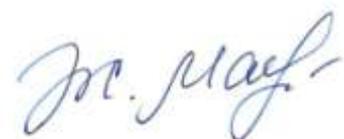


Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Севастопольский государственный университет»

На правах рукописи



Маленко Жанна Владимировна

**ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ПО
ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Специальность: 1.1.8 – Механика деформируемого твёрдого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Ярошенко Александр Александрович

Севастополь – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ.....	10
1.1. Волны в ледяном покрове, вызванные движущимися источниками возмущений (обзор).....	10
1.2. Математические модели ледяного покрова.....	25
1.3. Физико-механические свойства льда	27
1.4. Фазовая и групповая скорости изгибно-гравитационных, гравитационных и упругих волн.....	30
1.5. Заключение по главе 1	36
ГЛАВА 2. ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ.....	38
2.1. Постановка задачи	40
2.2. Решение задачи.....	41
2.3. Анализ полученного решения.....	45
2.4. Заключение по главе 2.....	56
ГЛАВА 3. РАЗВИТИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ	59
3.1. Постановка задачи.	60
3.2. Решение задачи.....	61
3.3. Анализ полученного решения.....	64
3.4. Случай больших значений сжимающих усилий.....	70
3.5. Анализ полученного решения для больших значений сжимающих усилий.....	72
3.6. Заключение по главе 3.....	77
ГЛАВА 4. НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО- ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖУЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ	79
4.1. Постановка задачи	81

4.2. Решение задачи.....	83
4.3. Анализ полученного решения.....	84
4.4. Зависимость критических скоростей от частоты колебаний источника.....	88
4.5. Фазовые портреты волн.....	90
4.6. Угловые зоны распространения волн.	94
4.7. Заключение по главе 4.....	97
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	99
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	101
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	102

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В зимний период, когда замерзают реки, озера и моря, ледяной покров используется для доставки по нему различного рода грузов. Если бы не ледовые дороги, то многие населенные пункты северных районов оказались бы отрезанными друг от друга. Ледовые трассы существуют во всех северных странах. Более 800 ледовых переправ функционирует в России, большая часть из которых находится в Архангельской области, Красноярском крае, Ямало-Ненецком автономном округе. Самая протяженная ледовая дорога находится на Чукотке и соединяет северный город Певек с поселком Айон, который расположен на острове Айон в Восточно-Сибирском море. Протяженность трассы 120 км.

С другой стороны, для продления навигации, возникает необходимость разрушения ледяного покрова. Кроме традиционных способов разрушения, таких как использование ледоколов или подрыв взрывчатых веществ, используются суда на воздушной подушке (СВП). Двигаясь по поверхности ледяного покрова, СВП могут вызвать его разрушение за счет возбуждения изгибно-гравитационных волн достаточной амплитуды. Отсутствие у СВП осадки позволяет разрушать ледяной покров на реках и озерах любой глубины.

Как при эксплуатации ледяного покрова для обустройства дорог, так и при разрушении ледяного покрова СВП возникает необходимость исследования поведения ледяного покрова при воздействии на него различного рода нагрузок. Требуется исследовать режимы движения нагрузок, при которых происходит изменение структуры волнового возмущения. Требуется также исследовать характеристики ледяного покрова, влияющие на значения критических скоростей перемещения источников возмущений.

В первом случае требуется избегать движения транспортного средства с критической скоростью. Во втором случае требуется обеспечить скорость движения СВП, при которой произойдет разрушение ледяного покрова.

Степень разработанности. Одним из первых исследователей, который рассматривал ледяной покров как тонкую упругую пластинку, плавающую на поверхности жидкости, был Greenhill A.G. Монография Хейсина Д.Е. является одной из первых фундаментальных работ, посвященных динамике ледяного покрова.

Исследованиям колебаний плавающего ледяного покрова, которые вызваны движущимися источниками возмущений, посвящены работы Хейсина Д.Е., Букатова А.Е., Доценко С.Ф., Черкесова Л.В., Зуева В.А., Козина В.М., Жесткой В.Д., Земляка В.Л., Погореловой А.В., Стуровой И.В., Коробкина А.А., Ткачевой Л.А., Хабахпашевой Т.И., Ильичева А.Т., Марченко А.В., Булатова В.В., Савина А.С., Папина А.А., Шишмарева К.А. и ряда других авторов.

Из зарубежных исследований отметим работы следующих авторов: Wilson J.T., Nevel D.E., Eyre D., Kerr A.D., Bates H. F., Takizawa T., Davys J.W., Squire V.A., Schulkes R.M.S.M., Hosking R.J., Milinazzo F., Nugroho W.S., Părău E.I., Babaei H., Dinvay E., Xue Y.Z., Waugh Z.Q., Ni B. et. al.

Эти исследования продолжаются и на данный момент.

Цель диссертационной работы: Теоретические исследования колебаний плавающего ледяного покрова, которые вызваны движущимися по его поверхности источниками возмущений.

Задачи исследования:

1. Исследование влияния скорости перемещения источника возмущений, толщины ледяного покрова, сил сжатия и растяжения на амплитуды образующихся изгибно-гравитационных волн.

2. Определение критических скоростей перемещения источника возмущений, при которых наиболее вероятно разрушение ледяного покрова.

3. Исследование влияния сил сжатия и растяжения на фронтальные скорости распространения изгибно-гравитационных волн.

4. Исследование влияния частоты колебаний движущегося источника возмущений, толщины ледяного покрова, сжимающих и растягивающих усилий на значения критических скоростей и характер волновых колебаний.

Научная новизна.

1. Определена критическая скорость источника, соответствующая совпадению фазовых скоростей упругой, гравитационной и изгибно-гравитационной волн. Показано, что при этой скорости максимум амплитуды смещается от трассы движения источника.

2. Установлены частота колебаний и скорость движения источника, при которых наиболее вероятно разрушение ледяного покрова.

