

Семенчин Е.А., Кузякина М.В.

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
АТМОСФЕРНОЙ ДИФФУЗИИ**

Краснодар – 2012

УДК 519.7:574
ББК 22.193:20.1
К 894

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, доцент *К.А. Лебедев*,
доктор физико-математических наук, профессор *В.А. Толпаев*

Семенчин Е. А., Кузякина М. В.

К 894 Стохастические методы решения обратных задач
в математической модели атмосферной диффузии: Монография.
Москва: Физматлит, 2012. – 176 с.
ISBN 978-5-94052-204-1

Издание посвящено актуальной, но малоизученной теме. В основу монографии легли результаты многолетних исследований авторов посвященных обратным задачам в рамках математической модели рассеяния примеси в атмосфере. На основе этих исследований разработана математическая модель оценки и прогноза величины экономического ущерба, причиняемого региону промышленными предприятиями, выбрасывающими в атмосферу экологически вредные вещества.

Монография ориентирована на широкий круг специалистов, занимающихся проблемами математического моделирования в области физики атмосферы и охраны окружающей среды, а так же на студентов и аспирантов вузов, изъявившими желание заниматься исследованием этих проблем.

УДК
519.7:574
ББК
22.193:20.1

ISBN 978-5-94052-204-1

© Издательство физико-математической
литературы, 2012
© Семенчин Е.А., 2012
© Кузякина М.В., 2012

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Актуальность и практическая значимость темы исследования

В настоящее время перед индустриально развитыми странами остро стоит проблема загрязнения окружающей среды, в частности, загрязнения атмосферного воздуха промышленными выбросами. Атмосферный воздух является жизненно важной составляющей окружающей среды.

Атмосфера представляет собой сложную динамическую систему, в которой протекают различные физико-химические процессы, интенсивность которых зависят от конкретных характеристик рассматриваемого региона, а также от долготы, широты и высоты, на которых протекает процесс.

Острая необходимость в изучении роли атмосферных физико-химических и кинетических процессов в образовании аэрозольных частиц, в трансформации малых газовых компонентов естественного и антропогенного происхождения во всем комплексе наук об атмосфере определилась лишь в последние годы [1].

В настоящее время значительное число работ посвящено исследованию загрязнения атмосферы промышленными выбросами. Распространение примеси в атмосфере происходит за счет движения воздушных масс (ветра), турбулентной и молекулярной диффузии (молекулярная диффузия при описании распространения примеси, как правило, не учитывается). Математическая модель турбулентной диффузии представляет собой краевую задачу: полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии (которое является линейным уравнением в частных производных параболического типа) с заданными для его решения начальным и граничными условиями [9], [35].

Построению и исследованию математической модели процесса рассеяния примесей в турбулентной атмосфере посвящены многочисленные исследования как у нас в стране: Марчук Г. И., Берлянд М. Е., Монин А. С., Бызова Н. Л., Алоян А. Е., Яглом А. М., Петросян Л. А., Захаров В. В., Белолипецкий В. М., Шокин Ю. П., Гринин А. С., Орехов Н. А., Новиков В. Н., Романов М. Ф.,

Федоров М. П. и др., так и за рубежом: Вайнерди Р., Гиффорд Ф., Хан С., Махони Ж. Р., Иган Б. А., Фокс О. Г. и др.

Среди задач, естественным образом возникающих в рамках указанной модели, большое прикладное значение имеют так называемые обратные задачи: определить некоторые параметры краевой задачи, описывающей атмосферную диффузию (функцию, описывающую фоновую концентрацию, коэффициенты турбулентной диффузии и т.д.) по результатам замеров концентрации примеси в атмосфере и известным значениям других параметров (например, определить мощность источника примеси по результатам замеров в атмосфере концентрации примеси и известным значениям всех остальных параметров – коэффициентам полуэмпирического уравнения, параметрам, входящим в начальное и граничные условия).

Обратные задачи в рамках указанной модели начали исследовать сравнительно недавно. Например, в работе [32] были предложены алгоритмы численного решения обратной задачи о точечном источнике примеси, т. е. задачи о восстановлении мощности источника в рамках математической модели осаждения примеси в атмосфере по известным параметрам этой модели и экспериментальным данным о распределении плотности осадка примеси на заданной поверхности.

Однако во всех указанных исследованиях игнорируются случайные ошибки, появляющиеся при измерении концентрации. Поэтому задачи определения мощности источника примеси по замерам ее концентрации с учетом случайных ошибок и заданным параметрам модели остаются малоисследованными.

В данной монографии описаны алгоритмы численного решения обратной задачи для точечного источника примеси, учитывающие такие ошибки.

Решение задачи об оценке мощности источника примеси позволяет ускорять создание мобильных экологических станций, осуществляющих оперативный мониторинг окружающей среды. Кроме того, информацию о мощности источника выбросов можно использовать в существующих методиках оценки экономического ущерба, причиняемого региону атмосферными выбросами, методиках оценки величины предотвращенного ущерба и т.д.

Приведенные выше факты указывают на актуальность

и практическую значимость результатов исследований, изложенных в монографии.

В.2. Цель и задачи проведенного исследования.

Проводившиеся исследования были направлены на решение следующей **научной задачи**: разработать и реализовать на ЭВМ методы решения обратных задач, возникающих в рамках математической модели рассеяния примеси в атмосфере – определить мощность источника примеси по замерам ее концентрации в атмосфере и основным параметрам модели, определить высоту источника примеси, построить оценку вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии по замерам ее концентрации в атмосфере, основным параметрам модели и замерам мощности источника примеси; используя полученные результаты, разработать математические модели прогноза значений мощности точечного источника, величины экономического ущерба, причиняемого атмосфере выбросами промышленных предприятий.

Для полного исследования указанной выше научной задачи необходимо было решить ряд более частных задач.

1. Аналитическими методами найти решение задачи о восстановлении мощности точечного источника в рамках математической модели рассеяния примеси в атмосфере.

2. Предложить методики численного решения обратной задачи о мощности точечного источника в рамках математической модели рассеяния примеси в атмосфере, которая учитывала бы случайный характер ошибок измерения концентрации этой примеси.

3. Предложить методику прогноза значений мощности источника примеси, выбрасываемой в атмосферу этим источником.

4. Предложить и исследовать математическую модель оценки и прогноза величины экономического ущерба, причиняемого региону промышленными предприятиями, выбрасывающими в атмосферу экологически вредные вещества.

Объект исследования – математическая модель диффузии (рассеяния) примеси в турбулентной атмосфере.

Предмет исследования – обратные задачи в рамках указанной математической модели рассеяния примеси в атмосфере.

В.3. Научная новизна результатов, приведенных в монографии

1. Разработаны алгоритмы численного определения значений мощности точечного источника примеси методами стохастической фильтрации, учитывающие случайные ошибки измерения априорно заданной концентрации примеси в атмосфере и позволяющие адекватно экспериментальным данным оценить значения этой мощности.
2. Разработаны алгоритмы определения вероятностными методами значений мощности источника примеси, основанные на гауссовом приближении решения краевой задачи, описывающей турбулентную диффузию примеси в атмосфере, и на использовании аналитического решения этой задачи, построенного методом преобразования координат.
3. Предложена стохастическая модель прогноза значений мощности точечного источника непрерывного действия.
4. Предложена математическая модель прогноза экономического ущерба, причиняемого региону промышленными предприятиями, выбрасывающими в атмосферу экологически вредные вещества.

Основные результаты монографии принадлежат авторам и опубликованы в работах [27], [46] – [58], были доложены на международных и всероссийских научных конференциях по математике и экологии:

«Прикладная математика XXI века: VIII объединенная научная конференция факультета компьютерных технологий прикладной математики КубГУ» (г. Краснодар, 2008 г.);

«Актуальные проблемы экологии, экономики, социологии и пути их решения: XIV международная конференция» (п. Шепси, 2008 г.);

«X Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике» (г. Сочи-Дагомыс, 2009 г.).

«Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах: VII Всероссийская научная конференция молодых ученых и студентов» (г. Анапа, 2010 г.).

«XI Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной

математике» (г. Сочи-Дагомыс, 2010 г.).

Многие результаты, изложенные в монографии, реализованы в программных продуктах «ОФКВ», «МФКВ», «VK». «ОФКВ», «МФКВ» зарегистрированы в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ [28], [29].

В.4 Содержание работы.

Первая глава – вводная. Здесь приведены сведения, которые будут использованы в последующих главах для исследования сформулированных в этих главах задач (прямых и обратных в рамках математической модели рассеяния примеси в турбулентной атмосфере). Приводимые сведения относятся к различным разделам прикладной математики: краевым задачам, описывающим рассеяние примеси в турбулентной атмосфере, теории регуляризации некорректно поставленных задач, теории стохастической оптимальной фильтрации и экстраполяции случайных процессов.

Во второй главе приведен обзор постановок некоторых прямых и обратных задач атмосферной диффузии. В силу ограниченности объема многие вопросы изложены сжато, а некоторые – вообще не затронуты. Несмотря на столь схематичный стиль изложения, представленный здесь материал будет интересен в первую очередь начинающим исследователям и поможет им сориентироваться в выборе научной темы.

В третьей главе представлены результаты исследований на корректность постановки краевой задачи, описывающей рассеяние примеси в турбулентной атмосфере и представляющей собой математическую модель турбулентной диффузии этой примеси.

В четвертой главе описаны способы решения некоторых обратных задач в рамках указанной математической модели рассеяния примеси, основанные на гауссовом приближении решения краевой задачи и на использовании метода преобразования координат.

В пятой главе предложены методики построения оценок параметров математической модели рассеяния примеси в атмосфере, основанные на использовании методов стохастической линейной фильтрации.

В шестой главе результаты пятой главы использованы для стохастического прогноза значений некоторых параметров математической модели рассеяния примеси в атмосфере.

В седьмой главе описаны методы расчета экономического ущерба, причиняемого атмосфере выброшенными в нее вредными веществами.

Монография ориентирована на широкий круг специалистов, занимающихся проблемами математического моделирования области физики атмосферы и охраны окружающей среды, а так же на студентов и аспирантов вузов, изъявившими желание заниматься исследованием этих проблем.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МОНОГРАФИИ И ПОЯСНЕНИЯ К НИМ

О.1. Обозначения согласно [9], [35]

x, y, z – декартовы координаты.

H – высота источника примеси.

s, t – моменты времени.

z_0 – уровень шероховатости подстилающей поверхности.

$q, q(t, x, y, z)$ – средняя концентрация примеси в атмосфере в момент времени t в точке (x, y, z) .

K_x – коэффициент турбулентной диффузии вдоль оси Ox .

K_y – коэффициент турбулентной диффузии вдоль оси Oy .

K_z – коэффициент турбулентной диффузии вдоль оси Oz .

u – компонента скорости ветра вдоль оси Ox .

v – скорость скорости ветра вдоль оси Oy .

w – скорость осаждения частиц примеси вдоль оси Oz .

$\varphi(x, y, z)$ – фоновая концентрация примеси в точке (x, y, z) .

V_s – скорость сухого осаждения частиц примеси.

f – функция источника примеси.

w – средняя скорость осаждения примеси на подстилающую поверхность.

w_1 – средняя скорость вертикальных движений в атмосфере.

$Q(t)$ – количество примеси, выброшенное источником примеси в атмосферу в момент t (мощность источника примеси).

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

$\alpha(t)$ – коэффициент, характеризующий процессы распада или вступление в реакцию примеси с внешней средой.

О.2. Обозначения согласно [31]

E^n – n -мерное евклидово пространство; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная точка, принадлежащая E^n .

E^{n+1} – $(n+1)$ -мерное евклидово пространство, точки которого являются (x, t) , $x \in E^n$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Ω – ограниченная область в E^n .

$S, \partial\Omega$ – граница Ω .

$\bar{\Omega}$ – замыкание Ω : $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$.

K_ρ – шар радиуса ρ с центром в произвольной точке $x^0 \in S$.

$\Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega$.

Q_T – цилиндр $\Omega \times (0, T)$, т.е. совокупность точек $(x, t) \in E^{n+1}$, где $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$.

Q' – произвольное открытое множество в E^{n+1} , принадлежащее Q_T .

S_T – боковая поверхность Q_T : совокупность точек $(x, t) \in E^{n+1}$, где $x \in S$, $t \in [0, T]$.

$\Gamma_T = S_T \cup \{(x, t): x \in \Omega, t = 0\}$.

$S_0 = \{(x, t): x \in S, t = 0\}$; $\Gamma_0 = \{(x, t): x \in \bar{\Omega}, t = 0\}$.

$Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1 < t < t_2)$.

$Q(\rho, \tau)$ – произвольный цилиндр вида

$$\{(x, t): |x - x^0| < \rho, t_0 < t < t_0 + \tau\}.$$

$Q(k, \rho, \tau)$ – совокупность точек $(x, t) \in Q(\rho, \tau)$, в которых исследуемая функция $u(x, t) > k$.

$Q_{t_1}(k)$ - совокупность точек $Q_{t_1} = \Omega \times (0 < t < t_1)$, в которых $u(x, t) > k$.

$\nu, \mu, \varepsilon, \delta, \delta_k, \theta, \theta_k, \gamma, \alpha, \beta$ – положительные постоянные, причем $\alpha \in (0, 1)$.

$\nu(t)$ – положительная невозрастающая непрерывная функция, определенная при $t \geq 0$.

$\mu(t)$ – положительная неубывающая непрерывная функция, определенная при $t \geq 0$.

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \text{ – символ Кронекера.}$$

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x^2 = |x|^2,$$

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad |p| = \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$p^2 = |p|^2, \quad |u_x| = \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u_x^2 = |u_x|^2, \quad u_{x_i}^2 = (u_{x_i})^2,$$

$$|u_{xx}| = \left(\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$osc\{u(x); \Omega\}$ – колебание $u(x)$ на Ω , т.е. разность между $vrai \max_{\Omega} u(x)$ и $vrai \min_{\Omega} u(x)$ ($u(x)$ из $W_q^1(\Omega)$, имеет конечный $vrai \max_{\Omega} u(x)$, если найдется функция $\varphi(x) \in W_q^1(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$, для которой [31]

$$u(x) - \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}_q^1(\Omega),$$

(определения $W_q^1(\Omega)$, $L_{\infty}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}_q^1(\Omega)$ см. ниже). Аналогично определяется $osc\{u(x,t); Q_T\}$.

$$\frac{d}{dx_i} [a(x,t,u(x,t),u_x(x,t))] -$$

выражение, означающее, что

$$\frac{d}{dx_i} [a(x,t,u(x,t),u_x(x,t))] = \frac{\partial a}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial u} u_{x_i} + \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i}$$

(здесь и всюду далее по парам одинаковых индексов подразумевается суммирование в пределах от 1 до n , в частности,

$$\frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}} u_{x_k x_i}).$$

Иногда, когда это не вызывает путаницы, знак полного дифференциала

$$\frac{d}{dx_i}$$

заменяется знаком

$$\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Например, в линейном уравнении члены

$$\frac{d}{dx_i} (a_{ij}(x,t)u_{x_j}(x,t))$$

обычно записывают [31] в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,t)u_{x_j}(x,t)).$$

\mathbf{n} – единичный вектор нормали к S в какой-либо ее точке, внешней по отношению к Ω .

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ – оператор дифференцирования вдоль \mathbf{n} .

О.3. Основные функциональные пространства

$L_q(\Omega)$ – банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Ω функций, суммируемых по Ω со степенью $q \geq 1$. Норма в $L_q(\Omega)$ определяется соотношением

$$\|u\|_{q,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Измеримость и суммируемость понимается всюду в смысле Лебега.

$L_{q,r}(Q_T)$ – банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Q_T функций с конечной нормой

$$\|u\|_{q,r,Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(x,t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}},$$

причем $q \geq 1$ и $r \geq 1$.

$L_{q,q}(\mathcal{Q}_T)$ будем обозначать $L_q(\mathcal{Q}_T)$, а норму

$$\|\cdot\|_{q,q,\mathcal{Q}_T} -$$

через

$$\|\cdot\|_{q,\mathcal{Q}_T}.$$

Обобщенные производные понимаются в смысле определения, приведенного в монографии [31].

$W_q^l(\Omega)$ (или просто W_q^l) при l целом – банахово пространство, элементами которого являются элементы $L_q(\Omega)$, имеющие обобщенные производные до порядка l включительно, суммируемые по Ω со степенью q .

$\|u\|_{q,\Omega}^{(l)}$ – норма в $W_q^l(\Omega)$, которая определяется равенством

$$\|u\|_{q,\Omega}^{(l)} = \sum_{j=0}^l \langle\langle u \rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)}, \quad (\text{O.3.1})$$

где

$$\langle\langle u \rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)} = \sum_{(j)} \|D_x^j u\|_{q,\Omega}. \quad (\text{O.3.2})$$

$D_x^j u$ – производная $u(x)$ по x порядка j ,

$$\sum_{(j)} -$$

суммирование по всевозможным производным u порядка j . Для областей с «не слишком плохой» границей (например, с кусочно-гладкой границей) $W_q^l(\Omega)$ совпадает с замыканием в норме (O.1) множества всех бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций [31].

$\dot{W}_q^l(\Omega)$ – множество элементов $W_q^l(\Omega)$, финитных в Ω .

$\overset{\circ}{W}_q^l(\Omega)$ – подпространство пространства $W_q^l(\Omega)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых, финитных в Ω функций. Известно [31], что

$$\dot{W}_q^l(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}_q^l(\Omega).$$

$L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ – определяется для пространства с положительной мерой (S, Σ, μ) и состоит из всех существенно ограниченных относительно μ скалярных функций [17], где нормой служит

$$|f| = \operatorname{vrai\,sup}_{\mu} |f(s)|.$$

$L_2(a, b)$, или кратко L_2 , – пространство всех функций квадратично интегрируемых на отрезке $[a, b]$.

$W_q^{2l, l}(Q_T)$ при l целом ($q \geq 1$) – банахово пространство, состоящее из элементов $L_q(Q_T)$, имеющих обобщенные производные вида $D_t^r D_x^s$, r, s – неотрицательные целые числа, $2r + s \leq 2l$. Норма в $W_q^{2l, l}(Q_T)$ определяется равенством

$$\|u\|_{q, Q_T}^{(2l)} = \sum_{j=0}^{2l} \langle\langle u \rangle\rangle_{q, Q_T}^{(j)}, \quad (\text{O.3.3})$$

где

$$\langle\langle u \rangle\rangle_{q, Q}^{(j)} = \sum_{(2r+s=j)} \|D_t^r D_x^s u\|_{q, Q_T}. \quad (\text{O.3.4})$$

$W_2^{1,0}(Q_T)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + u_{x_k} v_{x_k}) dx dt.$$

$W_2^{1,1}(Q_T)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{1,1}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + u_{x_k} v_{x_k} + u_t v_t) dx dt.$$

$V_2(Q_T)$ – банахово пространство, элементами которого являются элементы $W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$|u|_{Q_T} = \operatorname{vrai\,max}_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{2, \Omega} + \|u_x\|_{2, Q_T}, \quad (\text{O.3.5})$$

$$\|u_u\|_{q, Q_T} = \sqrt{\int_{Q_T} u_x^2 dx dt}.$$

$V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство, элементами которого является элементы $V_2(Q_T)$, с нормой

$$|u|_{Q_T} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{2, \Omega} + \|u_x\|_{2, Q_T}, \quad (\text{O.3.6})$$

непрерывные по t в норме $L_2(\Omega)$.

Непрерывность по t функции $u(x, t)$ в норме $L_2(\Omega)$ означает, что

$$\|u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\|_{2, \Omega} \rightarrow 0$$

при $\Delta t \rightarrow 0$. Пространство $V_2^{1,0}(Q_T)$ строится пополнением $W_2^{1,1}(Q_T)$ в норме $V_2(Q_T)$.

$V_2^{1,1/2}(Q_T)$ – подмножество элементов $u(x, t)$ пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ для каждого из которых

$$\int_0^{T-h} \int_{\Omega} h^{-1} [u(x, t+h) - u(x, t)]^2 dx dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Нуль сверху над $W_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$, $V_2(Q_T)$, $V_2^{1,0}(Q_T)$, $V_2^{1,1/2}(Q_T)$ (например,

$$W_q^{1,0}(\Omega))$$

означает, что берутся лишь те элементы этих пространств, которые обращаются в нуль на S_T .

О.4. Пространства Гёльдера

Функция $u(x)$, определенная в Ω , удовлетворяет условию Гёльдера по x с показателем α , $\alpha \in (0, 1)$, и константой Гёльдера

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)}$$

в области $\bar{\Omega}$, если [31]

$$\sup \rho^{-\alpha} \text{osc}\{u; \Omega_{\rho}^i\} \equiv \langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} < \infty, \quad (\text{O.4.1})$$

где \sup берется по всем связным компонентам Ω_{ρ}^i всех Ω_{ρ} с $\rho \leq \rho_0$.

Для «не слишком плохой» границы области Ω (например, кусочно-гладкой без двойных точек) $\langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)}$ можно определить с помощью соотношения

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x-x'| \leq \rho_0}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^{\alpha}}. \quad (\text{O.4.2})$$

Для областей с двойным куском границы (например для области

$$\{(x_1, x_2): |x_1| < 1, |x_2| < 1 \text{ и } x_2 \neq 0 \text{ при } |x_1| \leq \frac{1}{2}\}$$

определения (О.4.1) и (О.4.2) неэквивалентны [31]. В этом случае следует придерживаться первого из них.

$H^l(\overline{\Omega})$, $H^{l, l/2}(\overline{Q}_T)$ – пространства Гёльдера, l – нецелое положительное число.

$H^l(\overline{\Omega})$ – банахово пространство, элементами которого являются непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции $u(x)$, имеющие в $\overline{\Omega}$ непрерывные производные до порядка $|l|$ включительно и конечное значение величины

$$|u|_{\Omega}^{(l)} = \langle u \rangle_{\Omega}^{(l)} + \sum_{j=0}^{|l|} \langle u \rangle_{\Omega}^{(j)}, \quad (\text{О.4.3})$$

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(0)} = |u|_{\Omega}^{(0)} = \max_{\Omega} |u|,$$

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(j)} = \sum_{(j)} |D_x^j u|_{\Omega}^{(0)}, \quad \langle u \rangle_{\Omega}^{(l)} = \sum_{(|l|)} \langle D_x^{|l|} u \rangle_{\Omega}^{(l-|l|)}.$$

Равенство (О.9) определяет норму $|u|_{\Omega}^{(l)}$ в $H^l(\overline{\Omega})$ [31].

$H^{l, l/2}(\overline{Q}_T)$ – банахово пространство функций $u(x, t)$, непрерывных в \overline{Q}_T вместе со всеми производными вида $D_t^r D_x^s$, $2r + s < l$, и с конечной нормой

$$|u|_{Q_T}^{(l)} = \langle u \rangle_{Q_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{|l|} \langle u \rangle_{Q_T}^{(j)}, \quad (\text{О.4.4})$$

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(0)} \equiv |u|_{Q_T}^{(0)} = \max_{Q_T} |u|,$$

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(j)} = \sum_{(2r+s=j)} |D_t^r D_x^s u|_{Q_T}^{(0)},$$

$$\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(l)} = \langle u \rangle_{x, Q_T}^{(l)} + \langle u \rangle_{t, Q_T}^{(l/2)},$$

$$\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(l)} = \sum_{(2r+s=j)} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{x, Q_T}^{(l-|l|)},$$

$$\langle u \rangle_{t, Q_T}^{(l/2)} = \sum_{0 < l-2r-s < 2} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{t, Q_T}^{\left(\frac{l-2r-s}{2}\right)};$$

$$\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x,t), (x',t) \in \bar{Q}_T \\ |x-x'| \leq \rho_0}} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x-x'|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{O.4.5})$$

$$\langle u \rangle_{t, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x,t), (x',t) \in \bar{Q}_T \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|t-t'|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{O.4.6})$$

На границах S с двойными точками вместо (O.4.5) $\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(\alpha)}$ определяется соотношением [31]:

$$\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{t \in [0, T]} \sup \rho^{-\alpha} \text{osc}_x \{u(x, t); \Omega_\rho^i\}$$

(второй sup взят по всем связным компонентам Ω_ρ^i всех Ω_ρ с $\rho \leq \rho_0$,

$$\text{osc}_x \{u(x, t); \Omega_\rho^i\} = \text{vrai max}_{x \in \Omega_\rho^i} u(x, t) - \text{vrai min}_{x \in \Omega_\rho^i} u(x, t).$$

При $l < 1$ пространства $H^l(\bar{\Omega})$ и $H^{l, l/2}(\bar{Q}_T)$ обозначают соответственно через $H^\alpha(\bar{\Omega})$ и $H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T)$ [31]. Нормы, определенные в $H^l(\bar{\Omega})$ и в $H^{l, l/2}(\bar{Q}_T)$, зависят от ρ_0 , но при разных $\rho_0 > 0$ эквивалентны друг другу, и поэтому зависимость их от ρ_0 , как правило, не отмечается [31].

$H^l(\Omega)$ – множество функций, принадлежащих $H^l(\Omega')$ для любой замкнутой подобласти $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

$H^{l, l/2}(Q_T)$ – множество функций, принадлежащих $H^{l, l/2}(\bar{Q}')$ для любой замкнутой подобласти $\bar{Q}' \subset Q_T$.

$C(\bar{\Omega})(C(\Omega))$ – совокупность непрерывных в $\bar{\Omega}$ (в Ω) функций (аналогично определяются $C(\bar{Q}_T)$ и $C(Q_T)$ [31]).

$C^l(\bar{\Omega})$ ($C^l(\Omega)$) – совокупность непрерывных в $\bar{\Omega}$ (Ω) функций, имеющих непрерывные в $\bar{\Omega}$ (Ω) производные до порядка l включительно.

$C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ ($C^{2,1}(Q_T)$) – совокупность непрерывных в \bar{Q}_T (в Q_T) функций, имеющих непрерывные в \bar{Q}_T (в Q_T) производные u_x , u_{xx} , u_t .

$C^{1,1/2}(\bar{Q}_T)$ – совокупность непрерывных в \bar{Q}_T функций, удовлетворяющих условию Липшица по x и условию Гёльдера с показателем $1/2$ по t .

$O^l(\bar{\Omega})(l=1,2)$ – совокупность непрерывных в $\bar{\Omega}$ производные до порядка $l-1$, причем производные порядка $l-1$ имеют первый дифференциал в каждой точке $\bar{\Omega}$ и производные порядка l ограничены в $\bar{\Omega}$.

$O^{2,1}(\bar{Q}_T)(O^{2,1}(Q_T))$ – совокупность непрерывных в \bar{Q}_T (в Q_T) функций, имеющих в каждой точке \bar{Q}_T (Q_T) производные u_x и u_t , причем u_x непрерывны по x и имеют первый дифференциал по x в каждой точке \bar{Q}_T (Q_T) и функции u_x , u_t , u_{xx} ограничены в \bar{Q}_T (в Q_T).

0.5. Определения и пояснения понятий, использованных в приведенных выше обозначениях

Функция $u(x)$ или $u(x,t)$ называется финитной в Ω (в Q_T), если она отлична от нуля лишь на каком-нибудь компактном множестве, отстоящем от границы Ω (Q_T) на положительном расстоянии.

Функция $\zeta(x)$ (или $\zeta(x,t)$) называется срезающей для области Ω (для Q_T), если она непрерывна в $\bar{\Omega}$ (в \bar{Q}_T), имеет кусочно-непрерывные ограниченные производные первого порядка, обращается в нуль на границе этой области (на Γ_T), и ее значения заключены между нулем и единицей [31].

«Кусочно-гладкими границами с ненулевыми внутренними углами» (или «кусочно-гладкими границами») называют [31] области в Ω , замыкание которых можно представить в виде $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \dots \cup \bar{\Omega}_N$, $\Omega_j \cap \Omega_i = 0$, причем каждую из $\bar{\Omega}_k$ можно гомеоморфно отобразить на единичный шар или куб с помощью функций $z_i^k(x)$ ($i=1,2,\dots,n; k=1,\dots,N$), удовлетворяющих в $\bar{\Omega}_k$ условию Липшица и таких, что якобианы преобразований

$$\left| \frac{\partial(z^k)}{\partial(x)} \right|$$

ограничены снизу положительной постоянной.

Граница S области Ω (или ее часть S_1) удовлетворяет условию (A), если существуют два положительных числа a_0 и θ_0 таких, что для любого шара K_ρ с центром на S (на S_1 соответственно) радиуса $\rho \leq a_0$ и любой из связных компонент Ω_ρ^i пересечения Ω_ρ шара K_ρ с Ω имеет место неравенство

$$mes\Omega_\rho^i \leq (1 - \theta_0)mesK_\rho.$$

Пусть $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ – какая-либо точка границы S области Ω . Назовем (y_1, \dots, y_n) местной декартовой системой координат с началом в точке x^0 , если y и x связаны равенствами $y_i = a_{ik}(x_k - x_k^0)$, $i = 1, \dots, n$, где a_{ik} – ортогональная числовая матрица, а ось y_n направлена по внешней по отношению к Ω нормали к S в точке x^0 .

Поверхность S принадлежит классу H^l , $l > 1$ (или C^l , или O^l , $l \geq 1$), если существует число $\rho > 0$ такое, что пересечение S с шаром K_ρ радиуса ρ с центром в произвольной точке $x^0 \in S$ есть связная поверхность, уравнение которой в местной системе координат (y_1, \dots, y_n) с началом в точке x^0 имеет вид $y_n = \omega(y_1, \dots, y_{n-1})$, причем $\omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ есть функция класса H^l (C^l , или O^l соответственно) в области \bar{D} , являющейся проекцией $\bar{K}_\rho \cap S$ на плоскость $y_n = 0$.

Пусть на поверхности S класса H^{l_1} , $l_1 > 1$ (C^{l_1} , или O^{l_1}) задана функция $\varphi(s)$. Будем говорить, что $\varphi(s)$ есть функция класса $H^l(S)$, $l \leq l_1$, если она как функция y_1, \dots, y_{n-1} есть элемент $H^l(\bar{D})$. Наибольшую из норм $|\varphi(y)|_D^{(l)}$, подсчитанных для всех точек x^0 поверхности S , берем за норму $|\varphi|_S^{(l)}$. Аналогично определяются функции классов $C^l(S)$ и $O^l(S)$.

Если φ задана на всей $\bar{\Omega}$ и $\varphi(x) \in H^l(\bar{\Omega})$ ($C^l(\bar{\Omega})$ или $O^l(\bar{\Omega})$), то на границе S области, принадлежащей классу H^{l_1} (C^{l_1} , или O^{l_1}) с $l_1 \geq \max\{1, l\}$, она определяет функцию $\varphi(s) = \varphi(x)|_{x \in S}$ класса $H^l(S)$

($C^l(S)$ или $O^l(S)$ соответственно). Верно и обратное: если $\varphi(s) \in H^l(S)$ и $S \in H^l$, $l > 1$, то $\varphi(s)$ можно продолжить на всю область Ω так, чтобы продолженная функция $\varphi(x)$ принадлежала $H^l(\bar{\Omega})$. Более того, это продолжение можно делать для всех функций $\varphi(x)$ из $H^l(S)$ с помощью одной и той же конструкции, так что нормы $|\varphi(s)|_S^l$ и $|\varphi(x)|_S^{(l)}$ будут эквивалентны. Именно такое продолжение $\varphi(s)$ на Ω подразумевается, при постановке граничных условий с помощью функции $\varphi(x)$. Аналогичные факты верны и для пространств C^l и O^l с $l \geq 1$. Однако при $l < 1$ все сказанное о функциях на S , принадлежащих $H^l(S)$ ($C^l(S)$ или $O^l(S)$) неверно. Из двух возможных, но разных определений выбирается то, при котором сохраняется эквивалентность норм $|\varphi(s)|_S^l$ и $|\varphi(x)|_\Omega^{(l)}$,

$$|\varphi|_S^{(l)} \equiv \max_{s \in S} |\varphi(s)| + \sup(\rho^{-\alpha} \text{osc}\{\varphi(s); S_\rho^i\}), \quad (O.5.1)$$

где \sup берется по всем связанным компонентам S_ρ^i всех $K_\rho \cap S$ с $\rho \leq \rho_0$.

Все сказанное о поверхностях S в E_n и функциях $\varphi(s)$ на них аналогичным образом переносится на поверхности S_T в E_{n+1} и функции $\varphi(x, t)$, заданные на них.

ГЛАВА 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В данной главе приведены сведения, которые будут использованы в последующих главах для исследования поставленных в них задач (прямых и обратных в рамках математической модели рассеяния примеси в турбулентной атмосфере). Приводимые сведения относятся к различным разделам прикладной математики: краевым задачам, описывающим рассеяние примеси в турбулентной атмосфере, теории регуляризации некорректно поставленных задач, теории стохастической оптимальной фильтрации и экстраполяции случайных процессов.

1.1. Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии

Для моделирования переноса примесей в турбулентной атмосфере используется так называемое полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии.

1.1.1. Вывод полуэмпирического уравнения

Пусть $q(t, x, y, z)$ – функция, значения которой в момент времени t в точке

$$(x, y, z) \in E_+^3,$$

$$E_+^3 = \{(x, y, z) : x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in [0, \infty)\},$$

совпадают со значениями мгновенной концентрации примеси, переносимой в атмосфере потоками воздуха. Если в E_+^3 отсутствуют источники мигрирующей примеси, примесь не разлагается и не вступает в химические реакции с окружающей средой

(не подвержена изменениям), координаты x, y, z зависят от времени t : $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $q(t, x, y, z)$ – непрерывно дифференцируема по t, x, y, z , а $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ – по t , то [35]

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0, \quad (1.1.1)$$

где

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

компоненты скорости перемещения воздушных масс (ветра) соответственно вдоль осей Ox, Oy, Oz , которые обозначим

$$\frac{dx}{dt} = U, \frac{dy}{dt} = V, \frac{dz}{dt} = W.$$

В нижней части атмосферы с высокой точностью выполняется закон сохранения массы, выражаемый уравнением неразрывности:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0. \quad (1.1.2)$$

Умножив (1.1.2) на q и сложив с уравнением (1.1.1), придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(Uq)}{\partial x} + \frac{\partial(Vq)}{\partial y} + \frac{\partial(Wq)}{\partial z} = 0 \quad (1.1.3)$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(\tilde{U}q) = 0, \quad \tilde{U} = (U, V, W).$$

Уравнение (1.1.3), описывающее миграцию примеси с потоками воздушных масс, следует рассматривать одновременно с уравнением неразрывности (1.1.2).

Уравнение (1.1.3) можно обобщить. Пусть примесь в процессе миграции распадается (превращается в другие виды примеси) или вступает в реакцию с внешней средой, α – коэффициент, определяющий (характеризующий) такие изменения. Тогда (1.1.3) принимает вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(Uq)}{\partial x} + \frac{\partial(Vq)}{\partial y} + \frac{\partial(Wq)}{\partial z} + \alpha q = 0. \quad (1.1.4)$$

Если, кроме того, в E_+^3 , $z \geq 0$ есть источник примеси, описываемый функцией $f = f(t, x, y, z)$, то в этом случае имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(Uq)}{\partial x} + \frac{\partial(Vq)}{\partial y} + \frac{\partial(Wq)}{\partial z} + \alpha q = f. \quad (1.1.5)$$

Будем считать, что $q = q(t, x, y, z)$, $U = U(t, x, y, z)$, $V = V(t, x, y, z)$, $W = W(t, x, y, z)$ являются случайными полями и представимы в виде:

$$\begin{aligned} q &= \bar{q} + q', \\ U &= \bar{U} + U', \\ V &= \bar{V} + V', \\ W &= \bar{W} + W', \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

где $\bar{q} = Mq$, $\bar{U} = MU$, $\bar{V} = MV$, $\bar{W} = MW$ (M – знак математического ожидания), q' , U' , V' , W' – флуктуационные составляющие величин q, U, V, W , которые так же являются случайными полями с нулевым математическим ожиданием: $Mq' = MU' = MV' = MW' = 0$.

Пусть q' , U' , V' , W' не коррелируют между собой. Подставляя (1.1.6) в (1.1.5) и вычисляя математическое ожидание от левой и правой части, учитывая, что $Mf = f$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M[\bar{q} + q']}{\partial t} + \frac{\partial M[(\bar{U} + U')(\bar{q} + q')]}{\partial x} + \frac{\partial M[(\bar{V} + V')(\bar{q} + q')]}{\partial y} + \\ \frac{\partial M[(\bar{W} + W')(\bar{q} + q')]}{\partial z} + \alpha M[\bar{q} + q'] = Mf, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$$\begin{aligned} M[\bar{q} + q'] &= M\bar{q} + Mq' = M\bar{q} = \bar{q}, \\ M[(\bar{U} + U')(\bar{q} + q')] &= M[\bar{U}\bar{q} + \bar{U}q' + U'\bar{q} + U'q'] = \\ &= M[\bar{U}\bar{q}] + M[\bar{U}q'] + M[U'\bar{q}] + M[U'q'] = \\ &= \bar{U}\bar{q} + \bar{U}Mq' + \bar{q}MU' + M[U'q'] = \bar{U}\bar{q} + M[U'q'], \\ M[(\bar{V} + V')(\bar{q} + q')] &= M[\bar{V}\bar{q} + \bar{V}q' + V'\bar{q} + V'q'] = \\ &= M[\bar{V}\bar{q}] + M[\bar{V}q'] + M[V'\bar{q}] + M[V'q'] = \\ &= \bar{V}\bar{q} + \bar{V}Mq' + \bar{q}MV' + M[V'q'] = \bar{V}\bar{q} + M[V'q'], \\ M[(\bar{W} + W')(\bar{q} + q')] &= M[\bar{W}\bar{q} + \bar{W}q' + W'\bar{q} + W'q'] = \\ &= M[\bar{W}\bar{q}] + M[\bar{W}q'] + M[W'\bar{q}] + M[W'q'] = \\ &= \bar{W}\bar{q} + \bar{W}Mq' + \bar{q}MW' + M[W'q'] = \bar{W}\bar{q} + M[W'q'], \\ \alpha M[\bar{q} + q'] &= \alpha(M\bar{q} + Mq') = \alpha M\bar{q} = \alpha\bar{q}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M[\bar{q} + q']}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}, \\
\frac{\partial M[(\bar{U} + U')(\bar{q} + q')]}{\partial x} &= \bar{U} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial M[U'q']}{\partial x}, \\
\frac{\partial M[(\bar{V} + V')(\bar{q} + q')]}{\partial y} &= \bar{V} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial M[V'q']}{\partial y}, \\
\frac{\partial M[(\bar{W} + W')(\bar{q} + q')]}{\partial z} &= \bar{W} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + \frac{\partial M[W'q']}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Учитывая соотношения (1.1.8), равенство (1.1.7) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial M[U'q']}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial M[V'q']}{\partial y} + \\
+ \bar{W} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + \frac{\partial M[W'q']}{\partial z} + \alpha \bar{q} = f.
\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Предполагая, что для атмосферных процессов турбулентной диффузии выполняются следующие соотношения [35]:

$$\begin{aligned}
M(U'q') &= -K_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}, \\
M(V'q') &= -K_y \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}, \\
M(W'q') &= -K_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z},
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

и подставляя (1.1.10) в (1.1.9), приходим к уравнению:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{U}\bar{q})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{V}\bar{q})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{W}\bar{q})}{\partial z} + \alpha \bar{q} = \\
= \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + f.
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Если допустить, что вместо (1.1.10) выполняются более общие соотношения

$$\begin{aligned}
M(U'q') &= K_{11} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_2} + K_{13} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_3}, \\
M(V'q') &= K_{21} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_2} + K_{23} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_3}, \\
M(W'q') &= K_{31} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_1} + K_{32} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_2} + K_{33} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_3},
\end{aligned}$$

придем к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U}\bar{q})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}\bar{q})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{W}\bar{q})}{\partial z} + \alpha\bar{q} = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} K_{ij} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} + f. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Уравнение (1.1.11), как и уравнение (1.1.12), принято называть полуэмпирическим уравнением, а его коэффициенты K_x, K_y, K_z – коэффициентами турбулентной диффузии (соответственно вдоль осей Ox, Oy, Oz). Данное уравнение следует рассматривать, как и уравнение (1.1.3), совместно с соотношением неразрывности

$$\frac{d\bar{U}}{dx} + \frac{d\bar{V}}{dy} + \frac{d\bar{W}}{dz} = 0. \quad (1.1.13)$$

Уравнение (1.1.12) обобщает уравнение (1.1.11): если $K_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, то из (1.1.12) следует (1.1.11).

Для удобства записи черта сверху при функциях q, U, V, W опускается. С учетом соотношения (1.1.13) полуэмпирическое уравнение (1.1.11) или (1.1.12) обычно записывают в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} + V \frac{\partial q}{\partial y} + W \frac{\partial q}{\partial z} + \alpha q = \\ = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} + f, \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(Uq)}{\partial x} + \frac{\partial(Vq)}{\partial y} + \frac{\partial(Wq)}{\partial z} + \alpha q = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} K_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_j} + f. \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Составляющую средней скорости перемещения примеси вдоль оси Ox можно представить следующим образом:

$$W = w_1 - w,$$

где w_1 – средняя скорость вертикальных движений в атмосфере, w – средняя скорость осаждения примеси на подстилающую поверхность. Вертикальные движения в атмосфере малы [35], поэтому обычно полагают $w_1 = 0$, т.е. $W = -w$. Далее, если ось Ox сориентирована по направлению средней скорости ветра, то $V = 0$. В силу этих замечаний уравнение (1.1.15) можно представить следующим образом [9], [44]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} + \alpha q = \\ = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} + f. \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

Соотношение (1.1.16) представляет собой полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии в том виде, в котором будем использовать в дальнейшем.

