

На правах рукописи



Ханазарян Артур Дереникович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ
ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ И СЛОИСТЫХ
ВОЛНОВОДАХ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

Специальность 1.1.8 — механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Краснодар — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Кубанский государственный университет»

Научный руководитель:

Голуб Михаил Владимирович
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
теории функций ФГБОУ ВО
«Кубанский государственный университет»

Официальные оппоненты:

Соловьев Аркадий Николаевич
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры
математики и физики, ГБОУВО РК
«Крымский инженерно-педагогический
университет имени Февзи Якубова»

Юров Виктор Олегович
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник отдела
дифференциальных уравнений, Южный
математический институт-филиал ФГБУН
Федерального научного центра
«Владикавказский научный центр
Российской академии наук»

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт проблем
механики им. А.Ю. Ишлинского Российской
академии наук (ИПМех РАН)

Защита состоится «22» ноября 2024 года в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.2.320.03 на базе ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, ауд. 231.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Кубанского государственного университета по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149 и на сайте <https://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>.

Автореферат разослан «__» сентября 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.320.03,
профессор, доктор физико-математических наук



М.В. Зарецкая

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

В последние десятилетия все большее применение находят метаматериалы (искусственно созданные композитные материалы с периодическим изменением свойств в одном или нескольких направлениях, превосходящие по характеристикам свойства отдельных компонент (*Kushwaha M. S. et al., 1993; Веселаго В.Г., 2011; Sumbatyan M.A., Remizov M.Y., 2019*)). Благодаря дизайну внутренней структуры упругие метаматериалы могут обладать необычными механическими свойствами, которых нет у традиционных материалов, такими как отрицательная рефракция, наличие полных и модовых запрещённых зон, направленное излучение, фокусировка, блокировка колебаний и др., с помощью которых можно управлять распространением упругих волн (*Wang Y.F. et al., 2024; Chen A. L. et al., 2022*). Упругие метаматериалы позволяют решать такие современные задачи, возникающие при совершенствовании методов ультразвуковой диагностики инженерных конструкций, как конвертация (преобразование) различных типов волн или фокусировка волновой энергии (*Krushynska et al., 2023*). Разработка новых типов “умных” ультразвуковых преобразователей с использованием оптимально подобранных метаматериалов является актуальным и перспективным направлением исследований. Такие устройства и структуры позволяют реализовывать высокоэффективное преобразование мод, направленную фокусировку, фильтрацию, многоканальное зондирование и т.д., что, в свою очередь, позволит повысить эффективность ультразвукового неразрушающего контроля.

На этапе разработки метаматериалов необходимо моделирование их динамического поведения. Для моделирования распространения упругих волн в композитных структурах разработан ряд полуаналитических численных методов: методы, использующие глобальную матрицу жесткости, метод матриц переноса, полуаналитический метод конечных элементов (ПАМКЭ) (англ. semi-analytical finite element method) (*Nelson R. B. et al., 1971; Bartoli I. et al., 2006*) и др. Среди подходов к моделированию распространения и рассеяния волн в многослойных структурах с внутренними неоднородностями можно выделить интегральный подход и метод граничных интегральных уравнений, в частности, активно развиваемый уже несколько десятилетий южнороссийской школой механики (*Ворович И. И. и др., 1974; Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф., 1989; Глушков Е. В. и Глушкова Н. В., 2017*). В рамках интегрального подхода решение представляется через поверхностные интегралы, содержащие фундаментальные решения для всего многослойного волновода, что роднит его с ПАМКЭ и предоставляет ряд преимуществ перед прямыми численными методами. Полуаналитическая природа подхода позволяет проводить не только численный, но также асимптотический и параметрический анализ (*Айзикович С. М. и др., 2009; Ватульян А. О., Юров В. О., 2020*). Кроме того, полуаналитические методы позволяют эффективно решать обратные задачи (*Ватульян А. О., 2007; Ватульян А. О., Соловьев А. Н., 2008; Shifrin E. I., Lebedev I. M., 2020*).

Для моделирования структур с неоднородностями и дефектами сложной формы широко используются метод конечных элементов (МКЭ) (*Наседкин А.В., и др., 2014;*

Соловьев А.Н. и др., 2014; Левин В. А., 2015) или метод граничных элементов (МГЭ) (*Баженов В. Г., Игумнов Л.А. и др., 2008*). Все большее применение находит метод конечных элементов высокого порядка точности (МКЭ ВПТ), называемый также методом спектральных конечных элементов (spectral finite element method или SFEM) или просто методом спектральных элементов (МСЭ) (*Komatitsch D. et al., 1999; Бубенчиков А. М. и др., 2008; Konovalov D. A., Vershinin A. V., Zingerman K. M., Levin V. A., 2017*).

Для решения волновых задач в сложных составных структурах по-прежнему актуальна разработка гибридных подходов, которые сочетают преимущества прямых численных и полуаналитических методов (*Lisitsa V., Tcheverda V., Botter C., 2016; Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А., 2018; Golub M. V., Shpak A. N., 2019*). Основным преимуществом таких гибридных методов является возможность напрямую определять некоторые волновые характеристики моделируемых структур (например, амплитуды бегущих волн). В настоящее время является востребованной реализация вычислительных гибридных схем для моделирования волновых колебаний упругих метаматериалов и волноводных структур с присоединенными элементами, которые бы опирались на полуаналитические методы.

Таким образом, задача разработки новых эффективных математических и компьютерных моделей для описания волновых процессов в сложных составных периодических структурах, включающих области с неоднородностями разных типов и форм, а также присоединенные к ним протяженные слоистые волноводы, является актуальной. Такие модели позволяют разрабатывать новые конфигурации упругих метаматериалов и совершенствовать методы ультразвукового неразрушающего контроля.

Основной **целью** работы является теоретическое и экспериментальное исследование распространения волн в упругих метаматериалах и слоистых волноводах с присоединенными элементами, а также разработка соответствующих механико-математических моделей, их реализация в виде комплексов компьютерных программ и экспериментальная верификация.

Для достижения цели были сформулированы следующие **задачи**:

- 1) разработка эффективных механико-математических и компьютерных моделей, описывающих распространение упругих волн в составных структурах с присоединенными элементами и упругих метаматериалах;
- 2) подготовка экспериментальных образцов упругих метаматериалов и проведение экспериментов;
- 3) экспериментальная верификация разработанных моделей и подтверждение возможности формирования запрещенных зон;
- 4) теоретико-экспериментальный анализ распространения волн в упругих метаматериалах.

Научная новизна работы определяется следующими основными результатами:

1. Разработана новая полуаналитическая гибридная вычислительная схема, а также на ее основе создана компьютерная модель, описывающая динамическое поведение протяженных слоистых упругих структур с присоединенными элементами.
2. Разработаны механико-математическая и компьютерная модель на основе новой полуаналитической гибридной вычислительной схемы для анализа запрещенных зон и собственных колебаний упругих метаматериалов с протяженными элементами.
3. Были рассмотрены новые типы упругих метаматериалов: метаматериалы с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость, и метаматериалы в виде пластины с массивом полостей. Впервые проведен теоретико-экспериментальный анализ влияния конфигурации ячеек упругих метаматериалов с полостями на распространение волн и формирование запрещенных и разрешенных зон. Экспериментально подтверждена возможность формирования запрещенных зон для новых типов упругих метаматериалов с полостями.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов определяются возможностью их применения для решения современных задач неразрушающего ультразвукового контроля, а также при математическом моделировании и проектировании новых типов упругих метаматериалов и систем мониторинга конструкций.

На разных этапах выполнения диссертационное исследование было поддержано грантами Российского научного фонда 22-11-00261, государственными заданиями Минобрнауки России FZEN-2020-0017 и FZEN-2024-0003, Российского фонда фундаментальных исследований 21-51-53014-ГФЕН_а, 19-41-230012 р_а и 18-501-12069-ННИО_а, Кубанского научного фонда МФИ-20.1/118, а также грантом Президента Российской Федерации МК-470.2020.1.

Методология и методы исследования. Волновые поля в протяженных многослойных волноводах описываются с помощью ПАМКЭ, который основан на применении прямого преобразования Фурье и последующей дискретизации в поперечном сечении волновода с помощью МКЭ ВПТ. Такой подход позволяет не только эффективно рассчитывать волновые поля, но и проводить модальный анализ, используя явное представление для перемещений в виде суперпозиции нормальных мод. Амплитуды отдельных мод для волновода конечной длины находятся из граничных условий на торцах волновода с помощью проекционных методов Галёркина или коллокаций. Структуры с неоднородностями различных типов и форм моделируются с помощью МКЭ ВПТ. Для сопряжения решений, полученных с помощью МКЭ ВПТ и ПАМКЭ, используются проекционные методы Галёркина или коллокаций. Распространение упругих волн в периодических составных структурах описывается с использованием теории Флоке-Ляпунова.