3. Определено влияние сил сжатия, частоты колебаний источника возмущений и толщины ледяного покрова на значения критических скоростей.

4. Выполнен расчет фронтов, фазовых портретов и угловых зон распространения изгибно-гравитационных волн. Показано, что силы сжатия и растяжения оказывают наибольшее влияние на скорость распространения упругих волн.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Проведенные исследования позволяют определять значения критических скоростей перемещения нагрузки по плавающей пластине в зависимости от сил сжатия, толщины и других параметров пластины и жидкости. Результаты работы могут быть использованы для расчета критических скоростей перемещения транспортных средств, при прокладке ледовых дорог и переправ или при разрушении ледяного покрова судами на воздушной подушке.

Методология и метод исследования. В основу колебаний плавающего ледяного покрова положены линеаризованные уравнения гидромеханики и линейная классическая теория колебаний пластин. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая изотропная пластинка. Для решения задачи применяются интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Анализ полученного интегрального представления для возвышения поверхности пластина-жидкость выполнен методом стационарной фазы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Результаты численного анализа амплитуд изгибно-гравитационных волн в зависимости от скорости движения источника возмущений, толщины льда, сил сжатия и растяжения в ледяном покрове.

2. Результаты расчетов критических скоростей движущегося источника возмущений в зависимости от частоты его колебаний, сил сжатия и растяжения и толщины ледяного покрова.

3. Результаты численных расчетов фазовых портретов, фронтов и угловых зон распространения волн и их зависимость от скорости движения источника и сил сжатия и растяжения в ледяном покрове.

Степень достоверности и обоснованности проведенных исследований.

Достоверность полученных результатов диссертационной работы обосновывается использованием классической теории изгиба пластин и методов гидромеханики, применяемых для чистой воды, корректностью постановок задач, а также сопоставлением теоретических и экспериментальных исследований, полученных другими авторами.

Личный вклад автора.

Постановка цели, задач и выбор математических методов исследования диссертационной работы проводились соискателем совместно с научным руководителем д.ф.-м.н., профессором Ярошенко А.А. Теоретические исследования, численные расчеты, анализ и интерпретация полученных результатов проводились автором самостоятельно. Обсуждение отдельных этапов исследования осуществлялись совместно с научным руководителем и соавторами научных публикаций.

Работы [69–78, 138–144, 175, 176] выполнены в соавторстве с научным руководителем Ярошенко А.А. Работы [19, 125] выполнены в соавторстве с Ярошенко А.А., Маркиной Е.В., Костюковой Л.О., Бабиковым И.И. Работа [36] выполнена в соавторстве с Ярошенко А.А., Маркиной Е.В., Боран-Кешишьяном А.Л., Кондратьевым А.И. Работы [41, 42] выполнены в соавторстве с Калинюком И.В., Ярошенко А.А. Работы [37, 63] выполнены в соавторстве с

Бабиковым И.И., Костюковой Л.О., Ярошенко А.А. Работы [68, 146, 147] выполнены в соавторстве с Маркиной Е.В., Ярошенко А.А. Работа [145] выполнена в соавторстве с Ярошенко А.А., Корниловой А.Д.

Публикации по теме диссертации. Результаты работы опубликованы в 30 научных работах [19, 36, 37, 41, 42, 63, 68–78, 125, 138–147, 175, 176], из них: 11 публикаций в рецензируемых журналах, удовлетворяют требованиям ВАК при Минобрнауки России [19, 36, 71, 73, 76, 77, 125, 141, 144, 175, 176], из которых 8 по специальности 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела [19, 73, 76, 77, 125, 141, 175, 176]. Четыре статьи [36, 71, 175, 176] включены в международную базу данных «Web of Science», из них две [175, 176] в базу данных «Scopus».

Апробация работы. Основные результаты исследований по диссертационной работе были представлены на следующих научных конференциях: III национальной научно-практической конференции «Научно-технические, экономические и правовые аспекты развития транспортного комплекса» (г. Новороссийск, 2019 г.); 6-ой и 10-ой национальных научно-практических конференциях: «Ушаковские чтения» (г. Севастополь, 2019, 2023 гг.); ежегодных научных конференциях МГУ «Ломоносовские чтения» (г. Севастополь, 2019, 2020, 2021 гг.); Всероссийских научных конференциях «Моря России» (г. Севастополь, 2019, 2020, 2021 гг.); Всероссийской научно-практической конференции «Прикладная математика и информатика в современном мире», посвященной 50-летию начала подготовки специалистов в области программирования и прикладной математики на Кубани (г. Краснодар, 2022 г.); VI Дальневосточной конференции с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении» (г. Комсомольск-на-Амуре, 2022 г.); 13-ой и 14-ой международных конференциях-школах молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (г. Москва, 2022, 2023 гг.); XXI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2023 г.); VI Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Прикладная математика:

современные проблемы математики, информатики и моделирования» (г. Краснодар, 2024 г.); Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Арктика: прикладные и фундаментальные задачи ледотехники» (г. Биробиджан, 2024 г.); Всероссийской конференции, посвященной 105-летию со дня рождения академика РАН Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред» (г. Новосибирск, 2024 г.).

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 128 страниц. Список литературы содержит 210 наименований и занимает 27 страниц. В диссертацию включено 4 таблицы и 54 рисунка.

ГЛАВА 1

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В
ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ****1.1. Волны в ледяном покрове, вызванные движущимися источниками возмущений (обзор)**

Исследование колебаний ледяного покрова, плавающего на поверхности жидкости, имеет давнюю историю. Теория изгибных волн, генерируемых в плавающем ледяном покрове, впервые была предложена Greenhill A.G. [163, 164]. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной. В работе исследуются плоские изгибно-гравитационные волны, которые образуются на поверхности плавающей пластины.