При рассмотрении конкретных прикладных задач уравнение (1.1.16) можно упростить [9], [44]. В (1.1.16) можно положить:

- 1) $\alpha = 0$, если примесь в процессе переноса не распадается и не вступает в химические реакции с окружающей средой.
- 2) $w = 0$ если примесь является легкой;
- 3) $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$, если $\frac{\partial q}{\partial t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

(т.е. если за достаточно длительные промежутки времени процесс переноса вещества турбулентными потоками воздуха устанавливается, приобретает стационарный характер).

1.1.2. Начальные и граничные условия

При задании начальных и граничных условий, которым должно удовлетворять решение уравнения (1.1.14), исходят из предположений, что время t распространения примеси принадлежит интервалу $[t_0, T]$, т.е. $t \in [t_0, T]$, $t_0 \geq 0$, $t_0 < T$, а область Ω , в которой эта примесь распространяется, представляет собой полупространство (из E_+^3) вида

$$\Omega = \{(x, y, z): -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, z_0 \leq z < \infty\}, \quad (1.1.17)$$

где $z_0 = \text{const} > 0$ – так называемый уровень шероховатости подстилающей поверхности [9]; при этом часто уровнем шероховатости пренебрегают и полагают $z_0 = 0$. Исходя из этих предположений начальные и граничные условия задают в следующем виде:

$$q(t_0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (1.1.18)$$

$$\left\{ K_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq \right\} \Big|_{z=z_0} = V_s q \Big|_{z=z_0}, \quad (1.1.19)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, z \geq z_0, \quad (1.1.20)$$

где $\varphi(x, y, z)$ – некоторая функция (описывающая в Ω фоновую концентрацию), v_s – скорость сухого осаждения примеси на подстилающую поверхность [10]. Граничное условие (1.1.19) означает, что поток примеси P на земную поверхность, состоящий из турбулентной

$$K_z \frac{\partial q}{\partial z}$$

и гравитационной wq составляющих, равен $V_s q$. Заметим, что возможны и другие формы задания начального и граничных условий.

В стационарном режиме, когда при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial q}{\partial t} \rightarrow 0,$$

начальное условие (1.1.18) не учитывается. Краевая задача, описывающая распространение примеси от мгновенного источника, в этом случае принимает вид:

$$U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} + \alpha q = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (1.1.21)$$

$$\left\{ K_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq \right\} \Big|_{z=z_0} = \{V_s q\} \Big|_{z=z_0}, \quad (1.1.22)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, z \geq z_0. \quad (1.1.23)$$

Так как при задании уравнения (1.1.9) предполагается, что ось Ox ориентирована по направлению средней скорости ветра, то в этом случае влияние турбулентности на распространение примеси вдоль Ox мало, и поэтому часто коэффициент K_x в уравнении турбулентной диффузии так же не учитывается. В этом случае крайняя задача (1.1.21) – (1.1.23) принимает еще более простой вид:

$$U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} + \alpha q = \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (1.1.24)$$

$$\left\{ K_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq \right\} \Big|_{z=z_0} = \{V_s q\} \Big|_{z=z_0}, \quad (1.1.25)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, z \geq z_0. \quad (1.1.26)$$

Уравнение (1.1.24) имеет первый порядок по x и второй –

по переменным y и z . Поэтому для точечного источника, кроме граничных условий (1.1.25), (1.1.26), для решения уравнения (1.1.24) задают дополнительно [9] начальное условие по x :

$$Uq(0, y, z) = Q\delta(y)\delta(z - H). \quad (1.1.27)$$

1.1.3. Способы задания коэффициентов

Коэффициенты U , K_z в уравнении (1.1.9) могут быть заданы в следующем виде [9]:

$$U = U_1 \frac{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)}, \quad K_z = \begin{cases} \chi + K_1 \frac{z}{z_1}, & z < h, \\ \chi + K_1 \frac{h}{z_1}, & z \geq h, \end{cases} \quad (1.1.28)$$

где z_0 – уровень шероховатости подстилающей поверхности, z_1 – единичная высота (масштаб), χ – коэффициент молекулярной диффузии (часто коэффициент χ не учитывают, т.е. полагают $\chi = 0$), U_1 – скорость ветра на высоте z_1 , $K_1 = const$.

$$K_1 = \frac{\aleph^2 U_1}{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)} l \mathfrak{Z}\left(\frac{z_1}{l}\right),$$

l – масштаб Монина-Обухова;

$$l = \frac{0,1T_\alpha U_1}{\bar{g} \delta T} \cdot \frac{\ln\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)},$$

$$\mathfrak{Z}(x) = \begin{cases} x(1 + 0,54|x|^{0,8}), & x \leq 0, \\ \frac{x}{1 + 0,9x}, & 0 < x < 1, \\ 0,53, & x \geq 1, \end{cases}$$

δT – разность температуры T на высотах z_3, z_2 , $\aleph \approx 0,38$ (константа Кармана), \bar{g} – ускорение свободного падения, T_α – температура воздуха (в Кельвинах), h – высота приземного слоя,

$$h = 0,05 \frac{K_1}{z_1 w_z},$$

w_z - вертикальная составляющая угловой скорости движения Земли. Обычно при $z_1 = 1$, для конвективных условий $K_1 = 0,1 \div 0,2$ м/с, $h_1 = 50 \div 100$ м, при инверсиях K_1 , h существенно меньше.

При задании K_x , K_y исходят из следующих соображений [9]. Выше приземного слоя h атмосферная турбулентность имеет приблизительно изотропный характер. Вследствие этого при $z \geq h$ можно положить:

$$K_x \approx K_y \approx K_z. \quad (1.1.29)$$

При $z < h$ полагают (и это подтверждается экспериментальными данными), что

$$K_x \approx K_y \approx K_0 U, \quad K_0 = const. \quad (1.1.30)$$

Равенства (1.1.28)-(1.1.30) позволяют найти постоянную K_0 . Действительно, пусть $z = h$, тогда $K_h = K_y = K_0 U(h)$, но

$$K_h = K_1 \frac{h}{z_1}, \quad U(h) = U_1 \frac{\ln\left(\frac{h}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)},$$

(здесь $\chi = 0$). Поэтому

$$K_0 = \frac{K_h}{U(h)} = \frac{K_1 h \ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right)}{z_1 U_1 \ln\left(\frac{h}{z_0}\right)}.$$

Коэффициенты $U(z)$, K_z могут быть заданы также в виде степенных функций аргумента z [9]:

$$U(z) = U_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^n, \quad K_z = K_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^m, \quad (1.1.31)$$

где постоянные n и m должны быть подобраны таким образом, чтобы

$$U_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^n, \quad K_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^m$$

являлись наилучшими приближениями соответственно вертикального профиля скорости ветра и вертикальной составляющей коэффициента

турбулентной диффузии. Как правило, при $z_1 = 1$ $n \approx 0,15$, $m \approx 1$.

Скорость осаждения частиц примеси определяется по формуле Стокса [9]:

$$\omega = \frac{2(\rho - \rho_0)\bar{g}r^2}{9\nu}, \quad (1.1.32)$$

где ρ – плотность частиц примеси, ρ_0 – плотность воздуха при данных метеоусловиях, $\bar{g} = 9,80665 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, r – радиус частиц примеси (условно предполагается, что частицы имеют шарообразную форму), ν – коэффициент динамической вязкости воздуха.

Формула Стокса (1.1.32) справедлива для частиц примеси, которые удовлетворяют следующему условию:

$$R_e = \frac{2r\omega}{\nu} < 1.$$

Для более крупных частиц, когда число Рейнольдса:

$$R_e = \frac{2r\omega}{\nu} > 1,$$

в формулу (1.1.32) следует ввести коэффициент

$$K = 1 + \frac{3}{16}R_e,$$

то есть

$$\omega = 2K \frac{(\rho - \rho_0)\bar{g}r^2}{9\nu}$$

Для еще более крупных частиц примеси (размеры которых превышают 200 мкм) скорость осаждения ω равна скорости гравитационного осаждения $\omega_{\bar{g}}$ [9].

Следует отметить, что если в полуэмпирическом уравнении (1.1.9) $V = 0$, $U = U(z)$ (т.е. U является функцией только аргумента z [23]), ω не зависит от x, y, z , то соотношение неразрывности (1.1.13) выполняется тождественно и поэтому его можно в данном случае не учитывать.

Коэффициент α в уравнении (1.1.9), характеризующий убыль (отток) примеси вследствие ее вступления в химические реакции с окружающей средой, вследствие захвата и вымывания этой примеси каплями, кристаллами тумана, облаков, дождя, а также вследствие радиоактивного распада этой примеси, предполагают непрерывно

зависящим только от одного аргумента времени t , $t \in [t_0, T]$, т.е. $\alpha = \alpha(t)$ [9]. При этом $\alpha = \alpha(t) \geq 0$, $t \in [t_0, T]$.

1.1.4. Описание функции источника

Функцию источника примеси $f(t, x, y, z)$ можно задать помощью следующих соотношений [35], [44].

$$f(t, x, y, z) = Q\delta(t - t_0)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - H);$$

$$f(t, x, y, z) = Q\delta(t - t_0)\delta(x - x_0)\delta(z - H),$$

$$Q = \begin{cases} Q, y \in [a, b], \\ 0, y \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$f(t, x, y, z) = Q\delta(t - t_0)\delta(z - H),$$

$$Q = \begin{cases} Q, (x, y) \in S, \\ 0, (x, y) \notin S; \end{cases}$$

$$f(t, x, y, z) = Q\delta(t - t_0),$$

$$Q = \begin{cases} Q, (x, y, z) \in V, \\ 0, (x, y, z) \notin V, \end{cases}$$

если источник является мгновенным соответственно: точечным с координатами (x, y, H) ; линейным, который сосредоточен на интервале $[a, b]$, который в свою очередь расположен на прямой, параллельной оси Oy и пересекающей ось Oz ; площадным, и расположен на площадке S на высоте H параллельно плоскости xOy ; поверхностным, и расположен на поверхности S_v тела V . Здесь $Q = const$ – количество примеси, выброшенное источником в момент времени t_0 (мощность источника), $\delta(\alpha)$ – дельта-функция Дирака.

$$f(t, x, y, z) = Q(t)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - H),$$

если источник является точечным с координатами (x, y, H) , $Q(t)$ – функция аргумента $t \in [t_0, T]$, значения которой равны количеству примеси, выбрасываемой источником в момент времени t .

$$f(t, x, y, z) = Q(t, y)\delta(x - x_0)\delta(z - H), \quad t \in [t_0, T],$$

$$Q(t, y) = \begin{cases} Q(t, y), (x, y) \in [a, b], \\ 0, (x, y) \notin [a, b], \end{cases}$$

если источник является линейным и расположен на интервале $[a, b]$.

$$f(t, x, y, z) = Q(t, x, y)\delta(z - H), \quad t \in [t_0, T],$$

$$Q(t, x, y) = \begin{cases} Q(t, x, y), & (x, y) \in S, \\ 0, & (x, y) \notin S, \end{cases}$$

если источник является площадным и расположен на площадке S .

$$f(t, x, y, z) = Q(t, x, y, z), \quad t \in [t_0, T],$$

$$Q = \begin{cases} Q(t, x, y, z), & (x, y, z) \in S_V, \\ 0, & (x, y, z) \notin S_V, \end{cases}$$

если источник сосредоточен на поверхности тела V .

Пусть при описании распространения примеси фоновая концентрация $\varphi(x, y, z)$ не учитывается. Тогда краевая задача, описывающая распространение данной примеси от мгновенного источника имеет вид [37]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} + \alpha q = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (1.1.33)$$

$$q(t_0, x, y, z) = R_1(x, y, z), \quad t \in [t_0, T] \quad (1.1.34)$$

$$\left\{ K_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq \right\} \Big|_{z=z_0} = \{V_s q\} \Big|_{z=z_0} \quad (1.1.35)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z \geq z_0, \quad (1.1.36)$$

где $R_1(x, y, z) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - H)$, если источник является точечным мощностью Q , $Q = const$, и расположен в точке $(0, 0, H)$;

$$R_1(x, y, z) = Q\delta(x)\delta(z - H),$$

$$Q = \begin{cases} Q(y), & y \in [a, b], \\ 0, & y \notin [a, b], \end{cases}$$

если источник является линейным и расположен в интервале $[a, b]$ на высоте H параллельно оси Oy (в плоскости zOy);

$$R_1(x, y, z) = Q\delta(z - H),$$

$$Q = \begin{cases} Q(x, y), & (x, y) \in S, \\ 0, & (x, y) \notin S, \end{cases}$$

если источник является площадным: находится на площадке S , которая расположена параллельно плоскости xOy на высоте H ;

$$R_1(x, y, z) = Q$$

$$Q = \begin{cases} Q(x, y, z), & (x, y, z) \in S_V, \\ 0, & (x, y, z) \notin S_V, \end{cases}$$

если источник является поверхностным: сосредоточен

на поверхности S_V тела V .

1.2. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах

Принято различать задачи на корректно и некорректно поставленные. Понятие корректности постановки математической задачи было сформулировано Ж. Адамаром применительно к краевым задачам. Затем это понятие было перенесено другими математиками на более широкий круг задач.

Решение ξ любой количественной задачи по исходным данным μ может быть представлено в виде:

$$\xi = R(\mu). \quad (1.2.1)$$

При этом предполагается, что ξ и μ являются элементами метрических пространств Γ и Ω с метриками $\rho_\Gamma(\xi_1, \xi_2)$, $\rho_\Omega(\mu_1, \mu_2)$; $\mu_1, \mu_2 \in \Omega$; $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma$, где метрика ρ , как правило, определяется постановкой задачи [60].

Пусть определено понятие «решения» ξ рассматриваемой задачи и для каждого элемента $\mu \in \Omega$ оно является единственным в пространстве Γ .

Определение 1.2.1. [60] Задача определения решения ξ из пространства Γ по «исходным данным» μ из пространства Ω называется корректно поставленной на паре метрических пространств (Γ, Ω) , если выполнены условия:

1. для всякого элемента $\mu \in \Omega$ существует решение ξ из пространства Γ ;
2. решение ξ определяется однозначно;
3. на пространствах (Γ, Ω) задача устойчива (т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\sigma(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_\Omega(\mu_1, \mu_2) \leq \sigma(\varepsilon)$ следует $\rho_\Gamma(\xi_1, \xi_2) \leq \varepsilon$, где $\xi_1 = R(\mu_1)$, $\xi_2 = R(\mu_2)$; $\mu_1, \mu_2 \in \Omega$; $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma$).

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются некорректно поставленными.

Первое и второе условия характеризуют математическую определенность рассматриваемой задачи, а третье – ее физическую детерминированность.

При решении прикладных задач правая часть $R(\mu)$ соотношения (1.2.1) часто известна только приближенно (построена по экспериментальным данным). Поэтому проблема построения устойчивого решения ξ принимает исключительно важное значение [20] при исследовании и решении таких задач. Кроме того, в прикладных исследованиях всегда имеется некоторая априорная информация о решении ξ , позволяющая сузить множество Ω до некоторого множества M , на котором решение рассматриваемой задачи уже будет являться устойчивым. Эти факты указывают на то, что следует уточнить понятие корректно поставленной задачи.

Определение 1.2.2 (условно корректной или корректной по А.Н. Тихонову задачи) [60]. Задача определения решения ξ из пространства M по «исходным данным» μ из пространства Ω называется условно корректной (корректной по А.Н. Тихонову), если выполнены следующие условия:

1. априори известно, что решение задачи ξ существует и принадлежит некоторому заданному множеству $M \subset \Omega$, называемому множеством корректности;
2. решение ξ единственно на множестве M ;
3. существует непрерывная зависимость решения ξ уравнения от правой части $R(\mu)$ из (1.2.1), при условии, что возмущения μ не выводят решение ξ из множества корректности M .

На практике во многих случаях нет непрерывной зависимости ξ от правой части $R(\mu)$, т.е. многие прикладные задачи являются некорректно поставленными. Например, задача нахождения производной n -го порядка $\xi(t)$ функции $\mu(t)$, известной приближенно (т.е. $\xi(t) = \mu^{(n)}(t)$) не обладает свойством устойчивости. Следовательно, относится к классу некорректно поставленных задач, что приводит к определенным затруднениям при приближенном вычислении производных [60].

1.3. Методы регуляризации некорректно поставленных задач

Постановка многих задач, с которыми приходится сталкиваться на практике, укладывается в следующую схему. По заданным

функциям – детерминированной (не случайной) f и аппаратной A (оператору измерительного преобразования, который может являться интегральным, дифференциальным, алгебраическим или нелинейным оператором) – требуется определить исходную (входную) функцию u из операторного уравнения

$$Au = f. \quad (1.3.1)$$

Уравнение (1.3.1), согласно вида оператора A , может быть интегральным, дифференциальным уравнением, системой линейных алгебраических уравнений, и т.д.

Задача построения решения уравнения (1.3.1) является, как правило, некорректно поставленной (в силу ее неустойчивости) [60]. Для эффективного ее решения можно использовать следующие методы [59]: методы регуляризации Тихонова, Лаврентьева, итеративной, статистической, локальной, дескриптивной регуляризации, субоптимальной фильтрации, методы построения решения на компакте и др., а также методы оптимальной линейной фильтрации Калмана – Бьюси, Винера, методы управляемой линейной фильтрации (Бэйкуса – Гильберта) и др. Методы второй группы, развитые западными учеными, до сих пор не получили широкого применения на практике из-за большего количества априорной информации, требуемой при решении уравнения вида (1.3.1).

1.3.1. Метод Тихонова [60]

Известный метод регуляризации Тихонова является дальнейшим развитием методов наименьших квадратов Гаусса и псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза. Первый позволяет найти псевдорешение, второй – нормальное решение уравнения (1.3.1). В методе Тихонова учитываются лишь верхние оценки погрешностей правой части и оператора A , требуется минимизировать одновременно невязку (как в методе наименьших квадратов Гаусса) и норму решения (как в методе псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза). Данная задача является задачей на условный минимум и решается методом неопределенных множителей Лагранжа.

Обратимся к операторному уравнению

$$Au = f, \quad u \in L_2, \quad f \in L_2, \quad (1.3.2)$$

где A – линейный вполне непрерывный оператор, f – заданная правая часть, а y – искомое решение.

Пусть вместо точных значений f и A известны их приближенные значения \tilde{f} и \tilde{A} такие, что

$$\|\tilde{f} - f\|_{L_2} \leq \delta, \quad (1.3.3)$$

$$\|\tilde{A} - A\| \leq \xi, \quad (1.3.4)$$

где $\delta \geq 0$ и $\xi \geq 0$ – погрешности правой части f и оператора A (точнее их верхние оценки, поэтому в (1.3.3) и (1.3.4) стоят знаки \leq , а не знаки $=$), т.е. решается уравнение

$$\tilde{A}\tilde{y} = \tilde{f}, \quad \tilde{y} \in L_2, \quad \tilde{f} \in L_2. \quad (1.3.5)$$

Согласно методу регуляризации Тихонова требуется одновременно минимизировать невязку:

$$\|\tilde{A}\tilde{y} - \tilde{f}\|^2 = \min_{\tilde{y}} \quad (1.3.6)$$

(как в методе наименьших квадратов Гаусса) и норму решения \tilde{y} :

$$\|\tilde{y}\|^2 = \min_{\tilde{y}} \quad (1.3.7)$$

(как в методе псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза). Задача условной минимизации (1.3.6), (1.3.7) решается методом неопределенных множителей Лагранжа, а именно:

$$\|\tilde{A}\tilde{y} - \tilde{f}\|_{L_2}^2 + \alpha \|\tilde{y}\|_{L_2}^2 = \min_{\tilde{y}}, \quad (1.3.8)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, играющий роль неопределенного множителя Лагранжа. Из условия (1.3.8) вытекает уравнение Тихонова:

$$(\alpha E + A^* A)\tilde{y}_\alpha = A^* \tilde{f}, \quad (1.3.9)$$

где E – единичный оператор ($Ey = y$).

1.3.2. Выбор параметра регуляризации методом невязки

В этом методе вводится [43] определяющее равенство (невязка)

$$\|\tilde{A}\tilde{y}_\alpha - \tilde{f}\| = \delta. \quad (1.3.10)$$

Невязка (1.3.10) зависит от параметра регуляризации α :

$$\varphi(\alpha) = \|\tilde{A}\tilde{y}_\alpha - \tilde{f}\|.$$

Для нахождения параметра регуляризации α (в соответствии с (1.3.10)) необходимо решить уравнение

$$\varphi(\alpha) = \delta. \quad (1.3.11)$$

Для приближенного решения (1.3.11) можно использовать последовательность:

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0, \quad k = 0, \dots, K, \quad (1.3.12)$$

причем предполагается, что при $k = K$ равенство (1.3.11) выполняется с приемлемой точностью.

Для приближенного решения (1.3.11) можно также использовать другие, более сложные процедуры, но быстрее сходящиеся. Например, итерационный метод Ньютона [43]:

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{\varphi\left(\frac{1}{\beta_k}\right) - \delta}{\varphi'\left(\frac{1}{\beta_k}\right)}, \quad k = 0, \dots, K, \quad \varphi(\alpha) = \varphi\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Этот метод будет сходиться при любом начальном приближении $\beta_0 > 0$. Для того, чтобы не вычислять производные

$$\varphi'\left(\frac{1}{\beta_k}\right),$$

при вычислении β_{k+1} можно воспользоваться методом секущих:

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{\varphi\left(\frac{1}{\beta_k}\right) - \varphi\left(\frac{1}{\beta_{k-1}}\right)} \left(\varphi\left(\frac{1}{\beta_k}\right) - \delta \right).$$

1.3.3. Метод выбора квазиоптимального значения параметра регуляризации

Согласно этому методу выбирается значение $\alpha > 0$, которое минимизирует функцию

$$\chi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{d\tilde{y}_\alpha}{d\alpha} \right\|. \quad (1.3.13)$$

Для нахождения квазиоптимального значения чаще всего используется последовательность (1.3.12). Минимизация (1.3.13)

на таких значениях параметра регуляризации α соответствует поиску минимума нормы

$$\tilde{\chi}(\alpha_{k+1}) = \|\tilde{y}_{\alpha_{k+1}} - \tilde{y}_{\alpha_k}\|.$$

Существуют и другие способы выбора параметра регуляризации α . Однако общим для всех них является следующий факт: при каждом значении итерационного параметра решается задача

$$J_\alpha(y) = \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|^2 + \alpha\|y\|^2,$$

$$J_\alpha(\tilde{y}_\alpha) = \min_{y \in H} J_\alpha(y)$$

или эквивалентное ей уравнение (1.3.9).

1.3.4. Метод Лаврентьева.

Другим методом регуляризации, часто используемым в прикладных исследованиях, является метод регуляризации М.М. Лаврентьева.

Метод регуляризации М.М. Лаврентьева поясним на примере, когда операторное уравнение (1.3.1) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода:

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.3.14)$$

где $f(x) \in L_2(c,d)$ и $y(x) \in L_2(a,b)$, ядро $K(x,t)$ является квадратично суммируемым, симметричным и положительно определенным.

В выбранных классах функций и ядер задача построения решения уравнения (1.3.14) является некорректно поставленной, т.е. неустойчивой по отношению к малым изменениям правой части интегрального уравнения [60].

Согласно методу регуляризации Лаврентьева [30] наряду с уравнением (1.3.14) рассматривается регуляризованное уравнение

$$\varepsilon y_\varepsilon(x) + \int_a^b K(x,t)y_\varepsilon(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.3.15)$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое действительное число (параметр регуляризации). Уравнение (1.3.15) является уравнением Фредгольма второго рода, которое имеет, при выполнении некоторых условий, единственное решение.

Полагая в уравнении (1.3.15) значение параметра ε достаточно малым, найдем решение уравнения $y_\varepsilon(x)$. Затем подставим это решение в уравнение (1.3.14). В результате получим

$$\int_a^b K(x,t)y_\varepsilon(t)dt = f_\varepsilon(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.3.16)$$

Если полученная таким образом функция $f_\varepsilon(x)$ мало отличается от $f(x)$, т.е.

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \delta, \quad (1.3.17)$$

где δ – некоторое заранее известное малое положительное число, то решение $y_\varepsilon(x)$ считается достаточно хорошим (с некоторой приемлемой погрешностью) приближением решения уравнения (1.3.14).

Обычно параметр δ определяет погрешность исходных данных, когда правая часть уравнения (1.3.14) задается или определяется в эксперименте с некоторой точностью.

В случае, когда при заданном ε условие (1.3.17) не выполняется, выбирается новое значение параметра регуляризации и повторяется описанная процедура. Данный процесс выбора ε повторяется до тех пор, пока не будет выполнено (при некотором ε^*) неравенство (1.3.17).

Пример 1.3.1. Применим метод регуляризации А.Н. Тихонова к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (1.3.18)$$

Будем полагать, что $K(x,t)$ есть любая квадратично суммируемая в области $\{a \leq t \leq b, c \leq x \leq d\}$ функция, $f(x) \in L_2(c,d)$ и $y(x) \in L_2(a,b)$. Задача построения решения уравнения (1.3.18) также является некорректно поставленной в указанном выше смысле [60].

Согласно методу регуляризации Тихонова (нулевого порядка) [12], наряду с уравнением (1.3.18) рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varepsilon y_\varepsilon(x) + \int_a^b K^*(x,t)y_\varepsilon(t)dt = f^*(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.3.19)$$

где

$$K^*(x, t) = K^*(t, x) = \int_d^c K(s, x)K(s, t)ds,$$

$$f^*(x) = \int_c^d K(s, x)f(s)ds, \quad (1.3.20)$$

число $\varepsilon > 0$ – параметр регуляризации. Уравнение (1.3.19) называется регуляризованным интегральным уравнением, причем его решение существует и единственно (обоснование приведено в [60]).

Задавая в уравнении (1.3.19) достаточно малый параметр $\varepsilon > 0$ и число $\delta > 0$ (см. 1.3.17), находим для заданного $\varepsilon > 0$ решение уравнения $y_\varepsilon(x)$, подставляем это решение в уравнение (1.3.18), определяем $f_\varepsilon(x)$:

$$\int_a^b K(x, t)y_\varepsilon(t)dt = f_\varepsilon(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (1.3.21)$$

Если для найденного $f_\varepsilon(x)$ и заданного $\delta > 0$ выполняется условие (1.3.17), то процесс вычисления прекращается: приближенное решение $y_\varepsilon(x)$ построено. Если (1.3.17) не выполняется, то задается новое значение ε_1 , $\varepsilon_1 < \varepsilon$, и указанный процесс вычислений повторяется. Этот процесс вычислений повторяется до тех пор, пока при некотором ε_k , $k \geq 1$, неравенство (1.3.17) не будет выполнено.

1.4. Оптимальная фильтрация помех, возникающих при численном решении системы линейных алгебраических уравнений

1.4.1. Одношаговая оптимальная фильтрация

На практике часто возникают задачи, согласно постановки которых, требуется определить состояние системы по результатам измерений. Однако измерения всегда сопровождаются случайными ошибками, поэтому в постановке задачи следует вести речь не об определении состояния системы, а об его оценки на основе обработки результатов измерений [59].

Пусть дано уравнение

$$A\psi + \nu = g, \quad \psi \in Y, \quad g \in G, \quad (1.4.1)$$

где Y и G – конечномерные пространства размерностей n и l соответственно, A – произвольная $l \times n$ -матрица с постоянными элементами, ψ – искомый n -вектор, g – измеренный со случайными ошибками l -вектор (результаты измерений), ν – вектор-помеха (l -вектор), элементами которого являются случайные величины.

Рассмотрим задачу: по результатам измерений компонент вектора g построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\hat{\psi}$ решения ψ уравнения (1.4.1).

Будем предполагать [12], что:

1) математическое ожидание случайного вектора-помехи ν равно нулю, т.е. $M[\nu] = 0$;

2) задана симметричная положительно определенная $l \times l$ -матрица – матрица ковариации ошибок правой части соотношения (1.4.1), т.е. $S = M[\nu\nu^T]$;

3) задан n -вектор $\phi = M[\psi]$, т.е. начальное приближение (априорная оценка или прогноз) значений вектора ψ ;

4) задана симметричная положительно определенная $n \times n$ -матрица – априорная ковариация ошибок решения, т.е. $N = M[(\psi - \phi)(\psi - \phi)^T]$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$J = \frac{1}{2} \left[(A\psi - g)^T S^{-1} (A\psi - g) + (\psi - \phi)^T N^{-1} (\psi - \phi) \right]. \quad (1.4.2)$$

Минимизируя J по ψ , найдем:

$$\hat{\psi} = \phi + PA^T S^{-1} (g - A\phi), \quad (1.4.3)$$

где

$$P = \left(N^{-1} + A^T S^{-1} A \right)^{-1}, \quad (1.4.4)$$

$\hat{\psi}$ – апостериорная оценка ψ – n -вектор, минимизирующий (1.4.2), P – апостериорная $n \times n$ -матрица ковариаций ошибок решения $\hat{\psi}$ [59].

Следовательно, при известных S , ϕ и N , оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{\psi}$ решения ψ уравнения (1.4.1) определяется соотношением (1.4.3), где матрица ковариаций ошибок P имеет вид (1.4.4).

Процесс наблюдений (измерений) g , в котором имеется лишь одна реализация вектора g (произведено одно измерение g), принято

называть одношаговым процессом [59].

Процедура построения $\hat{\psi}$ с помощью соотношений (1.4.3), (1.4.4) на основе одного наблюдения компонент вектора g называется одношаговой оптимальной фильтрацией помех в системе линейных алгебраических уравнений (1.4.1). Совокупность соотношений (1.4.3), (1.4.4) – одношаговым фильтром Калмана-Бьюси [12].

1.4.2. Многошаговая оптимальная фильтрация помех

Требование об априорном задании ϕ и N для одношагового процесса наблюдений (см. п. 1.4.1.) трудно выполнимо. При решении прикладных задач ϕ и N обычно не известны. Поэтому при решении этих задач на основе наблюдений предварительно определяются оценки $\hat{\phi}$, \hat{N} , \hat{S} величин ϕ , N , S . Поскольку построить достаточно точные оценки $\hat{\phi}$, \hat{N} , \hat{S} на основе одного наблюдения затруднительно, то $\hat{\phi}$, \hat{N} , \hat{S} строят после проведения нескольких наблюдений (измерений) g в различные (дискретные) моменты времени t .

Пусть, как и в п. 1.4.1, требуется найти решение задачи: по результатам измерений компонент вектора g в различные моменты t_k , $k=1,2,\dots$, и предварительно вычисленным ϕ_0 , N_0 , S_k , где S_k – оценка S , построенная по результатам k наблюдений, $k=1,2,\dots$, построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\hat{\psi}$ решения ψ уравнения (1.4.1).

Процесс построения оценки $\hat{\psi}$ по результатам нескольких наблюдений над вектором g принято называть многошаговым, а соотношения, из которых определяется $\hat{\psi}$ называются многошаговым фильтром Калмана-Бьюси.

Процедуру построения $\hat{\psi}$ выглядит следующим образом [59].

Априори выбираются начальные приближения для решения $\psi_0 \equiv \phi$ и матрицы ковариаций ошибок решения $P_0 \equiv N$. Можно положить (для выбора начальных приближений используется метод регуляризации Тихонова [59]):

$$\psi_0 = (\alpha E + A^T A)^{-1} A^T g,$$

$$P_0 = \eta^2 (\alpha E + A^T A)^{-1},$$

где A – произвольная $l \times n$ -матрица из (1.4.1), E – единичная матрица, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, играющий роль неопределенного множителя Лагранжа, $\eta \geq 0$ – верхняя оценка погрешности правой части (1.4.1).

Последующие приближения определяются согласно следующей итерационной схеме:

$$\begin{aligned} \psi_k &= \psi_{k-1} + \left(P_{k-1}^{-1} + A^T S_k^{-1} A \right)^{-1} A^T S_k^{-1} (g_k - A \psi_{k-1}), \\ P_k &= \left(P_{k-1}^{-1} + A^T S_k^{-1} A \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

В то время, как значения

$$g_k \equiv g_{i_k}$$

будут колебаться вокруг точных значений g , значения

$$\psi_k \equiv \psi_{j_k}$$

с каждой итерацией будут приближаться к $\hat{\psi}$.

При этом могут иметь место два случая. Стационарный случай: S_k не зависит от n (т.е. $S_k = S$), а индекс k у ψ и P означает номер уточняющей итерации. Нестационарный случай: индекс k означает не только номер уточняющей итерации, но и зависимость от времени ($t = t_k$) значений ψ , s , g , S [59].

Многошаговый фильтр Калмана – Бьюси обладает большими возможностями при решении прикладных задач, но требует обработки большого объема данных.

1.5. Оптимальный в среднеквадратическом смысле стохастический прогноз

Задача оптимальной экстраполяции (прогноза) будущего состояния $x(\tau)$, $\tau \geq T$, системы, описываемой в E^n стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + \sigma(t)dw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T]$$

состоит в построении наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки $x(\tau)$ по результатам наблюдений

$$dy(t) = Q(t)x(t)dt + \sigma_0(t)dw_0(t), \quad y(0) = 0,$$

проведенным на отрезке $t \in [0, T]$, где x_0 – гауссовский случайный вектор со значениями в E^n , $y(t)$ – случайный процесс со значениями в E^m , A , σ , Q , σ_0 – заданные матрицы соответственно размеров $m \times n$, $n \times 1$, $m \times n$, $m \times 1$; $w(t)$ и $w_0(t)$ – стандартные винеровские процессы, принимающие значения соответственно в E^n , E^m .

Оптимальный прогноз

$$\theta(\tau) = M[x(\tau)/y_T]$$

и прогнозируемая матрица ковариаций

$$\tilde{P}(\tau) = M\{[x(\tau) - \theta(\tau)][x(\tau) - \theta(\tau)]^T / y_T\}$$

определяются на $\tau \geq T$ с начальными условиями

$$\theta(\tau)|_{\tau=T} = \theta(T), \quad \tilde{P}(\tau)|_{\tau=T} = \tilde{P}(T),$$

которые легко находятся с помощью фильтра Калмана-Бьюси [5]:

$$d\theta(t) = A(t)\theta(t)dt + \tilde{P}Q^T N_0^{-1}(dy(t) - Q(t)\theta(t)dt), \quad (1.5.1)$$

$$t \in [0, T], \quad \theta(0) = \theta_0.$$

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = A(t)\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)A^T(t) - \tilde{P}(t)Q^T(t)N_0^{-1}(t)Q(t)\tilde{P}(t) + N_1(t), \quad (1.5.2)$$

$$\tilde{P}(0) = P_0, \quad t \in [0, T], \quad N_1 = \sigma\sigma^T, \quad N_0 = \sigma_0\sigma_0^T.$$

Из (1.5.1), (1.5.2) определяют $\tilde{P}(T)$ и $\theta(T)$. После этого определяется при $\tau \geq T$ прогнозируемые значения $\theta(\tau)$ и $\tilde{P}(\tau)$ рассматриваемой системы из задачи:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = A(\tau)\theta(\tau), \quad \theta(\tau)|_{\tau=T} = \theta(T), \quad (1.5.3)$$

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tau} = A(\tau)\tilde{P}(\tau) + \tilde{P}(\tau)A^T(\tau) + N_1(\tau), \quad \tau \geq T, \quad (1.5.4)$$

$$\tilde{P}(\tau)|_{\tau=T} = \tilde{P}(T).$$

Заключение к главе 1

В данной главе подробно описана математическая модель рассеяния примеси в атмосфере, представляющая собой уравнение турбулентной диффузии с заданными для него начальным и граничными условиями.

Введены понятия корректной и некорректной постановок задач. Приведены известные методы решения некорректно поставленных задач: А.Н. Тихонова и М.М. Лаврентьева.

Описаны одношаговый и многошаговый фильтры Калмана-Бьюси, методы линейного стохастического прогноза.

Методы регуляризации Тихонова и Лаврентьева относятся к детерминированным методам регуляризации. Их можно использовать для решения прикладных задач, в которых не учитываются случайные помехи. Задачи, в которых такие помехи учитываются, можно решать методами стохастической фильтрации, в частности, с помощью одношагового и многошагового фильтров Калмана-Бьюси.

ГЛАВА 2

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В РАМКАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРНОЙ ДИФФУЗИИ

Процесс рассеяния примеси в турбулентной атмосфере представляет собой довольно сложное физическое явление, подробно не изученное до настоящего времени, несмотря на многочисленные исследования российских и зарубежных ученых на протяжении нескольких последних десятилетий [4], [6], [9], [10], [24], [35] и др.

Для описания данного процесса используются дифференциальные и интегральные уравнения, теория функций комплексного переменного, операционное исчисление, теория случайных процессов, математическая статистика, численные методы. Изучение процесса рассеяния примесей в атмосфере требует постановки и исследования различных прямых и обратных задач. В данной главе приведен обзор постановок таких задач. В силу ограниченности объема многие вопросы изложены сжато, а некоторые – вообще не затронуты. Несмотря на столь схематичный стиль изложения, представленный здесь материал будет интересен в первую очередь начинающим исследователям и поможет им сориентироваться в выборе темы для научных исследований.

2.1 Прямые задачи атмосферной диффузии

Пусть G – некоторая открытая, связная, ограниченная область в $E_+^3 = \{(x, y, z): x, y \in (-\infty, \infty), z \in [0, \infty)\}$, $G \subset E_+^3 \subset E^3$, E^3 – трехмерное евклидово пространство, t – переменная, интерпретируемая как время, $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 = \text{const} \geq 0$, $q(t, x, y, z)$ – функция, определенная на $[t_0, \infty) \times G$, непрерывно дифференцируемая по t и дважды – по x, y, z , $(x, y, z) \in G$ (символ \times обозначает декартово произведение множеств).

Пусть E_+^3 – физическое пространство, заполненное атмосферным воздухом, находящимся в турбулентном движении, G ($G \subset E_+^3$) – область, в которой наблюдается процесс рассеяния примеси, источник которой также находится в G , $q(t,x,y,z)$ – функция, значения которой совпадают со значениями концентрации этой примеси в момент времени $t \in [t_0, \infty)$ в точке $(x,y,z) \in G$.

Определение 2.1.1 (прямой задачи). Найти (вычислить) значения $q(t,x,y,z)$ в момент $t \in [t_0, \infty)$ в произвольной точке $(x,y,z) \in G$

(или $(x,y,z) \in E_+^3$)

по заданному набору физических величин параметров

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \quad \alpha_k \in [t_0, \infty) \times G, \quad (2.1.1)$$

где зависимость между $q(t,x,y,z)$ и набором (2.1.1) определяется математической моделью, которая описывает изменения $q(t,x,y,z)$ в G (или в E_+^3) и которая многократно апробирована на адекватность экспериментальным данным.

Укажем математические модели, описывающие зависимость значений $q(t,x,y,z)$ от значений параметров (2.1.1).

2.1.1. Полуэмпирическая модель

Как в прикладных, так и в теоретических исследованиях по рассеянию примеси в турбулентной атмосфере наиболее часто применяемой оказывается так называемая полуэмпирическая модель. Эта модель достаточно подробно описана в главе 1 (см. п. 1.1). В качестве параметров (2.1.1) здесь выступают коэффициенты

$$u, v, w, \alpha, K_x, K_y, K_z$$

уравнения турбулентной диффузии, функция мощности источника Q , функции φ, β из начального и граничных условий:

$$\{u, v, w, \alpha, K_x, K_y, K_z, Q, \varphi, \beta\} \quad (2.1.2)$$

2.1.2. Гауссова модель

В прикладных исследованиях широкое распространение

получила так называемая гауссова модель рассеяния примеси [3], [4], [10], [44]. Согласно этой модели изменения концентрации примеси $q(t, x, y, z)$ от мгновенного точечного источника, действовавшего в момент t_0 в точке $(x_0, y_0, z_0) \in E_+^3$, подчиняются закону:

$$q(t, x, y, z) = \frac{Q}{[4\pi(t-t_0)]^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{(x-x_0-u(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} - \frac{(y-y_0)^2}{4K_y(t-t_0)} - \frac{(z-z_0)^2}{4K_z(t-t_0)}\right\},$$
(2.1.3)

$t \in [t_0, \infty)$, $(x, y, z) \in E_+^3$, $Q = const > 0$ – мощность источника (количество примеси в кг, выброшенной в атмосферу источником в момент времени t_0);

$$K_x, K_y, K_z -$$

коэффициенты турбулентной диффузии соответственно вдоль осей Ox, Oy, Oz , являющиеся положительными постоянными величинами;

$$u = const > 0 -$$

средняя скорость ветра вдоль оси Ox (декартова система координат сориентирована таким образом, чтобы скорость ветра совпадала с направлением оси Ox).

Здесь в качестве параметров (1.1) выступает набор

$$\{Q, u, K_x, K_y, K_z, (x_0, y_0, z_0,)\}$$

Гауссова модель может быть уточнена и обобщена на те случаи, когда в ней учитываются процессы отражения и поглощения примеси подстилающей поверхностью.

Если примесь полностью отражается подстилающей поверхностью $z=0$, то вертикальный поток примеси

$$K_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

В этом случае гауссова модель имеет вид:

$$\begin{aligned}
q_1(t, x, y, z) &= \frac{Q}{[4\pi(t-t_0)]^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{(x-u(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} - \frac{(y-y_0)^2}{4K_y(t-t_0)}\right\} \times \\
&\times \left[\exp\left\{-\frac{(z-z_0)^2}{4K_z(t-t_0)}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z+z_0)^2}{4K_z(t-t_0)}\right\} \right].
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Если примесь полностью поглощается подстилающей поверхностью $z=0$, то ее концентрация

$$q(t, x, y, z)|_{z=0} = 0;$$

тогда гауссова модель определяется выражением

$$\begin{aligned}
q_2(t, x, y, z) &= \frac{Q}{[4\pi(t-t_0)]^{3/2} (k)^{1/2}} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{(x-u(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} - \frac{(y-y_0)^2}{4K_y(t-t_0)}\right\} \times \\
&\times \left[\exp\left\{-\frac{(z-z_0)^2}{4K_z(t-t_0)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(z+z_0)^2}{4K_z(t-t_0)}\right\} \right].
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Если примесь частично отражается и частично поглощается подстилающей поверхностью, а β – вероятность ее поглощения, то функция, описывающая концентрацию примеси $q(t, x, y, z)$ от мгновенного точечного источника, представляет собой линейную комбинацию соотношений (2.1.4), (2.1.5):

$$q(t, x, y, z) = q_1(t, x, y, z) - \beta q_2(t, x, y, z). \tag{2.1.6}$$

Заменяя в выражениях (2.1.3) – (2.1.6) t_0 на s и интегрируя эти выражения по s в пределах от t_0 до t (с учетом того, что $Q=Q(s)$), получим соотношения для расчета концентрации точечного источника непрерывного действия.

Если источник примеси представляет собой некоторый геометрический объект (отрезок, плоская фигура, кривая на плоскости или в пространстве, поверхность), то заменяя в (2.1.3) – (2.1.6) (x_0, y_0, z_0) на (ξ, η, θ) и интегрируя эти выражения по множеству точек (ξ, η, θ) этого объекта, найдем соотношения для расчета

концентрации примеси в E_+^3 от мгновенного источника заданной геометрической формы (линейного, площадного, криволинейного, поверхностного). Следует обратить внимание, что в данном случае значения Q зависят от точек (ξ, η, θ) , принадлежащих рассматриваемому источнику, т.е. $Q=Q(\xi, \eta, \theta)$. Чтобы получить формулы от непрерывного источника заданной геометрической формы, необходимо заменить в полученных в данном случае выражениях t_0 на s и проинтегрировать их по s в пределах от t_0 до t .

2.1.3. Модель рассеяния примеси, построенная линеаризацией уравнений Навье-Стокса

Расчеты значений концентраций примеси $q(t, x, y, z)$ в E_+^3 , выполненные с помощью гауссовой модели, не всегда хорошо согласуются с экспериментальными данными. Если подобные расчеты выполнены с привлечением полуэмпирической модели, то результаты расчетов, как правило, лучше согласуются с результатами натуральных наблюдений. Однако и полуэмпирическую модель не всегда удобно использовать в прикладных исследованиях, т.к. возникает проблема определения коэффициентов в уравнении (2.1.6). Особенно сложно указать вид коэффициента K_z в соответствии с текущими метеоусловиями. Чтобы избежать подобных трудностей, была разработана модель рассеяния примеси в E_+^3 , в которой коэффициенты K_x, K_y, K_z , отсутствуют [45].

В этой модели компоненты вектора мгновенной скорости частиц примеси

$$v = (v_x, v_y, v_z)$$

и концентрация q удовлетворяют уравнению переноса

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(qv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(qv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(qv_z)}{\partial z} + \alpha q = f(t, x, y, z)$$

и линеаризованным уравнениям движения Навье-Стокса (в векторной форме)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad}P + \frac{\eta}{\rho} \Delta v,$$

где F – вектор напряженности поля массовых сил, P, ρ – соответственно давление и плотность атмосферы, η – коэффициент внутреннего трения, Δ – оператор Лапласа, α – коэффициент, характеризующий изменения примеси за счет ее различных превращений, f – функция источника примеси. Если на примесь действует только сила тяжести, то $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -g$, g – ускорение свободного падения.

Давление $P = P(t, x, y, z)$ и плотность $\rho = \rho(t, x, y, z)$, $t \in [t_0, \infty)$, $(x, y, z) \in E_+^3$, удовлетворяют соотношениям

$$P(t, x, y, z) = g \int_z^\infty q(t, x, y, \xi) d\xi + P_\Phi(z),$$

$$P_\Phi(z) = \mu \exp \left\{ \frac{Mg}{R\gamma} \ln \frac{T_0}{T_0 + \gamma z} \right\},$$

$$\rho(t, x, y, z) = q(t, x, y, z) + \rho_\Phi(z),$$

$$\rho_\Phi(z) = \frac{P_\Phi(z) m_\Phi^0}{k T_\Phi(z)},$$

$$T_\Phi(z) = T_0 + \gamma z.$$

Здесь M – молярная масса воздуха, R – универсальная газовая постоянная, μ – давление атмосферы на высоте $z=0$, T_0 – температура атмосферного воздуха при $z=0$, γ – сухоадиабатический градиент, m_Φ^0 – средняя масса молекулы воздуха, k – постоянная Больцмана.

Начальные условия в данной модели имеют вид:

$$q(t_0, x, y, z) = \varphi(x, y, z),$$

$$v(t_0, x, y, z) = v_0, \quad v_0 = (v_x^0, v_y^0, v_z^0),$$

Граничные условия при $z=0$ задаются следующим образом:

$$v = (0, 0, 0), \quad q(t, x, y, z) = 0,$$

если примесь поглощается,

$$v = (v_x, v_y, -v_z), \quad \frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

если примесь отражается подстилающей поверхностью,

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z \geq 0.$$

Расчеты изменения концентрации примеси q , выполненные согласно данной модели, хорошо согласуются

с экспериментальными данными.

2.2 Обратные задачи атмосферной диффузии

С общей методологической точки зрения прямыми могут считаться задачи, для которых заданы причины, а следствия являются искомыми величинами. Тогда обратными будут задачи, в которых известны следствия, а искомыми величинами выступают причины. Однако на практике провести такое разделение иногда оказывается затруднительно.

Обратные задачи стали предметом исследований в математике относительно недавно. Первые работы в этом направлении относятся к началу XX века, а более интенсивно разработки в этой области проводятся с 70-80-х годов прошлого века [20].

Принята следующая условная классификация обратных задач [11].

1. Ретроспективные обратные задачи – задачи об определении начального состояния объекта исследования (т.е. начальных условий) по некоторым функционалам или операторам решения.

2. Коэффициентные обратные задачи – задачи, в которых требуется определить коэффициенты дифференциальных операторов и их свободные члены.

3. Граничные обратные задачи – задачи об определении граничных условий.

4. Геометрические обратные задачи – задачи об определении области, на которой определен объект исследования.

5. Обратные задачи смешанных типов (неизвестными являются несколько указанных выше параметров, факторов).

Приведем формальную постановку обратной задачи.

Определение 2.2.1 (обратной задачи). Вычислить значения одной или нескольких величин (параметров)

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_K}$$

из совокупности (2.1.1) в момент $t \in [t_0, \infty)$ в точках $(x, y, z) \in G$ (или $(x, y, z) \in E_+^3$) по известным значениям других параметров этой совокупности, т.е. по $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \setminus \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_K}\}$ и функции

$q(t, x, y, z)$, заданной в области $[t_0, \infty) \times G$.

Решение обратных задач, состоящих в обращении причинно-следственных связей, связано с преодолением существенных трудностей. Успешный результат зависит как от количества и качества экспериментальной информации, так и от совершенства методов ее обработки.

Очевидно, обратную задачу в рамках модели (1.2.1) имеет смысл ставить только в том случае, когда (1.2.1) является корректно поставленной [44].

Действительно, если решение прямой задачи (1.2.1) $\xi \in \Gamma$ не существует или не единственно (одному $\mu \in \Omega$ соответствует множество решений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$), то постановка обратной задачи, очевидно, невозможна: в первом случае – такая постановка теряет смысл, во втором случае надо решить множество задач соответствующих различным $\xi_i = R(\mu), i = 1, 2, \dots, n, \dots$, что в конечном итоге означает, что невозможно определить, какое из решений будет соответствовать реально изучаемому процессу. Наконец, пусть решение рассматриваемой задачи неустойчиво. Тогда при изменении μ на малую величину ℓ ξ изменится на достаточно большую величину χ , т.е. $\xi + \chi = R(\mu + \ell)$. Тогда теряет смысл найденное решение $\xi + \chi$, т.к. оно будет существенно отличаться от требуемого точного решения ξ . Значит, теряет смысл и постановка обратной задачи.

Приведем формальную постановку обратных задач в рамках модели рассеяния примеси в турбулентной атмосфере.

2.2.1. Задача определения мощности источника примеси

Пусть в наборе величин (2.1.2) функция источника f является неизвестной, остальные величины заданы. Поскольку f имеет вид (см. п. 1.1.4):

$$f(t, x, y, z) = Q(t, x, y, z)\delta(t, x, y, z),$$

то фактически неизвестной является функция мощности источника примеси Q . Значения Q определяют количество примесей, выбрасываемых в момент t точкой (x, y, z) , принадлежащей источнику примеси,

$$q(t_0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G \quad (2.2.1)$$

$$q(t, x, y, z) = 0, \quad t \in [t_0, \infty), \quad (x, y, z) \in \delta G, \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial z} = \beta q(t, x, y, z), \quad (2.2.3)$$

$$(x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in [t_0, \infty).$$

(или

$$q(t_0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in R_+^3, \quad (2.2.4)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z \geq 0, \quad t \in [t_0, \infty], \quad (2.2.5)$$

$$\left(\frac{\partial g(t, x, y, z)}{\partial z} - \beta g(t, x, y, z) \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad t \in [t_0, \infty). \quad (2.2.6)$$

Пусть требуется определить Q по заданным в модели (1.1.2), (1.1.15), (2.2.1) – (2.2.3) (или (1.1.2), (1.1.15), (2.2.4) – (2.2.6)) величинам $q = q(t, x, y, z)$, u , v , w , α , K_x , K_y , K_z , f , φ , β .

Указанную обратную задачу можно свести во многих случаях к решению некоторого интегрального уравнения. Поясним этот факт на примере непрерывного точечного источника в E_+^3 .

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + u \frac{\partial q_0}{\partial x} + v \frac{\partial q_0}{\partial y} + w \frac{\partial q_0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q_0}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q_0}{\partial z}, \quad (2.2.7)$$

$$q_0 = q_0(\tau, \xi, \eta, \theta; \tau, x, y, z) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \delta(z - \theta), \quad (2.2.8)$$

$$\left(\frac{\partial q_0}{\partial z} - \beta q_0 \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (2.2.9)$$

$$q = q(\tau, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z) \rightarrow 0, \quad (2.2.10)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty,$$

$$z \geq 0.$$

При определенных ограничениях в задаче (1.1.2), (1.1.15), (2.2.4) – (2.2.6), ее решение можно представить в виде [24]:

$$\begin{aligned}
q(t, x, y, z) = & \\
= \int_{t_0}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} q_0(\tau, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z) f(\tau, \xi, \eta, \theta) d\xi d\eta d\theta + & \quad (2.2.11) \\
+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} q_0(t_0, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z) \varphi(\xi, \eta, \theta) d\xi d\eta d\theta, &
\end{aligned}$$

($\varphi(x, y, z)$ – фоновая концентрация примеси в точке (x, y, z))).

Учитывая равенство (2.2.1), представления Q и δ для точечного источника и свойства δ -функции, выражение (2.2.11) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
q(t, x, y, z) = \int_{t_0}^t Q(\tau) q_0(\tau, x_0, y_0, z_0; t, x, y, z) d\tau + & \\
+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} q_0(t_0, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z) \varphi(\xi, \eta, \theta) d\xi d\eta d\theta. & \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

При заданных q, q_0, φ (2.2.12) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра первого рода, из которого можно определить $Q(t)$.

Различные частные случаи решения задачи (2.2.7) – (2.2.8) приведены в [44].

2.2.2. Задача определения фоновой концентрации

Будем считать, что в модели (1.1.2), (1.1.15), (2.2.1) – (2.2.3) (или (1.1.2), (1.1.15), (2.2.4) – (2.2.6)) величины

$$q, u, v, w, \alpha, K_x, K_y, K_z, Q, \beta$$

известны, а неизвестной величиной является фоновая концентрация φ . Данную обратную задачу можно интерпретировать следующим образом. Известно распределение концентрации примеси $q(t, x, y, z)$ в момент времени $t > t_0$, $(x, y, z) \in G$ (или $(x, y, z) \in E_+^3$) при заданных $u, v, w, \alpha, K_x, K_y, K_z, Q, \beta$.

Требуется определить распределение

$$q(t_0, x, y, z) = \varphi(x, y, z)$$

в начальный момент времени t_0 . Поэтому задачу определения фоновой концентрации можно назвать задачей рассеяния примеси с обратным направлением времени.

При тех же ограничениях в задаче (1.1.2), (1.1.15), (2.2.4) – (2.2.6) φ удовлетворяет интегральному уравнению (2.2.11). В частности, если источник является точечным, то φ определяется из соотношения (2.2.12).

2.2.3. Задача определения координат и мощности точечного источника примеси

Если в модели (1.1.2), (1.1.15), (2.2.1) – (2.2.3) ((1.1.2), (1.1.15), (2.2.4) – (2.2.6)), описывающей рассеяние примеси от точечного источника, известны все величины

$$q, u, v, w, \alpha, K_x, K_y, K_z, Q, \varphi, \beta,$$

но неизвестны координаты $(x_0, y_0, z_0) \in G(E_+^3)$ источника, то и в этом случае при определенных условиях [44], [24] справедливо соотношение (2.2.12), из которого можно найти (x_0, y_0, z_0) . Данную задачу можно изучать и в более широкой постановке, считая что не только координаты (x_0, y_0, z_0) , но и мощность $Q(t)$ точечного источника является неизвестной.

2.2.4. Обратная коэффициентная задача

В прикладных исследованиях значительный интерес представляет задача определения коэффициента K_z по заданным величинам

$$q, u, v, w, \alpha, K_x, K_y, f, \varphi, \beta.$$

Аналогичная задача определения коэффициентов

$$K_x, K_y$$

не представляет большого практического интереса, поскольку известно [9], что

$$K_x = K_y = k_0 \cdot u, \quad k_0 = \text{const} > 0.$$

Значения u можно легко измерить экспериментально в каждый момент $t \in [t_0, \infty)$ и определить затем K_x, K_y , воспользовавшись приведенными равенствами.

Решение этой обратной задачи упрощается, если удастся решение задачи (1.1.2), (1.1.15), (2.2.1) – (2.2.3) ((1.1.2), (1.1.15), (2.2.4) –

(2.2.6)) построить в аналитическом виде. В этом случае имеем конкретное уравнение, из которого определяется K_z . Несколько частных случаев решения задачи (1.1.2), (1.1.15), (2.2.4) – (2.2.6) приведено в [44].

2.3. Постановка (выбор) граничных условий

Пусть полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии [9], [35], [44] имеет вид (см. гл.1 п.1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} K_{xx} \frac{\partial q}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} K_{yy} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{zz} \frac{\partial q}{\partial z} + f \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

(т.е. в (1.1.14) $K_{xy} = K_{xz} = K_{yx} = K_{yz} = 0$), где $q = q(t, x, y, z)$ – как и ранее (см. гл.1) среднее значение концентрации примеси в момент времени $t \in [t_0, T]$ в точке с координатами $(x, y, z) \in E_+^3 = \{(\xi, \eta, \theta) : \xi, \eta \in (-\infty, +\infty), \theta \in [0, +\infty)\}$; $u = u(z)$ – среднее значение скорости ветра на высоте z ; $w = const$ – скорость осаждения частичек примеси вдоль оси Oz ; K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} – составляющие коэффициента турбулентной диффузии, соответственно, вдоль осей O_x , O_y , O_z ; f – функция, описывающая источник, выбрасывающий в атмосферу примесь.

Для уравнения (2.3.1) должны быть заданы (см. п.1.1.2) [9], [35], [44] начальное

$$q(t_0, x, y, z) = \varphi(x, y, z) \quad (2.3.2)$$

и одно из граничных условий:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \quad (2.3.3)$$

если примесь полностью отражается подстилающей поверхностью;

$$q = q(t, x, y, z) = 0 \text{ при } z = 0, \quad (2.3.4)$$

если примесь полностью поглощается подстилающей поверхностью;

$$\frac{\partial q}{\partial z} - \beta q = 0 \text{ при } z = 0, \quad \beta = const > 0, \quad (2.3.5)$$

если примесь частично поглощается и частично отражается подстилающей поверхностью.

Функция $q = q(t, x, y, z)$ в E_+^3 всегда удовлетворяет, кроме перечисленных граничных условий (2.3.3) – (2.3.5), граничному условию

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, z \geq 0. \quad (2.3.6)$$

От вида граничного условия существенно зависит решение рассматриваемой краевой задачи, а, следовательно, и постановка соответствующих прямых и обратных задач. Поэтому при рассмотрении конкретной задачи рассеяния примеси в атмосфере важно правильно задать условия (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5), (2.3.6) (т.е. выбрать именно то граничное условие, которое соответствует рассматриваемой физической задаче).

Введем, в зависимости от вида коэффициентов (2.3.1), классификацию границ в задаче (2.3.1) – (2.3.6), опираясь на известные результаты В.Феллера о классификации границ для случайных процессов диффузионного типа [62], [63]. Это позволит правильно осуществлять (в каждом конкретном случае) постановку граничных условий (2.3.3) – (2.3.6) при решении уравнения (2.3.1), а, следовательно, в конечном счете правильно осуществлять постановку прямых и обратных задач в модели (2.3.1)–(2.3.6).

Пусть $u = u(z)$ непрерывно дифференцируема по $z \in [0, \infty)$, K_x , K_y , K_z дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных $(x, y, z) \in E_+^3$. Преобразуем полуэмпирическое уравнение (2.3.1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[a_x q] + \frac{\partial}{\partial y}[a_y q] + \frac{\partial}{\partial z}[a_z q] = \\ = \frac{\partial^2(K_x q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(K_y q)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(K_z q)}{\partial z^2} + f, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$a_x = u + \frac{\partial K_x}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial K_y}{\partial y}, \quad a_z = -w + \frac{\partial K_z}{\partial z} \quad (2.3.8)$$

Если существует переходная плотность $p(\tau, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z)$ марковского процесса диффузионного типа, определенная в $[t_0, T] \times E_+^3$ (\times – знак декартового произведения), которая удовлетворяет уравнению Планка-Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[a_x p] + \frac{\partial}{\partial y}[a_y p] + \frac{\partial}{\partial z}[a_z p] = \\ = \frac{\partial^2 [K_x p]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [K_y p]}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 [K_z p]}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

то она является фундаментальным решением уравнения (2.3.9) [21], [42]. Это означает, что решение уравнения (2.3.7) с заданным начальным условием (2.3.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} q(t, x, y, z) = \\ = \int_{t_0}^t d\tau \int_{\Omega} p(\tau, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z) f(\tau, \xi, \eta, \theta) d\xi d\eta d\theta + \\ + \int_{\Omega} p(\tau, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z) f(\tau, \xi, \eta, \theta) d\xi d\eta d\theta, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

При этом, если $p(\tau, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z)$ удовлетворяет одному из граничных условий (2.3.3)-(2.3.5), то $q(t, x, y, z)$ удовлетворяет такому же граничному условию.

Хорошо известно, что коэффициенты уравнения (2.3.1) обладают следующими свойствами [9]:

а) $K_x = K_y = C_1 u(z)$, $C_1 = const$;

б) $u(z)$ сравнима с $\lg z$, а $K_z(z)$ сравнима с функцией z^α , $\alpha = const$, $0 < \alpha < 2$ на $(0, \infty)$ (т.е. $u = u(z)$ при $z \rightarrow \infty$ возрастает значительно медленнее, чем $K_z = K_z(z)$). Поэтому в достаточно малой окрестности точки $z = 0$, $z > 0$, (в пределах приземного слоя) $u(z)$ можно считать постоянной: $u(z) = const$, а, следовательно, $K_x = K_y = const$.

В силу этих замечаний уравнение (2.3.9) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[uq] + \frac{\partial}{\partial z}[a_z q] = \\ = \frac{\partial^2 (K_x q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (K_y q)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (K_z q)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Можно показать [44], что если

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1(\tau, \xi; t, x)}{\partial t} + \frac{\partial [u p_1(\tau, \xi; t, x)]}{\partial x} = \frac{\partial^2 (K_x p_1(\tau, \xi; t, x))}{\partial x^2}, \quad (2.3.12) \\ u = const, K_x = const, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_2(\tau, \eta; t, y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 (K_y p_2(\tau, \eta; t, y))}{\partial y^2}, \quad (2.3.13)$$

$$K_y = \text{const}, K_x = K_y = K_0 u, K_0 = \text{const}$$

$$\frac{\partial p_3(\tau, \theta; t, z)}{\partial t} + \frac{\partial [a_z p_3(\tau, \theta; t, z)]}{\partial z} = \frac{\partial^2 (K_z p_3(\tau, \theta; t, z))}{\partial z^2}, \quad (2.3.14)$$

$$t, \tau \in [t_0, T],$$

причем p_3 удовлетворяет дополнительно еще граничному условию того же вида из набора (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5), что и решение уравнения (2.3.7), то функция

$$p(\tau, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z) = p_1(\tau, \xi; t, x) p_2(\tau, \eta; t, y) p_3(\tau, \theta, t, z) \quad (2.3.15)$$

удовлетворяет уравнению (2.3.11) и тому же граничному условию из набора (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5), которому должно удовлетворять решение уравнения (2.3.7).

В [9] указано, что граничное условие (2.3.6) всегда выполняется для любой функции $q(t, x, y, z)$, удовлетворяющей уравнению (2.3.1). Этот факт следует из физических соображений. Однако его можно легко доказать и чисто формальными средствами (учитывая (2.3.10) и условие $p \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$). Поэтому будем в дальнейшем всюду считать, что (2.3.6) имеет место.

Выясним, в каких случаях на границе $z = 0$ можно задавать одно из граничных условий (2.3.3) – (2.3.5) для $q = q(t, x, y, z)$. Из соотношений (2.3.10), (2.3.15) следует, что на границе $z = 0$ граничные условия, порождаемые коэффициентами a_z, K_z , которые должны быть заданы для $p_3 = p_3(\tau, \theta, t, z)$, будут совпадать с граничными условиями, которые следует задать для $q = q(t, x, y, z)$.

Пусть $z_0 > 0$ есть фиксированная точка из окрестности точки 0. Введем постоянные

$$L_1 = \int_0^{z_0} \exp\left\{-\int_{z_0}^z \frac{a_z(s)}{K_z(s)} ds\right\} dz, \quad L_3 = \int_0^{z_0} \frac{1}{K_z(z)} \exp\left\{\int_{z_0}^z \frac{a_z(s)}{K_z(s)} ds\right\} dz,$$

$$L_2 = \int_0^{z_0} \frac{1}{K_z(\sigma)} \left(\int_0^\sigma \exp\left\{-\int_{z_0}^z \frac{a_z(s)}{K_z(s)} ds\right\} dz \right) \exp\left\{-\int_{z_0}^\sigma \frac{a_z(s)}{K_z(s)} ds\right\} d\sigma.$$

Границу $z = 0$ будем называть [14], [61]: регулярной, если $L_1 < +\infty, L_2 < +\infty, L_3 < +\infty$; захватывающей, если $L_1 < +\infty, L_2 < +\infty, L_3 = +\infty$; притягивающей, если $L_1 < +\infty, L_2 = +\infty$; естественной,

если $L_1 = +\infty$.

При этом, если $z = 0$ является регулярной или захватывающей, то она называется достижимой; если притягивающей или естественной – недостижимой. Граничные условия (2.3.3) – (2.3.5) для p_3 (а, значит, и для q) могут быть поставлены только в том случае, если $z = 0$ является достижимой. Более конкретно [7], [61]: если $z = 0$ является захватывающей, то на ней должно быть задано граничное условие, соответствующее поглощающей подстилающей поверхности; если $z = 0$ является регулярной, то на ней может быть задано одно из граничных условий (2.3.3) – (2.3.5) (в зависимости от физических особенностей подстилающей поверхности); если $z = 0$ является недостижимой, то в этом случае на $z = 0$ не требуется задания никаких граничных условий.

Пример 2.3.1. Пусть $K_z = const$, $w = 0$ (легкая примесь). Тогда $a_z = 0$ (см. (2.3.8)). Имеем $L_1 < +\infty$, $L_2 < +\infty$, $L_3 < +\infty$. Следовательно, граница $z = 0$ является регулярной и на ней допустимо задание любого граничного условия вида (2.3.3) – (2.3.5).

Пример 2.3.2. Пусть $K_z = z$, $w = 0$. В этом случае $a_z = 1$,

$$L_1 = \int_0^{z_0} \exp\left\{-\int_{z_0}^z s^{-1} ds\right\} dz = +\infty.$$

Значит, граница $z = 0$ является естественной (недостижимой) и на ней не следует задавать граничные условия вида (2.3.3) – (2.3.5). Уравнение (2.3.1) решается без этих граничных условий.

Замечание. При определении типа границы $z = 0$ в зависимости от вида коэффициентов

$$a_z(z), K_z(z)$$

мы использовали предположение: существует переходная плотность

$$p(\tau, \xi, \eta, \theta; t, x, y, z),$$

которая удовлетворяет уравнению (2.3.9). Однако, если имеет место допущение $u(z) = const$ в пределах приземного слоя, основанное на свойствах коэффициентов а), б) уравнения (2.3.1), то справедливость указанного предположения может быть проверена в ходе классификации границ. Действительно, из равенства (2.3.15) следует, что p существует, если существуют p_1 , p_2 , p_3 ,

удовлетворяющие соответственно уравнениям (2.3.12) – (2.3.14). Известно [42], [61], что фундаментальные решения (переходные плотности) уравнений (2.3.12), (2.3.13) существуют. Таким образом, вопрос о существовании p сводится к вопросу о существовании p_3 . Далее достаточно сослаться на работы В. Феллера [62], [63] (см. также [7]). Из этих работ вытекает ответ на вопрос о существовании фундаментального решения уравнения (2.3.14) в зависимости от вида коэффициентов a_z , K_z и типа границ $z = 0$, $z = +\infty$.

Заключение к главе 2

В главе 2 приведены постановки ряда прямых и обратных задач в рамках математической модели рассеяния примеси в турбулентной атмосфере. Описаны полуэмпирическая модель, гауссова модель и модель рассеяния примеси, получаемая линеаризацией уравнений Навье-Стокса.

В рамках полуэмпирической модели сформулированы обратные задачи определения мощности источника примеси, ее фоновой концентрации, коэффициентов турбулентной диффузии. Приведена обобщенная классификация обратных задач.

Указаны способы (критерии) постановки граничных условий, позволяющих адекватно экспериментальным данным определять (указывать) граничные условия в краевой задаче, описывающей рассеяние примеси в атмосфере (полуэмпирической модели).

ГЛАВА 3

КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

При исследовании любой краевой задачи, описывающей некоторый реальный процесс, всегда возникает вопрос о корректности ее постановки. В данной главе изложены результаты исследований на корректность постановки краевых задач, описывающих турбулентную диффузию примеси в атмосфере.

3.1. Разрешимость краевых задач

В теории и практике современных исследований рассеяния примеси в турбулентной атмосфере используются, как отмечалось выше, две начально-граничные задачи, которые в самой общей постановке имеют вид (см. п. 1.1.) [35]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} + \alpha q = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_j} + f, \quad (3.1.1)$$

$$K_{ij} = K_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.2)$$

$$t \in [0, T], \quad 0 < T < +\infty, \quad (x_1, x_2, x_3) \in G,$$

$$q(t, x_1, x_2, x_3) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad (3.1.3)$$

$$q(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (3.1.4)$$

$$q(t, x_1, x_2, x_3) \Big|_{\partial G} = \psi(x_1, x_2, x_3); \quad (3.1.5)$$

или (3.1.1) – (3.1.4), где вместо (3.1.5) рассматривается граница

$$\left\{ \frac{\partial q}{\partial \nu} + \beta q \right\} \Big|_{\partial G_0} = V. \quad (3.1.6)$$

Здесь $q(t, x_1, x_2, x_3)$ – функция, значения которой в каждый момент времени $t \in [0, T)$ совпадает со средним значением концентрации примеси в связной области

$$G, \partial G = \partial G_0 \cup \partial G_1 \cup \partial G_2,$$

∂G_0 – нижняя, ∂G_1 – боковая, ∂G_2 – верхняя части границы ∂G ,

$$\bar{G} = G \cup \partial G;$$

$$u_i = u_i(t, x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, -$$

функции, значения которых совпадают со значениями средней скорости ветра в момент t в точке (x_1, x_2, x_3) соответственно вдоль осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 (рассматривается декартова прямоугольная система координат); $\alpha = \alpha(t, x_1, x_2, x_3)$ – функция, характеризующая убыль примеси в момент t в точке (x_1, x_2, x_3) за счет либо ее радиоактивного распада, либо за счет вступления в химические реакции с веществами, находящимися в атмосфере, и компонентами атмосферного воздуха;

$$K_{ij} = K_{ij}(t, x_1, x_2, x_3), \quad i, j = 1, 2, 3, -$$

элементы матрицы коэффициентов турбулентной диффузии; $f = f(t, x_1, x_2, x_3)$ – функция, моделирующая источник выбросов вещества в атмосферу (функция источника); $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ – функция, значения которой в точке $(x_1, x_2, x_3) \in G$ в момент времени t_0 совпадают со значениями концентрации примеси в атмосфере (функция, описывающая фоновую концентрацию);

$$\frac{\partial q}{\partial v} -$$

производная по внутренней нормали ∂G_0 :

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial v(t, x)} = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in K}} \sum_{j=1}^3 K_{ij}(t, x) \cos(N, x) \frac{\partial q(t, x)}{\partial y_j}, \quad (3.1.7)$$

$$x = x(x_1, x_2, x_3), \quad y = y(x_1, x_2, x_3),$$

N – внутренняя нормаль к ∂G_0 в точке $x \in \partial G_0$, K – конечный, замкнутый конус с вершиной $x \in \partial G_0$, который содержится в $G + \{x\}$, $\beta(t, x_1, x_2, x_3)$, – функция, характеризующая гравитационное осаждение примеси на ∂G_0 , $V(t, x_1, x_2, x_3)$ – скорость сухого осаждения примеси на ∂G_0 , $t \in [0, T)$, $(x_1, x_2, x_3) \in G_0$.

Функция источника примеси f задается в виде [35], [44]:

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = Q(t, x_1, x_2, x_3) \delta(t, x_1, x_2, x_3), \quad (3.1.8)$$

где $Q(t, x)$ – мощность источника примеси (масса примеси, выбрасываемой в области G в момент t в точке $x \in \bar{G}$), $\delta(t, x)$ – дельта функция Дирака. При этом (см. п. 1.1.4), если источник является (t_0 – момент начала действия источника):

1) *точечным*, сосредоточенным в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \bar{G}$,

1.1) мгновенного действия, то $Q(t, x) = Q = const$,

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = Q\delta(t)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0),$$

1.2) непрерывного действия, то

$$Q(t, x) = Q(t), f(t, x_1, x_2, x_3) = Q(t)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0);$$

2) *линейным*, сосредоточенным на интервале $[a, b]$ числовой прямой, параллельной оси Ox_2 и пересекающей ось Ox_3 в точке $(0, 0, x_3^0)$

2.1) мгновенного действия, то

$$Q(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} Q(x_2), x_2 \in [a, b], \\ 0, x_2 \notin [a, b], \end{cases}$$

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = Q(x_2)\delta(t)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_3 - x_3^0);$$

2.2) непрерывного действия, то

$$Q(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} Q(t, x_2), t \in [0, T], x_2 \in [a, b], \\ 0, x_2 \notin [a, b], \end{cases}$$

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = Q(t, x_2)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_3 - x_3^0);$$

3) *площадным*, сосредоточенным на площадке S , лежащей на плоскости x_1Ox_2 , и пересекающей ось Ox_3 в точке $(0, 0, x_3^0)$

3.1) мгновенного действия, то

$$Q(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} Q(x_1, x_2), x_1, x_2 \in S, \\ 0, x_1, x_2 \notin S, \end{cases}$$

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = Q(x_1, x_2)\delta(t)\delta(x_3 - x_3^0);$$

3.2) непрерывного действия, то

$$Q(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} Q(t, x_1, x_2), t \in [0, T], x_1, x_2 \in S, \\ 0, x_1, x_2 \notin S, \end{cases}$$

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = Q(t, x_1, x_2)\delta(t)\delta(x_3 - x_3^0);$$

4) *поверхностным*, сосредоточенным на поверхности S_{II} тела Π

4.1) мгновенного действия, то

$$Q(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} Q(x_1, x_2, x_3), & (x_1, x_2, x_3) \in S_{II}, \\ 0, & (x_1, x_2, x_3) \notin S_{II}, \end{cases}$$

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = Q(x_1, x_2, x_3)\delta(t);$$

4.2) непрерывного действия, то

$$Q(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} Q(t, x_1, x_2, x_3), & t \in [0, T], (x_1, x_2, x_3) \in S_{II}, \\ 0, & (x_1, x_2, x_3) \notin S_{II}, \end{cases}$$

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = Q(x_1, x_2, x_3).$$

Уравнение (1.1) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial q}{\partial x_i} + \alpha q = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 K_{ij} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} + f, \quad (3.1.9)$$

$$h_i = u_i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1.10)$$

Следует заметить, что уравнение (3.1.9) (а значит и (3.1.1)) совпадает с уравнением:

$$Lu = f_{\Phi}, \quad (3.1.11)$$

$$Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.1.12)$$

из [64] при $n = 3$ с точностью до знака у f и f_{Φ} : f и f_{Φ} имеют противоположные знаки (см. (7.1) из гл.1, (3.2) из гл.2, (2.12) из гл. 3, (1.1), (1.3) из гл. 5 [64]). Этот факт будет учитываться в приводимых ниже результатах исследования.

Уравнению (3.1.1) поставим в соответствие уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} + \alpha q = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_j} + Q, \quad (3.1.13)$$

уравнению (3.1.9) – уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial q}{\partial x_i} + \alpha q = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 K_{ij} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} + Q, \quad (3.1.14)$$

отличающиеся соответственно от (3.1.1) и (3.1.9) лишь видом функции f : вместо f задаваемой выражением (3.1.8), здесь рассматривается мощность источника примеси Q .

В данном параграфе исследуем следующую задачу: найти (указать) условия, при выполнении которых задачи (3.1.1) – (3.1.5).

(3.1.1) – (3.1.4), (3.1.6) имеют единственное решение (под решением каждой из этих задач будем понимать обобщенное решение в смысле [31]).

Несмотря на очевидную необходимость проведения таких исследований (решению аналитическими и численными методами указанных начально-граничных задач посвящено значительное число работ, в которых изначально явно или неявно допускается, что решение рассматриваемой задачи существует и единственно), подобных исследований в этом направлении до настоящего времени не проводилось. Как правило, авторы публикаций, посвященных различным проблемам математического моделирования рассеяния примеси в атмосфере, либо вообще не затрагивают этот вопрос (о существовании и единственности решения), либо без должного на то основания ссылаются на классические работы [31], [64]. Ниже можно будет убедиться: достаточно ясное и четкое освещение данного вопроса не является тривиальным и требует скрупулезного анализа результатов из [31], [64]. Исключение составляет монография [35], однако в этой работе найдены лишь достаточные условия единственности решения задач типа (3.1.1) ((3.1.9)) – (3.1.5), (3.1.1) ((3.1.9)) – (3.1.4), (3.1.6). Вопрос о существовании их решения в [35] не затрагивался.

Теорема 3.1.1. Пусть коэффициенты

$$u_i, K_{ij}, \alpha, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

принадлежат классу

$$H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\bar{D}_4^T)$$

и ограничены на \bar{D}_4^T , кроме того u_i, K_{ij} непрерывно дифференцируемы по $x_i, i, j = 1, 2, 3$ в $\bar{D}_4^T, Q \geq 0, \varphi \geq 0, Q, \varphi$ ограничены, Q удовлетворяет условию Гёльдера с показателем β, φ непрерывна в $\bar{D}_4^T, \partial G$ удовлетворяет условиям Ляпунова. Тогда задача (3.1.1) – (3.1.5) при $\psi = 0$ имеет единственное решение, совпадающее с решением задачи (3.1.13), (3.1.2) – (3.1.5).

Доказательство теоремы 3.1.1. Так как

$$u_i, K_{ij}, i, j = 1, 2, 3,$$

непрерывно дифференцируемы по x_i в \bar{D}_4^T , то уравнение (3.1.1) эквивалентно уравнению (3.1.9), уравнение (3.1.13) – уравнению (3.1.14).

Рассмотрим задачу (3.1.13), (3.1.2) – (3.1.5), которая эквивалентна задаче (3.1.14), (3.1.2) – (3.1.5). При выполнении условий данной теоремы, очевидно, выполняются условия теоремы 16.2 из гл. 4 § 16 [31], а значит, решение задачи (3.1.14) ((3.1.13)), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.5) существует, теоремы 5.2 из гл. 4 § 5 [31], а значит решение задачи (3.1.14) ((3.1.13)), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.5) единственно и оно представимо в виде:

$$q(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^t d\tau \iiint_G q_0(t, x_1, x_2, x_3; \tau, y_1, y_2, y_3) Q dy_1 dy_2 dy_3 + \\ + \iiint_G q_0(t, x_1, x_2, x_3; \tau, y_1, y_2, y_3) \varphi(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3 \quad (3.1.15)$$

(см. соотношение (16.17) из [31]), где $q_0(t, x_1, x_2, x_3; \tau, y_1, y_2, y_3)$ - функция Грина для задачи (3.1.14) ((3.1.13)), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.5) в области \bar{D}_4^T , т.е. q_0 удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial q_0}{\partial x_i} + \alpha q_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \delta(t - \tau) \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \delta(x_3 - y_3), \quad (3.1.16)$$

$$\left(\frac{\partial q_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial q_0}{\partial x_i} + \alpha q_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial q_0}{\partial x_j} + \right. \\ \left. + \delta(t - \tau) \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \delta(x_3 - y_3) \right) \quad (3.1.17)$$

и условиями:

$$q_0(t, x_1, x_2, x_3; \tau, y_1, y_2, y_3) = 0, \quad (3.1.18)$$

$$q_0(t, x_1, x_2, x_3; \tau, y_1, y_2, y_3) \Big|_{(x_1, x_2, x_3) \in \partial G} = 0. \quad (3.1.19)$$

Кроме того, в условиях данной теоремы выполняются условия теоремы 2.1 и следствия 2.1 из гл. 1 § 2 [31].

А тогда

$$q(t, x_1, x_2, x_3) \geq 0, \quad (t, x_1, x_2, x_3) \in D_4^T. \quad (3.1.20)$$

Из данных рассуждений, (3.1.20) и условий $Q \geq 0$, $\varphi \geq 0$ следует, что если выполнены условия данной теоремы, то решение задачи (3.1.14) ((3.1.13)), (3.1.2) – (3.1.5) существует и единственно.

Учитывая равенство (3.1.8) и используя свойства δ -функции Дирака [15], соотношение (3.1.15) можно переписать в эквивалентном виде:

$$q(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^t d\tau \iiint_G q_0(t, x_1, x_2, x_3; \tau, y_1, y_2, y_3) f dy_1 dy_2 dy_3 + \\ + \iiint_G q_0(t, x_1, x_2, x_3; \tau, y_1, y_2, y_3) \varphi(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3. \quad (3.1.21)$$

Снова воспользовавшись свойствами δ -функции, непосредственным подсчетом можно убедиться, что функция (3.1.21) удовлетворяет уравнению (3.1.9), а, следовательно, и уравнению (3.1.1). Учитывая, что $q_0(t, x_1, x_2, x_3; \tau, y_1, y_2, y_3)$ является функцией Грина для задачи (3.1.13), (3.1.2) – (3.1.5) (т.е. решением задачи (3.1.17) – (3.1.19)), заключаем, что функция (3.1.21) удовлетворяет условиям (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5). Значит, решение (3.1.1) – (3.1.5) существует и единственно, что и требовалось доказать

Теорема 3.1.2. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1.1. Тогда задача (3.1.1) – (3.1.5) при $f = 0$, $\varphi = 0$ имеет единственное решение.

Доказательство теоремы 3.1.2. Если выполнены условия данной теоремы, то:

1) выполнены все условия теоремы 16.1 из гл. 4 § 16 [31], а значит, решение задачи (3.1.9), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.5) при $f = 0$, $\varphi = 0$ существует;

2) выполняются все условия теоремы 5.2 из гл. 4 § 5 [31], а значит, решение задачи (3.1.9), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.5) при $f = 0$, $\varphi = 0$ единственно;

3) выполняются все условия теоремы 2.1 из гл. 1 § 2 [31], а значит, согласно следствию 2.1 из этой теоремы, решение задачи (3.1.9), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.5) при $f = 0$, $\varphi = 0$ неотрицательно, т.е. выполняется условие (3.1.3).