На защиту выносятся:

- 1) полуаналитическая гибридная вычислительная схема и разработанная на ее основе компьютерная модель, описывающая динамическое поведение слоистого волновода с присоединенными элементами;
- 2) механико-математическая модель, описывающая динамическое поведение периодических упругих структур с ячейками, состоящими из слоистого волновода и присоединенных элементов произвольной формы;
- 3) полуаналитическая гибридная вычислительная схема и разработанная на ее основе компьютерная модель, описывающая распространение упругих волн в периодических структурах с ячейками, состоящими из слоистого волновода и присоединенных элементов;
- 4) результаты численного анализа влияния параметров ячеек упругих метаматериалов на распространение волн;
- 5) результаты экспериментальных исследований влияния параметров упругих слоистых метаматериалов с полосовыми полостями на формирование запрещенных зон, включая экспериментальное подтверждение возможности формирования запрещенных зон.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых динамических задач теории упругости, применением строгих математических методов, сравнением результатов с данными, полученными экспериментально или иными методами, а также сопоставлением с известными результатами других авторов.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертации, были представлены в период с 2020 г. по 2024 г. на 19 международных и всероссийских конференциях. В их числе: International Conference Days on Diffraction (г. Санкт-Петербург, 2020 и 2024 гг.), Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения МИКМУС (г. Москва, 2020), International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (Kitakyushu, Япония, 2021 г.; Surabaya, Индонезия, 2023 г.), Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2021—2024), Международная школа-конференция «Комплексный анализ и его приложения» (г. Геленджик, 2021), Третья Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа - 2021» (г. Уфа, 2021 г.), Четвёртая международная научная конференция «Осенние математические чтения в Адыгее» (г. Майкоп, 2021 г.), Всероссийская научно-практическая конференция "Прикладная математика и информатика в современном мире" (г. Краснодар, 2022 г.), XIII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Санкт-Петербург, 2023 г.), I Всероссийская научно-практическая конфе-

ренция "Математические методы и модели в решении прикладных задач" (г. Краснодар, 2023 г.), XIX Всероссийская научно-техническая конференция Приборостроение в XXI веке Интеграция науки, образования и производства (г. Ижевск, 2023 г.), Third International Conference "Modern Problems in Modeling Materials for Mechanical, Medical and Biological Applications" (г. Ростов-на-Дону, 2023 г.), XXI Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2023 г.), 51 школа-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева (г. Великий Новгород, 2024 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертационного исследования отражены в 24 работах, из которых 6 статей [1-6] опубликовано в рецензируемых изданиях из списка ВАК и индексируемых в Web of Science или Scopus и 18 работ – в сборниках материалов и трудов конференций.

Структура и объем работы. Диссертационная работа общим объёмом 125 страниц имеет следующую структуру: введение, четыре главы, заключение и список литературы, включающий 123 источника. Работа содержит 48 рисунков и 5 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** диссертационной работы приведен обзор результатов по разработке новых акустических или упругих метаматериалов и современных численных методов для решения динамических задач теории упругости, а также дана общая характеристика работы, формулируются цель и задачи, научная новизна, основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** изложены необходимые теоретические основы динамической теории упругости. В **разделе 1.1** приводятся постановки краевых задач для упругих тел, рассматриваются обобщенные (вариационные) постановки задач для установившихся гармонических плоских и антиплоских колебаний, которые используются при реализации МКЭ ВПТ и ПАМКЭ. Для записи вариационной формулировки вводятся пространства тестовых или пробных функций. Используя тестовые функции v_i и применяя первую формулу Грина, вариационная формулировка уравнений движения для установившихся гармонических плоских колебаний с круговой частотой ω в среде с плотностью ρ переписывается в слабой постановке:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial V} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) n_j d\ell - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dV + \rho \omega^2 \sum_{i=1}^2 \int_V u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) dV = 0. \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} и вектора перемещений u_k связаны соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

где C_{ijkl} – тензор упругих постоянных. В *разделе 1.2* приводятся граничные условия, необходимые для постановки рассматриваемых задач в соответствии с теорией Флоке-Ляпунова для упругих метаматериалов.

Во **второй главе** рассматриваются численные методы решения волновых задач об установившихся гармонических плоских и антиплоских колебаниях упругих структур и многослойных волноводов конечных размеров. В *разделе 2.1* описывается применение метода матриц переноса и МКЭ ВПТ для моделирования распространения упругих плоских волн в слоистых периодических структурах. В случае МКЭ ВПТ дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω и волновое число волн Флоке-Блоха ζ , распространяющихся в периодической структуре с бесконечным числом слоев под углом θ к межфазным границам, имеет вид:

$$\det(\mathbf{B}(\zeta, \theta) - \lambda_n \mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{B}(\zeta, \theta) = \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(\zeta, \theta) \widehat{\mathbf{A}}(\zeta, \theta), \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n},$$

где $\widehat{\mathbf{A}}(\zeta, \theta)$ – матрица жесткости, а $\widehat{\mathbf{M}}(\zeta, \theta)$ – матрица масс.

В *разделе 2.2* рассматриваются антиплоские установившиеся гармонические колебания составной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. При этом область $\Omega_2 = \{0 \leq x_1 \leq d_2, h_3 \leq x_2 \leq h_3 + h_2\}$ представляет собой протяженный волновод конечной длины толщиной h_2 , а присоединенная область Ω_1 может быть произвольной формы и имеет общую границу S_c с областью Ω_2 . Колебания описываются уравнениями Гельмгольца, и решения отыскиваются с помощью МКЭ ВПТ и ПАМКЭ соответственно для Ω_1 и Ω_2 . В рамках МКЭ ВПТ решение в каждом элементе с номером (l_1, l_2) в области Ω_1 представляется в виде разложения по интерполяционным полиномам Лагранжа $C^{i_k}(x_k)$ на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто степени N (*Ostachowicz W. et al., 2012*). Интерполяционные полиномы $C^{i_k}(x_k)$, задаваемые в локальной системе координат $(\xi_1^{l_1}, \xi_2^{l_2})$, обеспечивают экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения к точному, а каждый номер i_k соответствует одному из узлов Гаусса–Лежандра–Лобатто ($k = \overline{1, 2}$). Согласно ПАМКЭ решение в области Ω_2 раскладывается по отдельным модам, характеристики которых находятся из решения дисперсионного уравнения, составленного с использованием МКЭ ВПТ, а коэффициенты разложения или амплитуды вычисляются из условий на торцах волновода с помощью проекционных методов Галёркина или коллокаций.

В *разделе 2.3* рассматриваются задачи двух типов об установившихся плоских гармонических колебаниях составной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, как и в случае антиплоской задачи. Внешняя граница $S = \partial\Omega$ области Ω разбивается на несколько частей $S = S_l \cup S_r \cup S_\sigma$ в зависимости от типа граничных условий, см. рисунок 1. В случае задачи первого типа на боковых границах задаются перемещения (условие жесткого защемления на S_l и ненулевые значения на S_r):

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_l, \quad (3)$$

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) = u_0, \quad \mathbf{x} \in S_r, \quad u_0 \neq 0. \quad (4)$$

В случае задачи второго типа на границах S_l и S_r задаются нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_{11}(\mathbf{x}) = \sigma_{21}(\mathbf{x}) = \tau_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_i, \quad i \in \{l, r\}. \quad (5)$$

Граница S_σ предполагается свободной от нормальных и касательных напряжений

$$\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \quad (6)$$

а на внутренней границе $S_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$ предполагается идеальный контакт, что задается через условия непрерывности перемещений и напряжений

$$[[u(\mathbf{x})]] = 0, \quad [[\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (7)$$

Здесь двойные квадратные скобки обозначают скачок функции.

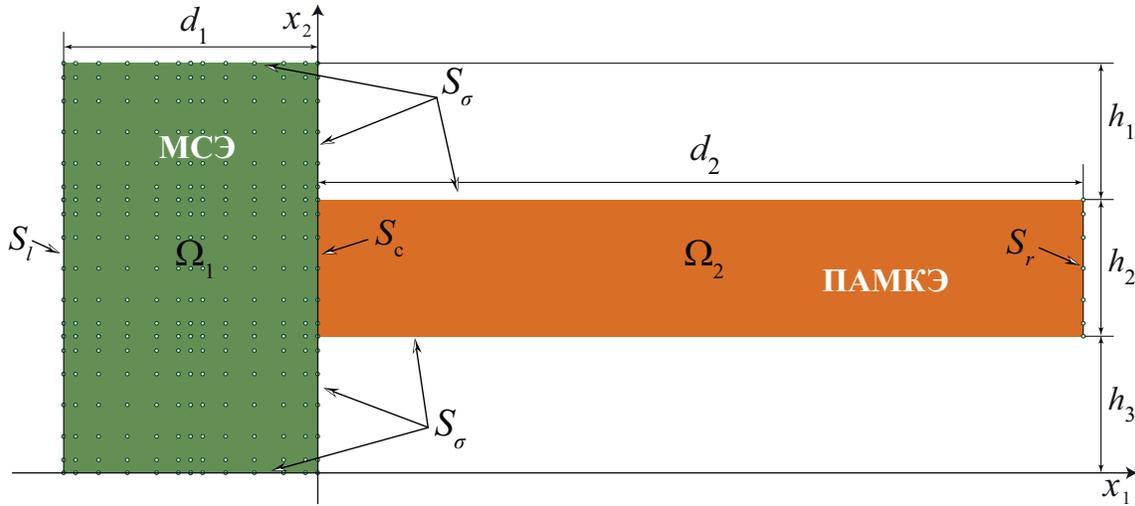


Рисунок 1 – Геометрия задач первого и второго типа для плоских колебаний в случае прямоугольной области Ω_1

Пример геометрии для задач первого и второго типа приведен на рисунке 1. Как и для антиплоской задачи, для построения решения с применением гибридной схемы необходимо сначала рассмотреть решение двух вспомогательных задач для областей Ω_1 и Ω_2 , в которых неизвестная функция перемещений или напряжений на общей границе S_c предполагается известной, и решение строится соответственно с помощью МКЭ ВПТ и ПАМКЭ. Таким образом, на внутренней границе S_c вводятся вспомогательные функции, нахождение которых обеспечивает гибридная схема. В случае задачи первого типа неизвестными предполагаются перемещения

$$u_k^{(1)}(\mathbf{x}) = u_k^{(2)}(\mathbf{x}) = q_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_c, \quad (8)$$

а для задачи второго типа касательные и нормальные напряжения

$$\sigma_{k1}^{(1)}(\mathbf{x}) = \sigma_{k1}^{(2)}(\mathbf{x}) = q_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_c, \quad (9)$$

где верхний индекс (p) обозначает принадлежность к области Ω_p , $p = 1, 2$.

Для присоединенной области Ω_1 рассматривается слабая постановка (1) вместе с граничными условиями на тех границах, которые относятся к Ω_1 , и условием на S_c . Производится разбиение на прямоугольные элементы (M_1 вдоль оси x_1 и на $M_2^{(1)}$ по оси x_2). В рамках МКЭ ВПТ решение $u_k^{(1)}(\mathbf{x})$ в области Ω_1 можно представить как

$$u_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2^{(1)}} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} y_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad k = 1, 2. \quad (10)$$

Для дискретизации уравнения (1) применяется метод Бубнова–Галёркина и формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно вектора неизвестных \mathbf{y} , составленного из коэффициентов разложения (10):

$$\sum_{I_1=1}^{2G_1} \left(A_{I_1' I_1} - \omega^2 M_{I_1' I_1} \right) y^{I_1} = t^{I_1'}.$$

Здесь \mathbf{A} – матрица жесткости, \mathbf{M} – матрица масс, $t^{I_1'}$ – компоненты вектора-столбца правой части, отличные от нуля, за исключением тех, что соответствуют узлам на границе S_c , G_1 – это общее количество узлов для каждой компоненты вектора перемещений, а функция $I_1(k, l_1, l_2, i_1, i_2)$ используется для индексации узлов. В случае задачи первого типа условие (6) обеспечивает нулевой вклад контурного интеграла в (1), тогда как для выполнения условия (3) необходимо изменить соответствующие строки в матрицах \mathbf{M} и \mathbf{A} .

Для волновода конечной длины Ω_2 используется слабая постановка (1) с граничными условиями на тех границах, которые относятся к Ω_2 , и условием на S_c . При подстановке (2) в (1) и применении прямого преобразования Фурье по x_1 с параметром α согласно ПАМКЭ уравнение (1) рассматривается уже относительно преобразования Фурье $U_k(\alpha, x_2)$ перемещений $u_k^{(2)}(x_1, x_2)$. Имея в виду условия непрерывности на границе S_c , Фурье-символ $U_k(\alpha, x_2)$ и вспомогательную функцию $q_k(x_2)$ целесообразно разложить тем же базисным функциям, что и перемещения в присоединенной области Ω_1 (разбиение на $M_2^{(2)}$ линейных элементов вдоль оси Ox_2):

$$U_k(\alpha, x_2) = \sum_{l=1}^{M_2^{(2)}} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls}(\alpha) C^s(\xi^l), \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

$$q_k(x_2) = \sum_{r=1}^{M_2^{(2)}} \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_k^{rj} C^j(\xi^r), \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Используя метод Бубнова–Галёркина, а также условие (6) в уравнении (1) после применения преобразования Фурье для перемещений, формируется СЛАУ относительно

вектора неизвестных $\boldsymbol{\beta}$, составленного из коэффициентов разложения (11):

$$\sum_{I_2=1}^{2G_2} \left(-K_{I_2 I_2}^0 - i\alpha K_{I_2 I_2}^1 - \alpha^2 K_{I_2 I_2}^2 + \omega^2 \mathcal{M}_{I_2 I_2} \right) \beta^{I_2} = 0, \quad (13)$$

где \mathbf{K}^0 , \mathbf{K}^1 , \mathbf{K}^2 – матрицы жесткости, \mathcal{M} – матрица масс, G_2 – это общее количество узлов для каждой компоненты Фурье-символа $U_k(\alpha, x_2)$ и вспомогательной функции $q_k(x_2)$, а $I_2(k, l, s)$ используется для индексации узлов в поперечном сечении волновода. Уравнение (13) соответствует квадратичной задаче на собственные значения относительно α , поэтому необходимо рассмотреть эквивалентную систему относительно вектора неизвестных $\mathbf{b} = \{\boldsymbol{\beta}, i\alpha\boldsymbol{\beta}\}^T$:

$$(\mathbf{B} - i\alpha \mathbf{E}_{4G_2 \times 4G_2}) \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_{2G_2 \times 2G_2} \\ (\mathbf{K}^2)^{-1}(\mathbf{K}^0 - \omega^2 \mathcal{M}) & (\mathbf{K}^2)^{-1} \mathbf{K}^1 \end{pmatrix},$$

где \mathbf{E} – единичная матрица соответствующей размерности. Тогда характеристическое (дисперсионное) уравнение, связывающее частоту ω и волновое число α может быть записано следующим образом:

$$\det(\mathbf{B}(\omega) - i\alpha \mathbf{E}) = 0. \quad (14)$$

Полученные при решении задачи (14) собственные числа α_n^m и собственные вектора $\boldsymbol{\beta}_n^m$ используются для построения решения в протяженном волноводе Ω_2 :

$$u_k^{(2)}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{2G_2} c_n^m U_k(\alpha_n^m, x_2, \beta_{n;k}^m) e^{i\alpha_n^m(x_1 - x_2)}, \quad k = 1, 2, \quad (15)$$

где $x_1^1 = 0$, $x_1^2 = d_2$. При численной реализации собственные значения α_n^m и соответствующие им вектора $\boldsymbol{\beta}_n^m$ сортируются таким образом, что с ростом n чисто вещественные собственные значения уменьшаются ($|\alpha_{n+1}^m| \leq |\alpha_n^m|$), а мнимая часть комплекснозначных увеличивается ($|\text{Im}(\alpha_{n+1}^m)| \geq |\text{Im}(\alpha_n^m)|$). При этом для численной устойчивости для собственных значений с ненулевой мнимой частью учитываются условия $\text{Im}(\alpha_n^1) < 0$ и $\text{Im}(\alpha_n^2) > 0$.

В *разделе 2.4* кратко описана схема построения общего решения в упругом волноводе конечной толщины виде суперпозиции нормальных мод с помощью интегрального подхода (Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф., 1989). Расчитанные с помощью ПАМКЭ волновые числа α для упругого слоя из алюминия толщиной $h_2 = 1$ мм на частоте $f = 10$ МГц сравниваются с аналогичными расчетами, полученными с помощью интегрального подхода (ИП), см. таблицу 1, где также приведена относительная погрешность

$$\varepsilon = |\alpha_{\text{ИП}} - \alpha_{\text{ПАМКЭ}}| / |\alpha_{\text{ПАМКЭ}}| \times 100.$$

Таблица 1 – Значения волновых чисел для упругого слоя из алюминия толщиной 1 мм при различных параметрах спектральных элементов на частоте $f = 10$ МГц

Спектральные элементы	$N = 3,$ $M_2^{(2)} = 1,$ $G_2 = 4$	$N = 5,$ $M_2^{(2)} = 1,$ $G_2 = 6$	$N = 13,$ $M_2^{(2)} = 1,$ $G_2 = 14$	$N = 5,$ $M_2^{(2)} = 2,$ $G_2 = 11$	$N = 4,$ $M_2^{(2)} = 5,$ $G_2 = 21$	$N = 6,$ $M_2^{(2)} = 6,$ $G_2 = 37$
Волновое число α_1^1 , мм ⁻¹ моды A0						
ИП	21,6522					
ПАМКЭ	20,4597	21,1951	21,6522	21,5717	21,6427	21,6522
ε , %	5,83	2,16	$1,18 \cdot 10^{-5}$	0,37	0,04	$7,62 \cdot 10^{-6}$
Волновое число α_2^1 , мм ⁻¹ моды S0						
ИП	21,6429					
ПАМКЭ	20,405	21,0058	21,6429	21,5614	21,6333	21,6429
ε , %	6,07	3,03	$3,25 \cdot 10^{-6}$	0,38	0,04	$7,67 \cdot 10^{-6}$

Таблица 1 демонстрирует хорошее совпадение волновых чисел фундаментальных мод A0 и S0 на частоте $f = 10$ МГц, рассчитанных с помощью интегрального подхода и ПАМКЭ при достаточно высоком порядке интерполяционных полиномов ($N = 13$).

В **третьей главе** описывается гибридная вычислительная схема решения волновых задач на основе МКЭ ВПТ и ПАМКЭ, во многом опираясь на результаты, полученные в разделе 2.3. Важным преимуществом такого гибридного подхода, помимо экономии вычислительных ресурсов, является возможность напрямую вычислять амплитуды распространяющихся в волноводе упругих бегущих волн с помощью ПАМКЭ. Кроме того, такая гибридная вычислительная схема позволяет моделировать дифракцию набегающих упругих волн путем задания значений амплитуд отдельных бегущих волн.

В **разделе 3.1** приводится гибридная схема для упругого волновода конечной длины с одним присоединенным элементом в антиплоской и плоской постановке для рассматриваемых задач двух типов. В случае задачи первого типа для построения решения во всей составной области Ω условие непрерывности перемещений (7) приводит к изменению строк матриц \mathbf{A} и \mathbf{M} , соответствующих узлам на границе S_c в случае МКЭ ВПТ, и дополнительно к формированию матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ размера $2G_1 \times 2G_2$. Для выполнения граничных условий в области Ω_2 можно применить метод Галёркина или метод коллокаций. Для удобства далее рассматриваются вектора $\mathbf{c}^\pm = \{c_1^\pm, \dots, c_{2G_2}^\pm\}^T$, составленные из амплитуд бегущих волн в (15), распространяющихся в направлении оси Ox_1 и ему противоположном (соответственно обозначенные знаками “+” и “-”).

Подставляя (15) и (12) в (8) на S_c формируются матрицы \mathbf{B}_u^+ , \mathbf{B}_u^- и $\hat{\mathbf{B}}_u$. Подставляя (15) в (4) на S_r формируется матрицы \mathbf{G}_u^+ , \mathbf{G}_u^- и вектор-столбец \mathbf{g} , а при подстановке (10) и (15) в условие непрерывности напряжений (7) на S_c формируются

матрицы $\mathbf{B}_\tau, \mathbf{B}_\tau^+, \mathbf{B}_\tau^-$. В результате для получения решения в области Ω формируется общая СЛАУ относительно векторов $\mathbf{y}, \mathbf{c}^\pm, \boldsymbol{\gamma}$, составленных из коэффициентов разложений $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}$ и q_k соответственно:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} - \hat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_u^+ \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_u^- \mathbf{c}^- - \hat{\mathbf{B}}_u \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_\tau \mathbf{y} - \mathbf{B}_\tau^+ \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_\tau^- \mathbf{c}^- &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}_u^+ \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_u^- \mathbf{c}^- &= \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (16)$$

В *разделе 3.2* описываются необходимые модификации гибридной вычислительной схемы (16) для моделирования дифракции бегущей волны на присоединенном элементе Ω_1 . Так как при падении бегущей волны, распространяющейся в направлении противоположном оси Ox_1 , граница S_r отсутствует, а амплитуды прочих волн, распространяющихся в том же направлении, предполагаются известными, то в этом случае используются только первые три уравнения в (16), а вектор \mathbf{c}^- предполагается заданным.

В *разделе 3.3* рассматривается обобщение разработанной гибридной схемы на случай плоских установившихся гармонических колебаний периодической структуры, ячейка которой представляется в виде составной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Пример геометрии задачи, рассматриваемой в этом разделе, изображен на рисунке 2. Пере-

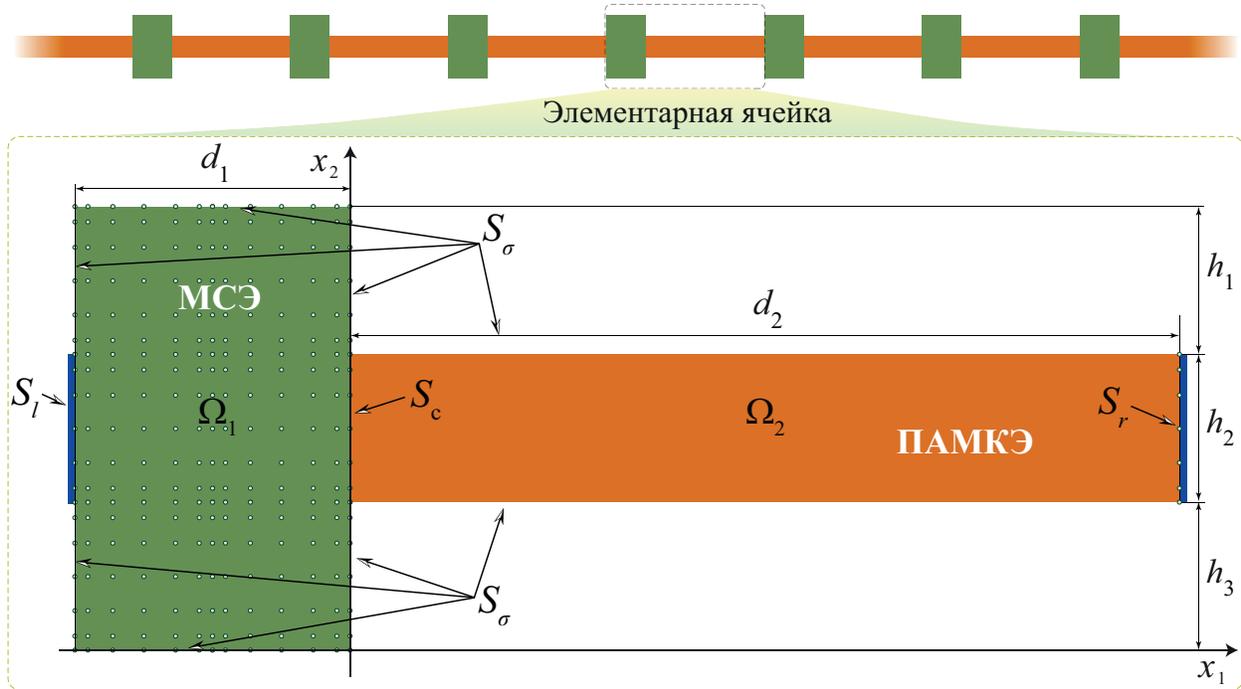


Рисунок 2 – Геометрия ячейки упругого метаматериала в случае прямоугольной области Ω_1

щения, а также нормальные и касательные напряжения на границах S_l и S_r связаны

периодическими граничными условиями Флоке-Блоха:

$$\begin{aligned} u_k^{(2)}(d_2, x_2) &= u_k^{(1)}(-d_1, x_2)e^{-i\zeta(d_1+d_2)}, & k = 1, 2, & \quad h_3 \leq x_2 \leq h_2 + h_3, \\ \sigma_{k1}^{(2)}(d_2, x_2) &= \sigma_{k1}^{(1)}(-d_1, x_2)e^{-i\zeta(d_1+d_2)}, & k = 1, 2, & \quad h_3 \leq x_2 \leq h_2 + h_3, \end{aligned} \quad (17)$$

где ζ – волновое число. На границе S_l для определения касательных и нормальных напряжений вводится вспомогательная вектор-функция

$$\sigma_{k1}^{(1)}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_l. \quad (18)$$

Остальные граничные условия вводятся аналогично схеме, использующейся при решении задачи второго типа. Вспомогательную функцию $f_k(x_2)$ также целесообразно разложить по тем же самым базисным функциям, что используются в МКЭ ВПТ:

$$f_k(x_2) = \sum_{I_2=1}^{2G_2} \eta^{I_2} C^{j_2}(\xi^{r_2}), \quad k = 1, 2. \quad (19)$$