Монография Голушкевича С.С. [20] является одной из первых работ, в которой исследуется воздействие подвижной нагрузки на ледяной покров. Монография Хейсина Д.Е. [128] является одной из первых основополагающих работ, посвященных динамике ледяного покрова. В книге изложена математическая теория волновых процессов в ледяном покрове, плавающем на поверхности жидкости. Ряд параграфов посвящен исследованиям колебаний ледяного покрова при перемещении по нему нагрузки.

Одной из первых зарубежных работ, посвященных исследованию изгибных волн в плавающих ледяных покровах, вызванных движущейся нагрузкой, является работа Wilson J.T. [206]. В монографии Squire V.A. et al. [192] обобщена литература, в основном зарубежных авторов, вплоть до 1995 года. В книге выполнен анализ как теоретических, так и экспериментальных работ, посвященных задачам перемещения грузов по ледяному покрову. Книга неоднократно переиздавалась. Последнее ее издание вышло в 2012 г. [193].

Среди последних фундаментальных работ, посвященных исследованиям плавающего ледяного покрова, можно отметить монографии Букатова А.Е [3] и Козина В.М. и др. [35, 93]. В книге [3] приведены результаты теоретических

исследований волн в море с плавающим ледяным покровом. Работа [35] имеет больше прикладной характер. Рассмотрены средства, методы и способы разрушения ледяного покрова. Исследованы возможности увеличения несущей способности ледяного покрова. В [93] приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований деформации ледяного покрова, который подвергается различного рода нагрузкам.

Среди обзорных работ, посвященных деформациям и разрушениям льда, вызванных движущимися возмущениями можно отметить работы [169, 181]. В [169] дан обзор и анализ работ, посвященных исследованию несущей способности ледяного покрова от воздействия различного рода нагрузок, в том числе и движущихся. В обзоре [181] рассматриваются источники возмущений, движущиеся как по поверхности ледяного покрова, так и под ним. Рассматриваются различные модели ледяного покрова: бесконечный и полубесконечный ледяной покров; ледовый канал с двумя боковыми стенками.

Изучение гидроупругих (изгибно-гравитационных) волн в 50-е годы было вызвано попытками использовать ледяные покровы в качестве ледовых переправ для доставки по ним грузов, а в некоторых случаях и взлетно-посадочных полос.

Дальнейшие исследования были продолжены. Они нашли свое отражение в работах в 60-е годы: Gold L. W. (1960) [см. обзор 180], Assur A. (1962) [см. обзор 180], Хейсин Д.Е. (1967) [128], Букатов А.Е., Черкесов Л.В. (1969) [9];

в 70-е годы: Nevel D.E. (1970) [180], Доценко С.Ф. (1976, 1978) [23, 24], Chonan S. (1976) [154], Eyre D. (1977) [162], Kerr A.D. (1979) [167];

в 80-е годы: Черкесов Л.В. (1980) [130], Chonan S. (1980) [155], Bates H.F. and Shapiro L.Y. (1981) [149, 150], Beltaos S. (1981) [151], Хейсин Д.Е. (1983) [129], Kerr A.D. (1983) [168], Ткаченко В.А., Яковлев В.В. (1983, 1984) [123, 124], Букатов А.Е., Черкесов Л.В., Ярошенко А.А. (1984) [10], Букатов А.Е., Ярошенко А.А. (1984, 1985, 1986) [11, 12, 13], Davys J.W. et al. (1985) [157], Takizawa T. (1985, 1987, 1988) [198, 199, 200], Squire V.A. et al. (1985, 1987, 1988) [195, 194, 196], Зуев В.А. (1986) [30], Пожуев В.И. (1987) [91], Schulkes R.M.S.M. et al. (1987, 1988) [187, 188], Whittenn J.J. (1987) [204], Тимохов Л.А., Хейсин Д.Е.

(1987) [113], Whittenn J. and Hinchey M.J. (1988) [205], Зуев В.А., Козин В.М. (1988), [32], (1988), Букатов А.Е., Жарков В.В. (1988, 1989) [4, 5], Hosking R.J. et al. (1988) [166];

в 90-е годы: Букатов А.Е., Жарков В.В. (1990) [6], Пожуев В.И., Полякова Н.П. (1990) [92], Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. (1991) [8], Strathdee J. et al (1991) [197], Duffy D.G. (1991) [161], Козин В.М., Скрипачев В.В. (1992) [62], Milinazzo F. et al. (1995) [179], Kerr A.D. (1996) [169], Squire V.A. et al. (1996) [192], Bukatov A.E. and Zharkov V.V. (1997) [153], Козин В.М., Жесткая В.Д. (1997) [50], Kozin V.M. and Zhyostkaya V.D. (1999) [172], Nugroho W.S. et al. (1999) [182], Жесткая В.Д. (1999) [26];

в 2000-е годы: Жесткая В.Д. (2000) [27], Yeung R.W. and Kim J.W. (2000) [209], Părgău E.I. and Dias F. (2001, 2002) [183, 184], Miles J. and Sneyd A.D. (2003) [178], Жесткая В.Д., Козин В.М. (2003) [28], Козин В.М., Погорелова А.В. (2003, 2009) [58, 59], Wang K. et al. (2004) [202], Букатов А.Е., Жарков В.В. (2005) [7], Козин В.М. и др. (2005) [67], Стурова И.В., Коробкин А.А. (2005) [108], Ткачева Л.А. (2005) [114], Жесткая В.Д., Чужимов С.Д. (2007) [29], Зуев В.А. (2007) [31], Козин В.М. (2007) [44], Козин В.М., Морозов В.С. (2007, 2009) [56, 57], Погорелова А.В. (2008) [87], Козин В.М. и др. (2008) [93], Vonnefoy F. et al. (2009) [152], Кулешов А.А., Мымрин В.В. (2009) [64];

в 2010-е годы: Кулешов А.А., Мымрин В.В. (2010) [65], Козин В.М., Видякин А.В. (2010) [49], Козин В.М. и др. (2011) [86], Părgău E.I. and Vandenberg J.-M. (2011) [185], Стурова И.В. (2011, 2012, 2018) [99-102], Squire V.A. et al. (2012) [193], Савин А.А., Савин А.С. (2012, 2015) [95, 96], Lu D.Q. and Zhang H. (2013) [174], Zhang H. and Lu D.Q. (2013) [210], Козин В.М., Земляк В.Л. (2013, 2015) [51, 52], Korobkin A. et al. (2014) [171], Погорелова А. В., Козин В. М. (2014) [88], Shishmarev K. et al. (2015, 2016, 2018) [189, 190, 191], Козин В.М., Верещагин В.Ю., Верещагина А.С. (2015) [48], Папин А.А. и др. (2015) [83], Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А. (2015) [89], Шишмарев К.А. (2015, 2016, 2017) [131, 132, 133, 134], Папин А.А., Шишмарев К.А. (2016) [84], Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И., Коробкин А.А. (2016) [135], Козин В.М.,

Матюшина А.А. (2016) [55], Козин В.М., Рогожникова Е.Г. (2016) [60], Козин В.М. и др. (2016) [94, 112, 136, 137], Babaei H. et al. (2016) [148], Стурова И.В., Ткачева Л.А. (2016, 2018) [109, 110], Li Js. and Dong-qiang L. (2017) [173], Van der Sanden J. and Short N.H. (2017) [201], Букатов А.Е. (2017) [3], Ильичев А.Т., Савин А.С. (2017) [39], Ипатов К.И. (2017) и др. [40], Кожаев А.В., Козин В.М. (2017) [43], Козин В.М., Рогожникова Е.Г., Ипатов К.И. (2018) [61], Матюшина А.А., Козин В.М., Земляк В.Л. (2018) [80], Das S. et al. (2018) [156], Козин В.М. и др. (2018) [98], Ткачева Л.А. (2018, 2019) [115, 116, 117, 118], Калинюк И.В., Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. (2019) [41, 42], Dinvay F. et al. (2019) [158], Khabakhpasheva T. et al. (2019) [170], Pogorelova A.V. et al. (2019) [186], Козин В.М. (2019) [45], Козин В.М., Земляк В.Л., Кожаев А.В. (2019) [53], Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. (2019) [69], Ярошенко А.А., Маленко Ж.В. (2019) [138];

в 2020-е годы: Зуев В.А. и др. (2020, 2022) [82, 90, 127], Козин В.М. и др. (2020) [18], Земляк В.Л. и др. (2020) [21], Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. (2020–2024) [70–78], Ярошенко А.А., Маленко Ж.В. (2020–2024) [139–144], Dinvay F. et al. (2020, 2022) [159, 160], Хуе Y.Z. et al. (2021) [208], Козин В.М. (2021, 2023) [46, 47], Ильичев А.Т. (2021) [38], Стурова И.В. (2021, 2022, 2023) [103, 104, 105, 106, 107], Ярошенко А.А. и др. (2021, 2022) [37, 19, 36, 125], Бабииков И.И. и др. (2021) [63], Козин В.М., Лебедев А.А. (2022) [54], Маленко Ж.В. и др. (2022) [68], Hosking R.J. and Milinazzo F. (2022) [165], Ткачева Л.А. (2022, 2023) [119, 120, 121, 122], Ярошенко А.А., Маленко Ж.В., Маркина Е.В. (2022, 2023) [146, 147], Булатов В.В., Владимиров И.Ю. (2023) [14–16], Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Морозов Е.Г. (2023) [17], Malenko Zh.V. and Yaroshenko A.A. (2023, 2024) [175, 176], Козин В.М. и др. (2023) [35], Серых К.С., Сибирякова Т.А., Найденова К.Е. (2023) [97], Стурова И.В., Ткачева Л.А. (2023) [111], Ярошенко А.А., Маленко Ж.В., Корнилова А.Д. (2023) [145], Wang Z.Q. and Lu D.Q. (2024) [203], Marchenko A. (2024) [177], Ni B. et al. (2024) [181].

В настоящее время происходит активное освоение районов Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока. С приходом холодов, когда замерзают реки и

озера, ледяной покров используется для доставки по нему грузов. Ледовые дороги необходимы для жизнеобеспечения этих регионов. Безопасная эксплуатация этих дорог имеет первостепенное значение. Грузоподъемность ледовых переправ и ледовых дорог определяют в зависимости от толщины ледяного покрова и его физико-механических свойств [34].

Одна из самых известных ледовых дорог была создана во время Великой Отечественной войны – «Дорога Жизни». По льду Ладожского озера доставлялись грузы в осажденный Ленинград. Группа ученых под руководством Кобеко П.П., проведя серию экспериментов, разработала рекомендации по движению транспортных средств по ледяному покрову [33]. Ими была предписана определенная скорость движения автомобилей, чтобы избежать явления резонанса, вызванного изгибно-гравитационной волной.

Самый длинный в мире автозимник находится в Чукотском автономном округе. Он проложен по льду Восточно-Сибирского моря и соединяет самый северный город России Певек с островным селом Айон. Протяженность его составляет 120 км. Открывается автозимник в начале марта и действует до начала мая.

На северо-западе Канады находится одна из самых опасных зимних дорог мира – Tuktoyaktuk Winter Road или Mackenzie Ice Road. Она пролегает частично по замерзшему руслу реки Маккензи, частично по замерзшему морю Бофорта. Дорога действует с декабря по апрель.

При движении по ледяному покрову транспортного средства в нем образуются волны, которые в определенных случаях приводят к разрушению льда. Экспериментальные исследования показывают, что скорость транспортного средства влияет на несущую способность плавающего ледяного покрова [34, 85]. Исследования сводятся к двум случаям, когда источник не создает или создает волны в ледяном покрове.

В большинстве работ ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. Исследованию задач о генерации изгибно-гравитационных волн при движении источника возмущений по плавающему

безграничному в горизонтальных координатах ледяному покрову посвящены работы: [3–13, 19, 23, 24, 36, 37, 41, 42, 63, 64, 68–78, 123, 125, 130, 138–144, 146, 147, 157, 174, 175, 176, 179, 187, 198–200, 206, 207, 209, 210].

В своих работах [206, 207] Wilson J.T. разработал простую теоретическую модель поведения ледяного покрова при движении по нему транспортного средства. Он теоретически показал и экспериментально подтвердил, что транспортные средства генерируют в ледяном покрове волну, амплитуда которой стремится к максимуму при определенной критической скорости. Было показано, что при движении транспортного средства с критической скоростью прогиб льда в 2,5 раза превышает статическое отклонение. Приведены значения критической скорости для различных толщин ледяного покрова. Изучению критических скоростей перемещения источника возмущений посвящен ряд работ: [45, 82, 90, 113, 129, 167, 168, 204, 205].

В статье [157] изучаются стационарные волновые картины, генерируемые движущимся с постоянной скоростью источником. Для описания волновой картины вдали от источника, применяется асимптотический анализ Фурье. Была разработана линейная математическая модель для прогнозирования волновой реакции на движущуюся нагрузку. Показана структура гребней и амплитуд волн. Эта модель позже была усовершенствована путем включения нелинейности Parau E., Dias F. [184]. В статье [179] рассматривается движение прямоугольного груза по поверхности ледяного покрова. Приведены асимптотические оценки смещения для дальнего поля. Показано, что амплитуда смещения льда зависит от соотношения сторон нагрузки.

Для решения задач о колебаниях ледяного покрова кроме асимптотических методов (метода стационарной фазы) [14–17, 157, 179, 209, 210 и др.] применяются численные методы [26, 29, 64, 65, 172]. В [26, 29, 172] алгоритм решения основан на методе конечных элементов и методе конечных разностей. Путем численного решения дифференциальных уравнений колебаний ледяного покрова проводится исследование его напряженно-деформированного состояния. В [64, 65] для численного решения задачи авторами был разработан и обоснован

новый конечно-разностный метод аппроксимации. В [64] приведены результаты численных экспериментов по изучению поведения плавающего ледяного покрова при движении по нему автомобилей. В работе [65] обсуждаются результаты численного моделирования посадки самолетов на ледовые аэродромы.

Нестационарным задачам о поведении плавающих на поверхности жидкости пластин посвящены работы [9, 11, 12, 13, 19, 24, 29, 74, 75, 77, 78, 80, 87, 88, 92, 103–109, 130, 141–144, 158, 159, 160, 172, 176, 178, 182, 188, 202, 209, 210]. В работах [80, 87, 158, 159, 165, 178] исследуется реакция плавающей ледяной пластины на движущиеся с переменной скоростью возмущения. В работе [178] отмечается, что при движении с критической скоростью амплитуда линейно возрастает со временем. Если груз разгоняется до критической скорости, заметного эффекта не наблюдается.

Кроме сплошного ледяного покрова рассматривается модели ледяного покрова с трещиной [93, 109, 110, 116, 181, 208]. В [208] исследуются прогибы бесконечного ледяного покрова с трещиной от движения нагрузки. Полученные результаты сравниваются с результатами, полученными для сплошного ледяного покрова. Рассматривается вязкоупругая модель ледяного покрова. Для решения задачи применяется метод граничного интеграла в сочетании с методом конечных разностей. Решение, полученное предложенным методом, сравнивается с результатами полученными другими методами. Полубесконечные модели ледяного покрова рассматривались в работах: [102, 109, 110, 115, 117, 181].

В работах [4–6, 10–12, 19, 36, 37, 41, 42, 63, 68, 69, 72, 73, 76, 77, 99–101, 105, 119, 121, 122, 140, 142–144, 146, 149, 150, 153, 156, 167, 168, 174, 175, 176 187] ледяной покров моделируется тонкой равномерно сжатой или растянутой упругой пластинкой. В работах Kerr A.D. [167, 168] исследует влияние сжатия и растяжения на критическую скорость. Показано, что сжатие снижает, а растяжение увеличивает значение критической скорости. В [187] кроме сжатия учитывается течение и стратификация жидкости. Рассматривается двухслойная жидкость. В работах Bates H.F. and Shapiro L.H. [149, 150] решается плоская задача для сжатой вязкоупругой пластины, плавающей на поверхности идеальной

жидкости. Проведенные исследования показали, что лед толщиной меньше 0,25 м может быть эффективно разрушен транспортными средствами на воздушной подушке, работающими в ряд на критической скорости. Исследуется реакция плавающего ледяного покрова на движущееся транспортное средство в зависимости от толщины льда, модуля упругости и глубины жидкости. В статье [156] Das S. изучает влияние сил сжатия и течения на распространение изгибно-гравитационных волн, исследует эффект блокировки при сжатии выше критического значения.

В работах [8, 97, 103, 104, 106, 111, 119] изучается влияние продольных, поперечных и сдвиговых сжимающих усилий на изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове. В [8] исследуются трехмерные установившиеся колебания пластинки, по поверхности которой с постоянной скоростью перемещается источник возмущений. В [97] движущаяся внешняя нагрузка движется по неравномерно сжатому ледяному покрову, ограниченному прямоугольным каналом. В [103] рассмотрено периодическое и импульсное воздействие нагрузки на ледяной покров. В [104] по поверхности ледяного покрова движется прямоугольная область, которая описывает движение судна на воздушной подушке. В [106] рассмотрена трехмерная нестационарная задача о генерации изгибно-гравитационных волн для жидкости со сдвиговым течением. В [111] исследуются волны, которые образуются при движении по поверхности льда нагрузки и погруженной в жидкость сферы. В [119] решена задача о движении сферы в жидкости под неравномерно сжатым ледяным покровом.

В работах [105, 106, 120, 121, 122] исследуется деформация ледяного покрова при наличии течения со сдвигом скорости. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластинкой с учетом равномерного [105, 120–122] и неравномерного сжатий [106]. В статье [120] рассматриваются случаи импульсного и периодического источников. В [121, 122] источник движется под произвольным углом к направлению течения.

Колебаниям ледяного покрова, на который воздействуют периодические нагрузки, посвящены работы: [3, 9, 13, 43, 62, 74, 75, 77, 78, 103, 108–109, 114,

130, 139, 141–144, 161, 169, 176]. В работах [103, 108–109, 114, 169] рассматривается периодическое воздействие стационарного источника на изгибно-гравитационные волны. В работах [3, 9, 13, 130] исследуются трехмерные изгибно-гравитационные волны, возникающие в плавающей на поверхности жидкости упругой пластине, по поверхности которой перемещаются гармонически меняющиеся со временем давления. В [43, 62] исследуются колебания ледяного покрова от периодического изменения давления в подушке СВП. Ледяной покров моделируется вязкоупругой изотропной пластиной, которая описывается моделью Кельвина-Фойгта. Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния ледяного покрова. В статье Duffy D.G. [161] исследует волновое движение в плавающем морском льду, которое возникает под действием движущейся вибрирующей нагрузки.

В большинстве работ жидкость считается идеальной, несжимаемой. В работах [91, 92, 154, 155] рассматривается слой сжимаемой жидкости. В [91, 92] решаются плоские задачи. В [91] отмечается, что для скоростей значительно меньше скорости звука применяется теория тонких пластин, а для высоких скоростей требуется привлечение динамических уравнений теории упругости. В [92] решается нестационарная задача. В уравнениях движения пластины учитываются силы растяжения, поперечного сдвига и инерции вращения. В работе отмечается, что слой жидкости можно считать бесконечно глубоким, если толщина водного слоя больше $35h$. В статье [154] Chonan S. исследует колебания плавающей на поверхности сжимаемой жидкости однородной бесконечной пластины, которая подвергается нагрузке, движущейся с постоянной скоростью. В работе [155] проведен анализ колебаний двухслойной пластины, опирающейся на сжимаемое жидкое полупространство. Решение приведено с учетом сдвиговой деформации и вращательной инерции. В своей работе [180] Nevel D.E. жидкость считает вязкой. Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. Рассматривается как сосредоточенная, так и равномерно распределенная по окружности нагрузка. Определяется скорость, которая вызывает резонанс.

В линейных моделях, при движении с критической скоростью амплитуда стремится к бесконечности. Чтобы лучше понять решение при движении с критической скоростью были предложены различные модели ледяного покрова. Один из подходов в моделях ледяного покрова основан на учете вязкости материала. Вязкоупругие приближения рассматриваются в работах [26, 27, 29, 46, 50, 53, 59, 60, 93, 94, 128, 136, 149, 150, 158–160, 166, 173, 197, 199, 202, 203, 208]. В своих работах Bates H.F. и Shapiro L.H. [149, 150] показали, что учет вязкости может ограничивать рост прогиба ледяного покрова при движении с критической скоростью. В [166] показано, что для вязкоупругой модели ледяного покрова амплитуда волн конечна для всех скоростей. Учет вязкости приводит к конечной амплитуде при движении с критической скоростью. Движение источника со скоростью выше критической приводит к более быстрому затуханию коротких волн, распространяющихся впереди источника, и более медленному затуханию длинных волн, за источником. В работе [160] рассматриваются две вязкоупругие модели. Первая модель ледяного покрова основана на модели Кельвина-Фойгта со временем релаксации деформации. Эта модель соответствует модели, рассмотренной Жесткой В.Д. [26, 27], где задача о ледяном покрове под действием нагрузки была решена численно. Вторая модель рассматривает ледяной покров как вязкостный материал с функцией памяти. Эта модель рассматривается в работах [166, 202]. В работе Козина В.М. [46] приводится обоснование рассмотрения вязкоупругих моделей ледяного покрова. Полученные выводы могут быть использованы при построении математических моделей ледяного покрова для проведения теоретических исследований.

Ряд авторов [38, 152, 158–160, 183–185] рассматривают нелинейные модели ледяного покрова. В работах [152, 158–160, 183–185] рассматривается нелинейный отклик ледяного покрова на движущуюся по ледяному покрову нагрузку. Включение нелинейности позволяет исключить стремление амплитуды к бесконечности при движении с критической скоростью [152]. В [152] нелинейность обусловлена включением нелинейных членов в уравнение Бернулли и уравнение упругой пластинки. В [183–185] граничные условия на

границе лед-жидкость являются нелинейными. Нелинейные члены в уравнении пластины у разных авторов разные. Единого мнения здесь нет.

С другой стороны, необходимость продления навигации на замерзающих водных путях ставит задачу разрушения ледяного покрова. Для этих целей, кроме обычных ледокольных средств, используются суда на воздушной подушке (СВП), которые двигаясь с определенной скоростью, создают условия для разрушения ледяного покрова. Отсутствие у них осадки позволяет разрушать ледяной покров на акваториях любой глубины. К одним из первых работ, посвященных этой проблеме, можно отнести работы Зуева В.А. [30] и Зуева В.А., Козина В.М. [32]. Дальнейшие исследования в этом направлении были продолжены Зуевым В.А. [31], Козиним В.М. и его учениками [28, 54, 58, 86, 87, 93, 94, 98].

Одним из способов разрушения ледяного покрова при использовании СВП является резонансный метод, который основан на возбуждении в ледяном покрове изгибно-гравитационных волн достаточной амплитуды, чтобы произошло его разрушение. Этому вопросу посвящен ряд работ: [18, 35, 43, 44, 47, 48, 51, 54, 58, 60–62, 93, 94, 98, 136, 150]. При этом важно знать значения критических скоростей, при которых наиболее вероятно разрушение ледяного покрова [45, 82, 90, 167, 168, 204, 205]. Эффективность применения СВП может быть увеличена, если при прямолинейном равномерном движении периодически менять давление в воздушной подушке судна [43, 62]. В [150] показано, что лед толщиной 0,25 м легко может быть разбит судами на воздушной подушке, которые работают на критической скорости. В [47] проведен краткий обзор экспериментальных и теоретических исследований ледяного покрова, подверженного воздействиям движущихся нагрузок. Исследованы возможности резонансного метода разрушения ледяного покрова. Поясняется целесообразность его реализации судами на воздушной подушке.

Исследованию колебаний сплошного ледяного покрова при воздействии на него изгибно-гравитационных волн от движущихся погруженных тел посвящены работы [14–17, 21, 39, 52, 67, 93, 95, 96, 99–101, 106, 111, 119, 136, 137, 186]. В работах [14–17] исследуются колебания ледяного покрова, плавающего на

поверхности бесконечно глубокой жидкости при обтекании локализованного источника возмущений. Методом стационарной фазы построено асимптотическое представление дальних волновых возмущений ледяного покрова. Показано, что основными параметрами, влияющими на структуру волновых возмущений ледяного покрова, являются толщина ледяного покрова и скорость потока. В монографии Земляка В.Л. и др. [21], кроме экспериментальных исследований, проведено численное моделирование движения погруженного тела, а также теоретические исследования в приповерхностной водной среде, как для свободной поверхности, так и при наличии ледяного покрова. В [39] рассматривается плоская задача о движении диполя в толще идеальной жидкости с ледяным покровом, который моделируется пластиной Кирхгофа-Лява. В монографии Козина В.М. и др. [52, 67] исследуется возможность использования подводных судов для разрушения ледяного покрова. Приводятся результаты экспериментальных исследований. В работах Савина А.А. и Савина А.С [95, 96] исследуется докритический режим движения диполя (сферы), при котором ледяной покров не совершает колебательные движения. В работах Стуровой И.В. [99–101] исследуется влияние скорости движения погруженного тела (сферы), толщины плавающего льда, сжимающих и растягивающих усилий на распределение прогибов в ледяном покрове. В [106, 111] лед моделируется упругой неравномерно сжатой пластиной. В статье Ткачевой Л.А. [119] исследуется движение сферы в жидкости бесконечной глубины под плавающим ледяным покровом при неравномерном его сжатии. Исследуется прогиб льда в зависимости от его толщины, скорости движения и глубины его погружения, а также направления движения. Монографии Козина В.М. и др. [136, 137] посвящены экспериментальным исследованиям разрушения ледяного покрова изгибно-гравитационными волнами от движения подводных судов. Эксперименты проводились в опытовом ледовом бассейне Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. Статья Rogorelova A.V. et al. [186] посвящена экспериментальным и теоретическим исследованиям влияния глубины опытового бассейна на прогибы ледяного покрова при движении модели

под ним. При проведении экспериментов ледяной покров получался путем замораживания поверхностного слоя воды, либо использовался резиновый лист, плавающий на поверхности жидкости.

Плавающий ледяной покров также используется как взлетно-посадочная полоса. Этому вопросу посвящен ряд работ [55–57, 65, 89, 93, 196]. Основными параметрами, которые влияют на безопасность эксплуатации ледовых взлетно-посадочных полос, являются вес самолета, толщина ледяного покрова, характеристики льда в зависимости от температуры, геометрия водоема [56]. В [57] рассматриваются результаты экспериментальных исследований деформации ледяного покрова при взлете, посадке и равномерном движении мотодельтаплана. Показано, что при движении мотодельтаплана со скоростью больше резонансной, несущая способность ледяного покрова увеличивается. В работе [65] приводятся результаты численного моделирования колебаний плавающего ледяного покрова при посадке самолетов на ледовые аэродромы. В результате численных экспериментов проведено исследование предельной толщины льда при посадке на плавающий ледяной покров самолетов различных типов. Статья [89] посвящена теоретическим исследованиям нормальных напряжений в ледяном покрове при взлете и посадке самолетов. Исследуется влияние толщины и модуля упругости на напряженное состояние ледяного покрова. Показано, что максимальные напряжения в пластине наблюдаются при взлете самолета. В [55] рассматривается задача о взлете и посадке самолета на плавающий лед при переменной глубине водоема. В работе сделан вывод о незначительном влиянии глубины водоема на прогибы ледяного покрова. В статье [196] приводятся результаты серии экспериментов на морском льду в Антарктиде.

Актуальными являются исследования, посвященные распространению волн в каналах, покрытых ледяным покровом, по поверхности которого перемещается нагрузка. Каналы можно рассматривать как упрощенную модель рек с ледяным покровом. С другой стороны, многие эксперименты проводятся в ледовых бассейнах, имеющих прямоугольную форму. В работах [83, 84, 97, 118, 132–135, 170, 171, 189–191] исследуется реакция ледяного покрова на нагрузку, которая

движется по замерзшему каналу. Канал имеет вертикальные стенки с ледяным покровом, который моделируется тонкой эластичной пластинкой, прикрепленной к стенкам канала. В [170] исследуется нестационарная задача. В [132–135] ледяной покров моделируется тонкой вязкоупругой пластинкой. В [97] лед рассматривается как тонкая вязкоупругая пластинка постоянной толщины с неравномерным сжатием.

Движущиеся транспортные средства создают волны, которые могут привести к катастрофическим последствиям. Ряд работ [18, 35, 40, 47, 49, 52, 93, 112, 127, 136, 137, 151, 162, 194–196, 198–200, 206, 207] посвящен экспериментальным исследованиям реакции ледяного покрова на движущиеся нагрузки. В [151] представлены и обсуждены результаты полевых испытаний плавучих ледяных щитов на движущиеся нагрузки. Показано, что прогиб максимален при движении груза с критической скоростью, которая зависит от толщины льда и глубины воды. Данные показали, что критическое отклонение и деформации могут быть в несколько раз больше, чем при статической нагрузке. В своей работе [162] Еуге D. приводит результаты экспериментов, посвященных изучению реакции плавающего ледяного покрова на движущиеся транспортные средства. Испытания проводились на ледяном покрове глубокого пресноводного озера Diefenbaker (Канада). Максимальная глубина озера 46 м, средняя толщина льда от 0,5 до 0,73 м. Различные транспортные средства проезжали по трассе в широком диапазоне скоростей. Он выделил четыре режима движения транспортных средства. Было показано, что эти данные подтверждают существующие теории. В [194, 196] приводятся результаты экспериментальных исследований, проведенных на морском льду Антарктиды в проливе Мак-Мердо. В [195] проведен анализ результатов экспериментов, которые проводились на пресноводном льду озера Femund в Норвегии и морском льду в Антарктиде. В [18] представлены результаты экспериментальных исследований, проведенных в ледовом бассейне Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема (г. Биробиджан). Монография [137] посвящена экспериментальным исследованиям движения погруженного тела, в опытовом ледовом бассейне. В

[198–200] приводятся результаты экспериментальных исследований на ледяном покрове озера Сарома (Япония) с использованием снегоходов в качестве движущейся нагрузки. Результаты экспериментов показали наличие критической скорости. В работах. [199, 200] Takizawa T провел математическую обработку результатов экспериментов для установления резонансных и критических скоростей движения нагрузки.

В работе Squire V.A. et al. [195] приведены результаты экспериментов на озере в Норвегии и на морском льду в Антарктиде. Измерялись деформации льда, вызванные движением транспортного средства. Обсуждается существование критической скорости, при которой деформация является резонансной. Отмечается, что экспериментальные результаты для морского и озерного льда аналогичны. Однако, для озерного льда критическая скорость равнялась 15,2 м/с, а для морского – 19,6 м/с. Обе критические скорости являются минимальной фазовой скоростью распространения изгибно-гравитационных волн. В статье [194] отмечается, что величина и форма профиля прогиба зависит от веса и скорости транспортного средства, а также от толщины и свойств льда. Эксперименты проводились на морском льду пролива Мак-Мердо (Антарктида). Для экспериментов в качестве транспортного средства использовался пикап и самолет ВМС США. Отмечается, что экспериментальные данные хорошо согласуются с теорией. В [196] приводятся результаты экспериментов на Антарктическом морском льду с использованием тензометрических датчиков для измерения деформаций, вызванных транспортными средствами. Отмечено, что результаты экспериментов отлично согласуются с теорией. В монографии Squire V.A. et al. [192] обобщены результаты многих исследователей вплоть до 1995 г. Монография многократно переиздавалась. Последнее издание вышло в 2012 г. [193]. В книге выполнен краткий отчет об исследованиях перемещения грузов по плавающему ледяному покрову, который охватывает как экспериментальные, так и теоретические работы. Приводятся примеры экспериментальных исследований с их интерпретацией.

В работах [148, 201] продемонстрирована возможность использования спутниковых радиолокационных наблюдений ледяного покрова при движении по нему движущегося транспортного средства. Полученные результаты могут оказать неоценимый вклад в решение проблемы безопасности движения транспортных средств по ледовым дорогам.

1.2. Математические модели ледяного покрова

Сплошной ледяной покров, плавающий на поверхности жидкости, вносит значительные изменения в характеристики поверхностных волновых движений. Поверхностные волны в сплошном ледяном покрове представляют собой комбинацию изгибной волны в ледяной пластине и гравитационной волны в воде. В зависимости от температуры и характера нагрузки, ледяной покров моделируется упругой или вязкоупругой пластиной. Простейшим математическим моделям ледяного покрова посвящены работы: [30, 46, 59, 83, 93, 128, 131].

При решении прикладных задач ледяной покров часто рассматривается как тонкая упругая пластинка, плавающая на поверхности жидкости. Колебания плавающего ледяного покрова, как тонкой упругой однородной пластины, впервые рассмотрел в своей работе Greenhill A.G. [163, 164].

В монографии Зуева В.А. [30, стр. 13] отмечается, что лед при температурах от -3°C и ниже ведет себя как вполне упругое тело, подчиняясь закону Гука. В этом случае уравнение малых вынужденных колебаний ледяного покрова записывается в виде [128, стр. 53]:

$$D\nabla^4\zeta + \rho_1 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = q(x, y, t), \quad (1.1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, $\nabla^4 = \Delta_l^2$, $\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ρ – плотность жидкости, D , E , h , ρ_1 , μ – цилиндрическая жесткость, модуль нормальной упругости (модуль Юнга), толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластины, $\zeta(x, y, t)$ – прогиб

пластины (возвышение поверхности пластина-жидкость), $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал движения жидкости. $q(x, y, t)$ – внешняя сила. $D\nabla^4\zeta + \rho_1 h \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ – упругая составляющая; $\rho g\zeta + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ – гидродинамическая составляющая.

С учетом сил равномерного сжатия уравнение малых колебаний ледяной пластины (1.1) записывается в виде:

$$D\nabla^4\zeta + Q\Delta_l + \rho_1 h \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \rho g\zeta + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} = q(x, y, t), \quad (1.2)$$

где Q – сжимающее усилие (при отрицательных значениях – растяжение).

В случае неравномерного сжатия уравнение (1.2) имеет вид [103]:

$$D\nabla^4\zeta + Q_x \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + Q_y \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + Q_{xy} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} + \rho_1 h \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \rho g\zeta + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} = q(x, y, t), \quad (1.3)$$

где Q_x, