24	(–2; 2;–1)	(0; 0; –5)	(3; –3; 2)	(4; –1; 2)	(8; 1; –2)
25	(0; –5; 2)	(–1; –3; 2)	(4; 0; –2)	(1; –2; 2)	(–6; –4; 10)

26	(3; 2; –1)	(4; 2; 0)	(5; –2; 3)	(–1; 2; 3)	(–12; 10; 4)
27	(–3; 0; 1)	(–1; 4; –4)	(2; –2; 0)	(3; –3; –1)	(7; –1; –8)
28	(1; 2; –2)	(3; 6; –5)	(0; 4; 5)	(–3; 3; 1)	(–7; 5; –10)
29	(1; 0; –3)	(6; 0; –5)	(2; –1; –1)	(5; 5; –8)	(16; 17;–24)
30	(–3; 2; 5)	(–5; 5; 6)	(1; –2; 3)	(–3; 8; –2)	(13; 31;–11)

Задание 2

Дана система векторов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, в которой $\alpha_3 = (0; 1; 1; 2)$, $\alpha_4 = (1; 1; 1; 3)$, $\alpha_5 = (1; 0; 1; 2)$. Дополнить линейно независимую часть α_1, α_2 до базиса системы векторов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ и все векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису.

№	α_1	α_2	№	α_1	α_2
1	(2; –4; 5; 3)	(12; 2; –5; 9)	**2**	(7; 0; 9; 16)	(3; 1; 4; 8)
3	(4; 1; 3; 8)	(7; –1; 0; 6)	**4**	(5; 2; 7; 14)	(2; 11; -10; 3)
5	(6; 12; –7; 11)	(2; 3; 3; 8)	**6**	(5; 3; –5; 3)	(3; 1; 4; 8)
7	(2; 4; 1; 7)	(3; –7; 8; 4)	**8**	(1; 6; –7; 0)	(5; –3; 9; 11)
9	(1; 3; 0; 4)	(2;–1;–2; –1)	**10**	(1; 2; –5; –2)	(2; 9; –7; 4)
11	(1; 7; –2; 6)	(4; –1; 1; 4)	**12**	(5; 1; –2; 6)	(1;–4;–2;–5)
13	(2; 3; 0; 5)	(4; 1; 0; 5)	**14**	(0; –1; 2; 1)	(3; 2; 1; 6)
15	(3; 1; 3; 7)	(3; 2; 1; 6)	**16**	(2; –3; 2; 1)	(3; 2; 0; 5)
17	(3; 3; 2; 8)	(0; 4; –3; 1)	**18**	(5; 4; –2; 7)	(1; 0; 2; 3)
19	(2; 7; –3; 6)	(5; 8; –5; 8)	**20**	(4; 5; –3; 6)	(1; –4; 5; 2)
21	(3; 5; –5; 3)	(4; 8; –6; 6)	**22**	(1; 3; –3; 1)	(2; –1; 3; 4)
23	(4; 5; –2; 7)	(1; –5; 4; 0)	**24**	(2; 8; –1; 9)	(3; 10; –6; 7)
25	(–4; 2; 1; 3)	(–1; 4; 2; 5)	**26**	(1; 7; –2; 6)	(2; 3; –4; 1)
27	(3; 2; –1; 1)	(0; 1; –3; –1)	**28**	(2; 1; 3;–1)	(1; 2; –1; 3)
29	(–1; 1; -2; 1)	(3; 1; 1; 1)	**30**	(2; –1; 3; 5)	(3; 1; 1; 1)

Типовой расчет № 7
Элементы линейного программирования

Задание 1

Построить область, описанную системой ограничений (неравенств). Решить графически задачу линейного программирования.

1 $f(x,y)=2x+5y\to \min(\max),$ $\begin{cases} 2x+y\ge 4 \\ -x+y\le 4 \\ x+2y\le 14 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$	**2** $f(x,y)=5x+2y\to \min(\max),$ $\begin{cases} y\le 4 \\ -x+y\le 4 \\ x+2y\le 14 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$
3 $f(x,y)=x+y\to \min(\max),$ $\begin{cases} x-y\ge -3 \\ x+y\le 5 \\ 2x-3y\le 6 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$	**4** $f(x,y)=x-4y\to \min(\max),$ $\begin{cases} x+y\ge 3 \\ x+y\le 8 \\ 3x-2y\ge 6 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$
5 $f(x,y)=x-3y\to \min(\max),$ $\begin{cases} -2x+y\le 2 \\ x-3y\ge -9 \\ 4x+3y\le 24 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$	**6** $f(x,y)=4x-y\to \min(\max),$ $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ 2x+y\ge 6 \\ 2x+3y\le 18 \\ x\le 6 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$
7 $f(x,y)=-x-2y\to \min(\max),$ $\begin{cases} x+y\ge 2 \\ x-y\le 0 \\ y\le 4 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$	**8** $f(x,y)=-2x-y\to \min(\max),$ $\begin{cases} 3x+y\le 6 \\ x-y\le \\ y\le 4 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$

9 $f(x,y)=5x-3y\to\min(\max),$ $\begin{cases}-x+y\le 3\\ 4x-y\ge 0\\ x\le 3\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$	**10** $f(x,y)=3x-y\to\min(\max),$ $\begin{cases}-2x+y\le 2\\ x-3y\le -9\\ 4x+3y\le 24\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$
11 $f(x,y)=x-3y\to\min(\max),$ $\begin{cases}-2x+y\le 2\\ x-3y\ge -9\\ 4x+3y\le 24\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$	**12** $f(x,y)=x-y\to\min(\max),$ $\begin{cases}-2x+y\le 2\\ x-y\le 0\\ x+y\le 5\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$
13 $f(x,y)=x+3y\to\min(\max),$ $\begin{cases}-2x+y\le 2\\ y\le 4\\ x+y\ge 3\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$	**14** $f(x,y)=-3x+2y\to\min(\max),$ $\begin{cases}x-y\ge 0\\ 2x+y\ge 6\\ 2x+3y\le 18\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$
15 $f(x,y)=4x-y\to\min(\max),$ $\begin{cases}x-y\ge 0\\ 2x+y\ge 6\\ 2x+3y\le 18\\ x\le 6\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$	**16** $z=7x_1-x_2\to\min(\max)$ $\begin{cases}6x_1+8x_2\le 51\\ 2x_1-8x_2\ge -19\\ 4x_1+5x_2\ge -21\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$
17 $z=11x_1+7x_2\to\min(\max)$ $\begin{cases}x_1+x_2\ge 51\\ 7x_1+8x_2\le 60\\ 3x_1-4x_2\ge 11\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$	**18** $z=12x_1-2x_2\to\min(\max)$ $\begin{cases}11x_1-17x_2\le 66\\ -x_1+11x_2\ge 14\\ 5x_1-3x_2\ge 14\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0$

19 $z = 5x_1 + x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 30 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 27 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	**20** $z = 7x_1 + x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 2 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 35 \\ 5x_1 - 13x_2 \ge 18 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
21 $z = 9x_1 - 7x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} 11x_1 - 17x_2 \le 72 \\ -x_1 + 11x_2 \le 20 \\ 5x_1 - 3x_2 \ge 20 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	**22** $z = 4x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - 9x_2 \le 16 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 1 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 27 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
23 $z = 11x_1 + 7x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 \ge 14 \\ 13x_1 + 5x_2 \le 100 \\ 5x_1 - 9x_2 \ge 5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	**24** $z = 10x_1 - 8x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + 11x_2 \ge 11 \\ 3x_1 - x_2 \le 28 \\ 5x_1 - 13x_2 \ge 11 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
25 $z = 4x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 1 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 34 \\ 5x_1 - 13x_2 \ge 17 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	**26** $f = x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
27 $f = 2x_1 + x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	**28** $f = x_1 + x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

29	30
$f = 10x_1 + 14x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \geq 35 \\ 2x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$f = x_1 + x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \geq 36 \\ 4x_1 + 8x_2 \geq 32 \\ 2x_1 \geq 2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Задание 2
Задача о выпуске продукции при ограниченных ресурсах

Мебельная фабрика выпускает два вида продукции: шкафы и столы. В производстве применяется оборудование трех типов: фрезерные, сверлильные и шлифовальные станки. Нормы времени работы каждого вида оборудования (в часах), необходимые для изготовления единицы продукции каждого вида, ресурсы рабочего времени для каждого вида оборудования, а также прибыль (в рублях) от изготовления единицы продукции приведены в задании. Требуется определить план выпуска продукции каждого вида, при котором время работы оборудования не превышало бы допустимого ресурса и была получена наибольшая общая прибыль.

Указания к выполнению:

1. Составить математическую модель задачи.

2. Решить полученную задачу линейного программирования графическим и симплексным методами.

3. Показать соответствие опорных решений и вершин допустимой области.

4. Составить математическую модель задачи при условии, что критерием оптимальности является минимум общего времени простоя станков, решить задачу графически.

5. Составить математическую модель задачи при условии, что критерием оптимальности является максимум общей прибыли за вычетом штрафа за простой станков, если за 1 ч простоя фабрика платит штраф в размере 10 р; решить задачу графически.

6. Пусть дополнительно требуется, чтобы сумма выпусков 1-й и 2-й продукции была не более 5 ед., тогда на сколько процентов изменится максимальная прибыль?

7. Пусть второй продукции выпускается 3 ед. Показать график зависимости прогноза прибыли от выпуска 1-й продукции.

1

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	4	3	195
Сверлильные	3	5	237
Шлифовальные	1	0	38
Прибыль	8	10	

2

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	2	102
Сверлильные	4	2	144
Шлифовальные	0	1	37
Прибыль	12	9	

3

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	1	95
Сверлильные	1	1	65
Шлифовальные	0	1	42
Прибыль	11	3	

4

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	3	3	153
Сверлильные	0	1	44
Шлифовальные	4	1	117
Прибыль	13	7	

5

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	3	5	249
Сверлильные	1	0	42
Шлифовальные	3	3	189
Прибыль	8	11	

6

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	5	1	147
Сверлильные	3	3	165
Шлифовальные	0	1	46
Прибыль	12	7	

7

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	3	121
Сверлильные	0	1	37
Шлифовальные	2	1	71
Прибыль	14	14	

8

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	0	1	55
Сверлильные	3	4	260
Шлифовальные	4	1	182
Прибыль	11	8	

9

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	0	55
Сверлильные	2	3	162
Шлифовальные	2	2	130
Прибыль	9	11	

10

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	4	3	195
Сверлильные	3	5	237
Шлифовальные	1	0	38
Прибыль	8	10	

11

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	4	4	232
Сверлильные	1	0	32
Шлифовальные	1	2	92
Прибыль	7	13	

12

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	0	56
Сверлильные	2	4	204
Шлифовальные	4	4	272
Прибыль	7	10	

13

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	5	193
Сверлильные	1	0	49
Шлифовальные	4	4	276
Прибыль	5	6	

14

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	0	1	67
Сверлильные	4	2	186
Шлифовальные	3	1	122
Прибыль	12	5	

15

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	4	180
Сверлильные	5	2	234
Шлифовальные	1	0	39
Прибыль	13	14	

16

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	0	48
Сверлильные	5	3	267
Шлифовальные	1	2	108
Прибыль	6	8	

17

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	0	42
Сверлильные	1	5	215
Шлифовальные	5	4	319
Прибыль	7	7	

18

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	0	1	26
Сверлильные	3	4	164
Шлифовальные	4	1	119
Прибыль	11	5	

19

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	5	42
Сверлильные	4	1	215
Шлифовальные	0	1	319
Прибыль	13	12	

20

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	2	102
Сверлильные	4	2	144
Шлифовальные	0	1	37
Прибыль	12	9	

21

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	5	197
Сверлильные	0	1	39
Шлифовальные	5	1	159
Прибыль	8	7	

22

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	0	49
Сверлильные	1	2	77
Шлифовальные	3	4	179
Прибыль	9	14	

23

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	4	146
Сверлильные	1	0	44
Шлифовальные	2	2	100
Прибыль	6	11	

24

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	2	138
Сверлильные	5	4	311
Шлифовальные	0	1	55
Прибыль	11	9	

25

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	5	180
Сверлильные	1	0	26
Шлифовальные	1	1	51
Прибыль	8	14	

26

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	1	68
Сверлильные	1	4	118
Шлифовальные	1	0	24
Прибыль	6	5	

27

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	1	0	39
Сверлильные	5	5	375
Шлифовальные	2	5	267
Прибыль	13	1	

28

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	4	3	158
Сверлильные	4	1	156
Шлифовальные	0	1	51
Прибыль	13	11	

29

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	3	158
Сверлильные	4	1	156
Шлифовальные	0	1	51
Прибыль	13	11	

30

Станки	Нормозатраты		Ресурсы времени
	Шкаф	Стол	
Фрезерные	2	3	138
Сверлильные	4	4	212
Шлифовальные	1	0	52
Прибыль	7	10	

Задание 3

Варианты 1–15

Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Норма затрат каждого вида сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблицах вариантов. Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли при заданном дополнительном ограничении. Оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции.

Требуется: 1) построить математическую модель задачи; 2) привести задачу к канонической форме; 3) дать геометрическую интерпретацию решения; 4) решить задачу симплекс-методом; 5) проанализировать результаты решения; 6) составить к данной задаче двойственную и, используя соответствие переменных, выписать ответ двойственной задачи; 7) дать экономическую интерпретацию двойственных оценок.

1

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	3	2	0	18
II	0	1	1	4
III	1	2	0	10
Прибыль	2	5	1	–

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью

2

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	2	1	3	18
II	2	0	0	10
III	4	0	3	24
Прибыль	6	1	9	–

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью

3

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	0	1	1	8
II	1	1	0	5
III	0	2	1	12
Прибыль	1	5	2	–

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью

4

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	2	1	0	14
II	1	1	0	8
III	0	1	1	3
Прибыль	3	4	1	–

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью

5

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	0	1	1	7
II	2	1	0	14
III	1	1	0	10
Прибыль	4	5	1	–

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью

6

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	1	2	0	10
II	2	1	0	8
III	1	0	1	3
Прибыль	5	2	1	–

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью

7

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	3	5	0	30
II	1	1	1	8
III	0	2	0	8
Прибыль	3	3	1	–

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью

8

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	1	1	0	4
II	0	2	3	24
III	0	4	2	24
Прибыль	1	5	2	–

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью

9

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	3	0	4	36
II	3	0	2	24
III	1	1	0	6
Прибыль	7	1	4	–

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью

10

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	2	0	0	8
II	2	3	1	18
III	4	3	0	24
Прибыль	6	9	1	–

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью

11

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	2	1	4	20
II	0	0	1	4
III	3	0	2	18
Прибыль	3	1	6	–

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью

12

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	0	2	2	16
II	1	1	0	4
III	0	1	2	14
Прибыль	1	3	2	–

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью

13

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	1	2	0	14
II	2	2	0	20
III	1	0	1	8
Прибыль	4	3	1	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью

14

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	2	2	0	16
II	0	2	1	10
III	1	2	0	12
Прибыль	2	6	1	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью

15

Сырье	Продукция			Запасы сырья
	A	B	C	
I	0	2	0	10
II	0	5	3	30
III	1	1	1	8
Прибыль	1	2	2	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью

Варианты 16–30

Из двух видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее указанных единиц химического вещества A, B, C соответственно. Цена 1 кг сырья каждого вида, а также количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указаны в таблицах вариантов. Составить смесь, имеющую минимальную стоимость.

Требуется: 1) построить математическую модель задачи; 2) привести задачу к канонической форме; 3) дать геометрическую интерпретацию решения; 4) решить задачу симплекс-методом; 5) проанализировать результаты решения; 6) составить к данной задаче двойственную и, используя соответствие переменных, выписать ответ двойственной задачи; 7) дать экономическую интерпретацию двойственных оценок.

16

Вещество	Количество ед. вещества, в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	1	2	12
B	5	2	20
C	0	4	12
Цена 1 кг сырья	2	4	–

Необходимо, чтобы вещество C вида было израсходовано полностью

17

Вещество	Количество ед. вещества, в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	0	5	10
B	4	2	28
C	2	5	30
Цена 1 кг сырья	4	10	–

Необходимо, чтобы сырье B вида было израсходовано полностью

18

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	2	1	14
B	1	1	10
C	2	0	6
Цена 1 кг сырья	4	2	–

Вещество A должно быть израсходовано полностью

19

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	4	2	20
B	2	4	16
C	6	0	18
Цена 1 кг сырья	6	3	–

Вещество С должно быть израсходовано полностью

20

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	3	0	12
B	2	4	24
C	3	2	24
Цена 1 кг сырья	9	6	–

Вещество В должно быть израсходовано полностью

21

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	3	2	24
B	0	6	18
C	3	4	36
Цена 1 кг сырья	6	8	–

Вещество А должно быть израсходовано полностью

22

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	4	0	12
B	4	5	40
C	4	2	28
Цена 1 кг сырья	2	1	–

Вещество А должно быть израсходовано полностью

23

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	1	2	10
B	6	0	12
C	3	2	18
Цена 1 кг сырья	6	4	

Вещество C должно быть израсходовано полностью

24

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	5	2	30
B	5	0	10
C	2	2	18
Цена 1 кг сырья	10	4	

Вещество B должно быть израсходовано полностью

25

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	2	2	20
B	0	4	12
C	1	2	14
Цена 1 кг сырья	2	4	

Вещество C должно быть израсходовано полностью

26

Вещество	Количество ед. вещества в 1 кг сырья		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	0	8	16
B	4	3	24
C	2	3	18
Цена 1 кг сырья	4	6	

Вещество A должно быть израсходовано полностью

27

Вещество	Количество ед. вещества, в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	0	7	14
B	2	4	20
C	3	2	18
Цена 1 кг сырья	3	6	–

Вещество C должно быть израсходовано полностью

28

Вещество	Количество ед. вещества, в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	2	5	30
B	6	0	24
C	4	2	28
Цена 1 кг сырья	8	4	–

Вещество C должно быть израсходовано полностью

29

Вещество	Количество ед. вещества, в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	0	4	8
B	1	2	8
C	3	1	9
Цена 1 кг сырья	3	6	–

Вещество B должно быть израсходовано полностью

30

Вещество	Количество ед. вещества, в 1 кг сырья каждого вида		Минимальное содержание вещества
	I	II	
A	2	1	12
B	1	2	12
C	4	0	8
Цена 1 кг сырья	4	2	–

Вещество A должно быть израсходовано полностью

Задание 4

1. Построить двойственную задачу к данной задаче.

2. Решить двойственным симплекс-методом исходную задачу и симплекс-методом двойственную к ней.

3. По оптимальному решению одной из задач найти оптимальное решение другой задачи.

1 $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 - x_2 \to \max$	**2** $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$	**3** $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 25 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$
4 $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 25 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$	**5** $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = x_1 + 3x_2 \to \max$	**6** $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$
7 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$	**8** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$	**9** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 5x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 5x_1 - x_2 \to \max$
10 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 3x_1 - 5x_2 \to \max$	**11** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = 3x_1 - x_2 \to \max$	**12** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ $F(x) = x_1 + x_2 \to \max$

13 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$	**14** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 - 4x_2 \to \max$	**15** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ 4x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = x_1 + 4x_2 \to \max$
16 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = -2x_1 + 3x_2 \to \max$	**17** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = -2x_1 + 3x_2 \to \max$	**18** $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$
19 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 3x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = -2x_1 + 3x_2 \to \max$	**20** $\begin{cases} x_1 + 8x_2 \ge 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$	**21** $\begin{cases} x_1 + 8x_2 \ge 8 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$
22 $\begin{cases} x_1 + 8x_2 \ge 8 \\ -x_1 + 3x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = x_1 - x_2 \to \max$	**23** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 3x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = -x_1 + 2x_2 \to \max$	**24** $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 8x_2 \ge 8 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = 7x_1 + 2x_2 \to \max$
25 $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 8x_2 \ge 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = x_1 - 4x_2 \to \max$	**26** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + 8x_2 \ge 8 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = -3x_1 + 6x_2 \to \max$	**27** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = -2x_1 + 3x_2 \to \max$

28	29	30
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 8x_2 \ge 8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 3x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $F(x) = 6x_1 + x_2 \to \max$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М., 1986.
2. Ермаков В.И. Высшая математика для экономистов, М., 2002.
3. Высшая математика для экономистов/под ред. Н.Ш. Кремера. М., 1997. 440с.
4. Исследование операций в экономике/под ред. Н.Ш. Кремера. М., 1997.
5. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М., 1975.
6. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. М., 1982. Ч. 2
7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании. М., 2001.
8. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие. М., 1985.
9. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. М., 2001.
10. Минорский Б.П. Сборник задач по высшей математике. М., 1986.
11. Сборник задач по высшей математике для экономистов/под ред. В.И. Ермакова. М., 2002.
12. Шипачев В.С. Высшая математика. М., 1996.
13. Шипачев В.С. Задачи по высшей математике. М., 1996.

Учебное издание

З а с я д к о   Ольга Владимировна
М о р о з   Ольга Викторовна

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Подписано в печать 25.05.2014. Формат 60×84 1/8.
Уч.-изд. л. 8,0.
Бумага Maestro. Печать трафаретная.
Тираж 200 экз. Заказ № .

Кубанский государственный университет
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

Типография ООО «Просвещение-Юг»
350059, г. Краснодар, ул. Селезнева, 2 . Тел./факс: 239-68-31.