Уравнение (3.1.9) эквивалентно уравнению (3.1.1). А тогда, согласно 1) – 3), решение задачи (3.1.1) – (3.1.5) при $f = 0$, $\varphi = 0$ существует и единственно, что и требовалось доказать.

Теорема 3.1.3. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1.1. Тогда (3.1.1) – (3.1.5) имеет единственное решение, совпадающее с решением (3.1.13), (3.1.2) – (3.1.5).

Доказательство теоремы 3.1.3. Все условия теоремы 3.1.3 те же, что и условия теоремы 3.1.1. Обозначим через $q_1(t, x_1, x_2, x_3)$ решение задачи (3.1.1) – (3.1.5) при $\psi = 0$, через $q_2(t, x_1, x_2, x_3)$ - решение этой задачи при $f = 0$, $\varphi = 0$. Непосредственным подсчетом легко убедиться, что $q(t, x_1, x_2, x_3) = q_1(t, x_1, x_2, x_3) + q_2(t, x_1, x_2, x_3)$ является решением (3.1.1) - (3.1.5). Так как $q_1(t, x_1, x_2, x_3)$, согласно теореме 3.1.1, – единственное решение задачи (3.1.1) – (3.1.5) при $\psi = 0$, согласно теореме 3.1.2, – единственное решение задачи (3.1.1) – (3.1.5) при $f = 0$, $\varphi = 0$, то $q(t, x_1, x_2, x_3)$, очевидно, будет единственным решением задачи (3.1.1) – (3.1.5), что и требовалось доказать.

Перейдем к анализу задачи (3.1.1) – (3.1.4), (3.1.6).

$$Lq = \sum_{t=1}^3 \sum_{i=1}^3 k_i \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial q}{\partial x_i} - \alpha q - \frac{\partial q}{\partial t}$$

Определенный в \bar{D}_4^T . Будем предполагать, что L удовлетворяет следующим условиям:

а) L параболический в \bar{D}_4^T , т.е. при всех $(t, x) \in \bar{D}_4^T$ и любого вещественного вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \neq (0, 0, 0)$ выполняется условие

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_{ij}(t, x) \varepsilon_i \varepsilon_j \geq 0;$$

б) коэффициенты L непрерывны \bar{D}_4^T и для всех $(t, x) \in \bar{D}_4^T$, $(t^0, x^0) \in \bar{D}_4^T$ и некоторого $\beta = const$, $0 < \beta < 1$ удовлетворяет условиям:

$$|K_{ij}(t, x) - K_{ij}(t^0, x^0)| \leq A(|x - x^0| + |t - t^0|),$$

$$|h_i(t, x) - h_i(t, x^0)| \leq A|x - x^0|^\beta,$$

$$|\alpha(t, x) - \alpha(t, x^0)| \leq A|x - x^0|^\beta$$

$$i, j = 1, 2, 3, A = const > 0$$

Теорема 3.1.4. Пусть выполнены условия а), б), u_i , K_{ij} непрерывно дифференцируемы по x_i , $i=1,2,3$ в D_4^T , граница $\partial G \in C^{1+\alpha}$, Q непрерывна по Гёльдеру по x с показателем γ равномерно в \bar{D}_4^T , φ непрерывна в \bar{G} и равна нулю в некоторой G – окрестности границы ∂G , β , ν непрерывны на $\partial G_0 \times [0, T]$. Тогда решение задачи (3.1.1) – (3.1.4), (1.6) существует и единственно.

Доказательство теоремы 3.1.4. По условию u_i , K_{ij} , $i=1,2,3$ непрерывно дифференцируемы по x_i в D_4^T . Поэтому уравнение (3.1.1) эквивалентно уравнению (3.1.9), уравнение (3.1.13) – уравнению (3.1.14).

Аналогично тому, как мы это делали при доказательстве теоремы 3.1.1, рассмотрим задачу (3.1.13), (3.1.2) – (3.1.4), (3.1.6), эквивалентную задаче (3.1.14), (3.1.2) – (3.1.4), (3.1.6).

Если выполнены условия данной теоремы, то, очевидно, выполняются условия теоремы 2 из гл. 5 § 3 [64] (случай $n=3$). Откуда следует, что решение q задачи (3.1.14) ((3.1.13)), (3.1.2), (3.1.4), (3.1.6) существует, единственно и представимо в виде:

$$\begin{aligned} q(t, x_1, x_2, x_3) = & \int_0^t d\tau \iiint_{\partial G} \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) r(\tau, \zeta, \eta, \theta) dS + \\ & + \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) \varphi(\zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta + \quad (3.1.22) \\ & + \int_0^t d\tau \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) Q(\tau, \zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta, \end{aligned}$$

где $r(\tau, \zeta, \eta, \theta)$ непрерывная на $\partial G \times [0, T]$ функция, являющаяся решением интегрального уравнения (3.8), которое представимо в виде (3.10) из гл. 5 § 3 [64], dS – элемент поверхности ∂G , Γ – фундаментальное решение уравнения $Lq = 0$,

$$L(.) = \frac{\partial(.)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial(.)}{\partial x_i} + \alpha(.) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \frac{\partial^2(.)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (3.1.23)$$

$$(L(.) = \frac{\partial(.)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial(.)}{\partial x_i} + \alpha(.) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial(.)}{\partial x_j} = 0). \quad (3.1.24)$$

Обозначим в (3.1.7) (а значит и в (3.1.6))

$$b_i(t, x) = \sum_{j=1}^3 K_{ij}(t, x) \cos(N, x).$$

В условиях нашей теоремы выполняются (для случая $n=3$) все условия теоремы 2.2 из гл. 1 § 2 [31] (принцип максимума). А тогда, согласно этой теореме, $q(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$q(t_1, x) \geq \sup_{\lambda > a_0} \min \left\{ \begin{array}{l} 0, \min_{\partial D_4^t} \frac{ve^{\lambda(t_1-t_0)}}{|b|}; \\ e^{\lambda t_1} \min_G u(x, 0); \\ \frac{1}{\lambda - a_0} \min(Qe^{\lambda(t_1-t_0)}) \end{array} \right\}, \quad (3.1.25)$$

$$|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

$$a_0 = \max_{D_4^t} (-\|K(t, x)\|),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad t_1 \geq t_0 \geq 0.$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \bar{q}(t, x_1, x_2, x_3) &= \int_0^t d\tau \iiint_{\partial G} \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) r(\tau, \zeta, \eta, \theta) dS + \\ &+ \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) \varphi(\zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta + \\ &+ \int_0^t d\tau \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) f(\tau, \zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

полученное из (3.1.22) путем замены в последнем слагаемом (3.1.22) Q на f . Из (1.8) и свойств δ -функции Дирака следует, что (3.1.26) эквивалентно в \bar{D}_4^T (3.1.22), т.е.

$$\bar{q}(t, x_1, x_2, x_3) = q(t, x_1, x_2, x_3), \quad (t, x_1, x_2, x_3) \in D_4^T \quad (3.1.27)$$

Из (1.27) вытекает, что $\bar{q}(t, x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет условиям (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6), так как этим условиям в D_4^T удовлетворяет $q(t, x_1, x_2, x_3)$.

Подставим формально (3.1.26) в (3.1.1), т.е. вычислим $L\bar{q}(t, x_1, x_2, x_3)$, $(t, x_1, x_2, x_3) \in D_4^T$, $(x_1, x_2, x_3) \notin \partial G$, где $L(\cdot)$ имеет вид (3.1.24).

Согласно (3.1.26), (3.1.24)

$$\begin{aligned} \bar{Lq}(t, x_1, x_2, x_3) = & L \int_0^t d\tau \iiint_{\partial G} \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) r(\tau, \zeta, \eta, \theta) dS + \\ & + L \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) \varphi(\zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta + \\ & + L \int_0^t d\tau \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) f(\tau, \zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Вычислим выражение в правой части (3.1.28), упростив для этого каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} & L \int_0^t d\tau \iiint_{\partial G} \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) r(\tau, \zeta, \eta, \theta) dS = \\ & = \iiint_{\partial G} \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) r(\tau, \zeta, \eta, \theta) dS + \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

$$+ \int_0^t d\tau \iiint_{\partial G} [L\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta)] r(\tau, \zeta, \eta, \theta) dS \equiv 0,$$

так как по условию $\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta)$ - фундаментальное решение уравнения $L\bar{q} = 0$, а согласно определения Γ

$$\begin{aligned} & \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) \equiv 0, \\ & \text{при } (x_1, x_2, x_3) \notin \partial G, (\zeta, \eta, \theta) \in \partial G, \\ & \text{и } L\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

$$\begin{aligned} & L \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) \varphi(\tau, \zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta = \\ & = \iiint_G [L\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta)] \varphi(\tau, \zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta = 0, \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

$$\begin{aligned} & L \int_0^t d\tau \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) f(\tau, \zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta = \\ & = \iiint_G \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) f(\tau, \zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta + \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

$$+ \int_0^t d\tau \iiint_G [L\Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta)] f(\tau, \zeta, \eta, \theta) d\zeta d\eta d\theta = f(t, x_1, x_2, x_3).$$

Равенство (3.1.32) вытекает из равенств

$$\begin{aligned} & \Gamma(t, x_1, x_2, x_3; \tau, \zeta, \eta, \theta) = \delta(x - \zeta) \delta(y - \eta) \delta(z - \theta), \\ & \iiint_G f(t, \zeta, \eta, \theta) \delta(x - \zeta) \delta(y - \eta) \delta(z - \theta) d\zeta d\eta d\theta = f(t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

и равенства (3.1.30).

Из (3.1.28), (3.1.29), (3.1.31), (3.1.32) следует, что

$$L\bar{q}(t, x_1, x_2, x_3) = f(t, x_1, x_2, x_3).$$

Из (3.1.33) заключаем, что $\bar{q}(t, x_1, x_2, x_3)$ является решением уравнения (3.1.1), из (3.1.27) – что решение единственно и оно удовлетворяет условиям (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6) (в силу того, что этим условиям удовлетворяет $q(t, x_1, x_2, x_3)$), что и требовалось доказать.

Полученные результаты принимаются для анализа математических моделей, используемых на практике.

Убедимся, что для основных начально-граничных задач, используемых в прикладных исследованиях рассеяния примеси в турбулентной атмосфере, выполняются все условия теорем 3.1.1–3.1.4. В этих задачах обычно полагают, что коэффициенты и функции в задачах (3.1.1) – (3.1.5), (3.1.1) – (3.1.4), (3.1.6) имеют следующий вид [9] (для полного соответствия с обозначениями, используемыми на практике, будем считать, что $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$).

$$u_1 = u_1(z) = c_1 \ln z, \quad c_1 = \text{const} > 0, \quad u_2 = u_3 = 0 \quad (3.1.34)$$

(этот случай означает, что ось Ox ориентирована по направлению вектора скорости ветра, а скорость ветра вдоль оси Oz изменяется по логарифмическому закону),

$$\begin{cases} K_{ij} \neq 0, i = j, \\ K_{ij} = 0, i \neq j, i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

т.е. в матрицы коэффициентов диффузии учитываются только диагональные элементы, а все элементы, не расположенные на главной диагонали, считают равными нулю; при этом $K_{11} = K_{22} = c_2 u_1$, $c_2 = \text{const} > 0$, где u_1 задается выражением (3.1.34), $K_{33} = c_3 z + c_4$, $c_3 = \text{const} > 0$, $c_4 = \text{const} \geq 0$.

В качестве G часто выбирают [35] прямой круговой цилиндр высоты H с достаточно большим радиусом R основания, расположенного на подстилающей поверхности $z = 0$. Предполагается, что H меньше высоты так называемого пограничного слоя атмосферы [9]. Такой способ задания G удобен при аналитических (если это возможно в отдельных случаях [44]) и численных решениях рассматриваемых начально-граничных задач.

Функции $\alpha, Q, \phi, \psi, \beta, \nu$ задают таким образом, что выполняются условия теорем 3.1.1 – 3.1.4. Чаще всего полагают, что эти функции

являются постоянными величинами в G .

При данном выборе u_i , $i=1,2,3$, условие (3.1.2) выполняется тождественно.

Для указанных

$$u_i, \alpha, K_{ij}, \varphi, \psi, \beta, \nu, G$$

условия теорем 3.1.1 – 3.1.4 выполняются. Поэтому используемые в прикладных исследованиях задачи вида (3.1.1) – (3.1.5), (3.1.1) – (3.1.4), (3.1.6) всегда имеют (и при том одно) решение.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. При численном решении задач (3.1.1) – (3.1.5), (3.1.1) – (3.1.4), (3.1.6) в уравнении (3.1.1) часто f заменяют на Q без должного на то обоснования. Однако, результаты численных расчетов в этом случае удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Объяснить этот факт можно следующим образом. Из доказательств теорем 3.1.1 – 3.1.4 следует, что вид $q(t, x_1, x_2, x_3)$ не зависит от выбора в уравнении (3.1.1) в качестве свободного члена f или Q (см. (3.1.15) и (3.1.21), (3.1.22) и (3.1.26), (3.1.27)). Поэтому и результаты численных расчетов (при замене f на Q в уравнении (3.1.1)) всегда будут хорошо согласованы с экспериментальными данными (если только, конечно, сама модель (3.1.1) – (3.1.5) или (3.1.1) – (3.1.4), (3.1.6) адекватно экспериментальным данным описывает изменения значений $q(t, x_1, x_2, x_3)$ в G).

3.2. Корректность постановки задачи Коши

В работе [44] было показано, что при определенных условиях задача Коши (3.1.1) – (3.1.4) так же описывает процесс рассеяния примеси в турбулентной атмосфере. В п. 3.1 эта задача отдельно не была рассмотрена и исследована на предмет ее разрешимости, т.к. этот результат автоматически вытекает из теории 12 (из §7 гл. 2) и 10 (из §4 гл. 2) [64]. На основе этих теорем можно доказать корректность задачи (3.1.1) – (3.1.4).

Теорема 3.2.1. Пусть выполнены условия

$$k_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3;$$
$$L_1 < \infty, \quad L_2 = \infty \text{ или } L_1 = \infty,$$

$$L_1 = \int_0^{z_0} \exp \left\{ - \int_{z_0}^z \frac{u_3(s)}{k_{33}(s)} ds \right\} dz,$$

$$L = \int_0^{z_0} \frac{1}{k_{33}} \left(\int_0^\sigma \exp \left\{ - \int_{z_0}^z \frac{u_3(s)}{k_{33}(s)} ds \right\} dz \right) \exp \left\{ - \int_{z_0}^\sigma \frac{u_3(s)}{k_{33}(s)} ds \right\} d\sigma,$$

$z_0 = const > 0$, из [80], кроме того, выполнены условия:

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_{ij} \xi_i \xi_j \leq \lambda_1 |\xi|^2,$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \lambda_0 = const > 0, \quad \lambda_1 = const > 0,$$

h_i, k_{ij} непрерывно дифференцируемы и ограничены в $G \times [0, T]$ и удовлетворяет при всех $(t, x), (t^0, x^0) \in \bar{G} \times [0, T]$ и некоторого $r \in (0, 1)$ условиям

$$|k_{ij}(t, x) - k_{ij}(t^0, x^0)| \leq A(|x - x^0|^r + |t - t^0|^{r \setminus 2}),$$

$$|h_i(t, x) - h_i(t, x^0)| \leq A|x - x^0|^r,$$

$$|\alpha(t, x) - \alpha(t, x^0)| \leq A|x - x^0|^r, \quad A = const > 0, \quad \varphi(x) \geq 0, \quad Q(t, x)$$

непрерывны в $\bar{G}, \bar{G} \times [0, T]$ и удовлетворяет условиям

$$|Q(t, x)| \leq B \exp(c|x|^2),$$

$$|\varphi(x)| \leq B \exp(c|x|^2),$$

$$B = const > 0, \quad c = const > 0.$$

Тогда задача Коши (3.1.1) – (3.1.4) является корректно поставленной (по Адамару).

Доказательство теоремы 3.2.1. Если выполнены условия теоремы из [44], то имеет смысл постановка задачи Коши (3.1.1) – (3.1.4) в $\bar{G} \times [0, T]$.

Если выполнены указанные в данной теореме условия, то выполнены условия теорем 12 (§7 гл.1) и 10 (§4 гл. 2) из [64]. А тогда задача Коши (3.1.1) – (3.1.4) в $\bar{G} \times [0, T]$ разрешима.

Докажем непрерывную зависимость решения $g(t, x)$ задачи (3.1.1) – (3.1.4) от изменений $Q(t, x)$ и $\varphi(x)$. Пусть $Q(t, x)$ и $\varphi(x)$ изменились (увеличились) соответственно на $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, тогда вместо (3.1.1) и (3.1.2) – (3.1.4) имеем задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial g_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\partial x_i} + \alpha g_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial^2 g_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\partial x_i \partial x_j} + (Q + \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad t \in [0, T], \quad 0 < T < +\infty,$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad g(0, x) = \varphi(x) + \varepsilon_2. \quad (3.2.2)$$

Вычитая (3.1.1), (3.1.4) соответственно (3.2.1) и (3.2.2) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial (g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}{\partial x_i} + \alpha (g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial^2 (g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon_1, \\ g(0, x) - g_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(0, x) = \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Положим $G = R^3$ (это допущение возможно, т. к. в этом случае разрешимость задачи (3.1.1) – (3.1.4) гл. 3 остается справедливой – см. теорему 12 (§7 гл. 1) и теорему 10 (§4 гл.2) из [64]. В этом случае (см. теорему 12 (§7 гл. 1))

$$g(t, x) - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t, x) = \int_{R^3} F(t, x; \xi, 0) \varepsilon_2 d\xi - \int_0^+ \int_{R^3} F(t, x; \tau, \xi) \varepsilon_1 d\tau d\xi,$$

где $F(t, x; \tau, \xi)$ – фундаментальное решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial (g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}{\partial x_i} + \alpha (g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial^2 (g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Откуда, очевидно,

$$|g - g_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}| \leq \varepsilon_2 + T \cdot \varepsilon_1.$$

Из этого неравенства следует непрерывная зависимость $g(t, x)$ от изменений $Q(t, x)$ и $\varphi(x)$, что и требовалось доказать.

3.3. Корректность постановки первой краевой задачи

В п.3.1 были указаны условия, при выполнении которых задача (3.1.1) – (3.1.5) является разрешимой, т.е. имеет единственное решение. Исследуем теперь эту задачу на устойчивость решения q к возмущениям функций Q, φ, ψ .

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1.3 из п. 3.1. Кроме того, выполнены условия: в каждой точке $(t, x) \in D_4^T$, $D_4^T = (0, T) \times G$ и для любого действительного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $|\xi| \neq 0$,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 K_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j > 0, \quad (3.3.1)$$

$\alpha(t, x) \leq 0$ при $(t, x) \in D_4^T$ и для некоторого $\lambda = const$ в D_4^T выполняется условие

$$K_{11} \lambda^2 + h_1 \lambda > 1, \text{ где } h_1 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_1} K_{1j}.$$

Тогда задача (3.1.1) – (3.1.5) является корректно поставленной относительно параметров Q, φ, ψ

Доказательство теоремы 3.3.1. Если выполнены условия теоремы 3.1.3 из п. 3.1, то задача (3.1.1) – (3.1.5) имеет, согласно этой теореме, единственное решение (разрешима). Покажем, что если в дополнение к этим условиям выполнены остальные условия данной теоремы, то решение q будет непрерывно зависеть от Q, φ, ψ , а, следовательно, устойчивым к возмущениям в Q, φ, ψ . А это, в свою очередь, будет означать корректность постановки данной задачи.

Согласно доказательству теоремы 3.1.1 из 3.1, то уравнение (3.1.1) эквивалентно уравнениям (3.1.9), (3.1.13), (3.1.14). Этот факт будет использовать в дальнейших рассуждениях.

Согласно [64] имеет место неравенство:

$$\max_{\bar{D}_4^T} |q| \leq \max_{\bar{G}} |q| \Big|_{t=0} + (e^{\lambda d} - 1) \max_{\bar{D}_4^T} |Q|, \quad (3.3.2)$$

где $d = const > 0$, определяется в [64] (см. §3 гл. 2 с. 60), откуда

$$\max_{\overline{D}_4^T} |q| \leq \max_G \varphi(x_1, x_2, x_3) + \max_{\partial G} \psi(x_1, x_2, x_3) + (e^{\lambda d} - 1) \max_{\overline{D}_4^T} |Q|. \quad (3.3.3)$$

Пусть Q, φ, ψ испытали соответственно возмущения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Обозначим через $q_\varepsilon = q_\varepsilon(t, x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ - возмущенное решение (3.1.1) – (3.1.5) или (3.1.13), (3.1.2) – (3.1.5). Имеем задачу:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} + \alpha q_\varepsilon = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x_j} + (Q + \varepsilon_1), \quad (3.3.4)$$

$$q_\varepsilon(t, x_1, x_2, x_3) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad (3.3.5)$$

$$q_\varepsilon(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon_2, \quad (3.3.6)$$

$$q_\varepsilon(t, x_1, x_2, x_3)|_{\partial G} = \psi(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon_3. \quad (3.3.7)$$

Вычтем почленно (3.1.13) из (3.3.5), (3.1.4) из (3.3.6) и (3.1.5) из (3.3.7). Будем иметь задачу:

$$\frac{\partial (q_\varepsilon - q)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial (q_\varepsilon - q)}{\partial x_i} + \alpha (q_\varepsilon - q) = \quad (3.3.8)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial (q_\varepsilon - q)}{\partial x_j} + \varepsilon_1,$$

$$(q_\varepsilon - q)|_{t=0} = \varepsilon_2, \quad (3.3.9)$$

$$(q_\varepsilon - q)|_{\partial G} = \varepsilon_3. \quad (3.3.10)$$

Используя неравенство (3.3.3) применительно к задаче (3.3.8) – (3.3.10), будем иметь:

$$\max_{\overline{D}_4^T} |q_\varepsilon - q| \leq |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + (e^{\lambda d} - 1) |\varepsilon_1|. \quad (3.3.11)$$

Из (3.3.11) вытекает непрерывная зависимость значений q от значений Q, φ, ψ , что и требовалось доказать.

3.4. Корректность постановки третьей краевой задачи

В п.3.1 были указаны условия, при выполнении которых задача (3.1.1) – (3.1.4), (3.1.6) является разрешимой, т.е. имеет единственное решение. Исследуем теперь эту задачу на устойчивость решения q к возмущениям функций Q, φ, V . Если q окажется устойчивым к возмущениям этих функций, то указанная задача (3.1.1) – (3.1.4), (3.1.6) будет корректно поставленной.

Теорема 3.4.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1.4 из п. 3.1. Тогда задача (3.1.1)-(3.1.4), (3.1.6) является корректно поставленной (относительно параметров Q, φ, V).

Доказательство теоремы 3.4.1. Воспользуемся схемой доказательства, использованной при доказательстве теоремы 3.3.1.

Как отмечалось ранее, уравнение (3.1.1) эквивалентно уравнениям (3.1.9), (3.1.13), (3.1.14).

Согласно [64] (см. лемму 2 из §3 гл. 5) при выполнении условий данной теоремы в области $\bar{D}_4^T = [0, T)$ справедливо неравенство

$$|q(t, x)| \leq K \left(\sup_{\bar{D}_4^T} |Q| + \sup_{\partial G \in [0, T]} |V| + \sup_{D_4^T} |\varphi| \right), \quad (3.4.1)$$

где $K = const > 0$, K зависит только от \bar{D}_4^T, β .

Пусть Q, φ, V испытали соответственно возмущения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; через $q_\varepsilon = q_\varepsilon(t, x), x = (x_1, x_2, x_3)$, обозначим возмущенное решение (3.1.1) – (3.1.4) удовлетворяющие задаче:

$$\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_i} + \alpha g_\varepsilon = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x_j} + (Q + \varepsilon_1), \quad (3.4.2)$$

$$q_\varepsilon(t, x) \geq 0, t \in (0, T), x \in G,$$

$$q_\varepsilon(0, x) = \varphi(x) + \varepsilon_2, \quad (3.4.3)$$

$$\left\{ \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial \nu} + \beta q_\varepsilon \right\} \Big|_{x \in \partial G_0} = V(t, x) + \varepsilon_3 \quad (3.4.4)$$

Вычтем почленно (3.1.13) из (3.4.2), (3.1.4) из (3.4.3) (3.1.6) из (3.4.4) будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(q_\varepsilon - q)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial(q_\varepsilon - q)}{\partial x_i} + \alpha(q_\varepsilon - q) = \\ & = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial(q_\varepsilon - q)}{\partial x_j} + \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$$(q_\varepsilon - q)|_{t=0} = \varepsilon_2, \quad (3.4.6)$$

$$\left\{ \frac{\partial(q_\varepsilon - q)}{\partial \nu} + \beta(q_\varepsilon - q) \right\} \Big|_{x \in \partial G_0} = \varepsilon_3 \quad (3.4.7)$$

Применяя неравенство (3.4.1) к решению задачи (3.4.5) – (3.4.7), будем иметь неравенство аналогичное (3.3.11), из которого вытекает

непрерывная зависимость значений q от значений Q, φ, ψ , что и требовалось доказать.

3.5. Разрешимость некоторых обратных задач

Приведем постановку некоторых обратных задач в рамках модели рассеяния примеси в турбулентной атмосфере и исследуем их на разрешимость.

Обратная задача 3.5.1. Найти пару функций (q, P) , определенных соответственно в $\bar{Q}, \bar{\Omega}$ из условий

$$q_t - (Lq)(t, \mathbf{x}) = f = h(\mathbf{x})P(\mathbf{x})\delta(t, \mathbf{x}), \quad (3.5.1)$$

$$q|_{t=0} = q_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.5.2)$$

$$q|_S = \mu(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in S = [0, T] \times \partial\Omega, \quad (3.5.3)$$

$$q(T, \mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3.5.4)$$

$$Lq = \sum_{i,j=1}^3 (k_{ij}(\mathbf{x})q_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^3 u_i(\mathbf{x})q_{x_i} - c(\mathbf{x})q, \quad (3.5.5)$$

$$c(\mathbf{x}) \geq 0.$$

Предполагается, что все функции в (3.5.1) – (3.5.5) (кроме искомого (q, P)) заданы и выполнены следующие условия:

$$k_{ij}(\mathbf{x}) \in H^{1+a}(\bar{\Omega}), u_i(\mathbf{x}) \in H^{1+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad (3.5.6)$$

$$c(\mathbf{x}) \in H^\alpha(\bar{\Omega}), i, j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^3 (u_i(\mathbf{x}))_{x_i} = 0; \quad (3.5.7)$$

$$\exists v_1 = \text{const}, v_2 = \text{const},$$

$$0 < v_1 < v_2 : v_1 |\xi|^2 \leq k_{ij} \xi_i \xi_j \leq v_2 |\xi|^2, \quad (3.5.8)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

$$\partial\Omega \subset H^{2-\alpha}, \quad (3.5.9)$$

$$q_0(\mathbf{x}), \chi(\mathbf{x}) \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad (3.5.10)$$

$$\mu(t, \mathbf{x}) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S), \quad 0 < \alpha < 1; \quad (3.5.11)$$

$\delta(t, \mathbf{x})$ – δ -функция Дирака;

$$\mu(0, \mathbf{x}) = q_0(\mathbf{x}), \mu(T, \mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega; \quad (3.5.12)$$

$$\mu'(0, \mathbf{x}) = (Lq_0)(0, \mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$\eta(\mathbf{x}) = \mu'(T, \mathbf{x}) - (L\chi)(T, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.5.13)$$

Условие (3.5.7) называют условием неразрывности, условие (3.5.8) – условием равномерной эллиптичности оператора L , условия (3.5.12), (3.5.13) – условиями согласования.

Уравнение (3.5.1) описывает изменения концентрации q в $\bar{\Omega}$ с течением времени $t \in [0, T]$. Значения $u_i(\mathbf{x})$ совпадают со значениями скорости ветра соответственно вдоль осей Ox , Oy , Oz . Функции $k_{ij}(\mathbf{x})$ называются коэффициентами турбулентной диффузии. Обычно считают [9], [35], что $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Однако в [37] отмечается, что такое допущение во многих случаях неоправданно. Коэффициент $c(\mathbf{x})$ характеризует скорость убывания примеси из атмосферы вследствие её распада или вступления в химические реакции с атмосферным воздухом. Значения $q_0(\mathbf{x})$ совпадают в точках $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ со значениями фоновой концентрации примеси, значения $\mu(t, \mathbf{x})$ – со значениями концентрации q на границе $\partial\Omega$ области Ω в различные моменты времени t . При численных расчетах часто предполагают [35], что область Ω – цилиндр, нижнее основание которого расположено на подстилающей поверхности. При достаточно больших размерах Ω можно считать, что $\mu \equiv 0$ на боковой поверхности в верхнем основании цилиндра. Если подстилающая поверхность полностью поглощает или, наоборот, отражает осаждающуюся на нее примесь, то на нижнем основании Ω полагают соответственно $\mu = 0$ или $\mu = 1$ [9]. Например, полностью поглощающими являются влажная земля и водная поверхность.

При решении уравнения (3.5.1) конечное условие (3.5.4) обычно не задают. Однако при рассмотрении обратных задач для (3.5.1) его следует интерпретировать как результаты измерений концентрации примеси q в точках $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ в момент времени T .

Функция источника примеси f может быть представлена в виде

$$f(t, \mathbf{x}) = h(\mathbf{x})P(t, \mathbf{x})\delta(t, \mathbf{x}),$$

где $h(\mathbf{x})P(t, \mathbf{x})$ – мощность источника f , т.е. количество примеси, выбрасываемое в момент t точкой \mathbf{x} , принадлежащей области

сосредоточения источников $\Omega_1 \subset \Omega$

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases} \quad (3.5.14)$$

При этом каждая переменная t, x_1, x_2, x_3 может присутствовать в произведении $P\delta$ только в одном из сомножителей. Если P зависит от t , то источник является источником непрерывного действия, если нет – либо стационарного, либо мгновенного действия. Например, если источник сосредоточен в точке

$$\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0),$$

то

$$f = h(\mathbf{x}_0)P(t)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)$$

описывает точеный источник непрерывного действия, а

$$f = h(\mathbf{x}_0)P\delta(t)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0),$$

$P = const > 0$ - мгновенного действия (момент его действия $t_0 = 0$). Аналогично описываются линейные и площадные источники [44]. В данной работе, согласно (3.5.1), рассматриваются только источники либо стационарного, либо мгновенного действия.

Обратная задача 3.5.2. Найти пару функций (q, P) , определенных соответственно в \bar{Q} и $\bar{\Omega}$, из условий (3.5.1) – (3.5.3), (3.5.14) и

$$lq \equiv \int_0^T v_c(t)q(t, \mathbf{x})dt = \chi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.5.15)$$

$$Lq = \sum_{i,j=1}^3 (k_{ij}(\mathbf{x})q_{x_i})x_i - \sum_{i=1}^3 u_i(\mathbf{x})q_{x_i} - c(t, \mathbf{x})q, \quad c(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (3.5.16)$$

Всюду ниже при изучении обратной задачи 3.5.2 требуется выполнение следующих условий:

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad k_{ij}(\mathbf{x}), u_i(\mathbf{x}) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(t, \mathbf{x}) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad (3.5.17)$$

$$\mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad \partial\Omega \in C^2, \quad (3.5.18)$$

$$q_0(\mathbf{x}), \chi(\mathbf{x}) \in W_2(\Omega), \quad (3.5.19)$$

$$v_c(t) \in L_2(0, T), \quad v_c(t) > 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.5.20)$$

$$\mu(t, \mathbf{x}), \mu_t(t, \mathbf{x}) \in W_2^{2,1}(Q), \quad (3.5.21)$$

$$\mu(t, \mathbf{x}) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; W_2^1(\Omega)),$$

$$\mu(0, \mathbf{x}) = q_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3.5.22)$$

$$l\mu = \chi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3.5.23)$$

а так же условия неразрывности (3.5.7) и равномерной эллиптичности (3.5.8).

Все обозначения здесь имеют тот же смысл, что и в задаче 3.5.1. Исключение составляет равенство (3.5.15). Здесь $v_c(t)$ - скорость сухого осаждения примеси на подстилающую поверхность (чаще всего полагают, что $v_c = \text{const} > 0$), $\chi(\mathbf{x})$ - плотность осадка примеси в каждой точке Ω за время действия источника примеси T .

Условия (3.5.22), (3.5.23) называют условиями согласования [40].

При рассмотрении полуэмпирического уравнения (3.5.1) всегда неявно предполагается [9], [35], что решение этого уравнения следует понимать в классическом смысле. В данной работе всюду ведется речь об обобщенном решении. Это существенно расширяет возможности применения в прикладных исследованиях математических моделей (3.5.1) – (3.5.5) и (3.5.1) – (3.5.3), (3.5.14) – (3.5.16).

Заметим, что обратные задачи 3.5.1, 3.5.2 не охватывают весь круг обратных задач, рассмотренных в п.2.2.

С задачей (3.5.1) – (3.5.5) свяжем следующую: найти пару функций (\tilde{q}, P) , определенных соответственно в \bar{Q} , $\bar{\Omega}$, из условий

$$\tilde{q}_t - (L\tilde{q})(t, \mathbf{x}) = h(\mathbf{x})P(\mathbf{x}), \quad (3.5.24)$$

$$\tilde{q}|_{t=0} = q_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.5.25)$$

$$\tilde{q}|_S = \mu(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}) \in S, \quad (3.5.26)$$

$$L\tilde{q} = \sum_{i,j=1}^3 (k_{ij}(\mathbf{x})\tilde{q}_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^3 u_i(\mathbf{x})\tilde{q}_{x_i} - c(\mathbf{x})\tilde{q}, \quad (3.5.27)$$

$$\tilde{q}(T, \mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3.5.28)$$

Предполагаем, что для задачи (3.5.24) – (3.5.28) выполняются те же условия (3.5.6) – (3.5.13), что и для (3.5.1) – (3.5.5).

С задачей (3.5.1) – (3.5.3), (3.5.5), (3.5.14) – (3.5.16) свяжем такую: найти пару функций (\tilde{q}, P) , определенных соответственно в \bar{Q} , $\bar{\Omega}$, из условий

$$l\tilde{q} = \int_0^T v_c(t)\tilde{q}(t, \mathbf{x})dt = \chi(\mathbf{x}), \quad (3.5.29)$$

(3.5.24) – (3.5.27), (3.5.14). Предполагаем, что для нее выполняются

условия (3.5.17) – (3.5.23).

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.5.1. Пусть выполнены условия (3.5.6) – (3.5.13). Тогда существует единственное решение (q, P) задачи (3.5.1) – (3.5.5). Если кроме этого,

$$k_{ij}, u_i, c \in H^{3+\alpha}(\overline{\Omega}), q_0(x), \chi(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

то

$$(q, P) \in H^{2+\alpha, 1+2/\alpha}(\overline{Q}) \times H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Теорема 3.5.2. Пусть выполнены условия (3.5.7), (3.5.8), (3.5.17) – (3.5.19), (3.5.21) – (3.5.23), $c(t, x) \geq 0$, $c_t(t, x) \leq 0$. Тогда существует единственное решение

$$(q, P), q \in W_2^{2,1}(Q), P \in L_2(\Omega),$$

задачи (3.5.1) – (3.5.3), (3.5.14) – (3.5.16).

Теорема 3.5.3. Пусть выполнены условия (3.5.7), (3.5.8), (3.5.17) – (3.5.19), (3.5.21) – (3.5.23),

$$v_c(t) > 0, (v_c(t))_t \leq 0, t \in (0, T), v_c(t) \in W_2^1(0, T),$$

$$c(t, x) \geq 0, (t, x) \in Q.$$

Тогда существует единственное решение

$$(q, P), q \in W_2^{2,1}(Q), P \in L_2(\Omega),$$

задачи (3.5.1) – (3.5.3), (3.5.14) – (3.5.16).

Доказательство теоремы 3.5.1. Задача (3.5.24) – (3.5.28) в условиях теоремы 3.5.1 имеет единственное решение [41]

$$(\tilde{q}, P) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S) \times H^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

(обратите внимание, что функция $h(t, x)$ из [41] в нашем случае тождественно равна 1 при $(t, x) \in \overline{Q}$), при этом согласно [31] (\tilde{q}, P) связаны соотношением

$$\tilde{q}(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G(t, x, \tau, y) h(y) P(y) dy + \int_{\Omega} G(t, x, \tau, y) q_0(y) dy \quad (3.5.30)$$

где $G(t, x, \tau, y)$ функция Грина для задачи (3.5.24) – (3.5.27), определяемая равенством (16.7) гл. 4 из [31].

Равенство (3.5.30) на основании (3.5.14) свойств δ -функции и способа задания Ω_1 эквивалентно равенству

$$\tilde{q}(t, \mathbf{x}) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G(t, \mathbf{x}, \tau, \tilde{\mathbf{y}}) P(\tilde{\mathbf{y}}) d\tilde{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.5.31)$$

где $\tilde{\mathbf{y}} \in \Omega_1$.

Непосредственным вычислением легко убедиться, что

$$q(t, \mathbf{x}) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) h(\mathbf{y}) P(\mathbf{y}) \delta(\tau, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.5.32)$$

при каждом фиксированном значении

$$f(t, \mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) \delta(t, \mathbf{x})$$

удовлетворяет уравнению (3.5.1) Равенство (3.5.32) эквивалентно

$$q(t, \mathbf{x}) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G(t, \mathbf{x}, \tau, \tilde{\mathbf{y}}) P(\tilde{\mathbf{y}}) d\tilde{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad , \quad (3.5.33)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} \in \Omega_1.$$

Правые части равенств (3.5.31) и (3.5.33) совпадают. Поэтому

$$q(t, \mathbf{x}) = \tilde{q}(t, \mathbf{x}).$$

$\tilde{q}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет условиям (3.5.25), (3.5.26), (3.5.28). Значит, этим же условиям удовлетворяет и $q(t, \mathbf{x})$. Отсюда заключаем, что (q, P) , связанные соотношением (3.5.32), являются решением задачи (3.5.1) – (3.5.5).

Наоборот, пусть (q, P) , удовлетворяющие (3.5.32) - решение (3.5.1) – (3.5.5). Докажем, что (\tilde{q}, P) , связанные соотношением (3.5.30) (которое эквивалентно (3.5.31)) будут решением задачи (3.5.24) – (3.5.28). Непосредственным вычислением убеждаемся, что (q, P) удовлетворяет уравнению (3.5.24). Как отмечалось выше, (3.5.32) эквивалентно (3.5.33). Правые части (3.5.33), (3.5.31) совпадают, значит,

$$\tilde{q}(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}).$$

По предложению $q(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют условиям. Значит, этим же условиям удовлетворяет и $\tilde{q}(t, \mathbf{x})$. Следовательно, (\tilde{q}, P) действительно являются решением (3.5.24) – (3.5.28).

Таким образом, (q, P) является решением (3.5.1) – (3.5.5) тогда и только тогда, когда (\tilde{q}, P) - решение (3.5.24) – (3.5.28). В условиях

нашей теоремы решение (\tilde{q}, P) задачи (3.5.24) – (3.5.28) существует и единственно, поэтому решение (q, P) задачи (3.5.1) – (3.5.5) также существует и единственно. На основании следствия теоремы 1 из [41] заключаем, что справедлива и вторая часть нашей теоремы. Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказываются теоремы 3.5.2 и 3.5.3.

Замечание 3.5.1. Приближенное решение задачи (3.5.24) – (3.5.28) можно найти методом Рунге. Подробное описание этого метода приведено в [31], его обоснование для задач, аналогичных (3.5.24) – (3.5.28), приведено в [41].

Замечание 3.5.2. Решение (3.5.1) – (3.5.3), (3.5.14) – (3.5.16) можно свести к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода [40]).

Заключение к главе 3

В данной главе представлены результаты исследований на корректность постановки краевых задач, описывающих рассеяние примеси в пограничном слое атмосферы: задачи Коши, первой и третьей задач. Найденные критерии обеспечивают как разрешимость, так и устойчивость этих задач в соответствующих пространствах. Данные критерии имеют важное значение в прикладных исследованиях, т. к. позволяют ответить на вопрос: можно ли приступить к численному (или, возможно, аналитическому) решению конкретно рассматриваемой краевой задачи, описывающей рассеяние примеси в атмосфере, или дополнительно проводить исследования для ее регуляризации.

Приведены условия разрешимости некоторых обратных задач, сформулированных в рамках первой краевой задачи.

Вопрос об условиях разрешимости аналогичных обратных задач, сформулированных в рамках второй и третьей краевых задач, также описывающих рассеяние примеси в турбулентной атмосфере, в настоящее время остается, к сожалению, открытым.

ГЛАВА 4

ВЕРОЯТНОСТНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В данной главе приведены вероятностные методы построения решений (приближенных и в явном аналитическом виде) некоторых краевых задач, описывающих рассеяние примеси в турбулентном пограничном слое атмосферы. Полученные соотношения использованы для построения решений обратных задач, поставленных в рамках изучаемой математической модели рассеяния примеси.

4.1. Метод, основанный на использовании приближенных решений гауссовского вида

Изменения значений средней концентрации q легкой сохраняющейся примеси от мгновенного точечного с координатами $(0,0,H)$ источника в приземном слое атмосферы удовлетворяет (при условии, что фоновая концентрация этой примеси не учитывается) уравнению [9], [44] (ср. с уравнением (1.1.16))

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.1.1)$$

и начальному условию

$$q(0, x, y, z) = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - H), \quad (4.1.2)$$

где $Q = \text{const} > 0$, $\delta(x)$ – δ -функция Дирака.

Можно убедиться, что задача (4.1.1) – (4.1.2) при выполнении условий теоремы 3.1.1 эквивалентна задаче

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} + f,$$

$$f = f(t, x, y, z) = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - H),$$

$$q(0, x, y, z) = 0.$$

Этот факт следует из соотношения (3.1.15).

Будем предполагать, что

$$U, K_x, K_y, K_z$$

являются непрерывными функциями аргумента z :

$$U = U(z), K_x = K_x(z), K_y = K_y(z), K_z = K_z(z).$$

Для расчета значений средней концентрации примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного источника, кроме уравнения (4.1.1), часто используется [36] функция

$$q_1(t, x, y, z) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x(t) \sigma_y(t) \sigma_z(t)} \times \exp \left\{ - \left[\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2(t)} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2(t)} + \frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2(t)} \right] \right\}, \quad (4.1.3)$$

называемая гауссовой функцией распределения концентрации примеси, где

$$\sigma_x^2(t), \sigma_y^2(t), \sigma_z^2(t) -$$

дисперсии координат частиц этой примеси соответственно вдоль осей Ox, Oy, Oz в момент времени t , \bar{U} – средняя по высоте скорость ветра вдоль оси Ox

$$(\sigma_x^2(t), \sigma_y^2(t), \sigma_z^2(t) -$$

непрерывные функции аргумента $t, t \geq 0, \bar{U} = const$).

Значения концентрации q_1 , вычисленные по формуле (4.1.3), хорошо согласуются с экспериментальными данными [36].

Известно [10], что при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma_x^2(t)}{t} \rightarrow \sigma_x^2, \frac{\sigma_y^2(t)}{t} \rightarrow \sigma_y^2, \frac{\sigma_z^2(t)}{t} \rightarrow \sigma_z^2,$$

где

$$\sigma_x^2 > 0, \sigma_y^2 > 0, \sigma_z^2 > 0 -$$

некоторые постоянные. Поэтому будем считать, что

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 \cdot t, \sigma_y^2(t) = \sigma_y^2 \cdot t, \sigma_z^2(t) = \sigma_z^2 \cdot t. \quad (4.1.4)$$

Непосредственным подсчетом легко убедиться, что $q_1(t, x, y, z)$, задаваемая выражением (4.1.3), если

$$\sigma_x(t), \sigma_y(t), \sigma_z(t)$$

имеют вид (4.1.4), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \sigma_z^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2} = 0$$

и начальному условию (4.1.2). Представим уравнение (4.1.1) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \\ & - \frac{1}{2} \sigma_z^2 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + (U(z) - \bar{U}) \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(z) - \frac{1}{2} \sigma_x^2 \right) \frac{\partial q}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y(z) - \frac{1}{2} \sigma_y^2 \right) \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(z) - \frac{1}{2} \sigma_z^2 \right) \frac{\partial q}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Ясно, что чем меньше

$$(U(z) - \bar{U}), \left(K_x(z) - \frac{1}{2} \sigma_x^2 \right), \left(K_y(z) - \frac{1}{2} \sigma_y^2 \right), \left(K_z(z) - \frac{1}{2} \sigma_z^2 \right)$$

уклоняются от 0, тем меньше q_1 , задаваемая выражением (4.1.3), будет уклоняться от точного решения q . Для того, чтобы

$$\bar{U}, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$$

наименее уклонялись соответственно от

$$U(z), K_x(z), K_y(z), K_z(z)$$

на интервале $[0, h]$, где h – высота приземного слоя, достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} & \int_0^h (U(z) - \bar{U})^2 dz \rightarrow \min_{\bar{U}}, \\ & \int_0^h \left(K_x(z) - \frac{1}{2} \sigma_x^2 \right)^2 dz \rightarrow \min_{\sigma_x^2}, \\ & \int_0^h \left(K_y(z) - \frac{1}{2} \sigma_y^2 \right)^2 dz \rightarrow \min_{\sigma_y^2}, \\ & \int_0^h \left(K_z(z) - \frac{1}{2} \sigma_z^2 \right)^2 dz \rightarrow \min_{\sigma_z^2}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Легко убедиться, что

$$\bar{U}, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2,$$

удовлетворяющие условиям (4.1.6), имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{1}{2} \int_0^h U(z) dz, \sigma_x^2 = \frac{2}{h} \int_0^h K_x(z) dz, \\ \sigma_y^2 &= \frac{2}{h} \int_0^h K_y(z) dz, \sigma_z^2 = \frac{2}{h} \int_0^h K_z(z) dz.\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

Следовательно, функцию $q_1(t, x, y, z)$, задаваемую выражением (4.1.3), где

$$\sigma_x(t), \sigma_y(t), \sigma_z(t),$$

определяются соотношениями (4.1.4), (4.1.7), можно принять за приближенное решение задачи (4.1.1), (4.1.2).

Используя (4.1.3) можно построить формулы для расчета средних значений концентрации легкой примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника при условиях полного отражения от подстилающей поверхности $z = 0$

$$\left. \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (4.1.8)$$

или ее полного поглощения

$$q(t, x, y, 0) = 0 \quad (4.1.9)$$

указанной поверхностью. Они имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned}q_2(t, x, y, z) &= \\ &= \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z t^3} \exp \left\{ - \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t} \right) \right\} \times \\ &\quad \times \left[\exp \left\{ - \frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} + \exp \left\{ - \frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} \right]\end{aligned}\quad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned}q_3(t, x, y, z) &= \\ &= \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z t^3} \exp \left\{ - \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t} \right) \right\} \times \\ &\quad \times \left[\exp \left\{ - \frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} - \exp \left\{ - \frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} \right]\end{aligned}\quad (4.1.11)$$

Интегрируя равенства (4.1.10), (4.1.11) по t в пределах от 0 до ∞ , получим формулы для расчета $q_2(x, y, z)$, $q_3(x, y, z)$ от стационарного

точечного источника непрерывного действия, расположенного в точке $(0,0,H)$:

$$q_i(x, y, z) = \int_0^{\infty} q_i(t, x, y, z) dt, \quad i = 2, 3.$$

Соотношения (4.1.10) – (4.1.11) можно использовать для решения обратных задач в рамках математических моделей рассеяния примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника (4.1.1), (4.1.2), (4.1.10); (4.1.1), (4.1.2), (4.1.11).

Задача 4.1.1. По известным средним значениям концентрации $q_2(t, x, y, z)$ легкой примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника при условии ее полного отражения от подстилающей поверхности, либо по известным средним значениям концентрации $q_3(t, x, y, z)$ легкой примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника при условии ее полного поглощения указанной поверхностью, а также по заданной высоте источника H и известным дисперсиям

$$\sigma_x^2(t), \sigma_y^2(t), \sigma_z^2(t)$$

координат ее частиц примеси соответственно вдоль осей Ox , Oy , Oz в каждый момент времени t , $t \geq 0$, определить неизвестную мощность источника Q , $Q = const$.

Эту задачу можно легко решить аналитически, воспользовавшись соотношениями (4.1.10) – (4.1.11):

$$Q = \frac{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z t^3}{\exp\left\{-\left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t}\right)\right\}} \times \frac{1}{\left[\exp\left\{-\frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\}\right]}, \quad (4.1.12)$$

$$Q = \frac{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z t^3}{\exp\left\{-\left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t}\right)\right\}} \times \quad (4.1.13)$$

$$\times \frac{1}{\left[\exp\left\{-\frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\}\right]}.$$

Задача 4.1.2. По известным средним значениям концентрации $q_2(t, x, y, z)$ легкой примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника при условии ее полного отражения от подстилающей поверхности, либо по известным средним значениям концентрации $q_3(t, x, y, z)$ легкой примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника при условии ее полного поглощения указанной поверхностью, а также по заданной высоте источника H , известному значению мощности источника Q , $Q = const > 0$, этой примеси и дисперсиям

$$\sigma_x^2(t), \sigma_y^2(t)$$

координат ее частиц соответственно вдоль осей Ox , Oy в каждый момент времени t , $t \geq 0$, определить неизвестные значения

$$\sigma_z^2(t) -$$

дисперсии координат частиц примеси вдоль оси Oz , $t \geq 0$.

Задача 4.1.3. По известным средним значениям концентрации $q_2(t, x, y, z)$ легкой примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника при условии ее полного отражения от подстилающей поверхности, либо по известным средним значениям концентрации $q_3(t, x, y, z)$ легкой примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника при условиях полного поглощения указанной поверхностью, а также по заданной мощности источника этой примеси Q , $Q = const > 0$, известным дисперсиям

$$\sigma_x^2(t), \sigma_y^2(t), \sigma_z^2(t)$$

координат ее частиц соответственно вдоль осей Ox , Oy , Oz в момент времени t , определить неизвестную высоту источника H .

Методами решения трансцендентных уравнений, например, методом простой итерации [2], можно построить решения задач 4.1.2 – 4.1.3.

Укажем, например, способ решения задачи 4.1.2 (при условии полного отражения примеси от подстилающей поверхности), основанным на использовании метода простой итерации. Предполагаем, что известен интервал $[a, b]$ (a и b находим, например, методом подбора), в котором находится требуемое решение σ_z уравнения

$$q_2(t, x, y, z) - \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z t^3} \times \\ \times \exp\left\{-\left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t}\right)\right\} \times \\ \times \left[\exp\left\{-\frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\} \right] = 0.$$

В случае анизотропной среды (при условии полного отражения примеси от подстилающей поверхности) равенство (4.1.10) перепишем в виде

$$\sigma_z = \frac{Q}{q_2(t, x, y, z) (2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y t^3} \times \\ \times \exp\left\{-\left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t}\right)\right\} \times \\ \times \left[\exp\left\{-\frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\} \right].$$

Последовательные приближения к искомому корню будем находить по итерационной формуле

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(n+1)} &= \frac{Q}{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y t^3} \times \\
&\times \exp \left\{ - \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t} \right) \right\} \times \\
&\times \left[\exp \left\{ - \frac{(z - H)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} \right\} + \exp \left\{ - \frac{(z + H)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} \right\} \right], \\
&n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

В случае изотропной среды (при условии полного отражения примеси от подстилающей поверхности) полагают

$$\sigma_z = \sigma_y = \sigma_x,$$

тогда из ((4.1.10) получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \sqrt[3]{\frac{Q}{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} t^3}} \times \\
&\times \sqrt[3]{\exp \left\{ - \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_z^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_z^2 t} \right) \right\}} \times \\
&\times \sqrt[3]{\left[\exp \left\{ - \frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} + \exp \left\{ - \frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} \right]}
\end{aligned}$$

Последовательные приближения к искомому корню в этом случае будем находить вместо (4.1.14) по следующей итерационной формуле:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(n+1)} &= \sqrt[3]{\frac{Q}{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} t^3}} \times \\
&\times \sqrt[3]{\exp \left\{ - \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} + \frac{y^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} \right) \right\}} \times \\
&\times \sqrt[3]{\left[\exp \left\{ - \frac{(z - H)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} \right\} + \exp \left\{ - \frac{(z + H)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} \right\} \right]} \\
&n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

В качестве нулевого приближения $\sigma_z^{(0)}$ к искомому корню можно выбрать любое значение σ_z из интервала изоляции корня (a, b) .

Критерий окончания процесса вычислений – выполнение неравенства

$$\left| \sigma_z^{(n+1)} - \sigma_z^{(n)} \right| < \varepsilon, \quad (4.1.16)$$

где ε - требуемая погрешность.

Пример 4.1.1. Статистические данные, взятые из отчетов центра лабораторного анализа и технических измерений по Южному Федеральному округу (ЦЛАТИ по ЮФО) и содержащие информацию о выбросах в атмосферу загрязняющих веществ (диоксида азота) и мощности источника примеси в точке (2,2,3) в моменты времени $t \in [0,55]$ (с) приведены в таблице 4.1.1. Средняя скорость ветра $\bar{U} = 2,5$ (м/с), высота источника $H = 8$ м, среда изотропна, примесь полностью отражается от подстилающей поверхности. Вычислим значения σ_z в указанные в таблице 1 моменты времени, воспользовавшись формулой (4.1.15).

Таблица 4.1.1. Значения концентрации диоксида азота и мощности источника примеси в точке (2,2,3) в моменты времени $t \in [0,55]$ с.

t , с	q , кг/м ³	$Q(t)$, кг/с
0	0	0
5	$0,166987 \cdot 10^{-4}$	0,833333
10	$0,830912 \cdot 10^{-6}$	0,909091
15	$0,553513 \cdot 10^{-7}$	0,9375
20	$0,429770 \cdot 10^{-8}$	0,952381
25	$0,366608 \cdot 10^{-9}$	0,961538
30	$0,333249 \cdot 10^{-10}$	0,967742
35	$0,317117 \cdot 10^{-11}$	0,972222
40	$0,312372 \cdot 10^{-12}$	0,97561
45	$0,316114 \cdot 10^{-13}$	0,978261
50	$0,326906 \cdot 10^{-14}$	0,980392
55	$0,344127 \cdot 10^{-15}$	0,982143

Расчетные (полученные с помощью ППП Microsoft Excel) и экспериментальные значения σ_z приведены в таблице 2.

Таблица 4.1.2. Экспериментальные и вычисленные значения σ_z в моменты времени $t \in [0,55]$ (с).

t , с	σ_z экспериментальная	σ_z рассчитанная
0	2,746530722	2,659908923
5	2,746530722	2,748429109
10	2,746530722	2,836949296
15	2,746530722	2,825469482
20	2,746530722	2,813989669
25	2,746530722	2,802509856
30	2,746530722	2,791030042
35	2,746530722	2,779550229
40	2,746530722	2,814940332
45	2,746530722	2,642005779
50	2,746530722	2,833670685
55	2,746530722	2,712785986

Графическая реализация экспериментальных и вычисленных значений σ_z представлены на рисунке 4.1.1.

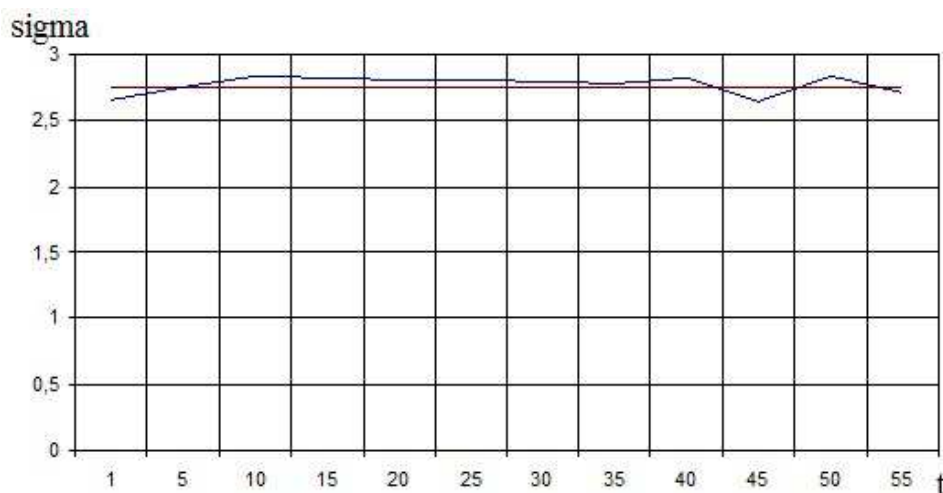


Рисунок 4.1.1. Экспериментальные (прямая) и вычисленные (ломаная) σ_z в моменты времени $t \in [0,55]$ с.

Анализируя полученные результаты можно сделать следующий вывод: вычисленные значения отклоняются от экспериментальных больше всего на концах расчетного интервала, но не более чем на 20%.

Аналогично можно определить σ_z в случае анизотропной среды при условии полного поглощения примеси подстилающей поверхностью. Воспользовавшись соотношением (4.1.11), находим:

$$\sigma_z = \frac{Q}{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y t^3} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t} \right) \right\} \times$$

$$\times \left[\exp \left\{ - \frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} - \exp \left\{ - \frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} \right].$$

Последовательные приближения к искомому корню будем находить по итерационной формуле:

$$\sigma_z^{(n+1)} = \frac{Q}{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y t^3} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t} \right) \right\} \times \quad (4.1.17)$$

$$\times \left[\exp \left\{ - \frac{(z - H)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} \right\} - \exp \left\{ - \frac{(z + H)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} \right\} \right]$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

В случае изотропной среды (при условии полного поглощения примеси подстилающей поверхностью) полагают $\sigma_z = \sigma_y = \sigma_x$, тогда из (4.1.11) получим

$$\sigma_z = \sqrt[3]{\frac{Q}{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} t^3}} \times$$

$$\times \sqrt[3]{\exp \left\{ - \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_z^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_z^2 t} \right) \right\}} \times$$

$$\times \sqrt[3]{\left[\exp \left\{ - \frac{(z - H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} - \exp \left\{ - \frac{(z + H)^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} \right]}.$$

Последовательные приближения к искомому корню будем находить вместо (4.1.17) по следующей итерационной формуле

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(n+1)} = & \sqrt[3]{\frac{Q}{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2}t^3}} \times \\
& \times \sqrt[3]{\exp\left\{-\left(\frac{(x-\bar{U}t)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t} + \frac{y^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t}\right)\right\}} \times \\
& \times \sqrt[3]{\left[\exp\left\{-\frac{(z-H)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(z+H)^2}{2(\sigma_z^{(n)})^2 t}\right\}\right]}, \\
& n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

В качестве нулевого приближения

$$\sigma_z^{(0)}$$

к искомому корню можно выбрать, как и ранее, любое значение σ_z из интервала изоляции корня (a, b) .

Критерий окончания процесса вычислений – выполнение неравенства

$$|\sigma_z^{(n+1)} - \sigma_z^{(n)}| < \varepsilon,$$

где ε - погрешность, которую требуется достичь.

Точно так же решается задача 4.1.3. Равенство (4.1.10) перепишем в виде:

$$H = \sigma_z \sqrt[3]{\left[\left(\frac{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z t^3}{Q} \right) \times \exp\left\{\frac{(x-\bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2 t}\right\} \right]} - z.$$

В качестве нулевого приближения $H^{(0)}$ к искомому корню можно выбрать любое значение H из отрезка изоляции корня $[a, b]$.

Последовательные приближения к искомому корню будем находить по итерационной формуле

$$\begin{aligned}
& H^{(n+1)} = \\
& = \sigma_z \sqrt{-2t \ln \left[\left(\frac{q_2(t, x, y, z)(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z t^3}{Q} \right) \times \right.} \\
& \quad \left. \times \exp \left(\frac{(x - \bar{U}t)^2}{2\sigma_x^2 t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2 t} \right) - \exp \left\{ -\frac{(z - H^{(n)})^2}{2\sigma_z^2 t} \right\} \right]} - z, \quad (4.1.19) \\
& n = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

Критерий окончания процесса вычислений – выполнение неравенства

$$|H^{(n+1)} - H^{(n)}| < \varepsilon,$$

где ε – требуемая погрешность.

4.2. Метод, основанный на использовании решений, построенных методом преобразования координат

В теории стохастических (случайных) процессов при описании марковских процессов диффузионного типа важная роль принадлежит уравнениям Колмогорова (прямому и обратному) [25], [61] которые представляют собой уравнения в частных производных параболического типа. В одномерном случае уравнение Колмогорова (точнее Фоккера-Планка-Колмогорова) для плотности вероятностей $P = P(t, x)$, имеет вид [61]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)P)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b(t, x)P)}{\partial x^2} &= 0, \quad (4.2.1) \\
t \in [t, T], \quad x \in (-\infty, \infty), \quad b(t, x) > 0,
\end{aligned}$$

где $a(t, x)$, $b(t, x)$ – соответственно коэффициенты сноса и диффузии случайного процесса.

Пусть $P(t, x)$ удовлетворяет начальному

$$P(t_0, x) = \delta(x - x_0) \quad (4.2.2)$$

и граничному

$$P(t, x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (4.2.3)$$

условиям; x_0 – значение рассматриваемого процесса, принятое им в начальный момент времени t . Для построения в явном аналитическом виде решения задачи (4.2.1) – (4.2.3) часто используют метод преобразования координат [61], [65], основы которого были заложены еще А.Н. Колмогоровым [25] и развиты в работе [65]. Суть этого метода состоит в следующем.

От независимых переменных t, x перейдем к новым переменным t', x' :

$$t' = \varphi(t), \quad x' = \psi(t, x), \quad (4.2.4)$$

где $\varphi(t), \psi(t, x)$ – взаимно-однозначные функции, причем $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема по t , а $\psi(t, x)$ – непрерывно дифференцируема по t и дважды – по x . С помощью преобразований (4.2.4) $P(t, x)$ переходит в $P'(t', x')$, при этом

$$P(t, x) = \left| \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right| P'(t', x'), \quad (4.2.5)$$

задача (4.2.1) – (4.2.3) преобразуется в задачу

$$\frac{\partial P'}{\partial t'} + \frac{\partial (a'(t', x') P')}{\partial x'} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b'(t', x') P')}{\partial x'^2} = 0, \quad (4.2.6)$$

$$P'(t'_0, x') = \delta(x' - x'_0), \quad (4.2.7)$$

$$P'(t', x') \rightarrow 0 \text{ при } x' \rightarrow \infty, \quad (4.2.8)$$

где

$$a'(t', x') = \frac{1}{d\varphi(t)} \left[\frac{1}{2} b(t, x) \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + Q(t, x) \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} \right],$$

$$b'(t', x') = \frac{1}{d\varphi(t)} b(t, x) \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right)^2.$$

С помощью подбора функций $\varphi(t), \psi(t, x)$ из (4.2.4) можно добиться того, чтобы

$$a'(t', x') \equiv 0, \quad b'(t', x') \equiv 1.$$

Тогда (4.2.6) – (4.2.8) примет вид

$$\frac{\partial P'}{\partial t'} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P'}{\partial x'^2} = 0, \quad (4.2.9)$$

$$P'(t'_0, x') = \delta(x' - x'_0), \quad (4.2.10)$$

$$P'(t', x') \rightarrow 0 \text{ при } x' \rightarrow \infty. \quad (4.2.11)$$

Решение задачи (4.2.9) – (4.2.11) хорошо известно:

$$P'(t', x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t' - t'_0)}} e^{-\left\{ \frac{(x' - x'_0)^2}{2(t' - t'_0)} \right\}}. \quad (4.2.12)$$

Осуществляя по формулам (4.2.4) – (4.2.5) переход к старым переменным t, x , найдем решение $P(t, x)$ исходной задачи (4.2.1) – (4.2.3).

Приведем известный результат, позволяющий осуществить переход от задачи (4.2.1) – (4.2.3) к задаче (4.2.9) – (4.2.11).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha(t, x) &= \sqrt{b(t, x)} \\ \beta(t, x) &= \sqrt{b(t, x)} \int_0^x \frac{d\bar{x}}{\sqrt{b(\bar{x}, t)}}, \\ \gamma(t, x) &= 2a(t, x) - \frac{\partial b(t, x)}{\partial x} - \\ &- \sqrt{b(t, x)} \int_0^x \frac{\partial b(\bar{x}, t)}{\partial t} [b(t, \bar{x})]^{-3/2} d\bar{x}, \\ Q(t, x) &= \begin{vmatrix} \alpha(t, x) & \gamma(t, x) \\ \frac{\partial \alpha(t, x)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma(t, x)}{\partial x} \end{vmatrix}, \\ R(t, x) &= \begin{vmatrix} \beta(t, x) & \gamma(t, x) \\ \frac{\partial \beta(t, x)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma(t, x)}{\partial x} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Справедливо следующее утверждение [61], [65]. Пусть существуют прерывные частные производные

$$\frac{\partial^2 \alpha(t, x)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \beta(t, x)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma(t, x)}{\partial x^2}$$

на всей числовой оси Ox , функции $\beta(t, x)$, $\beta^{-1}(t, x)$ ограничены. Тогда необходимыми и достаточными условиями существования преобразования (4.2.4), переводящего задачу (4.2.1) – (4.2.3) взаимно-однозначно в задачу (4.2.9) – (4.2.11), является тождественное вычисление равенства $\Delta \equiv 0$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha(t, x) & \beta(t, x) & \gamma(t, x) \\ \frac{\partial \alpha(t, x)}{\partial x} & \frac{\partial \beta(t, x)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma(t, x)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \alpha(t, x)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \beta(t, x)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \gamma(t, x)}{\partial x^2} \end{vmatrix}. \quad (4.2.14)$$

При выполнении этого тождества преобразованиями (4.2.4) даются формулами

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{t_0}^t \exp \left[- \int_{t_0}^v Q(s, x) \alpha^{-1}(s, x) ds \right] dv, \\ \psi(t) &= e \left[- \frac{1}{2} \int_{t_0}^t Q(s, x) \alpha^{-1}(s, x) ds \right] \beta(t, x) \alpha^{-1}(t, x) +, \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e \left[- \frac{1}{2} \int_{t_0}^v Q(s, x) \alpha^{-1}(s, x) ds \right] R(v, x) \alpha^{-1}(v, x) dv. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Рассмотри теперь полуэмпирическое уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}, \quad t \in [0, T], \quad (4.2.16)$$

и будем предполагать, что оно описывает распространение легкой примеси от мгновенного источника (слагаемое αq в левой части (2.16) для удобства рассуждений не учитываем, полагая $\alpha(t) = 0$; если $\alpha(t) \neq 0$, то в конечном результате $\alpha(t)$ можно учесть, используя соотношения

$$q^*(t, x, y, z) = q(t, x, y, z) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right\},$$

где $q^*(t, x, y, z)$ – решение $q(t, x, y, z)$ с учетом $\alpha(t) \neq 0$). Относительно коэффициентов U , K_x , K_y предполагаем, что они удовлетворяют условиям

$$U = const, \quad K_x = K_y = K_0 U, \quad K_0 = const,$$

а K_z является дважды непрерывно дифференцируемой функцией одного аргумента z : $K_z = K(z)$. Начальное условие имеет вид:

$$q(0, x, y, z) = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - H), \quad Q = const, \quad (4.2.17)$$

граничное условие в бесконечности – вид:

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z \geq 0, \quad (4.2.18)$$

а граничное условие на подстилающей поверхности (в частности,

$$\left\{ K_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq \right\} \Big|_{z=0} = \{V_s q\} \Big|_{z=0}$$

пока не будем учитывать. Оно будет учтено и уточнено ниже, после построения решения задачи (4.2.16) – (4.2.18).

Если $q_1(t, x)$, $q_2(t, x)$, $q_3(t, x)$ являются решениями краевых задач

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + U \frac{\partial q_1}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}, \quad (4.2.19)$$

$$U = const, \quad K_x = K_0 U, \quad K_0 = const,$$

$$q_1(0, x) = Q \delta(x), \quad (4.2.20)$$

$$q_1(t, x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty; \quad (4.2.21)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = K_y \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2}, \quad (4.2.22)$$

$$K_x = K_y = const$$

$$q_2(0, y) = \delta(y), \quad (4.2.23)$$

$$q_2(t, y) \rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty; \quad (4.2.24)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K(z) \frac{\partial q_3}{\partial z}, \quad (4.2.25)$$

$$q_3(0, z) = \delta(z - H), \quad (4.2.26)$$

$$q_3(t, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty; \quad (4.2.27)$$

то решение задачи (4.2.16) – (4.2.18) имеет вид

$$q(t, x, y, z) = q_1(t, x) q_2(t, y) q_3(t, z). \quad (4.2.28)$$

Убедимся в этом. Если $q_1(t, x)$, $q_2(t, y)$, $q_3(t, z)$ есть решения задач

$$\frac{\partial q_1(t, x)}{\partial t} + U \frac{\partial q_1(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q_1(t, x)}{\partial x}, \quad (4.2.29)$$

$$U = const, \quad K_x = const.$$

$$q_1(\tau, x) = \delta(x), \quad (4.2.30)$$

$$q_1(t, x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty; \quad (4.2.31)$$

$$\frac{\partial q_2(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q_2(t, y)}{\partial y}, \quad (4.2.32)$$

$$K_y = K_x = K_0 U, \quad K_0 = const,$$

$$q_2(\tau, \eta; \tau, y) = \delta(y - \eta), \quad (4.2.33)$$

$$q_2(t, y) \rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty; \quad (4.2.34)$$

$$\frac{\partial q_3(t, z)}{\partial t} - w \frac{\partial q_3(t, z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K(z) \frac{\partial q_3(t, z)}{\partial z},$$

$$w = const, \quad K_z = K_2 z^n, \quad K_2 = const, \quad n = const, \quad (4.2.35)$$

$$0 < n < 2,$$

$$q_3(\tau, z) = \delta(z), \quad (4.2.36)$$

$$\left\{ K_z \frac{\partial q_3}{\partial z} + w q_3 \right\} \Big|_{z=z_0} = \{V_s q_3\} \Big|_{z=z_0}, \quad (4.2.37)$$

$$q_3(t, z) \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (4.2.38)$$

$$\tau, t \in [t_0, T], \quad \tau \leq t,$$

то функция

$$q_0(t, x, y, z) = q_1(t, x) q_2(t, y) q_3(t, z) \quad (4.2.39)$$

является решением краевой задачи

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + U \frac{\partial q_0}{\partial x} - w \frac{\partial q_0}{\partial z} = K_x \frac{\partial^2 q_0}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 q_0}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q_0}{\partial z},$$

$$K_x = K_y = const, \quad (4.2.40)$$

$$q_0 = q_0(t, x, y, z),$$

$$q_0(\tau, x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad \tau \in [t_0, T], \quad (4.2.41)$$

$$\left\{ K_z \frac{\partial q_0}{\partial z} + w q_0 \right\} \Big|_{z=z_0} = \{V_s q_0\} \Big|_{z=z_0}, \quad (4.2.42)$$

$$q_0(t, x, y, z) \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z \geq z_0. \quad (4.2.43)$$

Действительно, умножив (4.2.29) на $q_2(t, y) \cdot q_3(t, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1(t, x)}{\partial t} \cdot q_2(t, y) \cdot q_3(t, z) + U \frac{\partial q_1(t, x)}{\partial x} \cdot q_2(t, y) \cdot q_3(t, z) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q_1(t, x)}{\partial x} \cdot q_2(t, y) \cdot q_3(t, z), \end{aligned}$$

(4.2.32) на $q_1(t, x) \cdot q_3(t, z)$:

$$\frac{\partial q_2(t, y)}{\partial t} \cdot q_1(t, x) \cdot q_3(t, z) = \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q_2(t, y)}{\partial y} \cdot q_1(t, x) \cdot q_3(t, z),$$

(4.2.35) на $q_1(t, x) \cdot q_2(t, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_3(t, z)}{\partial t} \cdot q_1(t, x) \cdot q_2(t, y) - w \frac{\partial q_3(t, z)}{\partial z} \cdot q_1(t, x) \cdot q_2(t, y) = \\ = \frac{\partial}{\partial z} K(z) \frac{\partial q_3(t, z)}{\partial z} \cdot q_1(t, x) \cdot q_2(t, y) \end{aligned}$$

и сложив полученные равенства, убедимся, что (4.2.39) удовлетворяет условию (4.2.40); условие (4.2.41) следует из (4.2.30), (4.2.33), (4.2.36); условие (4.2.42) – из (4.2.37) (если (4.2.37) умножить на $q_1(\tau, \xi; t, x) \cdot q_2(\tau, \eta; t, y)$); условие (4.2.43) – из (4.2.31), (4.2.34), (4.2.38).

Решения задач (4.2.19) – (4.2.21), (4.2.22) – (4.2.24) можно построить, воспользовавшись методом преобразования координат:

$$q_1(t, x) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi K_x(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)}\right\}, \quad (4.2.44)$$

$$q_2(t, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4K_y(t-t_0)}\right\}, \quad (4.2.45)$$

$$t_0 = 0.$$

Уравнение (4.2.25) представим следующим образом:

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} + \frac{\partial K(z)}{\partial z} \frac{\partial q_3}{\partial z} + \frac{\partial^2 K(z)}{\partial z^2} q_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (2K(z)q_3)}{\partial z^2} \quad (4.2.46)$$

и предположим, что $K(z)$ в (4.2.31) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 K(z)}{\partial z^2} = 0, \quad (4.2.47)$$

то есть

$$K(z) = c_1 z + c_2, \quad (4.2.48)$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные. Тогда (см. (4.2.13) – (4.2.14))

$$\gamma(t, x) \equiv 0, \quad Q(t, x) \equiv 0, \quad R(t, x) \equiv 0, \quad \Delta \equiv 0.$$

Следовательно, при выполнении условия (4.2.47), задача (4.2.46), (4.2.26), (4.2.27) преобразуется к задаче вида (4.2.9) – (4.2.11), а значит

$$q'_3(t', z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi t'}} \exp\left\{-\frac{(z' - H')^2}{2t'}\right\}, \quad (4.2.49)$$

где (см. (4.2.15))

$$\begin{aligned}
 t' &= \varphi(t) = t. \\
 z' &= \psi(t, z) = \frac{1}{c_1} \left(\sqrt{2c_1 z + 2c_2} - \sqrt{2c_2} \right), \\
 H' &= \psi(t, z) = \frac{1}{c_1} \left(\sqrt{2c_1 H + 2c_2} - \sqrt{2c_2} \right), \\
 \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{2c_1 z + 2c_2}}.
 \end{aligned} \tag{4.2.50}$$

Отсюда следует, что при выполнении условия (4.2.47) решение задачи (4.2.46), (4.2.26), (4.2.27), т.е. (4.2.25) – (4.2.27), имеет вид (см. (4.2.5)):

$$\begin{aligned}
 q_3(t, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1 z + 2c_2)}} \times \\
 &\times \exp \left\{ - \frac{\left(\sqrt{2c_1 z + 2c_2} - \sqrt{2c_1 H + 2c_2} \right)}{2c_1^2 t} \right\},
 \end{aligned} \tag{4.2.51}$$

Подставляя (4.2.44), (4.2.45), (4.2.51) в (4.2.53), найдем решение $q(t, z, y, z)$ задачи (4.2.16) – (4.2.18) (в предположении что условие (4.2.47) выполнено).

Тот факт, что c_1, c_2 произвольные постоянные, удобно использовать при аппроксимации $K(z)$, приводя $K(z)$ к виду (4.2.48).

Пусть теперь, кроме граничного условия (4.2.18), учитывается граничное условие на подстилающей поверхности. Будем предполагать, что на подстилающей поверхности (т.е. при $z = 0$) примесь полностью поглощается. Это справедливо, например, когда распространение происходит над водной поверхностью [9]. В этом случае

$$q(t, x, y, 0) = 0. \tag{4.2.52}$$

С ростом времени все большее и большее число частиц будет поглощаться подстилающей поверхностью и в пределе при $t \rightarrow \infty$ примесь из атмосферы должна полностью исчезнуть, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t, x, y, z) = 0. \tag{4.2.53}$$

Снова вернемся к задаче (4.2.46), (4.2.26), (4.2.27) и предположим, что $q_3(t, z)$ удовлетворяют, дополнительно к условиям (4.2.26), (4.2.27), условиям, аналогичным (4.2.46), (4.2.53):

$$q_3(t, 0) = 0, \quad (4.2.54)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_3(t, z) = 0. \quad (4.2.55)$$

Применяя известный метод отражения с переменной знака (см. §42 из [61]) к решению (4.2.49) краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial q'_3}{\partial t'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q'_3}{\partial z'^2} &= 0, \\ q'_3(t'_0, z') &= \delta(z' - H'), \\ q'_3(t'_1, z) &\rightarrow 0, \quad z' \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

и возвращаясь по формулам (4.2.50) к старым переменным t, z , аналогично решению (4.2.51) задачи (4.2.46), (4.2.26), (4.2.27), найдем решение задачи (4.2.46), (4.2.26), (4.2.27), (4.2.54), (4.2.55):

$$q_3(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1z + 2c_2)}} \times \left[\begin{aligned} &\exp\left\{-\frac{(\sqrt{2c_1z + 2c_2} - \sqrt{2c_1H + 2c_2})^2}{2c_1^2t}\right\} - \\ & - \exp\left\{-\frac{(\sqrt{2c_1z + 2c_2} + \sqrt{2c_1H + 2c_2} - 2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1^2t}\right\} \end{aligned} \right]. \quad (4.2.56)$$

Подставляя (4.2.44), (4.2.45), (4.2.56) в (4.2.28), найдем решение задачи (4.2.16) – (4.2.18) при дополнительных ограничениях (4.2.53), (4.2.54), если только $K(z)$ имеет вид (4.2.48).

Аналогично находится решение (4.2.16) – (4.2.18) для случая распространения примеси над подстилающей поверхностью, полностью отражающей эту примесь. Решение $q_3(t, z)$ в этом случае также будет иметь вид (4.2.56), если только предварительно в (4.2.56) в квадратных скобках заменить знак минус (-) на плюс (+):

$$q_3(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1z + 2c_2)}} \times \left[\begin{aligned} &\exp\left\{-\frac{(\sqrt{2c_1z + 2c_2} - \sqrt{2c_1H + 2c_2})^2}{2c_1^2t}\right\} + \\ & + \exp\left\{-\frac{(\sqrt{2c_1z + 2c_2} + \sqrt{2c_1H + 2c_2} - 2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1^2t}\right\} \end{aligned} \right]. \quad (4.2.57)$$

Из (4.2.28), (4.2.44), (4.2.45) следует, что

$$\begin{aligned}
 q = q_1 q_2 q_3 = & \left(\frac{Q}{2\sqrt{\pi K_x(t-t_0)}} \exp\left\{ -\frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} \right\} \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)}} \exp\left\{ -\frac{y^2}{4K_y(t-t_0)} \right\} \right) \times \\
 & \times \left[\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1z+2c_2)}} \times \\ & \left[\exp\left\{ -\frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}-\sqrt{2c_1H+2c_2})^2}{2c_1^2t} \right\} \pm \right. \\ & \left. \pm \exp\left\{ -\frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}+\sqrt{2c_1H+2c_2}-2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1^2t} \right\} \right] \end{aligned} \right]. \quad (4.2.58)
 \end{aligned}$$

Соотношение (4.2.58) можно использовать для решения обратных задач в рамках математических моделей рассеяния примеси в приземном слое атмосферы от мгновенного точечного источника.

Задача 4.2.1. Определить Q по известным K_x , K_y , U , H , c_1 , c_2 и q . Эту задачу легко решить аналитически:

$$\begin{aligned}
 Q = & \left(2q\sqrt{\pi K_x(t-t_0)} \exp\left\{ \frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} \right\} \right) \times \\
 & \times \left(2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)} \exp\left\{ \frac{y^2}{4K_y(t-t_0)} \right\} \right) \times \\
 & \times \left[\begin{aligned} & \sqrt{2\pi(2c_1z+2c_2)} \times \\ & \left[\exp\left\{ \frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}-\sqrt{2c_1H+2c_2})^2}{2c_1^2t} \right\} \pm \right. \\ & \left. \pm \exp\left\{ \frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}+\sqrt{2c_1H+2c_2}-2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1^2t} \right\} \right] \end{aligned} \right] \quad (4.2.59)
 \end{aligned}$$

Задача 4.2.2. Определить H по известным K_x, K_y, U, Q, c_1, c_2 и q при условиях полного поглощения примеси подстилающей поверхностью.

Задача 4.2.3. Определить H по известным K_x, K_y, U, Q, c_1, c_2 и q при условиях полного отражения примеси от подстилающей поверхности.

Задачи 4.2.2-4.2.3 легко решить с помощью методов решения трансцендентных уравнений, например, метода простой итерации [2].

Покажем принцип решения на примере задачи 4.2.3 при условии полного отражения примеси от подстилающей поверхности. Предполагаем, что известен интервал (a, b) (a и b определяем, например, методом подбора), в котором находится только один корень H уравнения

$$q = \left(\frac{Q}{2\sqrt{\pi K_x(t-t_0)}} \exp\left\{ -\frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} \right\} \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)}} \exp\left\{ -\frac{y^2}{4K_y(t-t_0)} \right\} \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1z+2c_2)}} \times \right. \\ \left. \times \left[\exp\left\{ -\frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}-\sqrt{2c_1H+2c_2})^2}{2c_1^2t} \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \exp\left\{ -\frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}+\sqrt{2c_1H+2c_2}-2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1^2t} \right\} \right] \right). \quad (4.2.60)$$

Соотношение (4.2.60) перепишем в виде

$$H = \frac{2\sqrt{2c_1z+2c_2}\sqrt{2c_1H+2c_2}-2c_2-2c_1z-2c_2}{2c_1} - \\ - \frac{(2c_1H+2c_2+2(\sqrt{2c_1H+2c_2})(\sqrt{2c_1z+2c_2}-2\sqrt{2c_2}))}{2c_1} - \\ - \frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}-2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_1 t \ln(q)}{\left(\ln \left(\frac{Q}{2\sqrt{\pi K_x(t-t_0)}} \right) \left\{ \frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} \right\} \right)} \times \\
& \times \left(\ln \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)}} \right) \left\{ -\frac{y^2}{4K_y(t-t_0)} \right\} \right)^{-1} \times \\
& \times \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1 z + 2c_2)}} \right) \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Тогда последовательные приближения к искомому корню можно найти по итерационной формуле

$$\begin{aligned}
H^{(n+1)} = & \frac{2\sqrt{2c_1 z + 2c_2} \sqrt{2c_1 H^{(n)} + 2c_2} - 2c_2 - 2c_1 z - 2c_2}{2c_1} - \\
& - \frac{\left(2c_1 H^{(n)} + 2c_2 + 2(\sqrt{2c_1 H^{(n)} + 2c_2})(\sqrt{2c_1 z + 2c_2} - 2\sqrt{2c_2}) \right)}{2c_1} - \\
& - \frac{(\sqrt{2c_1 z + 2c_2} - 2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1} + \frac{c_1 t \ln(q)}{\left(\ln \left(\frac{Q}{2\sqrt{\pi K_x(t-t_0)}} \right) \left\{ \frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} \right\} \right)} \times \\
& \times \left(\ln \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)}} \right) \left\{ -\frac{y^2}{4K_y(t-t_0)} \right\} \right)^{-1} \times \\
& \times \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1 z + 2c_2)}} \right) \right)^{-1}. \tag{4.2.61}
\end{aligned}$$

В качестве нулевого приближения $H^{(0)}$ к искомому корню можно принять любое значение H на интервале изоляции корня (a, b) .

Критерий окончания процесса вычислений:

$$|H^{(n+1)} - H^{(n)}| < \varepsilon,$$

где ε - требуемая погрешность.

Пример 4.2.1. Согласно статистическим данным, взятым из отчетов центра лабораторного анализа и технических измерений по Южному Федеральному округу (ЦЛАТИ по ЮФО) и содержащим

информацию о выбросах в атмосферу загрязняющих веществ (диоксида азота) и мощности источника примеси в точке (2,2,3) в моменты времени $t \in [0,55]$ (с) принимают значения из таблицы 1. Средняя скорость ветра $\bar{U} = 2,5$ (м/с), среда изотропна: $K_x = K_y = K_z = 2,746530722$, примесь полностью отражается от подстилающей поверхности.

Таблица 4.2.1. Значения концентрации диоксида азота и мощности источника примеси в точке (2,2,3) в моменты времени $t \in [0,55]$ (с).

t	q , кг/м ³	$Q(t)$, кг/с
0	0	0
5	$0,166987 \cdot 10^{-4}$	0,833333
10	$0,830912 \cdot 10^{-6}$	0,909091
15	$0,553513 \cdot 10^{-7}$	0,9375
20	$0,429770 \cdot 10^{-8}$	0,952381
25	$0,366608 \cdot 10^{-9}$	0,961538
30	$0,333249 \cdot 10^{-10}$	0,967742
35	$0,317117 \cdot 10^{-11}$	0,972222
40	$0,312372 \cdot 10^{-12}$	0,97561
45	$0,316114 \cdot 10^{-13}$	0,978261
50	$0,326906 \cdot 10^{-14}$	0,980392
55	$0,344127 \cdot 10^{-15}$	0,982143

Произведем расчеты с помощью ППП Microsoft Excel расчеты по формуле (4.2.61) значений H – высоты источника в момент времени t . Расчетные и экспериментальные значения H приведены в таблице 4.2.2.

Таблица 4.2.2. Значения экспериментальное и рассчитанные H в моменты времени $t \in [0,55]$ (с).

t	H экспериментальная	H рассчитанная
0	20	20,0659
5	20	20,0748
10	20	19,0836
15	20	20,0825
20	20	19,8139
25	20	18,802
30	20	19,791

t	H	
	экспериментальная	рассчитанная
35	20	20,077
40	20	20,081
45	20	20,082
50	20	19,813
55	20	20,082

Графическая реализация экспериментальных и рассчитанных значений H представлены на рисунке 4.2.1.

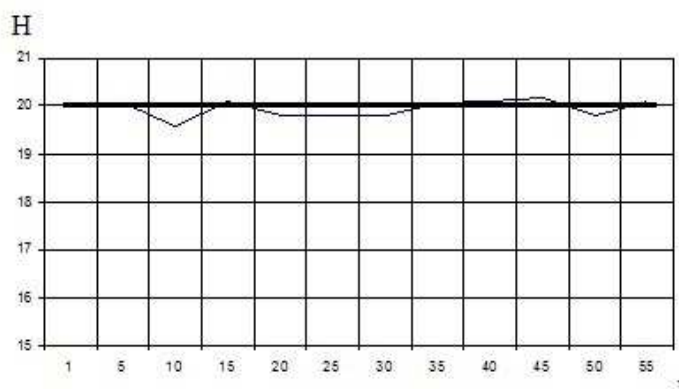


Рисунок 4.2.1. Экспериментальное (прямая) и рассчитанные (ломаная) значения H в моменты времени $t \in [0,55]$ (с).

По аналогичной итерационной схеме решается также задача 4.2.2. Известен интервал (a,b) (a и b определяем методом подбора), в котором находится только один корень H уравнения

$$\begin{aligned}
 q = & \left(\frac{Q}{2\sqrt{\pi K_x(t-t_0)}} \exp \left\{ -\frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} \right\} \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{4K_y(t-t_0)} \right\} \right) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1z+2c_2)}} \times \right. \\
 & \times \left[\exp \left\{ -\frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}-\sqrt{2c_1H+2c_2})^2}{2c_1^2t} \right\} - \right. \\
 & \left. \left. - \exp \left\{ -\frac{(\sqrt{2c_1z+2c_2}+\sqrt{2c_1H+2c_2}-2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1^2t} \right\} \right] \right) . \quad (4.2.62)
 \end{aligned}$$

Соотношение (4.2.60) представим в виде

$$\begin{aligned}
H = & \frac{2\sqrt{2c_1z + 2c_2}\sqrt{2c_1H + 2c_2} - 2c_2 - 2c_1z - 2c_2}{2c_1} + \\
& + \frac{(2c_1H + 2c_2 + 2(\sqrt{2c_1H + 2c_2})(\sqrt{2c_1z + 2c_2} - 2\sqrt{2c_2}))}{2c_1} + \\
& + \frac{(\sqrt{2c_1z + 2c_2} - 2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1} + \\
& + \frac{c_1 t \ln(q)}{\left(\ln \left(\frac{Q}{2\sqrt{\pi K_x(t-t_0)}} \right) \left\{ \frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} \right\} \right)} \times \\
& \times \left(\ln \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)}} \right) \left\{ -\frac{y^2}{4K_y(t-t_0)} \right\} \right)^{-1} \times \\
& \times \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1z + 2c_2)}} \right) \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Тогда последовательные приближения к искомому корню можно найти по итерационной формуле

$$\begin{aligned}
H^{(n+1)} = & \frac{2\sqrt{2c_1z + 2c_2}\sqrt{2c_1H^{(n)} + 2c_2} - 2c_2 - 2c_1z - 2c_2}{2c_1} + \\
& + \frac{(2c_1H^{(n)} + 2c_2 + 2(\sqrt{2c_1H^{(n)} + 2c_2})(\sqrt{2c_1z + 2c_2} - 2\sqrt{2c_2}))}{2c_1} + \\
& + \frac{(\sqrt{2c_1z + 2c_2} - 2\sqrt{2c_2})^2}{2c_1} + \\
& + \frac{c_1 t \ln(q)}{\left(\ln \left(\frac{Q}{2\sqrt{\pi K_x(t-t_0)}} \right) \left\{ \frac{(x-U(t-t_0))^2}{4K_x(t-t_0)} \right\} \right)} \times \\
& \times \left(\ln \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi K_y(t-t_0)}} \right) \left\{ -\frac{y^2}{4K_y(t-t_0)} \right\} \right)^{-1} \times \\
& \times \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(2c_1z + 2c_2)}} \right) \right)^{-1}. \tag{4.2.63}
\end{aligned}$$

В качестве нулевого приближения $H^{(0)}$ к искомому корню

можно выбрать любое значение H на интервале изоляции корня (a, b) .

Критерий окончания:

$$\left| H^{(n+1)} - H^{(n)} \right| < \varepsilon,$$

где ε - требуемая погрешность.

4.3. Методика численного решения задачи об источнике примеси

Математическая модель, описывающая процесс рассеяния примеси в атмосфере имеет вид (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20) [44].

Для расчета количества примеси, выпадающей из атмосферы на подстилающую поверхность, можно использовать соотношение [44]

$$\bar{P}(t, x, y, z_0) = \int_0^t P(\tau, x, y, z_0) d\tau, \quad (4.3.1)$$

где $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ – плотность осадка в точке (x, y) , расположенной на плоскости $z = z_0$ за время действия источника t , $P(t, x, y, z_0) = V_s q(t, x, y, z_0)$ – вертикальный поток частиц в точке (x, y, z_0) в момент времени t , $V_s = const > 0$ – скорость сухого осаждения частиц этой примеси.

Соотношения (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20), (4.3.1) определяют математическую модель процесса осаждения примеси на плоскость $z = z_0$, $z_0 \geq 0$ [10].

Для вычисления $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ разработан алгоритм в интегрированной среде Delphi, реализованный в программном продукте «DODS». Программа «DODS» зарегистрирована в отраслевом фонде алгоритмов и программ [33].

Кроме того, в рамках модели (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20), (4.3.1) в [32] приведены результаты исследований следующих важных (с прикладной точки зрения) задач для случая, когда источник является точечным мгновенного действия:

задача 4.3.1 - определить точку (x, y) , расположенную на плоскости $z = z_0$, в которой плотность осадка $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ в момент времени t , $t \in [t_0, T]$ принимает максимальное значение;

задача 4.3.2 - определить интервал времени $(0, t)$ максимальной длины, в течение которого плотность осадка $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ в точке (x, y, z_0) не превысит заданной величины \hat{P} (т. е. $\bar{P}(t, x, y, z_0) \leq \hat{P}$), где \hat{P} – предельно допустимое значение плотности $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ на подстилающей поверхности, превышение которого становится небезопасным (согласно медицинским нормам) для здоровья людей.

В продолжение исследований [16], [32] в данном параграфе будут представлены результаты исследований следующих задач, которые являются обратными в рамках модели (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20), (4.3.1):

задача 4.3.3 - определить мощность $Q(t)$ точечного источника непрерывного действия по экспериментально заданным плотности осадка на подстилающей поверхности $\bar{P}(t, x, y, z_0)$, скорости сухого осаждения частиц примеси V_s , основным параметрам модели (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20): U, W, K_x, K_y , и координатам источника $(0, 0, H)$;

При решении обратной задачи 4.3.3 будем предполагать, что коэффициенты турбулентной диффузии и функция источника $f(t, x, y, z)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} U &= \text{const}, K_x = K_y = K_0 U, \\ K_0 &= \text{const}, K_z = K_2 z^n, \\ K_2 &= \text{const}, n = \text{const}, 0 < n < 2, \\ f(t, x, y, z) &= Q(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - H), \end{aligned}$$

где $\delta(s - s_0)$ – дельта-функция Дирака [26], $Q(t)$ – количество примеси, выбрасываемой источником в момент времени t .

Тогда, согласно [44], $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ можно представить в виде

$$\bar{P}(t, x, y, z_0) = V_s \int_0^t \int_0^\tau q(s, x_0, y_0, H; \tau, x, y, z_0) Q(s) ds d\tau, \quad (4.3.2)$$

где $q(s, x_0, y_0, H; \tau, x, y, z_0)$ - функция Грина задачи (1.1.18) – (1.1.20), (4.3.1).

Следовательно, задача 4.3.3 сводится к решению интегрального уравнения (4.3.2) относительно $Q(s)$ при заданных значениях $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ и $q(s, x_0, y_0, H; \tau, x, y, z_0)$ (определяемой из [44]). Соотношение (4.3.2) представляет собой интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции $Q(t)$. Задача

построения решения таких уравнений является некорректно поставленной [60]. Поэтому для численного решения (4.3.2) относительно $Q(\tau)$ воспользуемся методом регуляризации (по А. Н. Тихонову). Согласно методу регуляризации задачу построения решения $Q(s)$ уравнения (3.2) можно свести к минимизации функционала вида

$$\begin{aligned} \bar{P}^\mu(Q) &= \|\bar{P}Q - \bar{P}_\delta\|_{L_2[0,t]}^2 + \mu\|Q\|_{L_2[0,t]}^2 = \\ &= \int_0^T (V_s \int_0^t \int_0^\tau q(s,0,0, H; \tau, x, y, z) Q(s) ds d\tau - \\ &\quad - \bar{P}_\delta(\tau, x, y, z))^2 dt + \mu \int_0^t Q^2(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\bar{P}(\bullet) = \int_0^t ds \int_0^s q(s, x_0, y_0, H; \tau, x, y, z_0)(\bullet) d\tau, \quad \bar{P}_\delta -$$

экспериментальные (приближенные) значения плотности осадка \bar{P} ; μ – параметр регуляризации.

Пусть $Q(\tau)$ представляет собой полином вида:

$$Q = \sum_{i=0}^N C_i \tau^i, \quad C_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда задача определения функции $Q(s)$ сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно C_i , $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \left(\left| (\bar{P} \tau^i, \bar{P} \tau^j) \right|_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N} + \mu \int_0^t \tau^{i+j} d\tau \right)_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \int_0^t \bar{P} \tau^i \bar{P}_\delta d\tau \end{pmatrix}_{i=1, \dots, N}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Систему (4.3.3) можно переписать в матричном виде:

$$(\Gamma + \mu R)C = V, \quad (4.3.4)$$

где $\Gamma = \|\varepsilon_{ij}\|$ – матрица Грамма с элементами $\varepsilon_{ij} = (\bar{P} \tau^i, \bar{P} \tau^j)$, C_i – вектор-столбец неизвестных, V – вектор с элементами вида $(\bar{P} \tau^i, \bar{P}_\delta)$, $R = \|r_{ij}\|$ – матрица размера $N \times N$, $r_{ij} = (\tau^i, \tau^j)$.

Так как матрица $(\Gamma + \mu R)$ симметрична и положительно определена, то систему линейных алгебраических уравнений (4.3.4) можно решить методом Холецкого [8].

Параметр регуляризации μ в (3.4) определяется методом подбора или с помощью соотношения [20]:

$$\varphi(\mu) = \int_0^T (V_s \int_0^t \int_0^\tau q(s, 0, 0, H; \tau, x, y, z_0) Q_\mu(s) ds d\tau - \bar{P}_\delta(\tau, x, y, z_0))^2 dt = \delta^2,$$

где $Q_\mu(s)$ – решение интегрального уравнения (4.3.2), δ – заданная погрешность, $\delta \rightarrow 0$.

Для численного решения уравнения (4.3.2) методом регуляризации авторами разработан алгоритм, реализованный в виде программного продукта «IPIS».

Пример 4.3.1. Для оценки качества работы алгоритма воспользуемся экспериментальными данными, взятыми из отчетов центра лабораторного анализа и технических измерений по Южному Федеральному округу (ЦЛАТИ по ЮФО) и содержащими информацию о выбросах в атмосферу загрязняющих веществ (диоксид азота). Согласно этим данным: $H = 20$ (м), $U = 2,5$ (м/с), $K_0 = 0,1$ (м), $K_2 = 0,1$ (м), $n = 0,15$, $t_0 = 0$ (с), $t = 55$ (с), $V_s = 0,1$ (м/с), $Q(t) = 2,7t$ (кг/с).

В начале рассчитаем значения плотности осадка \bar{P} численно, решив прямую задачу с помощью программы «DODS». Затем восстановим значения $Q(t)$ (т.е. найдем решение обратной задачи) с помощью программы «IPIS». Сравним значения восстановленной и заданной мощностей (графическая визуализация результатов проведенных расчетов приведена на рисунке 4.3.1).

Согласно рисунку 4.3.1 расчетные значения мощности источника $Q(t)$ с высокой степенью точности согласуются с экспериментальными значениями $Q(t)$. В данном примере параметр регуляризации μ равен $\mu = 10^{-8}$.

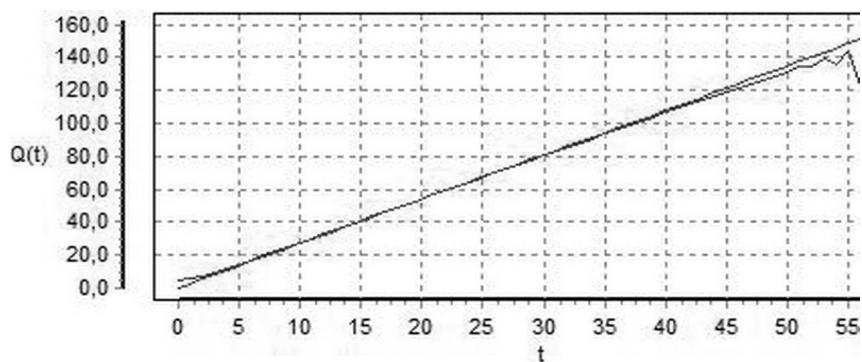


Рисунок 4.3.1 – Графическое изображение значений экспериментальной и расчетной мощностей источника примеси

Заключение к главе 4

Показано, что некоторые методы построения решений одномерных уравнений А.Н. Колмогорова (метод гауссова приближения [61], метод преобразования координат) при заданных начальных условиях можно использовать для построения решений (приближенных и в явном аналитическом виде) достаточно широкого класса краевых задач, описывающих рассеяние примеси в атмосфере. В свою очередь полученные решения использованы для исследования обратных задач, поставленных в рамках математической модели рассеяния примеси: об источнике примеси, о вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии, о высоте источника.

Предложенная методика численного решения задачи об источнике примеси позволяет по экспериментальным данным о плотности осадка на подстилающей поверхности восстановить с необходимой точностью значения мощности точечного источника.

Численные эксперименты показывают хорошее согласование полученных результатов с экспериментальными данными.

ГЛАВА 5

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАССЕЯНИЯ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ МЕТОДАМИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В данной главе приведены методы построения оптимальных в среднеквадратическом смысле оценок значений мощности источника примеси и оценок значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии. Эти методы реализованы в программных продуктах, разработанных с помощью пакета прикладных программ MATLAB.

5.1. Оценка значений мощности источника примеси с помощью метода одношаговой фильтрации Калмана-Бьюси

Задача 5.1.1 – определить мощность $Q(t)$ точечного источника непрерывного действия по экспериментально заданным значениям концентрации примеси $q(t, x, y, z)$, основным параметрам модели (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20): U , w , $\alpha = 0$, K_x , K_y , K_z , и координатами источника $(0, 0, H)$.

Использование известных методов регуляризации Тихонова и Лаврентьева для решения поставленной задачи не представляется возможным, т.к. ошибки измерения концентрации примеси $q(t, x, y, z)$ представляют собой случайный процесс типа белого гауссова шума. Поэтому в данном параграфе приведена методика численного решения этой задачи, основанная на использовании линейных фильтров Калмана-Бьюси [59]. Задача восстановления мощности источника в случае, когда случайные ошибки измерения игнорируются, была решена методом регуляризации А.Н. Тихонова

при известном количестве примеси на подстилающей поверхности в работе [31].

Пусть при решении задачи 5.1.1 в математической модели (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20), начальный момент времени $t_0 = 0$.

Из (1.1.16) следует, что

$$f(t, x, y, z) = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Так как источник f в (1.1.16) является точечным с координатами $(0, 0, H)$, т.е. [44]

$$f(t, x, y, z) = Q(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - H),$$

где $Q(t)$ – мощность данного источника (масса примеси, выброшенной в атмосферу источником в момент времени t), $\delta(v)$ – дельта-функция Дирака.

Можно убедиться (см. соотношения (3.5.31) – (3.5.32)), что если в (1.1.16) f заменить на $Q(t)$, то решение задачи q не изменится, и, следовательно,

$$Q(t) = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (5.1.1)$$

Согласно (5.1.1) для вычисления значений $Q(t)$ требуется предварительно вычислить значения производных функции $q(t, x, y, z)$ по t, x, y, z (по x, y, z – до второго порядка включительно). Задача нахождения производной n -го порядка $z(t)$ функции $u(t)$, т.е. $z(t) = u^{(n)}(t)$, сводится к решению (относительно $z(t)$) интегральных уравнений первого рода [60] В частности,

для $z(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}$ имеем уравнение

$$\int_0^t z(\tau) d\tau = u(t) - u(0), \quad (5.1.2)$$

для $z(t) = \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}$ – уравнение

$$\int_0^t (t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t) - u(0) - t \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}. \quad (5.1.3)$$

Предполагаем, что $u(0)$, $\frac{\partial u(0)}{\partial t}$ – заданные величины.

Обозначая

$$R_{zz}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial z^2}, \quad R_{yy}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial y^2},$$

$$R_{xx}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial x^2}, \quad R_z(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial z},$$

$$R_x(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial x}, \quad R_t(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial t},$$

согласно (5.1.2) для определения $R_z(t, x, y, z)$ будем иметь интегральное уравнение:

$$q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) = \int_0^z R_z(t, x, y, \tau) d\tau; \quad (5.1.4)$$

согласно (5.1.3) для определения $R_{zz}(t, x, y, z)$ будем иметь интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) = \\ = \int_0^z (z - \tau) R_{zz}(t, x, y, \tau) d\tau + z R_z(t, x, y, 0). \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Соотношения (5.1.2), (5.1.3) представляют собой интегральные уравнения первого рода относительно неизвестных функций R_z и R_{zz} соответственно.

Задача построения решения такого вида уравнения является некорректно поставленной [60].

При решении рассматриваемой задачи перейдем от (5.1.4), (5.1.5) к их дискретным аналогам:

$$q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) = \sum_{k=1}^p [R_z(t, x, y, z_k) \cdot r_k], \quad (5.1.6)$$

$$\begin{aligned} q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) - z R_z(t, x, y, 0) = \\ = \sum_{k=1}^p [(z_p - z_k) R_{zz}(t, x, y, z_k) r_k] \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sum_{k=1}^p [A_{1k} \cdot R_{zz}(t_1, x, y, z_k)] + v_1 = \\
= q(t_1, x, y, z) - q(t_1, x, y, 0) - zR_z(t_1, x, y, 0), \\
\sum_{k=1}^p [A_{2k} \cdot R_{zz}(t_2, x, y, z_k)] + v_2 = \\
= q(t_2, x, y, z) - q(t_2, x, y, 0) - zR_z(t_2, x, y, 0), \\
\text{.....} \\
\sum_{k=1}^p [A_{Nk} \cdot R_{zz}(t_N, x, y, z_k)] + v_N = \\
= q(t_N, x, y, z) - q(t_N, x, y, 0) - zR_z(t_N, x, y, 0),
\end{array} \right. \quad (5.1.9)$$

из которой требуется определить $R_{zz}(t, x, y, z_k)$.

Системы (5.1.8), (5.1.9) представим в матричном виде:

$$AR_z + \tilde{v} = \tilde{q}, \quad (5.1.10)$$

$$AR_{zz} + \tilde{v} = \hat{q}, \quad (5.1.11)$$

где

$$\tilde{q}(t_i, x, y, z_k) = q(t_i, x, y, z_k) - q(t_i, x, y, 0),$$

$$\hat{q}(t_i, x, y, z_k) = q(t_i, x, y, z_k) - q(t_i, x, y, 0) - z \cdot R_z(t_i, x, y, 0),$$

$$i = (1, 2, \dots, N), \quad k = (1, 2, \dots, p).$$

Для подавления влияния значений белого шума $\tilde{v}(t)$ на значения $R_z(t_k, x, y, z_p)$ и $R_{zz}(t_k, x, y, z_p)$, $k = 1, \dots, N$, можно использовать одношаговый фильтр Калмана-Бьюси [12].

Тогда оптимальная в среднем квадратическом смысле апостериорная оценка \hat{R}_z решения R_z системы (5.1.10) может быть найдена из соотношений:

$$\hat{R}_z = \phi + PA^T R^{-1}(q_i - A\phi),$$

$$\phi = M[R_z], \quad P = (N^{-1} + A^T R^{-1} A)^{-1},$$

$$N = M[(R_z - \phi)(R_z - \phi)^T], \quad R = M[\tilde{v}\tilde{v}^T].$$

Оптимальная в среднем квадратическом смысле апостериорная оценка \hat{R}_{zz} решения R_{zz} системы (5.1.11) может быть найдена из соотношений:

$$\hat{R}_{zz} = \phi + PA^T R^{-1}(q_i - A\phi),$$

$$\phi = M[R_{zz}], P = (N^{-1} + A^T R^{-1} A)^{-1},$$

$$N = M[(R_{zz} - \phi)(R_{zz} - \phi)^T], R = M[\tilde{v}\tilde{v}^T].$$

Аналогичным образом определяются

$$\widehat{R}_{xx}, \widehat{R}_{yy}, \widehat{R}_t, \widehat{R}_x, \widehat{R}_y$$

соответственно для

$$R_{xx}, R_{yy}, R_t, R_x, R_y.$$

Подставляя найденные оценки в (5.1.1), получим наилучшую в среднем квадратическом смысле оценку $\widehat{Q}(t_k)$ значения $Q(t_k)$:

$$\begin{aligned} \widehat{Q}(t_k) = & \widehat{R}_t + u \cdot \widehat{R}_x - w \cdot \widehat{R}_z - \\ & - K_x \cdot \widehat{R}_{xx} - \frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot \widehat{R}_x - K_y \cdot \widehat{R}_{yy} - \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot \widehat{R}_y - \\ & - K_z \cdot \widehat{R}_{zz} - \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot \widehat{R}_z, k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Для вычисления значений $\widehat{Q}(t_k)$ с помощью ЭВМ описанный алгоритм реализован в программном продукте «ОФКВ» [29] на языке программирования Matlab C/C++ Math library 2.2.

5.2. Оценка значений мощности источника примеси с помощью метода многошаговой фильтрации Калмана-Бьюси

Снова обратимся к решению задачи 5.1.1.

Будем предполагать, что коэффициенты в (1.1.16) имеют вид [9]:

$$K_x = K_x(t, x, y, z), K_y = K_y(t, x, y, z);$$

$u = u(t, x, y, z)$, $w = w(t, x, y, z)$, $V_s = V_s(t, x, y, z)$ - непрерывны в E_+^3 ;
 $K_z = K_z(t, x, y, z)$ - непрерывно дифференцируемая функция в $[0, T] \times E_+^3$ (в прикладных исследованиях [9] иногда допускают, что K_x , K_y , U связаны приближенным соотношением

$$K_x \approx K_y \approx K_0 U, K_0 = const). \quad (5.2.1)$$

Обозначим, как и ранее,

$$R_x(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial x}, R_z(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial z},$$

$$R_t(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial t}, R_{xx}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial x^2},$$

$$R_{yy}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial y^2}, R_{zz}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial z^2}.$$

Тогда для определения, например, $R_{zz}(t, x, y, z)$ будем иметь интегральное уравнение (5.1.5).

Для подавления влияния значений белого шума $\tilde{V}(t)$ на значения $R_{zz}(t_k, x, y, z_p)$ в (5.1.10), (5.1.11), $k = 1, \dots, N$, в данном параграфе будем использовать многошаговый (многократный) фильтр Калмана-Бьюси [59] (см. п.1.4).

Задаем начальные приближения для решения $R_{zz}^{(0)} = R_{zz}(0, x, y, z)$ и матрицы ковариаций ошибок решения $P^{(0)}$. Для их выбора удобно использовать метод регуляризации Тихонова [60], согласно которому

$$R_{zz}^{(0)} = (\alpha E + A^T A)^{-1} A^T q, P^{(0)} = \delta^2 (\alpha E + A^T A)^{-1}, \quad (5.2.2)$$

где E – единичная матрица, $\delta \geq 0$ – верхняя оценка значения погрешности правой части (5.1.11), $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, играющий роль неопределенного множителя Лагранжа, целесообразно находить (согласно [43]) методом выбора квазиоптимального значения параметра регуляризации.

Согласно этому методу выбирается значение $\alpha > 0$, которое минимизирует функцию

$$\chi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{dR_{zz}^{(\alpha)}}{d\alpha} \right\|. \quad (5.2.3)$$

Для нахождения квазиоптимального значения α чаще всего используется последовательность

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, q > 0,$$

и вычисления производятся начиная с $k = 0$ до некоторого $k = K$.

Минимизация (5.2.3) на таких значениях параметра регуляризации соответствует поиску минимума

$$\tilde{\chi}(\alpha_{k+1}) = \left\| R_{zz}^{(\alpha_{k+1})} - R_{zz}^{(\alpha_k)} \right\|.$$

Последующие приближения $R_{zz}^{(l)}$ решения R_{zz} системы (5.1.11) могут быть найдены согласно следующей итерационной схемы [59]:

$$R_{zz}^{(l)} = R_{zz}^{(l-1)} + \left(\left(P^{(l-1)} \right)^{-1} + \left(A^{(l)} \right)^T \left(N^{(l)} \right)^{-1} A^{(l)} \right)^{-1} \times \quad (5.2.4)$$

$$\times \left(A^{(l)} \right)^T \left(N^{(l)} \right)^{-1} \left(q^{(l)} - A R_{zz}^{(l-1)} \right),$$

$$P^{(l)} = \left(\left(P^{(l-1)} \right)^{-1} + \left(A^{(l)} \right)^T N^{(l)} A^{(l)} \right)^{-1},$$

$$N^{(l)} = M \left[\tilde{v}^{(l)} \left(\tilde{v}^{(l)} \right)^T \right], \quad (5.2.5)$$

$$l = 1, 2, \dots, L.$$

На практике можно столкнуться с ситуацией, когда обратные матрицы в соотношениях (5.2.2), (5.2.4) – (5.2.5) найти (определить) нельзя (рассматриваемые матрицы могут быть вырожденными). В этом случае вместо обратных матриц следует использовать в (5.2.2), (5.2.4) – (5.2.5) псевдообратные, воспользовавшись методом Гревилля построения псевдообратной матрицы [13].

Соотношения (5.2.2), (5.2.4) – (5.2.5) позволяют найти значения величины $R_{zz}^{(L)}$ – оценку R_{zz} с заданной погрешностью $\varepsilon > 0$. Аналогично определяются

$$R_{xx}^{(L)}, R_{yy}^{(L)}, R_t^{(L)}, R_x^{(L)}, R_y^{(L)}, R_z^{(L)}$$

соответственно для

$$R_{xx}, R_{yy}, R_t, R_x, R_y, R_z.$$

Подставляя найденные оценки в (5.1.1), получим наилучшую в среднем квадратическом смысле оценку $\hat{Q}(t_k)$ значения $Q(t_k)$:

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t_k) = & R_t^{(L)} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot R_x^{(L)} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot R_y^{(L)} + \\ & + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot R_z^{(L)} - K_x \cdot R_{xx}^{(L)} - \frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot R_x^{(L)} - \\ & - K_y \cdot R_{yy}^{(L)} - \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot R_y^{(L)} - K_z \cdot R_{zz}^{(L)} - \\ & - \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot R_z^{(L)}, k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Для вычисления значений $\hat{Q}(t_k)$ с помощью ЭВМ описанный алгоритм реализован в программном продукте «МФКВ» [28] на языке программирования Matlab C/C++ Math library 2.2.

5.3. Оценка значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии.

Задача 5.3.1 – определить вертикальную составляющую коэффициента турбулентной диффузии K_z по экспериментально заданным значениям концентрации примеси $q(t, x, y, z)$, мощности точечного источника непрерывного действия $Q(t)$ и параметрам модели (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20): U , w , $\alpha = 0$, K_x , K_y .

Необходимость вычисления значений K_z по другим заданным значениям параметров математической модели (1.1.16), (1.1.21) – (1.1.23) продиктована большими затруднениями, возникающими при экспериментальном определении его значений [9], [44].

Как отмечалось ранее, коэффициенты турбулентной диффузии K_x , K_y имеют вид:

$$K_x = K_y = K_0 U, \quad K_0 = const, \quad U = U(t, z).$$

Поэтому задача определения K_x и K_y сводится к задаче определения U . Последняя – не вызывает на практике больших затруднений, поскольку современными техническими средствами легко определить изменения U от времени t и координаты z . Основная трудность заключается в нахождении коэффициента $K_z(t, z)$.

Согласно [9] коэффициент турбулентной диффузии $K_z(t, z)$ возрастает в приземном слое атмосферы пропорционально высоте z :

$$K_z = K_1(t)z, \quad (5.3.1)$$

где $K_1(t)$, $t \in [0, T]$, – согласно поставленной задаче, неизвестная функция аргумента t подлежащая определению.

Из (5.3.1) и (1.1.16) следует, что

$$K_1(t) = \frac{\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} - Q(t)}{\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}}. \quad (5.3.2)$$

Таким образом, для решения рассматриваемой обратной задачи достаточно вычислить

$$\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \text{ и } \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$$

в заданных точках (x, y, z) в момент времени t и подставить эти значения в правую часть (5.3.2).

Способ нахождения величин $R_{zz}^{(L)}$ – оценку R_{zz} и $R_z^{(L)}$ для R_z с помощью многошагового фильтра Калмана-Бьюси подробно описан в п. 5.2. Аналогично определяются

$$R_{xx}^{(L)}, R_{yy}^{(L)}, R_t^{(L)}, R_x^{(L)}$$

соответственно для

$$R_{xx}, R_{yy}, R_t, R_x.$$

Подставляя найденные оценки в (5.3.2), получим наилучшую в среднем квадратическом смысле оценку $\hat{K}_1(t_k)$ значения $K_1(t_k)$:

$$K_1(t_k) = \frac{R_t^{(L)} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot R_x^{(L)} - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot R_z^{(L)} - K_x \cdot R_{xx}^{(L)} - \frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot R_x^{(L)}}{R_z^{(L)} + R_{zz}^{(L)}} +$$

$$+ \frac{-K_y \cdot R_{yy}^{(L)} - \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot R_y^{(L)} - K_z \cdot R_{zz}^{(L)} - \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot R_z^{(L)} - Q(t_k)}{R_z^{(L)} + R_{zz}^{(L)}}, \quad (5.3.3)$$

$$k = 1, \dots, N.$$

5.4. Реализация алгоритмов восстановления мощности источника примеси с помощью пакета прикладных программ MATLAB

Систему MATLAB (MATrix LABoratory – матричная лаборатория) разработал Молер (С.В. Moler) в 70-х г.г. XX века, которая использовалась на больших ЭВМ. В начале 80-х г.г. Джон Литл (John Little) из фирмы Math Works, Ink. модернизировал эту систему для персональных компьютеров типа IBM PC, VAX и Macintosh. Далее к расширению системы были привлечены крупнейшие ученые и научные школы в математике, программировании и естествознании. Это позволило MATLAB стать признанным лидером подобных систем. Этому способствовало создание языка программирования MATLAB C/C++ Math Library, который вобрал в себя преимущества традиционных языков (Fortran,

Pascal, Basic, C++) и достаточно мощных средств визуализации и моделирования [19]

С помощью MATLAB можно не только работать с окном команд и создавать собственные функции, но и разрабатывать свои приложения и даже делать их независимыми. Такие независимые приложения не требуют установки системы MATLAB, что очень удобно. Инструменты MATLAB позволяют достаточно просто и быстро разрабатывать программы с пользовательским интерфейсом, предназначенным для решения определенного класса задач [39].

В первую очередь, необходимо визуализировать вводимые в режиме диалога данные, а также результаты вычислений.

В состав пакета прикладных программ MATLAB входит программа GUIDE для разработки пользовательских интерфейсов. Для того чтобы получить диалоговое окно, изображенное на рисунке 5.4.1, необходимо создать приложение GUI (Graphical User Interface – графический интерфейс пользователя) с помощью программы GUIDE в среде MATLAB. В этот момент система автоматически создает два файла, имеющие имя приложения GUI с расширением fig и m. Файл *.fig содержит информацию об элементах управления, размещенных в области графического интерфейса, файл *.m – программы, которые будут реагировать на действия пользователя с элементами управления. Файл *.fig редактируется автоматически при редактировании интерфейса через программу GUIDE. В файл *.m на языке программирования MATLAB C/C++ Math Library можно записывать, редактировать и отлаживать любые программные средства, предназначенные для решения научных и инженерных задач [22].

5.4.1. Программный продукт OFKB

Программа «Определение мощности источника примеси с одношаговым фильтром Калмана-Бьюси (OFKB)» [29] предназначена для определения интенсивности источника примеси с помощью одношагового фильтра Калмана-Бьюси. Она позволяет по экспериментально заданным значениям концентрации примеси в атмосфере и параметрам математической модели рассеяния примеси

построить оценку интенсивности источника и визуализировать полученные результаты.

Первым появляется диалоговое окно ввода значений концентрации примеси источника, изображенное на рисунке 5.4.1. Пользователю предлагается вводить по очереди замеры концентрации примеси

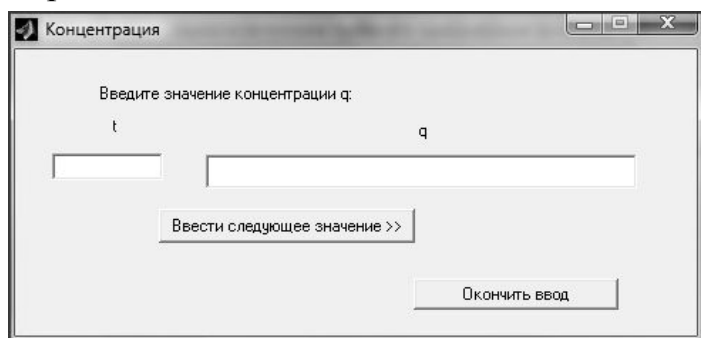


Рисунок 5.4.1 – Диалоговое окно ввода значений концентрации загрязняющих веществ в атмосфере в момент времени t .

После окончания ввода значений концентрации примеси появляется основное окно программы, изображенное на рисунке 5.4.2. В этом окне для корректной работы программы пользователь должен ввести значения коэффициентов турбулентной диффузии (здесь можно вводить наряду с конкретными числовыми значениями также функции соответствующего аргумента), интервал времени наблюдений за значениями концентрации, компоненту средней скорости ветра вдоль оси Ox , скорость осаждения частиц вдоль оси Oz и координаты положения прибора, измеряющего концентрацию примеси, относительно источника.

После нажатия кнопки «Пересчитать» в окне появится график изменения восстановленной мощности источника примеси в соответствующий интервал времени. Если результат пользователя не удовлетворил, то в программе предусмотрена возможность масштабирования, для реализации которой, необходимо в поле «масштабирование» ввести предполагаемый коэффициент и снова пересчитать.

В программе также имеется возможность легкого визуального сравнения отклонения восстановленной мощности источника с некоторой идеальной функцией. Для этого в поле «Уравнение функции Q » необходимо ввести уравнение функции, график которой

после нажатия кнопки «Пересчитать» добавится к имеющемуся графику восстановленной мощности источника примеси.

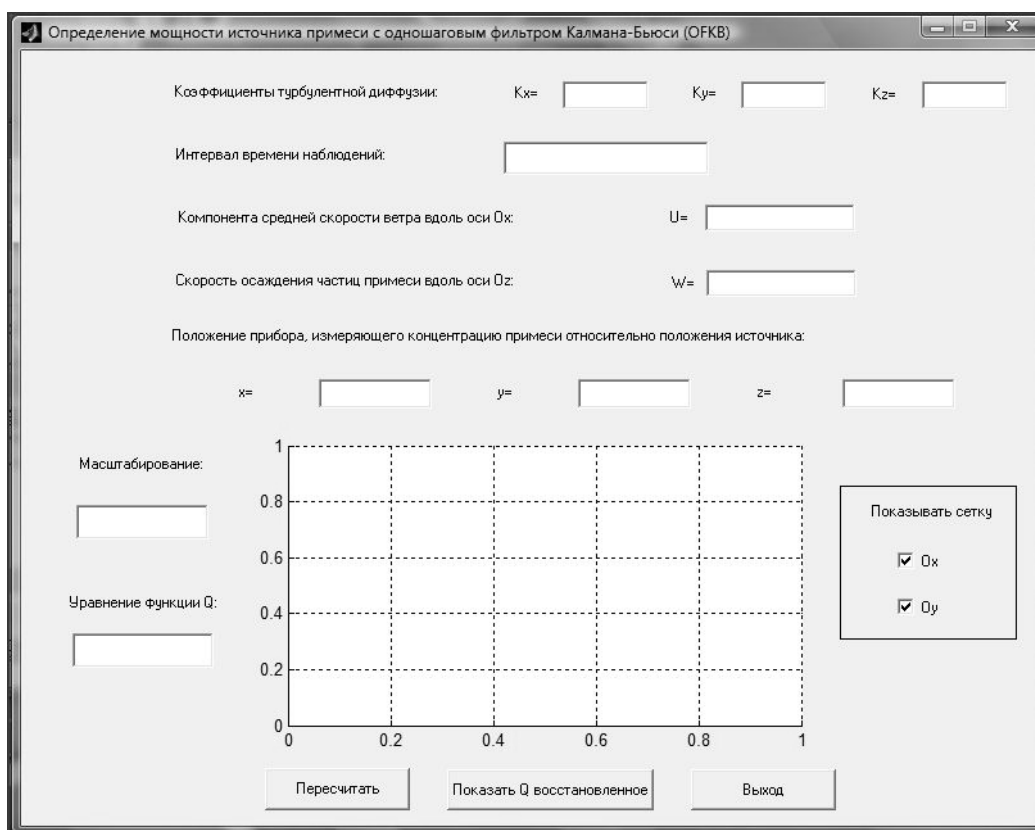


Рисунок 5.4.2 – Диалоговое окно ввода параметров математической модели рассеяния примеси в атмосфере и графической визуализации проведенных расчетов.

Для того, чтобы посмотреть сами значения восстановленной мощности источника, пользователю необходимо нажать на кнопку «Показать Q восстановленное» (рисунок 5.4.2). В результате появится массив значений в окне вывода значений восстановленной интенсивности источника примеси, изображенном на рисунке 5.4.3. Показанные значения рассчитаны с помощью алгоритма оценки значений мощности источника примеси с помощью метода одношаговой фильтрации Калмана-Бьюси, подробно изложенного в п. 5.1.

Программа написана на языке C/C++ Math Library 2.2 в пакете прикладных программ MATLAB [29].

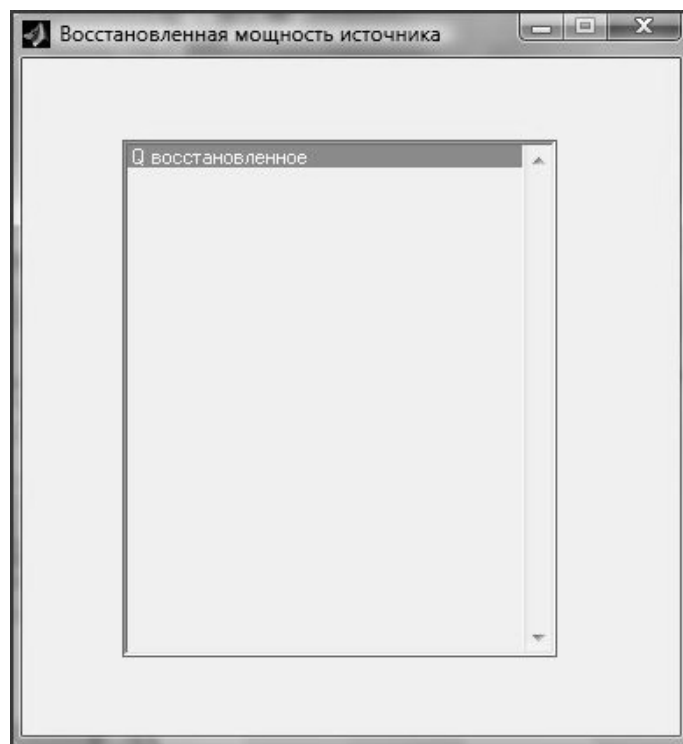


Рисунок 5.4.3 – Окно вывода значений восстановленной интенсивности источника примеси.

5.4.2. Программный продукт МФКВ

Программа «Определение мощности источника примеси с многошаговым фильтром Калмана-Бьюси (МФКВ)» [28] предназначена для определения интенсивности источника примеси с помощью многошагового фильтра Калмана-Бьюси. Она позволяет по заданным значениям концентрации примеси в атмосфере и параметрам математической модели рассеяния примеси восстановить интенсивность источника примеси и визуализировать полученные результаты.

Первым появляется диалоговое окно ввода значений концентрации примеси источника, изображенное на рисунке 5.4.4. Пользователю предлагается вводить по очереди замеры концентрации примеси.

После окончания ввода значений концентрации примеси появляется основное окно программы, изображенное на рисунке 5.4.5. В этом окне для корректной работы программы пользователь должен ввести значения коэффициентов турбулентной диффузии (здесь можно вводить наряду с конкретными числовыми значениями также функции соответствующего аргумента), интервал времени

наблюдений за значениями концентрации, компоненту средней скорости ветра вдоль оси Ox , скорость осаждения частиц вдоль оси Oz и координаты положения прибора, измеряющего концентрацию примеси, относительно источника, а также обязательно ввести значение параметра регуляризации.

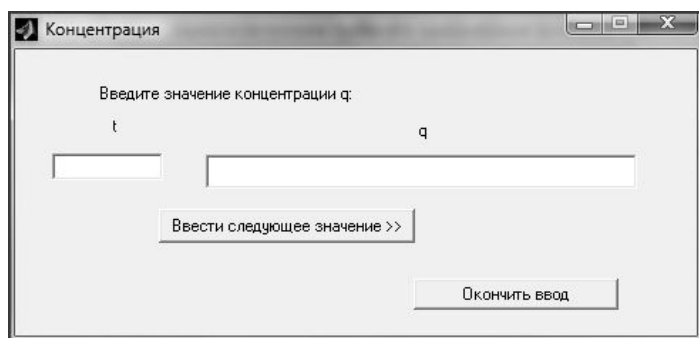


Рисунок 5.4.4 – Диалоговое окно ввода значений концентрации загрязняющих веществ в атмосфере в момент времени t .

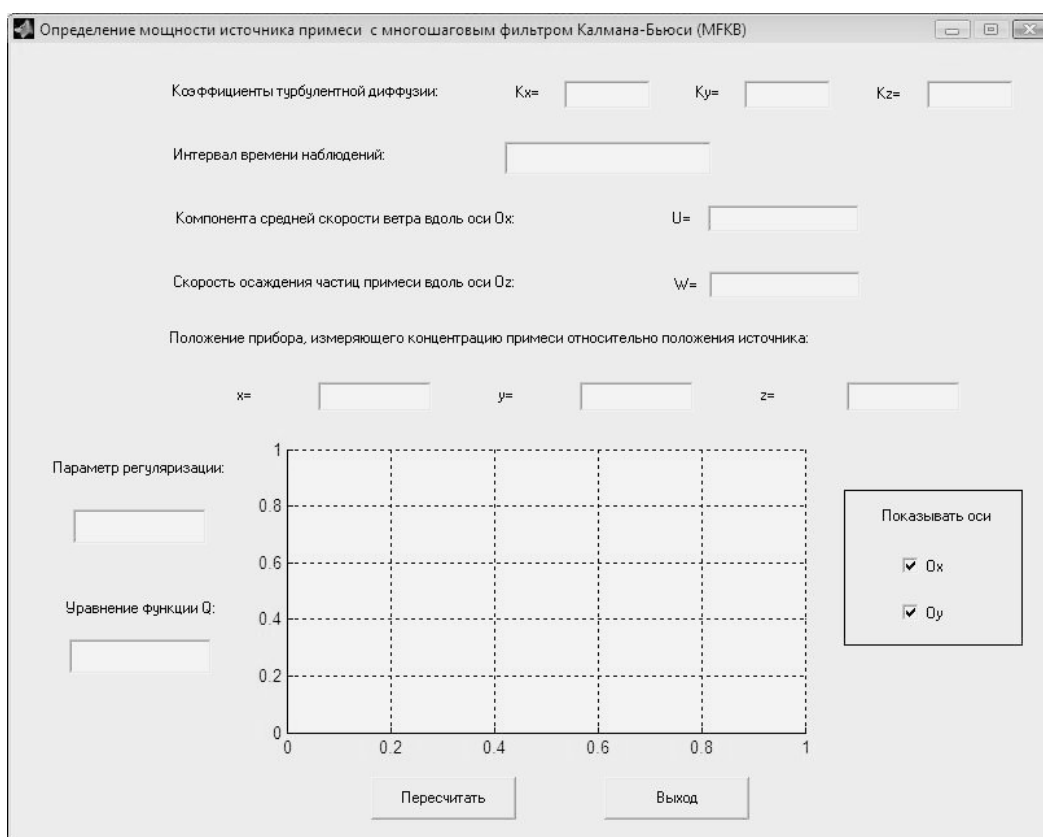


Рисунок 5.4.5 – Диалоговое окно ввода параметров математической модели рассеяния примеси в атмосфере и графической визуализации проведенных расчетов.

После нажатия кнопки «Пересчитать», в окне появится график изменения восстановленной мощности источника примеси в соответствующий интервал времени.

После нажатия кнопки «Пересчитать» автоматически появятся сами значения восстановленной мощности источника в окне вывода значений восстановленной интенсивности источника примеси, изображенном на рисунке 5.4.6. Показанные значения рассчитаны с помощью алгоритма оценки значений мощности источника примеси с помощью метода многошаговой фильтрации Калмана-Бьюси, подробно изложенного в п. 5.2.

В программе также имеется возможность легкого визуального сравнения отклонения восстановленной мощности источника с некоторой идеальной функцией. Для этого в поле «Уравнение функции Q» необходимо ввести уравнение функции, график которой после нажатия кнопки «Пересчитать» добавится к имеющемуся графику восстановленной мощности источника примеси.

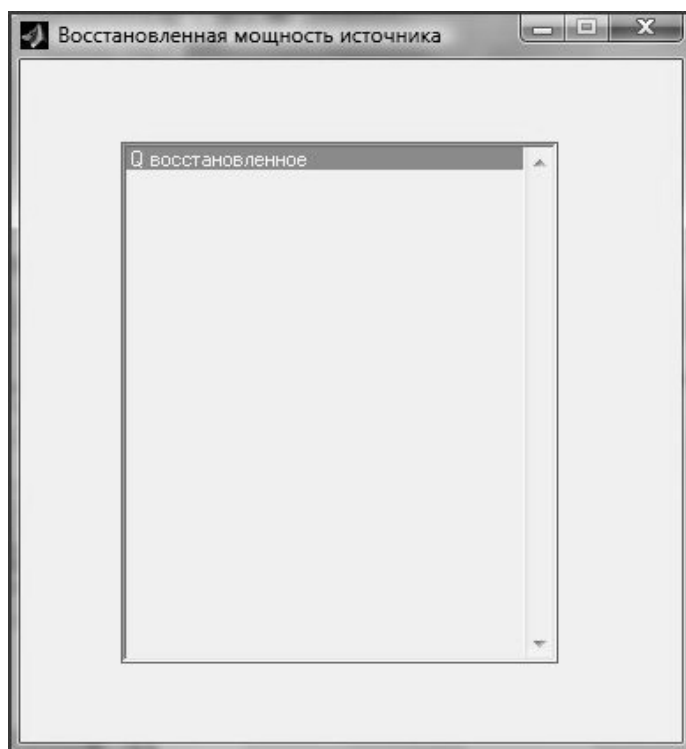


Рисунок 5.4.6 – Окно вывода значений восстановленной интенсивности источника примеси.

Программа написана на языке C/C++ Math Library 2.2 в пакете прикладных программ MATLAB [28].

5.4.3. Программный продукт VK

Программа «Определение вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии с многошаговым фильтром Калмана-Бьюси (VK)» предназначена для определения вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии с помощью многошагового фильтра Калмана-Бьюси. Она позволяет по заданным значениям мощности источника и концентрации примеси в атмосфере, а также параметрам математической модели рассеяния примеси восстановить значения вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии и визуализировать полученные результаты.

Первым появляется диалоговое окно ввода значений концентрации примеси источника, изображенное на рисунке 5.4.7. Пользователю предлагается вводить по очереди замеры концентрации примеси.

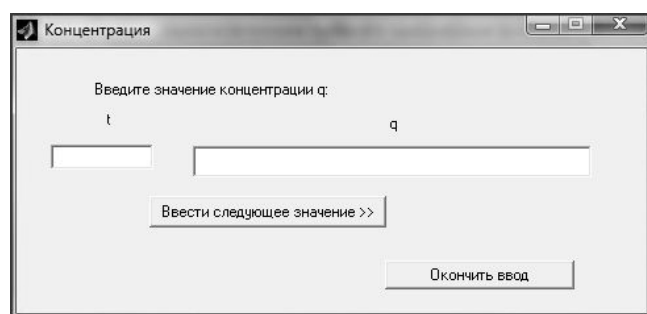


Рисунок 5.4.7 – Диалоговое окно ввода значений концентрации загрязняющих веществ в атмосфере в момент времени t .

Затем появляется диалоговое окно ввода значений мощности источника примеси источника, изображенное на рисунке 5.4.8. Пользователю предлагается вводить по очереди замеры мощности источника примеси.

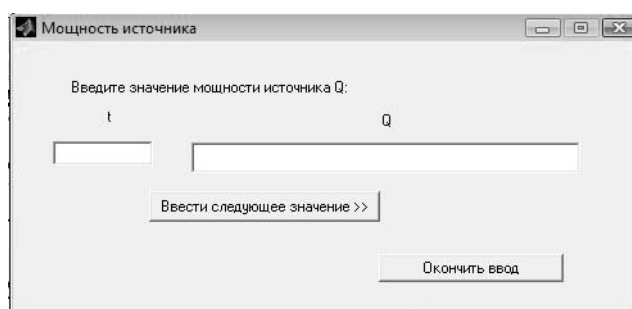


Рисунок 5.4.8 – Диалоговое окно ввода значений мощности источника загрязняющих веществ в атмосфере в момент времени t .

После окончания ввода этих значений появляется основное окно программы, изображенное на рисунке 5.4.9. В этом окне для корректной работы программы пользователь должен ввести значения горизонтальных коэффициентов турбулентной диффузии (здесь можно вводить не наряду с конкретными числовыми значениями также функции соответствующего аргумента), интервал времени наблюдений за значениями концентрации, компоненту средней скорости ветра вдоль оси Ox , скорость осаждения частиц вдоль оси Oz и координаты положения прибора, измеряющего концентрацию примеси, относительно источника, а также обязательно ввести значение параметра регуляризации.

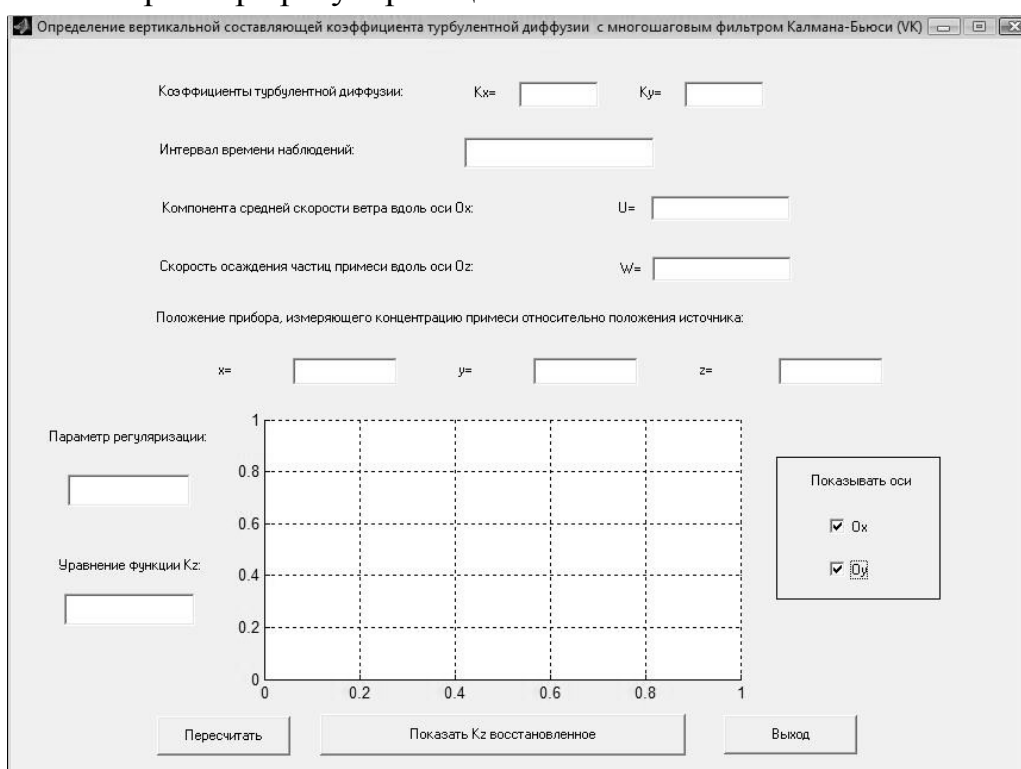


Рисунок 5.4.9 – Диалоговое окно ввода параметров математической модели рассеяния примеси в атмосфере и графической визуализации проведенных расчетов.

После нажатия кнопки «Пересчитать», в окне появится график изменения восстановленной мощности источника примеси в соответствующий интервал времени.

В программе также имеется возможность легкого визуального сравнения отклонения восстановленных значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии с некоторой идеальной функцией. Для этого в поле «Уравнение функции K_z »

необходимо ввести уравнение функции, график которой после нажатия кнопки «Пересчитать» добавится к имеющемуся графику значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии.

Для того, чтобы посмотреть сами значения вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии, пользователю необходимо нажать на кнопку «Показать K_z восстановленное» (рисунок 5.4.9). В результате появится массив значений в окне вывода значений восстановленной интенсивности источника примеси, изображенном на рисунке 5.4.10. Показанные значения рассчитаны с помощью алгоритма оценки значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии с помощью метода многошаговой фильтрации Калмана-Бьюси, подробно изложенного в п. 5.3.

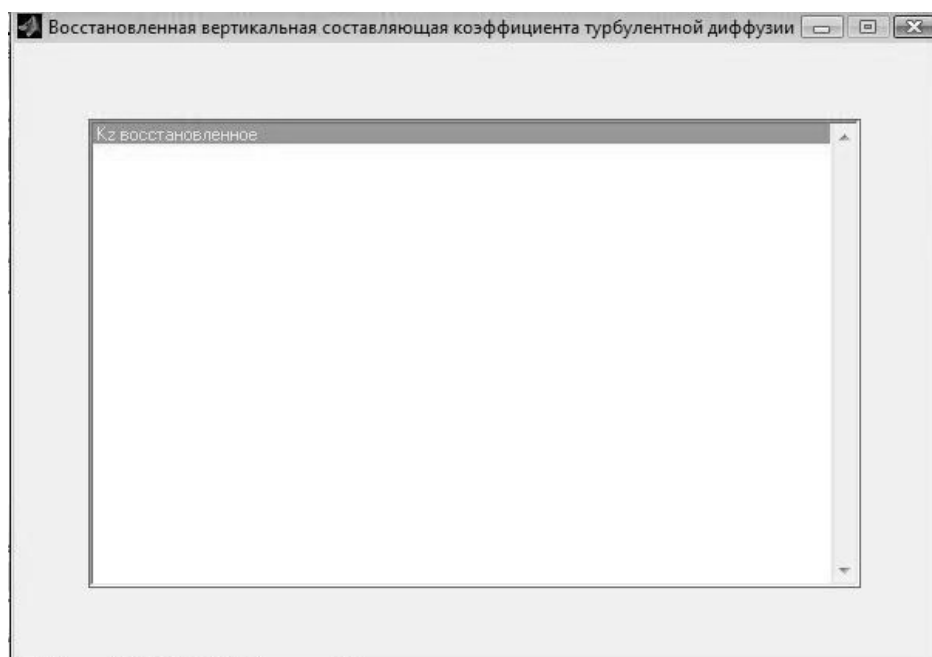


Рисунок 5.4.10 – Окно вывода значений восстановленных значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии.

Программа написана на языке C/C++ Math Library 2.2 в пакете прикладных программ MATLAB.

5.5. Пример построения оценки мощности источника

Для проверки качества получаемых расчетных данных значений $\hat{Q}(t_k)$ по методике многошаговой фильтрации Калмана-Бьюси, воспользуемся программным продуктом «МФКВ» и экспериментальными данными, взятыми из отчетов Центра лабораторного анализа и технических измерений по Южному Федеральному округу (ЦЛАТИ по ЮФО) и содержащими информацию о выбросах в атмосферу диоксида азота. Согласно этим данным $H = 20$ м, $u = 0,5 \ln z$ (м/с), $K_x = K_y = K_0 u$ м²/с, $K_0 = 0,25$ м, $K_z = 0,15z$ м²/с, $t_0 = 0$ с, $w = 0,01$ (м/с). Значения восстановленной мощности источника $\hat{Q}(t)$ в точке (15,15,20) для сравнения были получены на четырех отрезках времени: $t \in [0,30]$ с, $t \in [0,55]$ с, $t \in [0,500]$ с, $t \in [0,3000]$ с.

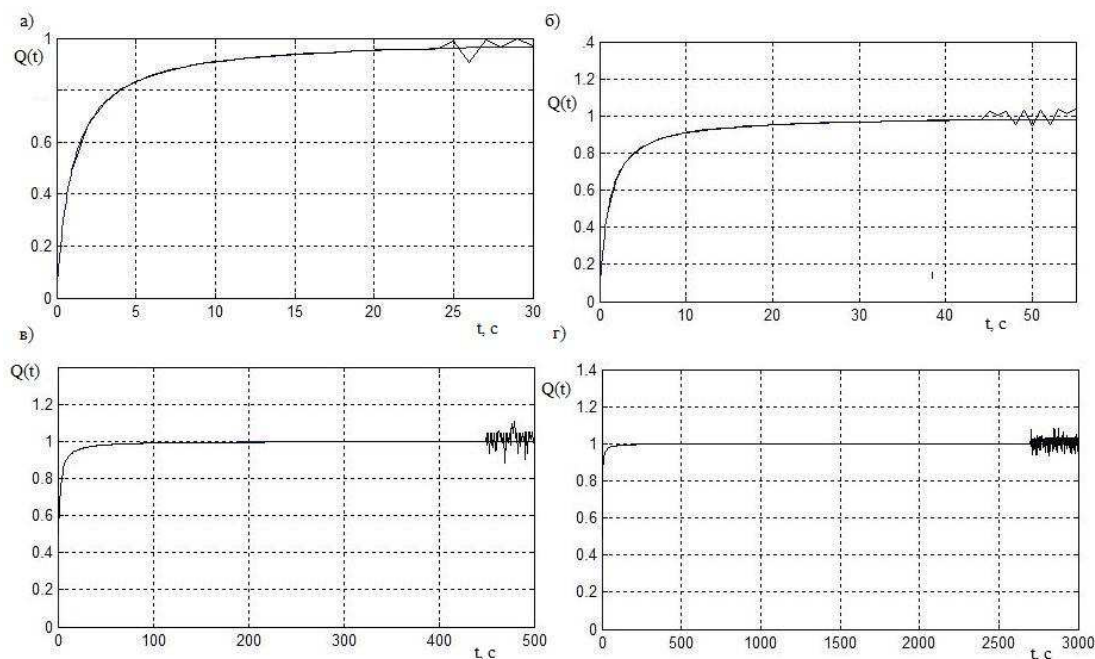


Рисунок 5.5.1 а) - Графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси на отрезке времени $t \in [0,30]$ с;

5.5.1 б) - графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси на отрезке времени $t \in [0,55]$ с;

5.5.1 в) - графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси на отрезке времени $t \in [0,500]$ с;

5.5.1 г) - графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси на отрезке времени $t \in [0,3000]$ с, рассчитанные с помощью программного продукта «МФКВ».

Сравнивая значения восстановленной и заданной мощностей на каждом из четырех полученных результатов, убеждаемся в совпадении (с малой погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$) этих значений почти на всем рассматриваемом отрезке времени (графическая визуализация результатов проведенных расчетов приведена на рисунке 5.5.1). Только в конце этого отрезка (на последних 5-10% рассматриваемого отрезка) наблюдается увеличение указанной погрешности. «Болтанка» осталась лишь на конце каждого из рассматриваемых отрезков, т.е. она зависит не от длины интервала и количества произведенных замеров концентрации примеси, а от количества итераций (шагов) фильтрации. Это объясняется тем, что метод фильтрации многошаговый, на каждом шаге он добавляет новую априорную информацию о решении и пересчитывает (уточняет) полностью все полученные значения, метод «накапливает опыт», а значит и погрешности. Цикл вычислений повторяется после каждого нового измерения.

Фильтр Калмана-Бьюси состоит из модели динамического процесса, выполняющей функцию предсказания, и корректирующей цепи обратной связи.

Проведем Сравнительный анализ полученных результатов с результатами, полученными методом регуляризации Тихонова при условии, что случайные ошибки измерения игнорируются.

Задача восстановления мощности $Q(t)$ точечного источника непрерывного действия по экспериментально заданным плотности осадка на подстилающей поверхности $\bar{P}(t, x, y, z_0)$ на подстилающей поверхности $z_0 = 0$, скорости сухого осаждения частиц примеси V_s , а также u , w , K_x , K_y , K_z , и координатам источника $(0,0,H)$ была

решена методом регуляризации А.Н. Тихонова в работе [32] в случае, когда случайные ошибки игнорируются.

Для восстановления значения $Q(t)$ по данным примера на отрезке времени $t \in [0,55]$ с и замерам плотности осадка на подстилающей поверхности был использован программный продукт «IPIS» [32]. Графическая визуализация полученных результатов в сравнении с результатами, полученными в примере на отрезке времени $t \in [0,55]$ с, приведена на рисунке 5.5.2.

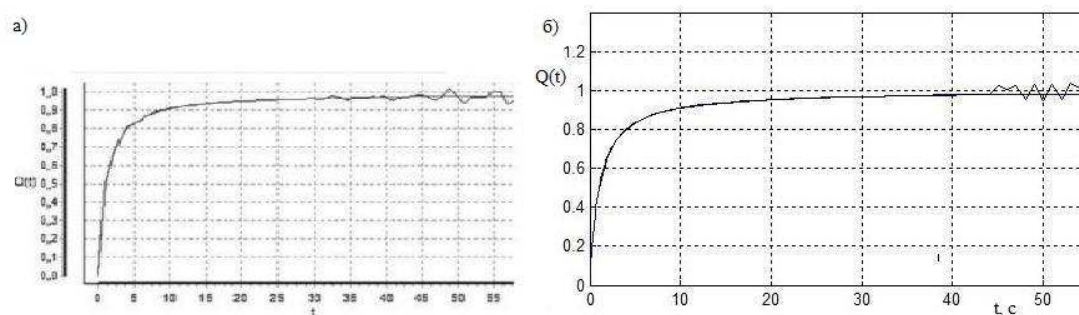


Рисунок 5.5.2 а) - Графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси на отрезке времени $t \in [0,55]$ с, рассчитанный с помощью программного продукта «IPIS»;

5.5.2 б) - графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси на отрезке времени $t \in [0,55]$ с, рассчитанный с помощью программного продукта «МФКВ».

Численные расчеты показали, что игнорировать случайную ошибку измерения нецелесообразно. На графике также наглядно заметно, что в случае игнорирования случайной ошибки измерения (рис. 5.5.2 а) расчетная мощность источника примеси начинает отклоняться от экспериментальной еще со середины рассматриваемого отрезка, а в случае учета случайной ошибки (рис. 5.5.2 б) – отклонение происходит на последних 10% рассматриваемого отрезка.

Многочратно проведенные численные эксперименты показывают, что основное достоинство расчетов, проводимых с помощью программы «МФКВ», - совпадение (с малой погрешностью) расчетных и восстановленных значений мощности точечного источника почти на всем рассматриваемом отрезке

времени. Только в конце отрезка эти значения начинают заметно отличаться друг от друга. При этом этот эффект не зависит от длины интервала $(0, T)$.

Для определения матрицы ковариаций ошибок и начальных приближений многошаговый фильтр Калмана-Бьюси требует большого объема статистических данных.

Заключение к главе 5

В главе предложены методики численного определения значений мощности точечного источника примеси и вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии методами стохастической фильтрации, учитывающими случайную ошибку измерения априорно заданной концентрации примеси в атмосфере, и позволяющие адекватно экспериментальным данным оценить значения этой мощности. Описаны способы реализации указанных методик в виде программ для ЭВМ.

Предложенные методики и их численная реализация могут быть использованы для достоверных расчетов суммарного ущерба, наносимого атмосфере выбросами вредных веществ, а также для проведения оперативного мониторинга экологической ситуации в рассматриваемом регионе, возникающего в результате загрязнения атмосферы промышленными выбросами.

ГЛАВА 6

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАССЕЯНИЯ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ

В данной главе приведены методики стохастического линейного прогноза значений мощности источника примеси и значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии.

6.1. Стохастический прогноз значений мощности источника примеси

Значения мощности источника выбросов используются в существующих методиках оценки экономического ущерба, причиняемого воздушной среде и подстилающей поверхности выбросами примесей промышленными предприятиями, для оценки прогнозируемой величины предотвращенного ущерба и размеров платежей за выбросы в атмосферу примесей от стационарных источников различного типа [47]. Поэтому важно знать не только и не столько значения мощности источника выбросов, сколько уметь спрогнозировать его будущие значения. Изложенные факты указывают на актуальность и практическую значимость результатов анализа указанной задачи.

Будем предполагать, что математическая модель, описывающая процесс рассеяния примеси в турбулентной атмосфере имеет вид (1.1.16), (1.1.21) – (1.1.23) [9], причем

$$K_x = K_y = K_0 U, \quad K_0 = \text{const},$$

$$U = U(t, x, y, z), \quad w = w(t, x, y, z)$$

непрерывны в E_+^3 ,

$$K_z = K_z(t, x, y, z) -$$

непрерывно дифференцируемая функция в $[0, T] \times E_+^3$.

Цель данного параграфа – предложить математическую модель прогноза значений мощности $Q(t)$ для $t \in (s, T]$.

Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка экстраполяции \tilde{R}_{zz} удовлетворяет уравнению [5]

$$\frac{d\tilde{R}_{zz}(t)}{dt} = A(t)\tilde{R}_{zz}(t), \quad t \in [s, T] \quad (6.1.1)$$

и начальному условию

$$\tilde{R}_{zz}(s) = R_{zz}^{(L)}(s), \quad (6.1.2)$$

где $R_{zz}^{(L)}(s)$ определяется из соотношений (5.2.2), (5.2.4) – (5.2.5).

Соотношение (6.1.1) позволяет найти значения величины $\tilde{R}_{zz}(t)$ – прогнозируемое на момент $t \in [s, T]$ значение $R_{zz}(t)$. Аналогично определяются

$$\tilde{R}_t(t), \tilde{R}_x(t), \tilde{R}_z(t), \tilde{R}_{xx}(t), \tilde{R}_{yy}(t),$$

соответственно для

$$R_t(t), R_x(t), R_z(t), R_{xx}(t), R_{yy}(t).$$

Подставляя найденные оценки в (5.1.1), получим прогнозируемое на момент $t \in [s, T]$ значение $\tilde{Q}(t)$ мощности источника $Q(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t_k) = & \tilde{R}_t(t) + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \tilde{R}_x(t) - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \tilde{R}_z(t) - \\ & - K_x \cdot \tilde{R}_{xx}(t) - \frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot \tilde{R}_x(t) - K_y \cdot \tilde{R}_{yy}(t) - \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot \tilde{R}_y(t) - \\ & - K_z \cdot \tilde{R}_{zz}(t) - \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot \tilde{R}_z(t), t \in [s, T]. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

6.2. Стохастический прогноз значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии

Часто возникает необходимость не только определить значения вертикальной составляющей уравнения турбулентной диффузии, но и указать его будущие значения.

Как и ранее, предполагаем, что математическая модель, описывающая процесс рассеяния примеси в турбулентной атмосфере

представляет собой краевую задачу (1.1.16), (1.1.18) – (1.1.20), коэффициенты турбулентной диффузии K_x, K_y, K_z имеют вид:

$$K_x = K_y = K_0 U, \quad K_0 = \text{const}, \quad U = U(t, z), \quad K_z = K_1(t)z.$$

Цель параграфа – предложить математическую модель прогноза значений коэффициента $K_z = K_z(t, z)$ для $t \in [s, T]$.

Для решения поставленной задачи в рамках указанных допущений, очевидно, достаточно спрогнозировать значения

$$K_1(t), \quad t \in [s, T].$$

Для этого, в свою очередь, достаточно найти прогнозируемые на момент t оценки

$$\tilde{R}_t(t), \tilde{R}_x(t), \tilde{R}_z(t), \tilde{R}_{xx}(t), \tilde{R}_{yy}(t),$$

для производных

$$R_t(t), R_x(t), R_z(t), R_{xx}(t), R_{yy}(t).$$

соответственно и подставить их в уравнение (5.3.2).

Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка экстраполяции \tilde{R}_{zz} удовлетворяет уравнению (6.1.1) и начальному условию (6.1.2), где $R_{zz}^{(L)}(s)$ определяется из соотношений (5.2.2), (5.2.4) – (5.2.5). Аналогично определяются

$$\tilde{R}_t(t), \tilde{R}_x(t), \tilde{R}_z(t), \tilde{R}_{xx}(t), \tilde{R}_{yy}(t),$$

соответственно для

$$R_t(t), R_x(t), R_z(t), R_{xx}(t), R_{yy}(t).$$

Подставляя найденные оценки в (5.3.2), получим прогнозируемое на момент $t \in [s, T]$ значение $\tilde{K}_1(t)$ компоненты $K_1(t)$ вертикальной составляющей уравнения турбулентной диффузии:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(t) = & \frac{\tilde{R}_t(t) + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \tilde{R}_x(t) - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \tilde{R}_z(t) -}{\tilde{R}_z(t) + \tilde{R}_{zz}(t)} + \\ & + \frac{-K_x \cdot \tilde{R}_{xx}(t) - \frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot \tilde{R}_x(t) - K_y \cdot \tilde{R}_{yy}(t) - \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot \tilde{R}_y(t)}{\tilde{R}_z(t) + \tilde{R}_{zz}(t)} + \quad (6.2.1) \\ & + \frac{-K_z \cdot \tilde{R}_{zz}(t) - \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot \tilde{R}_z(t) - Q(t)}{\tilde{R}_z(t) + \tilde{R}_{zz}(t)}, \quad t \in [s, T]. \end{aligned}$$

6.3. Пример прогноза значений мощности точечного источника примеси

Для проверки качества работы алгоритма по указанной в п. 6.1 методике, воспользуемся экспериментальными данными, взятыми из отчетов по инвентаризации источников выбросов загрязняющих веществ в атмосферу, предоставленных Центром лабораторного анализа и технических измерений по Южному Федеральному округу (ЦЛАТИ по ЮФО) и содержащими информацию о выбросах в атмосферу диоксида азота (см. п. 5.5). Согласно этим данным: $H = 20$ м, $U = 0,5 \ln z$ (м/с), $K_x = K_y = K_0 U$ м²/с, $K_0 = 0,25$ м, $K_z = 0,15 z$ м²/с, $t_0 = 0$ с, $w = 0,01$ (м/с).

С помощью (6.1.3) для моментов времени $t \in (20;55]$ найдем прогнозируемые значения мощности источника примеси (вычисления проводились в пакете прикладных программ MatLab). Графическая визуализация результатов проведенных расчетов приведена на рисунке 6.3.1.

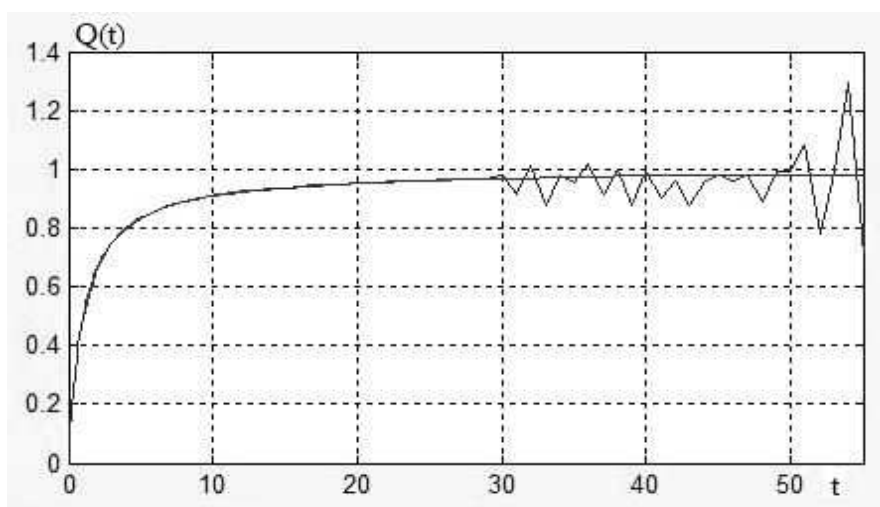


Рисунок 6.3.1 – Графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси.

Согласно проведенным расчетам совпадение ($\varepsilon \leq 0,1 \cdot Q(t)$ при $t \in [20;50]$, а при $t \in (50;55]$ – $\varepsilon > 0,1 \cdot Q(t)$) экспериментальных и восстановленных значений мощности точечного источника происходит почти на всем рассматриваемом отрезке времени. Только

в конце отрезка расчетная мощность источника примеси начинает отклоняться от экспериментальной (см. рис. 6.3.1).

Заключение к главе 6

В главе предложены и исследованы математические модели прогноза значений мощности точечного источника непрерывного действия и значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии. Вычислительные эксперименты показывают хорошее согласование численных и статистических данных. Полученные результаты имеют важное прикладное значение: предложенные модели можно, как будет показано в главе 7, использовать для разработки методик прогноза экономического ущерба, причиняемого воздушной среде и подстилающей поверхности экологически вредными веществами, выбрасываемыми в атмосферу промышленными предприятиями.

ГЛАВА 7

РАСЧЕТ ЭКОНОМИЧЕСКОГО УЩЕРБА, ПРИЧИНЯЕМОГО АТМОСФЕРЕ ВЫБРОШЕННЫМИ В НЕЕ ВРЕДНЫМИ ВЕЩЕСТВАМИ

В данной главе приведены методики расчета экономического ущерба, причиняемого воздушной среде экологически вредными веществами, выбрасываемыми в атмосферу источниками примеси, математическая модель динамики этого ущерба.

7.1. Методы расчета экономических показателей природопользования

Для расчета экономического ущерба [38], причиняемого воздушной среде годовыми выбросами загрязнений в атмосферу от отдельных стационарных источников, к которым, в частности, относятся промышленные предприятия, используется формула:

$$y = \sigma \cdot f \cdot \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i m_i, \quad (7.1.1)$$

где m_i – фактический объем выброса i -го вредного вещества, $i = 1, \dots, n$, σ – коэффициент, учитывающий региональные особенности территории, подверженной вредному воздействию, и характеризующий относительную опасность ее загрязнения, a_i – коэффициент приведения различных вредных веществ к агрегированному виду, характеризующий относительную опасность для окружающей среды i -го вещества, f – коэффициент, учитывающий характер рассеяния веществ в атмосфере, γ_i – стоимостная (денежная) оценка ущерба от единицы выброса i -го вредного вещества (коэффициент γ_i часто расщепляют на сумму $\gamma = \gamma' + \gamma''$, где γ' , γ'' – стоимостные оценки ущерба, причиняемого соответственно выбросами, не превышающими их предельных

значений и выбросами, превышающими предельные значения i -го вещества), n – количество вредных веществ.

В работе [34] предлагается уточненная формула расчета экономического ущерба:

$$y = \begin{cases} \sigma \cdot f \cdot \sum_{i=1}^n \gamma'_i k_i a_i m_i, & m_i \leq ПДВ_i, \\ \sigma \cdot f \cdot \sum_{i=1}^n \gamma'_i k_i a_i ПДВ_i + \\ + \sigma \cdot f \cdot \sum_{i=1}^n \gamma''_i k_i a_i (m_i - ПДВ_i), & m_i > ПДВ_i, \end{cases} \quad (7.1.2)$$

здесь k_i – коэффициент, учитывающий инфляцию, $i = 1, \dots, n$, обратим внимание, что значения γ'_i , γ''_i существенно зависят от i , $i = 1, \dots, n$ (в настоящее время существуют подробные таблицы значений γ'_i , γ''_i).

Для легкой примеси f рассчитывают по формуле [38]:

$$f = \frac{100}{100 \cdot \varphi H} \cdot \frac{4}{1+U}, \quad \varphi = 1 + \frac{\Delta T}{75^\circ C}, \quad (7.1.3)$$

где φ – поправка на тепловой подъем факела в атмосфере, ΔT – среднегодовая разность температур в устье источника (трубы) и в окружающей атмосфере, H – высота источника (трубы), U – среднегодовое значение модуля скорости ветра.

Для оценки прогнозируемой величины предотвращенного ущерба используется формула [18], в которой для территории в целом в качестве оцениваемой группы источников могут рассматриваться все источники, рассматриваемые как единый "приведенный" источник:

$$Y_{i\partial r} = Y_{\partial\ddot{a}r} \cdot (M_1 - M_2) \cdot K_y \cdot J_{\ddot{a}}, \quad (7.1.4)$$

где Y_{npr} – эколого-экономическая оценка величины предотвращенного ущерба от выбросов загрязняющих веществ в атмосферный воздух в рассматриваемом r -том регионе (далее – предотвращенный ущерб), $Y_{y\partial r}$ – эколого-экономическая оценка удельного ущерба от выбросов загрязняющих веществ в атмосферный воздух (далее – показатель удельного ущерба) для r -го экономического района РФ, M_1, M_2 – приведенная масса выбросов загрязняющих веществ соответственно на начало и конец расчетного периода в рассматриваемом регионе, K_y – коэффициент экологической ситуации и экологической

значимости состояния атмосферного воздуха территорий экономических районов России, J_{∂} – индекс-дефлятор по отраслям промышленности, устанавливаемый Минэкономки России на рассматриваемый период и доводимый Госкомэкологией России до территориальных природоохранных органов.

Показатель удельного ущерба $Y_{\partial ar}$ рассчитывается по формуле:

$$Y_{\partial ar} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{M_r}, \quad (7.1.5)$$

где y_i – экономическая оценка нанесенного ущерба i -ым загрязняющим веществом атмосферному воздуху в r -том регионе, $i = 1, \dots, n$, M_r – приведенная масса фактических выбросов загрязняющих веществ за отчетный период времени в r -том регионе. Здесь

$$M_r = \sum_{k=1}^K M_k, \quad M_k = \sum_{i=1}^n m_i \cdot K_{yi}, \quad (7.1.6)$$

k – номер конкретного объекта или направления атмосфероохранной деятельности в регионе, K_{yi} – коэффициент относительной эколого-экономической опасности i -го загрязняющего вещества или группы веществ.

Платежи за загрязнение окружающей среды [38] представляют собой особый вид косвенного налогообложения, но не являются компенсацией за наносимый экологический ущерб. Размеры платежей за выброс от стационарных источников определяется по следующей формуле:

$$S = \begin{cases} \sigma \sum_{i=1}^n m_i n_i, & \text{если } m_i \leq q_i, \\ \sigma \left[\sum_{i=1}^n q_i n_i + \sum_{i=1}^n (m_i - q_i) n'_i \right], & \text{если } q_i < m_i \leq l_i, \\ \sigma \left[\sum_{i=1}^n q_i n_i + \sum_{i=1}^n (l_i - q_i) n'_i + \right. \\ \left. + 5 \sum_{i=1}^n (m_i - l_i) n'_i \right], & \text{если } m_i > l_i, \end{cases} \quad (7.1.7)$$

где q_i , l_i , n_i , n'_i – соответственно предельно допустимый норматив выброса (ПДВ), временно-согласованный норматив выброса (ВСВ), базовая ставка платы за выбросы в пределах ПДВ, базовая ставка платы за выбросы в пределах ВСВ i -го вредного вещества.

На предприятиях в большинстве случаев отсутствует учет фактических объемов выброса. Поэтому для определения m_i (фактического объема выброса i -го вредного вещества) необходимо решить задачу, обратную задаче нахождения концентрации примеси в турбулентной диффузии, то есть задачу восстановления мощности источника примеси $Q = m_i$ по замерам концентрации примеси и известным параметрам математической модели (1.1.16), (1.1.21) – (1.1.23) рассеяния примеси в атмосфере. Оценить значения мощности источника примеси можно, например, с помощью метода многошаговой фильтрации Калмана-Бьюси, как это было показано в п. 5.2. Тогда на ЭВМ определить мощность источника примеси с многошаговым фильтром Калмана-Бьюси можно с помощью программы для ЭВМ «МФКВ» из п. 5.4.2.

7.2. Реализация в среде MS Excele методов расчета экономического ущерба

Для иллюстрации предложенной методики были взяты статистические данные, взятые из отчетов ЦЛАТИ по ЮФО о выбросах окислов азота (NO_x) на территории автотранспортного предприятия.

Согласно нормативам, принятым в Российской Федерации, определяем следующие константы $\sigma = 1.8$, $a_{NO_x} = 1.5$, $\gamma'_{NO_x} = 450$ (руб / тыс. кг.), $\gamma''_{NO_x} = 1350$ (руб / тыс. кг.), $f = 1.58$. Согласно статистическим данным коэффициент инфляции $k_{2010} = 1.5$.

Значение массы выброшенных предприятием в атмосферу окислов азота рассчитаем с помощью программы для ЭВМ «МФКВ»:

$$m_{NO_x}(2010) = 7434 \text{ (кг.)}$$

Подставляя в (7.1.2) указанные данные с помощью программы Microsoft Excel 2003 находим: $y(NO_x) = 23906024,10$.

Согласно нормативам, принятым в Российской Федерации, определяем следующие константы: $M_1 = 20184$, $M_2 = 22302$, $K_{\dot{Y}} = 102,25$, $J_{\partial} = 1,58$.

Подставляя в (7.1.4) указанные данные с помощью программы Microsoft Excel 2003 находим $Y_{i\partial}(NO_x) = 366783593,32$.

Согласно нормативам, принятым в Российской Федерации, определяем следующие константы $K_{\dot{Y}}(NO_x) = 3$.

Подставляя в (7.1.5) указанные данные с помощью программы Microsoft Excel 2003 находим: $Y_{\partial i}(NO_x) = 1071,92$.

Согласно нормативам, принятым в Российской Федерации, определяем следующие константы $q_{NO_x} = 7000$, $l_{NO_x} = 10000$, $n_{NO_x} = 87$, $n'_{NO_x} = 640$.

Приведем подробную инструкцию решения данного примера с помощью программы Microsoft Excel 2003. Этап проведения вычислений приведен на рисунках (7.2.1) – (7.2.4).

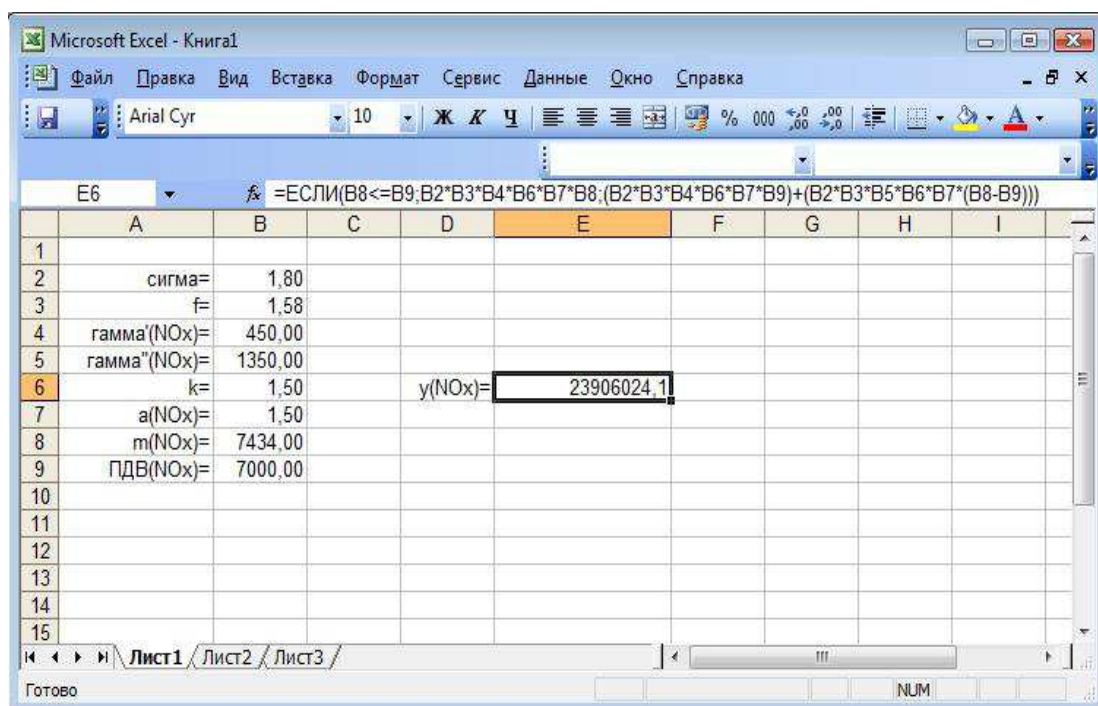


Рисунок 7.2.1. Расчет экономического ущерба, причиненного воздушной среде окислами азота.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	сигма=	1,80		Y(уд, NOx)=	1071,922881				
3	f=	1,58		M1=	20184				
4	гамма'(NOx)=	450,00		M2=	22302				
5	гамма''(NOx)=	1350,00		Kз=	102,25				
6	k=	1,50		Jд=	1,58				
7	a(NOx)=	1,50							
8	m(NOx)=	7434,00							
9	ПДВ(NOx)=	7000,00							
10									
11	y(NOx)=	23906024		Y(пр)=	366783593,3				
12									
13									
14									
15									
16									

Рисунок 7.2.2. Расчет показателя удельного ущерба.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	сигма=	1,80		Y(уд, NOx)=	1071,922881				
3	f=	1,58		M1=	20184				
4	гамма'(NOx)=	450,00		M2=	22302				
5	гамма''(NOx)=	1350,00		Kз=	102,25				
6	k=	1,50		Jд=	1,58				
7	a(NOx)=	1,50							
8	m(NOx)=	7434,00							
9	ПДВ(NOx)=	7000,00							
10									
11	y(NOx)=	23906024		Y(пр)=	366783593,3				
12									
13									
14									
15									
16									

Рисунок 7.2.3. Расчет прогнозируемой величины предотвращенного ущерба.

А						
1						
2	сигма=	1,80	Y(уд. NOx)=	1071,92	q(NOx)=	7000,00
3	f=	1,58	M1=	20184,00	I(NOx)=	10000,00
4	гамма(NOx)=	450,00	M2=	22302,00	n(NOx)=	87,00
5	гамма"(NOx)=	1350,00	Кэ=	102,25	n'(NOx)=	640,00
6	k=	1,50	Јд=	1,58		
7	a(NOx)=	1,50				
8	m(NOx)=	7434,00				
9	ПДВ(NOx)=	7000,00				
10						
11	y(NOx)=	23906024,10	Y(пр)=	366783593,32	S=	1596168
12						
13						
14						
15						
16						

Рисунок 7.2.4. Расчет платежей за загрязнение окружающей среды.

7.3. Паутинообразная модель динамики экономического ущерба

В п. 7.1 подробно описаны методики расчета экономического ущерба y , причиняемого воздушной среде годовыми выбросами загрязнений в атмосферу от стационарных источников, к которым, в частности, относятся промышленные предприятия.

На практике не всегда удобно вычислять эмпирические константы в (7.1.1), (7.1.2). Кроме того, формулы (7.1.1), (7.1.2) позволяют определять значения экономического ущерба y только в рассматриваемый момент времени t и не предоставляют возможности находить y на последующие моменты $s > t$ (т.е. осуществить прогноз значений y с момента t на момент s).

Цель данного параграфа – предложить другой, метод вычисления y , чем с помощью формул (7.1.1) и (7.1.2), который позволил бы отказаться от вычисления большого числа эмпирических констант в (7.1.1), (7.1.2) и, кроме того, позволил бы осуществлять прогноз значений y на момент $s > t$ по известным значениям y до момента t включительно.

Рассмотрим отношения двух сторон: промышленного предприятия, выбрасывающего в атмосферу экологически вредные вещества и организации (далее кратко – контролирующей организации), осуществляющей контроль за выплатой предприятиями штрафов, налагаемых на них территориальными органами Федеральной службой по экологическому, технологическому и атомному надзору Российской Федерации. Предполагаем, что руководство промышленного предприятия планирует объемы выбросов загрязняющих веществ в текущий момент времени t , $t=1,2,\dots$, в соответствии с величиной штрафов, уплаченных им в предыдущий момент времени $(t-1)$ за такие выбросы, а сумма экономического ущерба, устанавливаемая контролирующей организацией в момент t , определяется объемом (массой) выбросов этих веществ в момент t . Пусть динамика изменения массы i -го загрязняющего вещества описывается соотношениями:

$$m^s_i(t) = f_i(y_i(t-1), y_i(t-2), y_i(t-3), \dots, y_i(0)), \quad (7.3.1)$$

$$m^d_i(t) = g_i(y_i(t)), \quad (7.3.2)$$

где $m^s_i(t)$ – объем (масса) выброса вредного вещества, планируемый промышленным предприятием в момент времени t ; по величине $m^s_i(t)$ предприятие планирует объем производимой им продукции, а также мероприятия по фильтрации и очистке от вредных примесей выбрасываемого в атмосферу воздуха. $y_i(t)$ – суммарная величина экономического ущерба i -го вредного вещества, выплачиваемая в момент времени t , $m^d_i(t)$ – фактический объем (масса) выброса вредного вещества, в соответствии с которыми контролирующая организация, рассчитывает суммарную величину экономического ущерба $y_i(t)$, которую должно выплатить предприятие за загрязнение атмосферы в момент времени t .

Фактически, в сумме $y_i(t-1)$ уже учитывается опыт прошлых лет, поэтому от (7.3.1) – (7.3.2) можно перейти к

$$m^s_i(t) = f_i(y_i(t-1)), \quad (7.3.3)$$

$$m^d_i(t) = g_i(y_i(t)) \quad (7.3.4)$$

с начальным условием

$$y_i(0) = y_i^0 \quad (7.3.5)$$

Чтобы промышленное предприятие не несло непредвиденных убытков, необходимо, чтобы в один и тот же момент t

$$m^d_i(t) = m^s_i(t). \quad (7.3.6)$$

Обратим внимание, что модели более частного вида по сравнению с (7.3.3) – (7.3.6) используются в экономике для установления взаимосвязи между предложением и ценой в прошлый ($t - 1$) и спросом, ценой в настоящий момент времени t .

Динамика изменения спроса-предложения на товар в момент t в зависимости от изменения цен на него в моменты $t, t - 1$ может быть описана соотношениями:

$$s(t) = h \cdot p(t - 1) + r, \quad (7.3.7)$$

$$d(t) = -b \cdot p(t) + a, \quad (7.3.8)$$

где $s(t)$ – объем продаваемого товара в момент t , $d(t)$ – объем закупаемого товара в момент t (спрос на товар), $p(t)$ – цена на товар в момент t .

Запаздывание во времени цены на товар $p(t - 1)$ в (7.3.7) от предложения $s(t)$ объясняется тем, что решение об объеме производства $s(t)$ в момент t принимается с учетом цены на товар $p(t - 1)$ в момент времени ($t - 1$). Соответствующее этому решению предложение на закупку товара появляется на рынке в момент t .

В (7.3.7), (7.3.8) $a = const, r = const; a > r > 0$, так как при цене, равной нулю, то есть $p(t) = p(t - 1) = 0$, спрос $d(t)$ превышает предложение $s(t)$, $h = const > 0, b = const > 0$. Чтобы торговля была сбалансированной, необходимо, чтобы в один и тот же момент t спрос $d(t)$ был равен предложению $s(t)$, то есть

$$d(t) = s(t). \quad (7.3.9)$$

Модель (7.3.7) – (7.3.9), описывающая динамику спроса-предложения в различные моменты времени t , называется паутиной моделью экономики [50].

Поэтому модель (7.3.3) – (7.3.6) так же будем называть паутинообразной моделью динамики экономического ущерба, причиняемого окружающей среде атмосферными выбросами.

Запаздывание во времени суммы экономического ущерба $y_i(t-1)$ в (7.3.3) от объема выброса $m^s_i(t)$ объясняется тем, что решение, принимаемое руководством предприятия, о величине объема производства (и, как следствие, объеме выброса $m^s_i(t)$) в момент t принимается с учетом уплаченной суммы штрафов, совпадающей с величиной экономического ущерба $y_i(t-1)$ в момент времени $(t-1)$. Величина экономического ущерба $y_i(t)$, соответствующая принятому решению, определяется по факту выброшенного загрязняющего вещества в момент t .

Путем линеаризации $f_i(y_i(t))$, $g_i(y_i(t))$, $i=1, \dots, n$, в (7.3.3) – (7.3.6) перейдем к разностному уравнению первого порядка с постоянными коэффициентами

$$ay_i(t-1) + by_i(t) = f(t), \quad (7.3.10)$$

Пусть известны два любых решения $\{\tilde{y}_i(t-1), \tilde{y}_i(t)\}$ и $\{y'_i(t-1), y'_i(t)\}$ уравнения (7.3.10). Подставляя каждое из них в (7.3.10) и вычитая затем полученные равенства одно из другого, получим однородное уравнение

$$a\bar{y}_i(t-1) + b\bar{y}_i(t) = 0, \quad (7.3.11)$$

где $\{\bar{y}_i(t-1) = \tilde{y}_i(t-1) - y'_i(t-1), \bar{y}_i(t) = \tilde{y}_i(t) - y'_i(t)\}$, $\bar{y}_i(t)$ – удовлетворяет однородному уравнению (7.3.11).

Решением однородного уравнения (7.3.11) также будет

$$\bar{y}_i(t) = \left(-\frac{a}{b}\right)^l \bar{y}_i(t-l),$$

или

$$\bar{y}_i(t) = \alpha Y_i(t),$$

где α – произвольная постоянная, $Y_i(t)$ – решение уравнения (7.3.11), удовлетворяющее условию $\bar{y}_i(0) = 1$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения (7.3.10) имеет вид

$$y_i(t) = y'_i(t) + \alpha Y_i(t) = y'_i(t) + \alpha \left(-\frac{a}{b}\right)^i, \quad (7.3.12)$$

где $y'_i(t)$ – любое частное решение этого неоднородного уравнения.

Сначала построим решение для следующего уравнения со специальным образом заданной правой частью

$$ay_i^*(t-1) + by_i^*(t) = f(t),$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (7.3.13)$$

Общее решение уравнения (7.3.13) имеет вид

$$y_i^*(t) = \begin{cases} \alpha \left(-\frac{a}{b}\right)^t, & t < 0, \\ \left(\alpha - \frac{1}{a}\right) \left(-\frac{a}{b}\right)^t, & t \geq 1. \end{cases}$$

Тогда искомое частное решение уравнения (7.3.10) с произвольной правой частью $f(t)$ можно записать в виде ряда (в случае, если ряд сходится)

$$y_i'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_i^*(t) - kf(k)). \quad (7.3.14)$$

Таким образом, соотношение (7.3.14) позволяет вычислять общее решение (7.3.12) уравнения (7.3.10). На практике возникают сложности в применении данного метода из-за бесконечной суммы в (7.3.14).

Предположим, что модель динамики экономического ущерба линейна. Рассмотрим частный случай (7.3.6) – (7.3.7)

$$m^s_i(t) = h \cdot y_i(t-1) + r, \quad (7.3.15)$$

$$m^d_i(t) = -b \cdot y_i(t) + a, \quad (7.3.16)$$

a, b, h, r – некоторые константы, позволяющие установить взаимосвязь между $m^s_i(t)$, $m^d_i(t)$ и $y_i(t-1)$, $y_i(t)$ соответственно, и определяемые согласно (7.3.6) и экспериментальным данным.

Положим в (7.3.15), (7.3.16) $a = const$, $r = const$; $a > r > 0$, $h = const$, $b = const > 0$. Из соотношений (7.3.8), (7.3.11) – (7.3.12) находим

$$a - b \cdot y_i(t) = r + h \cdot y_i(t-1). \quad (7.3.17)$$

Перепишем (7.3.17) в виде:

$$y_i(t) = \alpha + \beta \cdot y_i(t-1), \quad (7.3.18)$$

где $\alpha = \frac{a-r}{b}$, $\beta = -\frac{h}{b}$.

Методом конечных разностей [15] находим:

$$y_i(t) = \alpha(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{t-1}) + \beta^t y_i(0).$$

Отсюда

$$y_i(t) = \alpha \frac{1 - \beta^t}{1 - \beta} + \beta^t y_i(0) = \frac{\alpha}{1 - \beta} + \left(y_i(0) - \frac{\alpha}{1 - \beta} \right) \beta^t. \quad (7.3.19)$$

Из (7.3.19) следует, что $y_i(t)$ будет иметь предел, если $|\beta| < 1$, т.е. при $|b| > h$.

Если $|\beta| = \left| -\frac{h}{b} \right| < 1$, то значения $y_i(t)$ стремятся к своему

равновесному значению: $y_i(t) \rightarrow \bar{y}_i$, $\bar{y}_i = \frac{a - r}{b + h}$.

Если $|\beta| = \left| -\frac{h}{b} \right| > 1$, то равновесие неустойчиво: $y_i(t) \rightarrow \infty$.

Если $|\beta| = \left| -\frac{h}{b} \right| = 1$, то значения $y_i(t)$ чередуются (колеблются)

вокруг равновесного значения \bar{y} .

Определив объем (массу) выброса вредного вещества $m^s_i(t)$, можно найти $y_i(t)$ согласно (7.3.1), (7.3.2), после чего из (7.3.19) легко определить значение $y_i(t+1)$, т.е. прогнозируемое значение экономического ущерба в момент $(t+1)$.

Для расчета y_i необходимо знать фактический объем выброса i -го вредного вещества m_i . На предприятиях в большинстве случаев отсутствует учет таких показателей. Поэтому для определения m_i контролирующей организации необходимо предварительно решить задачу, обратную задаче нахождения концентрации примеси в турбулентной диффузии, формулировка и решение которой (с помощью одношагового фильтра Калмана-Бьюси) приведены в работе [47].

Общая схема прогноза экономического ущерба, причиняемого окружающей среде выбросами примеси от промышленных предприятий, выглядит следующим образом.

1) Находим статистические данные массы выброшенного вредного вещества как минимум за последние три года. Если такие данные отсутствуют, то воспользуемся статистическими данными концентрации примеси исследуемого вредного вещества, а также данными о значениях основных параметров математической модели

рассеяния примеси в атмосфере и на их основе вычисляем значения m_i^d .

2) Для вычисления значений m_i^d на ЭВМ воспользуемся программным продуктом «МФКВ» на языке программирования MATLAB C/C++ Math Library 2.2, зарегистрированным в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ [28].

2) Определяем статистические данные сумм экономического ущерба, выплаченного в соответствующие года. Если такие данные отсутствуют, то соответствующие суммы рассчитываем с помощью формул (7.1.1), (7.1.2). Но часто возникает ситуация, когда вычисления по формулам (7.1.1), (7.1.2) невозможны из-за отсутствия некоторых используемых параметров. Такая ситуация возникает при вычислении прогноза экономического ущерба всегда. В этом случае следует воспользоваться паутинообразной моделью.

3) Находим приемлемые для предприятия значения массы выбросов m_i^s . Для этого из формулы (7.1.1) определяем такую массу выбросов, при которой сумма экономического ущерба осталась бы прежней.

4) Подставляя полученные значения в (7.3.15), (7.3.16), получаем параметры a, b, h, r .

5) Для нахождения прогнозируемой величины экономического ущерба, воспользуемся формулой (7.3.19). По формуле (7.3.16) можно также найти прогнозируемое значение m_i^d .

7.4. Пример прогноза экономического ущерба

Для иллюстрации предложенной методики прогноза величины экономического ущерба, нанесенного предприятием атмосфере, были взяты статистические данные о выбросах окислов азота (NO_x) из п. 7.3.

1. $\sigma = 1.8$, $a_{NO_x} = 1.5$, $\gamma'_{NO_x} = 450$ (руб / тыс. кг.),
 $\gamma''_{NO_x} = 1350$ (руб / тыс. кг.), $f = 1.58$. Согласно статистическим данным за 2010 и 2011 года коэффициенты инфляции $k_{2010} = 1,2$,

$k_{2011} = 1,5$, а значения массы выброшенных предприятием в атмосферу окислов азота – $m_{NO_x}^d(2010) = 6728$ (кг.)

2. Будем считать, что $m_{NO_x}^d(2011)$ еще не обнаружена, но известны результаты замеров концентрации примеси окисла азота, согласно которым с помощью программы «МФКВ» [28] легко находим $m_{NO_x}^d(2011) = 7434$ (кг.).

3. По формуле (7.3.2), находим:

$$y_{NO_x}(2009) = 13,045 \text{ (тыс. руб./тыс. кг.)},$$

$$y_{NO_x}(2010) = 23,459 \text{ (тыс. руб./тыс. кг.)},$$

$$y_{NO_x}(2011) = 40,147 \text{ (тыс. руб./тыс. кг.)}.$$

Согласно результатам вычислений из пп.1–2 и формуле (7.3.2), находим приемлемые для предприятия значения массы выбросов $m_{NO_x}^s(2010) = 5220$ (кг), $m_{NO_x}^s(2011) = 52729$ (кг), которые позволили бы ему в следующем 2011, 2012 году выплатить точно такую же сумму экономического ущерба, как и в прошлом 2010, 2011 году соответственно.

4. Подставив в формулы (7.3.4), (7.3.5) результаты вычислений, полученные в пп.2–4, однозначно определяем значения постоянных $h = 5.4$, $r = 2.6$, $b = 0.1$, $a = 3.7$.

5. На 2010 год данных о суммарных выбросах, инфляции и предельно допустимых выбросах пока нет. По формуле (7.3.7), подставив в нее найденные значения a , b , h , r и $y_{NO_x}(2011)$, определяем прогнозное значение экономического ущерба

$$y_{NO_x}(2012) = 45,070 \text{ (тыс. руб./тыс. кг.)},$$

причиненного автотранспортным предприятием в 2012 году. Затем, по формуле (7.3.5) и уже известным параметрам находим массу примеси $m_{NO_x}^d(2012) = 8215$ (кг.), которую выбросит предприятие в 2012 году.

Так как $\left| -\frac{h}{b} \right| = 54 > 1$, то $y_{NO_x}(t)$ будет постоянно расти,

что подтверждается статистическими данными. Однако реально значения $y_{NO_x}(t)$ не будут неограниченно возрастать, т.к. предприятие либо будет вынужденно поменять оборудование

на более экологичное (электромобили, автомобили евростандарта), а также перестанет увеличивать (найдет оптимальное) количество автотранспорта, в противном случае оно станет убыточным (в силу непомерных штрафов) и разорится.

Заключение к главе 7

В главе предложена методика оценки величины экономического ущерба, причиняемого окружающей среде выбросами промышленных предприятий загрязняющих как атмосферу, так и подстилающую поверхность. Методика основана на использовании паутинообразной модели динамики спроса-предложения на рынке товаров. Известные методики оценки такого ущерба располагают лишь возможностью его расчета в данный момент времени. Предлагаемая методика позволяет производить вычисления значений экономического ущерба как в данный момент времени, так и строить прогноз его значений на будущие моменты: на 3-5 лет вперед.

Полученные результаты могут быть использованы в научно-исследовательских организациях, осуществляющих лабораторный контроль влияния источников антропогенного воздействия на окружающую среду.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии были изложены следующие результаты, принадлежащие ее авторам.

1. Исследованы на корректность постановки краевые задачи, описывающие процесс рассеяния примеси в турбулентном пограничном слое, совокупность которых представляет математическую модель этого процесса.

2. В рамках указанной в 1. математической модели поставлены обратные задачи атмосферной диффузии: задачи определения мощности источника примеси, фоновой концентрации, местоположения источника примеси, обратная коэффициентная задача.

3. Приведены результаты исследования на разрешимость некоторых из поставленных обратных задач.

4. Предложены методы решения обратных задач о восстановлении мощности источника примеси и вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии с учетом случайных ошибок, основанные на использовании одношагового и многошагового фильтров Калмана – Бьюси.

5. Приведен комплекс программ («ОФКВ», «МФКВ», «VK»), в котором реализованы методы из 4.

6. Предложены алгоритмы прогноза значений мощности источника примеси, диффундирующей в турбулентной атмосфере и значений вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии.

7. Разработана математическая модель оценки экономического ущерба, причиняемого окружающей среде выбросами от промышленных предприятий.

8. Предложен алгоритм стохастического прогноза значений экономического ущерба, причиняемого воздушной среде на 2-3 года вперед.

Полученные результаты представляют собой основу для дальнейших научных исследований процесса рассеяния экологически вредных веществ в атмосфере.

Результаты проведенных исследований могут быть использованы (и частично уже используются, что подтверждается актами об их

внедрении) в научно–исследовательских организациях, осуществляющих лабораторный и инструментальный контроль источников антропогенного воздействия на окружающую среду, для:

1) определения количества вредных веществ, выбрасываемых в атмосферу стационарными источниками;

2) расчета суммарного экономического ущерба, наносимого земной поверхности выбросами экологически вредных веществ;

3) проведения оперативного мониторинга экологической ситуации в рассматриваемом регионе, возникающего в результате загрязнения атмосферы промышленными выбросами;

4) прогноза значений мощности источника примеси, вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии, экономического ущерба, причиняемого региону выбросами этой примеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алоян А. Е.* Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. - М.: Наука, 2008. – 415 с.
2. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: Учеб. Пособие. – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с.
3. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха. М.: ИЛ, 1962. – 512 с
4. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей / под ред. Ф. Т. М. Ньистадта и Х. Ван Допа. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – 352 с.
5. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003 – 614 с.
6. *Бабешко В. А., Гладской И. Б., Зарецкая М. В., Кособуцкая Е. В.* К проблеме оценки выбросов загрязняющих веществ источниками различных типов // ДАН. 1995. Т. 342. № 6. С. 835 – 838.
7. *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
8. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 632 с.
9. *Берлянд М. Е.* Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 448 с.
10. *Бызова Н. Л., Гаргер Е. К., Иванова В. Н.* Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 280 с.
11. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
12. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.
13. *Гантмахер Ф. Р.,* Теория матриц. – Москва: изд-во "Физматлит", 2004. – 576 с.
14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968. – 422 с.

15. *Годунов С. К., Рябенкий В. С.* Разностные схемы (введение в теорию) – М: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1977. – 440 с.
16. *Годяева Е. О. (Лоскутова Е. О.), Семенчин Е.А.* Обратная задача для плотности осадка, выпадающего на подстилающую поверхность от непрерывного точечного источника // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2006. – № 12. – С. 31 – 34.
17. *Дандорф Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Общая теория: пер. с англ. / Под ред. И с предисл. А.Г. Костюченко. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 896 с.
18. *Данилов-Данильян В. И.* Временная методика определения предотвращенного экологического ущерба. – М.: 1999.
19. *Дащенко А. Ф., Кириллов В. Х., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф.* MATLAB в инженерных и научных расчетах. – Одесса: Астропринт, 2003. – 214 с.
20. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
21. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
22. *Дьяконов В. С., Круглов В. В.* Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 280 с.
23. *Зилитникевич С. С.* Динамика пограничного слоя атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1970. – 292 с.
24. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. В. 3. С. 3 – 146.
25. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей. – Успехи математических наук, 1938. В. 5. – С. 5 – 41.
26. *Корн Г, Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
27. *Кузякина М. В.* Автоматическое восстановление и прогноз мощности источника примеси, загрязняющей атмосферу // Труды VII Всероссийской научной конференции молодых ученых и студентов, г. Анапа, 2010, Т. 1. – С. 41 – 43.

28. Кузякина М. В., Семенчин Е. А. Оценка интенсивности источника примеси с помощью многошагового фильтра Калмана-Бьюси. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010613713, 07.06.2010 г.

29. Кузякина М. В., Семенчин Е. А. Оценка интенсивности источника примеси с помощью одношагового фильтра Калмана-Бьюси. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009615253, 23.09.2009 г.

30. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.

31. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

32. Лоскутова Е. О. Прямые и обратные задачи расчета количества примеси, выпадающей на подстилающую поверхность: Дис. канд. физ.-мат. наук: 25.03.09 / Кубанский государственный университет. – Краснодар, 2009. – 144 с.

33. Лоскутова Е. О. Регистрация в ФГНУ «Государственном координационном центре информационных технологий» разработки, представленной в отраслевом фонде алгоритмов и программ: Электронный комплекс программ определения количества легкой и тяжелой примеси, выпадающей на подстилающую поверхность (DODS). Номер гос. регистрации: 9293. Дата регистрации: 14.11.2007 г.

34. Лоскутова Е. О. Оценка эколого-экономического ущерба от загрязнения атмосферы выбросами промышленных предприятий // Известия Российского государственного педагогического университета имени А. И. Герцена. Аспирантские тетради. – 2008. – № 35. – С. 75 – 82.

35. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.

36. Метеорология и атомная энергия / Под ред. Д. Х. Слейда. Л.: Гидрометеиздат, 1971. – 648 с.

37. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика Ч. 1. – М.: Наука, 1965. – 640 с.

38. *Москаленко А. П.* Экономика природопользования и охраны окружающей среды: Учеб. пособие. – М.: МарТ, 2003. – 224 с.
39. *Половко А. М., Бутусов П. Н.* MATLAB для студента. – СПб.:БХВ-Петербург, 2005. – 320 с.
40. *Приленко А. И., Ткаченко Д. С.* Фредгольмовость и корректная разрешимость обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №9. С. 1392 – 1401.
41. *Приленко А. И., Соловьев В. В.* Теорема разрешимости и метод Роте в обратных задачах для уравнения параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №11. С. 1971 – 1980.
42. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. – 496 с.
43. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
44. *Семенчин Е. А.* Аналитические решения краевых задач в математической модели атмосферной диффузии. – Ставрополь: СКИУУ, 1993. – 141 с.
45. *Семенчин Е. А., Ионисян А. С.* Об уточнении математической модели рассеяния примеси в атмосфере // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9. В. 2. С. 444 – 445.
46. *Семенчин Е. А., Кузякина М. В.* Методика восстановления мощности точечного источника примеси, диффундирующей в турбулентной атмосфере// Математическое моделирование. М., 2011, Т. 23, № 6. – С. 59 – 67.
47. *Семенчин Е. А., Кузякина М. В.* Методика расчета экономического ущерба, причиняемого воздушной среде выбросами легкой примеси от промышленных предприятий. // Труды Кубанского государственного аграрного университета, 2009, 2(17). – С. 34 – 39
48. *Семенчин Е. А., Кузякина М. В., Лоскутова Е. О.* Обратные задачи о мощности точечного источника в математической модели рассеяния примеси в атмосфере // Известия высших учебных заведений Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2010, 2(156). – С. 32 – 35.
49. *Семенчин Е. А., Кузякина М. В.* Паутинообразная модель динамики экономического ущерба, причиняемого выбросами от

промышленных предприятий // Вестник студенческого научного общества факультета математики и компьютерных наук Кубанского Государственного университета, 2010, В. 1. – С. 25– 28.

50. Семенчин Е. А., Кузякина М. В. Применение паутиной модели в мировой и внутригосударственной торговле // Экономика России в условиях глобализации и вступления в ВТО. Сборник. Краснодар, 2007 – С. 65 – 71.

51. Семенчин Е. А., Кузякина М. В. Применение фильтра Калмана-Бьюси к мониторингу распространения загрязнений в атмосфере // Актуальные проблемы экологии, экономики, социологии и пути их решения: Матер. XIV международной конференции, п. Шепси, 2008 , Т1. – С. 81 – 83

52. Семенчин Е. А., Кузякина М. В. Прогнозирование цен на Государственном унитарном предприятии Краснодарского края «Краснодарская оптовая торгово-заготовительная зообаза»// Инновационная концепция развития экономики Кубани: Материалы XV региональной межвузовской конференции молодых ученых, г.Краснодар, 2007.– С. 56 – 58.

53. Семенчин Е. А., Кузякина М. В. Прогноз значений мощности точечного источника примеси, диффундирующей в турбулентной атмосфере // Экологические системы и приборы, 2010 г., 10. – С.51-55.

54. Семенчин Е. А., Кузякина М. В. Прогноз экономического ущерба, причиняемого окружающей среде атмосферными примесями // Обозрение прикладной и промышленной математики: Тезисы XI Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике п.Сочи – п.Дагомыс, 2010, Т23, В1. – С. 123-124.

55. Семенчин Е. А. Кузякина М. В., Фильтрация шумов в конечно-разностной модели рассеяния примеси // Прикладная математика XXI века: Матер. VIII объединенной научной конференции. студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики, Краснодар, 2008 г. – С. 28 – 30

56. Семенчин Е. А., Кузякина М. В. Фильтрация шумов при решении обратной задачи для точечного источника примеси // Вестник Ставропольского Государственного университета, 2008, 57 – С. 5 – 8.

57. Семенчин Е. А., Кузякина М. В., Фильтрация шумов при решении обратной задачи для точечного источника примеси // Обзорение прикладной и промышленной математики: Тезисы X Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике п. Сочи – п. Дагомыс, 2009, Т. 17, В. 1. – С. 140 – 141

58. Семенчин Е.А. Методика расчета вертикальной составляющей коэффициента турбулентной диффузии / Е.А. Семенчин, М.В. Кузякина // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №08(62). С. 282 – 290. – Шифр Информрегистра: 0421000012\0188. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2010/08/pdf/22.pdf>, 0,562 у.п.л.

59. Сизиков В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений. Учебное пособие – СПб: СпецЛит, 1999. – 240 с.

60. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 142 с.

61. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.

62. Феллер В. Параболические дифференциальные уравнения и соответствующие им полугруппы преобразований. – Математика (сб. переводов), 1957, 1:4. – С. 103 – 153. (Feller W. The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations. – Ann. Math., 1952, v.55, p. 468 – 519.)

63. Феллер В. Одномерные диффузионные процессы. – Математика (сб. переводов), 1958, 2:2. – С. 119 – 146. (Feller W. Diffusion process in one dimension. – Trans. Am. Math. Soc., 1954, v. 77, p. 1 – 31.)

64. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

65. Черкасов И. Л. О преобразовании диффузионного процесса в винеровский. // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. В. 3.– С. 384 – 388.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МОНОГРАФИИ И ПОЯСНЕНИЯ К НИМ	9
ГЛАВА 1	
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ	21
1.1. Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии	21
1.1.1. Вывод полуэмпирического уравнения	21
1.1.2. Начальные и граничные условия	26
1.1.3. Способы задания коэффициентов	28
1.1.4. Описание функции источника	31
1.2. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах	33
1.3. Методы регуляризации некорректно поставленных задач	34
1.3.1. Метод Тихонова	35
1.3.2. Выбор параметра регуляризации методом невязки	36
1.3.3. Метод выбора квазиоптимального значения параметра регуляризации	37
1.3.4. Метод Лаврентьева	38
1.4. Оптимальная фильтрация помех, возникающих при численном решении системы линейных алгебраических уравнений	40
1.4.1. Одношаговая оптимальная фильтрация	40
1.4.2. Многошаговая оптимальная фильтрация	42
1.5. Оптимальный в среднеквадратическом смысле стохастический прогноз	43
Заключение к главе 1	44
ГЛАВА 2	
ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В РАМКАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРНОЙ ДИФФУЗИИ	46
2.1 Прямые задачи атмосферной диффузии	46
2.1.1. Полуэмпирическая модель	47
2.1.2. Гауссова модель	47
2.1.3. Модель рассеяния примеси, построенная линеаризацией уравнений Навье-Стокса	50
2.2 Обратные задачи атмосферной диффузии	52
2.2.1. Задача определения мощности источника примеси	53
2.2.2. Задача определения фоновой концентрации	55
2.2.3. Задача определения точечного источника примеси	56
2.2.4. Обратная коэффициентная задача	56
2.3. Постановка (выбор) граничных условий	57
Заключение к главе 2	62

ГЛАВА 3	
КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ	63
3.1. Разрешимость краевых задач	63
3.2. Корректность постановки задачи Коши.....	75
3.3. Корректность постановки первой краевой задачи.....	78
3.4. Корректность постановки третьей краевой задачи	79
3.5. Разрешимость некоторых обратных задач.....	81
Заключение к главе 3.....	87
ГЛАВА 4	
ВЕРОЯТНОСТНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ И	
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ	
ЗАДАЧ	88
4.1. Метод, основанный на использовании приближенных решений	
гауссовского вида	88
4.2. Метод, основанный на использовании решений, построенных методом	
преобразования координат	100
4.3. Методика численного решения задачи об источнике примеси.....	115
Заключение к главе 4.....	119
ГЛАВА 5	
ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ	
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАССЕЯНИЯ ПРИМЕСИ В	
АТМОСФЕРЕ МЕТОДАМИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ	
ФИЛЬТРАЦИИ.....	120
5.1. Оценка значений мощности источника примеси с помощью метода	
одношаговой фильтрации Калмана-Бьюси	120
5.2. Оценка значений мощности источника примеси с помощью метода	
многошаговой фильтрации Калмана-Бьюси.....	125
5.3. Оценка значений вертикальной составляющей коэффициента	
турбулентной диффузии.....	128
5.4. Реализация алгоритмов восстановления мощности источника примеси	
в пакете прикладных программ MATLAB	129
5.4.1. Программный продукт OFKB	130
5.4.2. Программный продукт MFKB	133
5.4.3. Программный продукт VK	136
5.5. Пример построения оценки мощности источника	139
Заключение к главе 5.....	142

ГЛАВА 6	
СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ	
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАССЕЙЯНИЯ ПРИМЕСИ В	
АТМОСФЕРЕ.....	143
6.1 Стохастический прогноз значений мощности источника примеси	143
6.2 Стохастический прогноз значений вертикальной составляющей	
коэффициента турбулентной диффузии	144
6.3 Пример прогноза значений мощности точечного источника примеси	146
Заключение к главе 6.....	147
ГЛАВА 7	
РАСЧЕТ ЭКОНОМИЧЕСКОГО УЩЕРБА, ПРИЧИНЯЕМОГО	
АТМОСФЕРЕ ВЫБРОШЕННЫМИ В НЕЕ ВРЕДНЫМИ	
ВЕЩЕСТВАМИ	148
7.1. Методы расчета основных экономических показателей	
природопользования.....	148
7.2. Реализация в среде MS Excel методов расчета экономического ущерба.....	151
7.3. Паутинообразная модель динамики экономического ущерба	154
7.4. Пример прогноза экономического ущерба.....	160
Заключение к главе 7	162
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	163
ЛИТЕРАТУРА.....	165

Научное издание

**Семенчин Евгений Андреевич
Кузякина Марина Викторовна**

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ
ЗАДАЧ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРНОЙ
ДИФФУЗИИ**

Монография

На обложке – фото М.В. Кузякиной «закат в станице Передовой», 07.01.2012 г.

Подписано в печать __.__.__. Формат 60×841/16

Гарнитура «Times». Уч.-изд. л. 11,0 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ № ____

Издательство физико-математической литературы
123182, г. Москва, ул. Щукинская, д. 12, к. 1

Издательско-полиграфический центр КубГУ
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149