Для периодической структуры, как и для задачи второго типа, используются условия (6) и (18), что позволяет напрямую использовать матрицы \mathbf{A} и \mathbf{M} . В то же время, контурный интеграл в (1) становится отличным от нуля, что в свою очередь приводит к формированию матриц $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$ размера $2G_1 \times 2G_2$, элементы которых равны нулю, за исключением тех, что относятся к узлам на границе S_c и S_l соответственно. Далее применяется метод Галёркина или метод коллокаций так, что подстановка (10), (15) и (19) в условия (17) на границах S_l и S_r , записанные относительно напряжений и перемещений, приводит к формированию матриц \mathbf{G}_τ^+ , \mathbf{G}_τ^- , $\widetilde{\mathbf{B}}_\tau$ и \mathbf{D}_u , \mathbf{D}_u^+ , \mathbf{D}_u^- соответственно. На S_c подстановка (15) и (12) в (9) приводит к формированию матриц \mathbf{B}_τ^+ , \mathbf{B}_τ^- , $\widehat{\mathbf{B}}_\tau$, а при подстановке (10) и (15) в условие непрерывности перемещений (7) формируются матрицы \mathbf{B}_u , \mathbf{B}_u^+ , \mathbf{B}_u^- . В результате для периодической структуры с ячейкой Ω формируется СЛАУ относительно векторов \mathbf{y} , \mathbf{c}^\pm , $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}$, составленных из коэффициентов разложений $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, q_k и f_k соответственно:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} + \widehat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} - \widetilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_\tau^+ \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_\tau^- \mathbf{c}^- - \widehat{\mathbf{B}}_\tau \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}_\tau^+ \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_\tau^- \mathbf{c}^- - e^{-i\zeta(d_1+d_2)} \widetilde{\mathbf{B}}_\tau \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_u \mathbf{y} - \mathbf{B}_u^+ \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_u^- \mathbf{c}^- &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{D}_u \mathbf{y} - e^{i\zeta(d_1+d_2)} (\mathbf{D}_u^+ \mathbf{c}^+ + \mathbf{D}_u^- \mathbf{c}^-) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Эту систему можно свести к СЛАУ относительно коэффициентов разложения $\mathbf{c} = \{c_1^+, \dots, c_{2G_2}^+, c_1^-, \dots, c_{2G_2}^-\}$ в виде (15):

$$(\mathbf{B}(\omega) - \lambda \mathbf{E}_{4G_2 \times 4G_2}) \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{B}(\omega) = \mathbf{J}^{-1}(\omega)\mathbf{H}(\omega), \quad \lambda = e^{-i\zeta(d_1+d_2)},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_u(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}\widehat{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{B}}_\tau)^{-1}(\mathbf{B}_\tau^+ + \mathbf{B}_\tau^-) + (\mathbf{B}_u^+ + \mathbf{B}_u^-) \\ -\mathbf{D}_u(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}\widehat{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{B}}_\tau)^{-1}(\mathbf{B}_\tau^+ + \mathbf{B}_\tau^-) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_u(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{B}}_\tau)^{-1}(\mathbf{G}_\tau^+ + \mathbf{G}_\tau^-) \\ (\mathbf{D}_u^+ + \mathbf{D}_u^-) - \mathbf{D}_u(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{B}}_\tau)^{-1}(\mathbf{G}_\tau^+ + \mathbf{G}_\tau^-) \end{pmatrix}.$$

После нахождения решения задачи о нахождении собственных значений λ и векторов \mathbf{c} для (20) можно построить решение в ячейке Ω , воспользовавшись соотношением:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}\widehat{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{B}}_\tau)^{-1}(\mathbf{B}_\tau^+ + \mathbf{B}_\tau^-) + \\ + e^{i\zeta(d_1+d_2)}(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{B}}_\tau)^{-1}(\mathbf{G}_\tau^+ + \mathbf{G}_\tau^-) \end{pmatrix} \mathbf{c}.$$

Четвертая глава посвящена численному и экспериментальному анализу волновых процессов в рассматриваемых структурах. В *разделе 4.1* рассматривается распространение сдвиговых волн в периодической структуре с двухслойной ячейкой, составленной из различных эластомеров. Согласно модели (*Li J., Slesarenko V., Galich P. I., Rudykh S., 2018*) при заданной степени растяжения s компоненты тензора упругих модулей эластомера C_{ijkl} могут быть выражены через его константы Ляме до растяжения (λ и μ) и s следующим образом:

$$C_{1111} = \lambda + (1 + 1/s)\mu, \quad C_{1212} = s^2\mu, \quad C_{2121} = \mu/s;$$

$$C_{1221} = C_{2112} = \mu, \quad C_{1122} = C_{2211} = \lambda, \quad C_{2222} = \lambda + (1 + s^2)\mu.$$

Расчитанные с помощью метода матриц переноса и МКЭ ВПТ дисперсионные кривые незначительно отличаются друг от друга, и близки к результатам, полученным в (*Li J. et al., 2018*). С помощью фактора локализации (*Фоменко С. И. и др., 2017*) анализируется влияние удлинения эластомера при растяжении в s раз, которое влечет также изменение относительной толщины слоев, на запрещенные и разрешенные зоны.

В *разделе 4.2* проводится численный анализ и демонстрируется хорошее совпадение результатов, полученных с помощью гибридного метода, реализованного в пакете прикладных программ MATLAB, и МКЭ (COMSOL Multiphysics).

Основные характеристики исследуемой составной структуры конечных размеров приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Свойства материалов и геометрические параметры

Область	Материал	Параметры Ламе, ГПа	ρ_i , кг/м ³	d_i , мм	h_1 , мм	h_2 , мм	h_3 , мм
Ω_1	Сталь	$\lambda = 104,4; \mu = 80$	7850	1	1	1	1
Ω_2	Алюминий	$\lambda = 55,5; \mu = 26,1$	2700	10	–	1	–

Для исследования сходимости гибридного метода вычисляются относительные погрешности

$$\varepsilon_p = \frac{\| |\mathbf{u}| - |\mathbf{u}_{COMSOL}| \|_{L_1(\Omega_p)}}{\| |\mathbf{u}_{COMSOL}| \|_{L_1(\Omega_p)}}, \quad p = 1, 2$$

модулей векторов перемещений $|\mathbf{u}|$ и $|\mathbf{u}_{COMSOL}|$, полученных, соответственно, с использованием гибридного метода и МКЭ для каждой области Ω_p .

Рисунки 3–4 демонстрируют уменьшение относительных погрешностей ε_p для задач первого и второго типа соответственно с увеличением количества спектральных элементов $M_1 = M_2$.

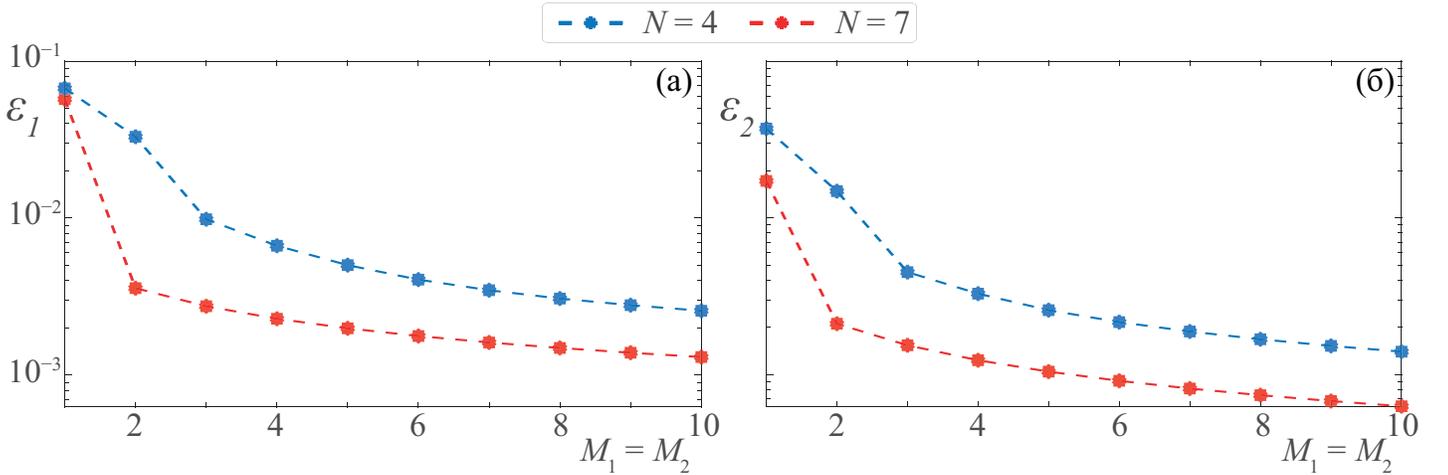


Рисунок 3 – Относительные погрешности ε_p , рассчитанные для задачи первого типа в области Ω_1 (а) и области Ω_2 (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

В *разделе 4.3* описывается процесс изготовления упругих метаматериалов из пластика с использованием FDM 3D печати. Экспериментальные образцы упругого метаматериала были изготовлены с использованием 3D-принтера с двумя экструдерами (Raise 3D E2), благодаря чему в рамках одной сессии печати можно использовать два пластика одновременно. При изготовлении различных образцов рассматривались и использовались три типа пластика: ABS-пластик, PLA-пластик и PETG-пластик.

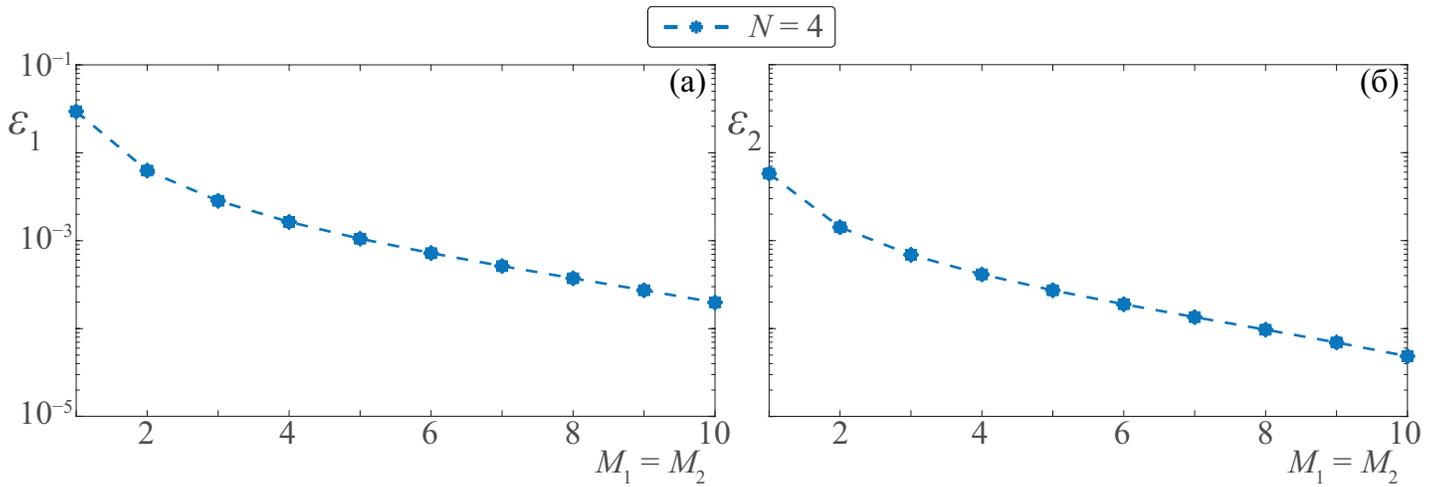


Рисунок 4 – Относительные погрешности ε_p , рассчитанные для задачи второго типа в области Ω_1 (а) и области Ω_2 (б) при $f = 1$ МГц и $h_3 = 1$ мм

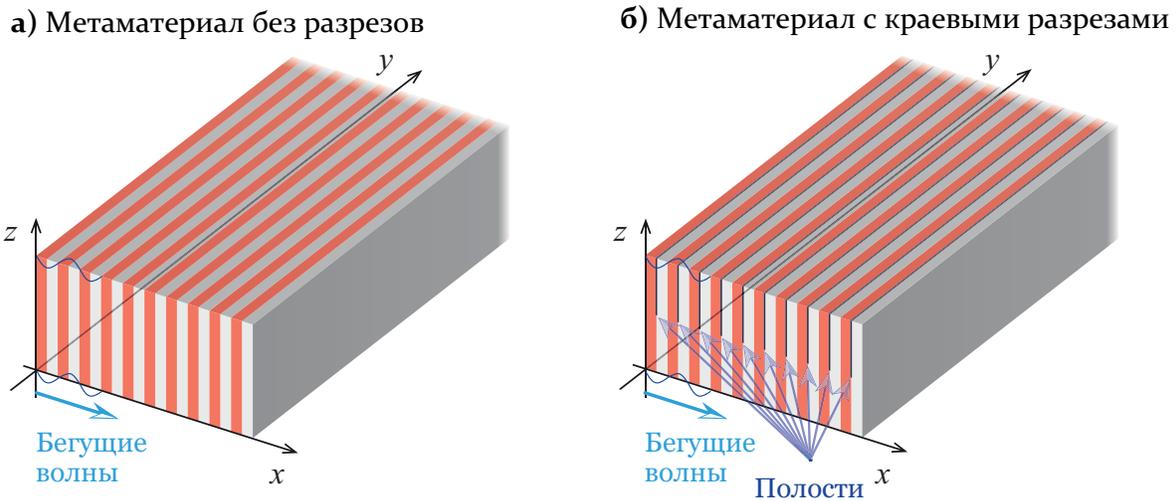


Рисунок 5 – Общая схема упругого слоистого метаматериала с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость

Был изготовлен многослойный упругий метаматериал с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость (по одной полости в каждой элементарной ячейке), его геометрия приведена на рисунке 5. Помимо этого, был изготовлен упругий метаматериал в виде пластины с массивом полостей толщиной h и длиной w , периодически расположенных на расстоянии s друг от друга, геометрия образца изображена на рисунке 6. Декартовы координаты $\{x, y, z\}$ введены здесь таким образом, чтобы ось Oz была ортогональна свободным от напряжения внешним границам, тогда как упругие волны распространяются вдоль оси Ox .

В *разделе 4.4* дается описание схемы проведения экспериментов. Упругие волны, распространяющиеся в образцах, изготовленных с использованием аддитивных

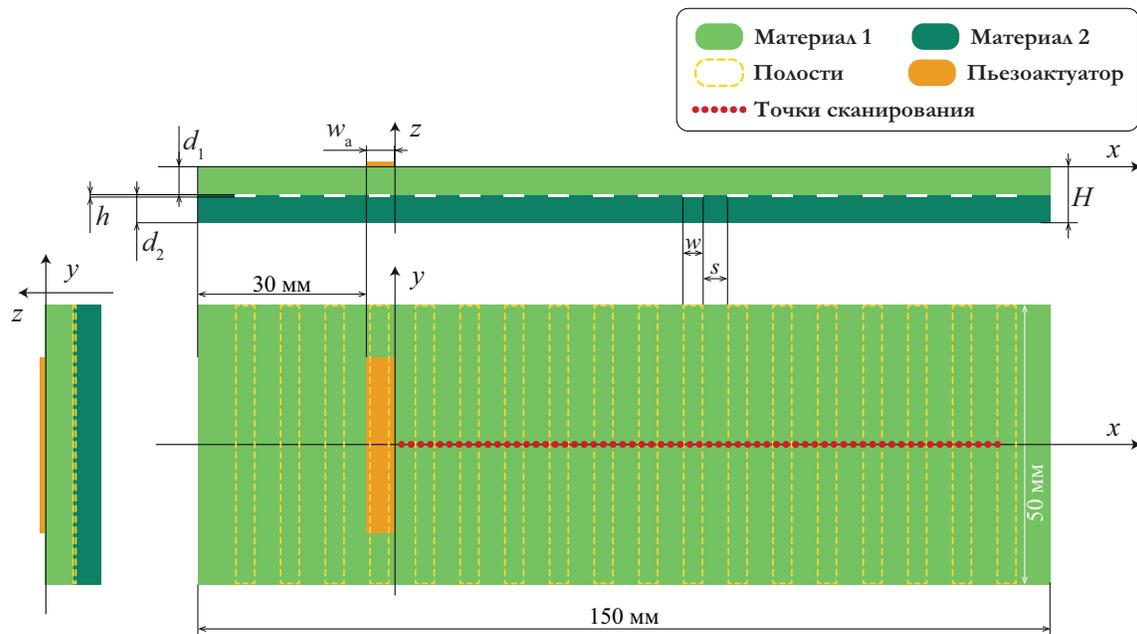


Рисунок 6 – Геометрия образца упругого метаматериала в виде пластины с массивом интерфейсных полостей

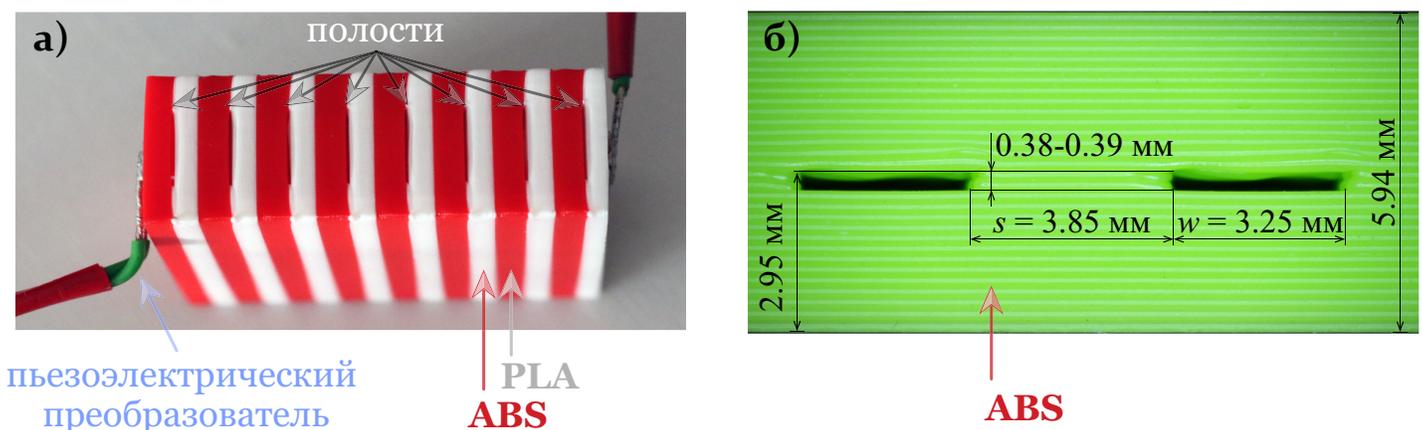


Рисунок 7 – Фотографии исследуемых образцов: а) упругий метаматериал с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость б) упругий метаматериал в виде пластины с массивом полостей

технологий, возбуждались и измерялись прямоугольными пьезоэлектрическими преобразователями, приклеенными цианоакрилатным клеем к поверхности упругого метаматериала. С помощью осциллографа Picoscope 5442D записывался сигнал, регистрируемый пьезоэлектрическим преобразователем, а компонента вектора скорости, ортогональная поверхности образцов, измерялась дистанционно с помощью сканирующего лазерного доплеровского вибрметра Polytec PSV-500-HV. Для возбуждения в образцах упругих колебаний использовался генератор произвольных сигналов Tektronix AFG 3021B. Перед подачей на пьезоэлектрический преобразователь

сигнал амплитудой $V_0 = 10$ В усиливался внешним высокочастотным усилителем АКТАКОМ AVA-1745. Использовался сигнал в виде импульсной нестационарной нагрузки. Измерения повторялись 10000 раз, после чего анализировался усредненный сигнал.

В *разделе 4.5* рассматривается распространение волн в упругих метаматериалах с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость или без неё, см. рисунки 5 и 7(а). Рассчитанные волновые числа показывают, что в упругом мета-

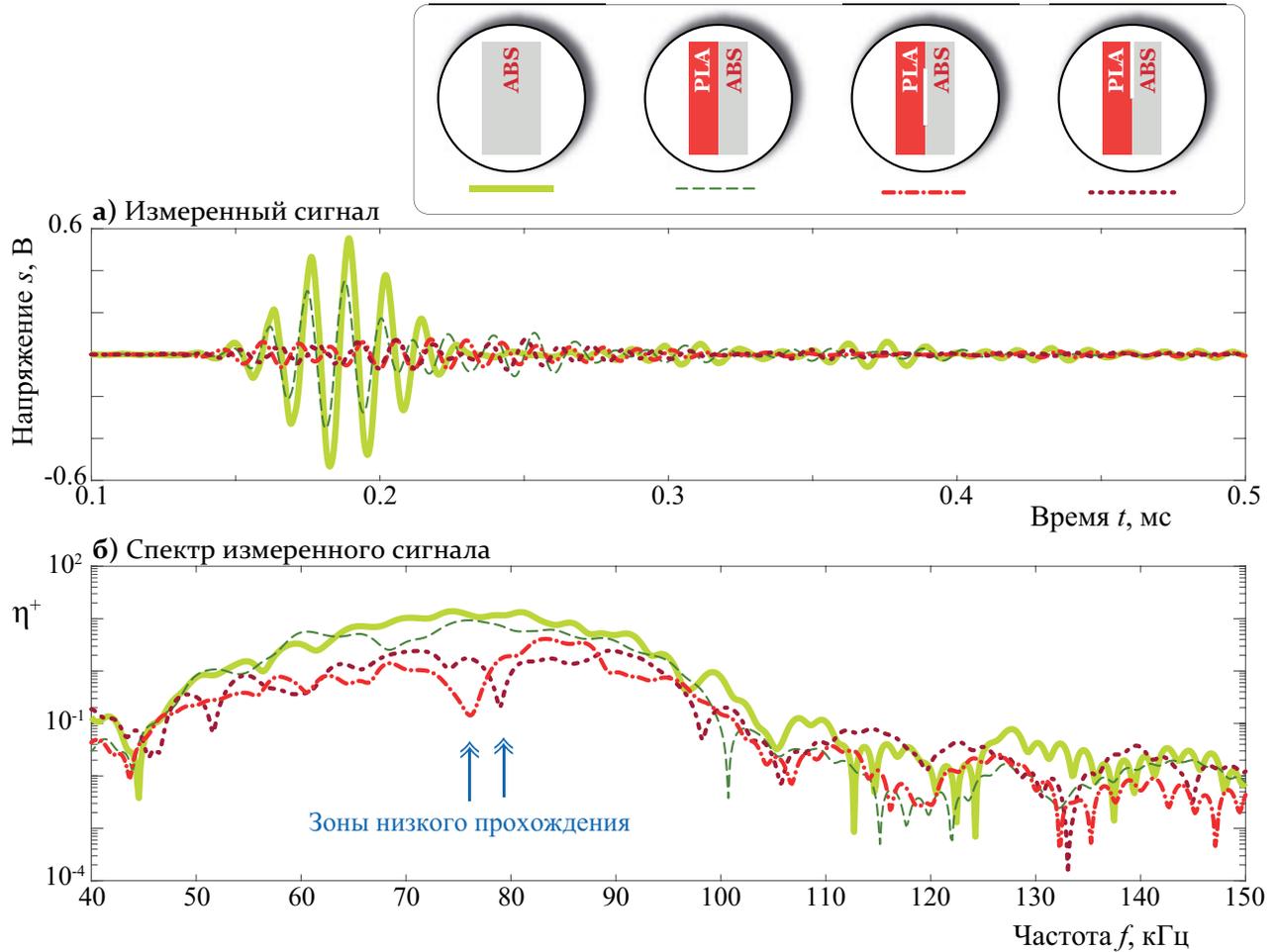


Рисунок 8 – Измеренные сигналы $s(t)$ (а) и спектры $\eta^+(f)$ (б) для упругих метаматериалов с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость

материале без полостей для симметричных бегущих волн наблюдаются только две запрещенные зоны, тогда как антисимметричные бегущие волны распространяются без затухания для всех частот в диапазоне до 150 кГц. Запрещенные зоны для упругого метаматериала с краевыми полостями относительно узкие: самая широкая полоса второй запрещенной зоны около частоты 100 кГц имеет ширину около 5 кГц. Введение центральных полостей увеличивает количество запрещенных зон и индуцирует их для антисимметричных бегущих волн, что может быть объяснено локальными резонансами, вызванными наличием дополнительных рассеивателей, т.е. полостей.

Для экспериментальной проверки блокирующих свойств рассматриваемого вида метаматериала с полостями используется коэффициент прохождения. Для получения коэффициента прохождения по отношению к частоте f используется спектр сигнала, вычисленный как преобразование Фурье измеренного сигнала $s(t)$:

$$\eta^+(f) = \frac{1}{S_{\text{norm}}} \int_0^T s(t) e^{-2\pi i f t} dt,$$

где $S_{\text{norm}} = 10^3$ был использован для нормализации спектра сигнала.

Примеры сигналов, измеренных сенсором, показаны на рисунке 8(а) для всех четырех образцов. Преобразования Фурье этих сигналов показаны на рисунке 8(б), на котором также видно, что узкие частотные диапазоны низкого уровня коэффициента прохождения не связаны с формой входного сигнала. Относительно небольшие провалы в экспериментально полученных коэффициентах прохождения $\eta^+(f)$ видны для трех образцов, но они не наблюдаются для однородного ABS-пластика.

В **разделе 4.6** рассматривается распространение волн в упругих метаматериалах в виде пластины с массивом полостей, см. рисунки 6 и 7(б). Бегущие упругие волны возбуждаются пьезоэлектрическим преобразователем, закрепленным на поверхности изготовленного образца, и вертикальные компоненты вектора скоростей $v(x, 0, 0, t)$ измеряются вдоль линии, обозначенной красной пунктирной линией на рисунке 6. Полученные сигналы в точках сканирования обрабатывались методом матричного пучка, что позволило установить связь между волновыми числами ζ упругих бегущих волн и частотой f . Путем применения преобразования Фурье к амплитудам вертикальных компонент вектора скоростей $v(x, 0, 0, t)$, измеренным на поверхности образца, вводится коэффициент прохождения:

$$\gamma^+(f) = \int_{\ell_0} V(x, f) dx / \int_{\ell_1} V(x, f) dx. \quad (21)$$

Здесь $V(x, f)$ – преобразование Фурье $v(x, 0, 0, t)$, а отрезки ℓ_0 и ℓ_1 , лежащие на линии сканирования, определяют область сканирования вблизи пьезоактуатора ($|\ell_0| = |\ell_1| = 4$ мм). Для определения характеристик упругого метаматериала с наиболее широкой запрещенной зоной была сформулирована и решена оптимизационная задача для упругого метаматериала из ABS-пластика с массивом полостей, см. рисунок 7(б).

В пределах точности используемого 3D-принтера ширина полости w и расстояние между ними s варьируются для достижения наиболее широкой запрещенной зоны. Диапазон изменения параметров s и w варьировался в пределах от 2 мм до 4 мм. С помощью методики (*Golub M. V. et al., 2022*) были уточнены значения упругих модулей пластика, что позволило повысить точность моделирования. С этой целью был изготовлен дополнительный образец из ABS-пластика в виде однородной пластины толщиной 2,92 мм, для которого были определены модуль Юнга 2,49 ГПа, ко-

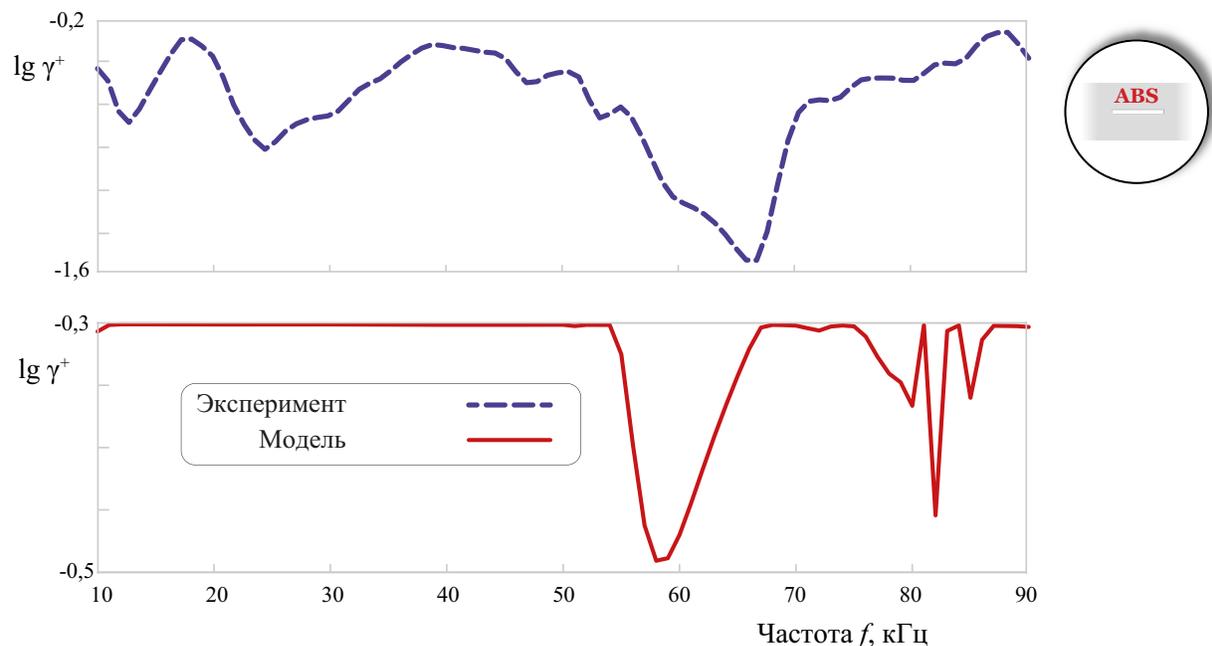


Рисунок 9 – Коэффициенты прохождения $\gamma^+(f)$ для упругого метаматериала из ABS-пластика с массивом полостей, полученные численно (сплошная линия) и экспериментально (пунктирная линия) для $s = 2,1$ мм и $w = 3,5$ мм

эффицент Пуассона 0,37 и плотность 981 кг/м³, которые соответствуют имеющимся в литературе диапазонам свойств материала.

На этапе определения запрещенной зоны в качестве целевой функции использовался коэффициент прохождения $\gamma^+(f)$, рассчитываемый для параметров (s, w) на основе разработанных механико-математических моделей. В результате было найдено два оптимальных сочетания $(s = 2,1$ мм и $w = 3,5$ мм) и $(s = 4,3$ мм и $w = 2,6$ мм), обеспечивающие наиболее широкую запрещенную зону в 14 кГц.

Так как при изготовлении образцов с более широкой полостью становится более высокой вероятностью обвалов внутри полостей, то был изготовлен образец метаматериала с шириной полости $s = 2,1$ мм и расстоянием между полостями $w = 3,5$ мм. С использованием пьезоэлектрического преобразователя и лазерной доплеровской виброметрии были получены амплитуды колебаний на поверхности и путем применения преобразования Фурье вычислены экспериментальные значения коэффициента прохождения. На рисунке 9 приведены графики коэффициента прохождения $\gamma^+(f)$, полученные численно и экспериментально для $s = 2,1$ мм и $w = 3,5$ мм. Можно увидеть, что расположение запрещенной зоны достаточно хорошо соответствует предсказанным численным значениям. Хотя экспериментальные оценки дают большее значение в 18 кГц для запрещенной зоны (в численных расчетах получился диапазон в 14 кГц), можно заключить, что данный вид метаматериала обеспечивает достаточно широкие запрещенные зоны.

В **заключении** кратко формулируются основные результаты диссертационного исследования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработаны механико-математические модели, описывающие динамическое поведение многослойного волновода с присоединенными элементами, а также упругого метаматериала с ячейками, состоящими из слоистого волновода и присоединенных элементов в общем случае произвольной формы.
2. Предложена оригинальная гибридная вычислительная схема, сочетающая преимущества ПАМКЭ и МКЭ ВПТ, и на ее основе разработаны компьютерные модели, позволяющие проводить численный анализ запрещенных зон и собственных колебаний упругих метаматериалов с протяженными элементами.
3. Проведен численный и экспериментальный анализ влияния параметров ячеек упругих слоистых метаматериалов с массивом полостей, определены оптимальные параметры полостей для достижения максимального диапазона запрещенных зон.
4. Впервые выполнена экспериментальная верификация явления формирования запрещенной зоны для двух новых типов упругих метаматериалов: метаматериалов с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость, и метаматериалов в виде пластин с массивом полостей.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ и включенных в базы данных Scopus и Web of Science:

1. Ханазарян, А. Д. Гибридный метод для моделирования антиплоских колебаний слоистых волноводов с присоединенными элементами / А. Д. Ханазарян, М. В. Голуб // Вычислительная механика сплошных сред. — 2023. — Т. 16. — № 1. — С. 101–114.

2. Ханазарян, А. Д. Гибридный полуаналитический метод моделирования плоских колебаний слоистых волноводов с присоединенными элементами / А. Д. Ханазарян // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2024. — Т. 21. — № 2. — С. 46–61.

3. Design, manufacturing, experimental and theoretical study of elastic wave propagation in multilayered acoustic metamaterial with interfacial crack-like voids / M. V. Golub, I. A. Moroz, Y. Wang, A. D. Khanazaryan [et al.] // Acoustics. — 2023. — Vol. 5. — № 1. — P. 122–135.

Статьи в рецензируемых научных изданиях, включенных в базы данных Scopus и Web of Science:

4. 3D mathematical model for the simulation of piezo-induced guided waves in an elongated plate-like structure / A. N. Shpak, M. V. Golub, S. A. Glinkova, A. D. Khanazaryan // 2020 Days on Diffraction (DD). — 2020. — P. 104–109.

5. Numerical methods for simulation elastic wave propagation in layered periodic elastomer composites / S. I. Fomenko, M. V. Golub, A. D. Khanazaryan, A. N. Shpak // Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. — 2021. — Vol. 23. — P. 261–271.

6. Experimental investigation of band-gaps in two-layered acoustic metamaterials with arrays of strip-like cracks / M. V. Golub, I. A. Moroz, A. D. Khanazaryan, K. K. Kani-shchev [et al.] // Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. — 2024. — Vol. 41. — P. 180–187.

Публикации в прочих научных изданиях:

7. Simulation of wave propagation in a periodic layered elastomer by the spectral element method / A. D. Khanazaryan, M. V. Golub, O. V. Doroshenko, A. N. Shpak [et al.] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2021. — Vol. 1129. — P. 012037.

8. Гибридный метод полуаналитический метод для моделирования рассеяния волн на распределении интерфейсных микротрещин в ламинатах / М. В. Голуб, А. Н. Шпак, А. Д. Ханазарян, Е. А. Оконешникова // Материалы IV Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». — г. Майкоп. — 2021. — С. 233–235.

9. Ханазарян, А. Д. К применению гибридного подхода для решения динамических задач теории упругости на основе метода спектральных элементов / А. Д. Ханазарян, А. Н. Шпак, М. В. Голуб // Материалы Третьей Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2021». — г. Уфа. — 2021. — Т. 2. — С. 252–254.

10. Golub, M. V. Application of semi-analytical hybrid method for the evaluation of complex spectrum for elastic waveguides with inhomogeneities / M. V. Golub, A. N. Shpak, A. D. Khanazaryan // Materials of the International Conference «Complex analysis and its applications». — Gelendzhik – Krasnodar. — 2021. — P. 46.

11. Планирование и проведение экспериментальных исследований по изучению свойств акустических метаматериалов и пластиков, получаемых с помощью 3D печати / К. К. Канищев, А. Д. Ханазарян, И. А. Мороз, М. В. Голуб [и др.] // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Математические методы и модели в решении прикладных задач». — г. Краснодар. — 2023. — С. 16–20.

12. Фоменко, С. И. Численно устойчивые алгоритмы построения волновых полей и определения запрещенных зон в слоистых диэлектрических эластомерах / С. И. Фоменко, М. В. Голуб, А. Д. Ханазарян // Материалы IV Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». — г. Майкоп. — 2021. — С. 297–299.

Ханазарян Артур Дереникович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ
ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ И СЛОИСТЫХ
ВОЛНОВОДАХ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук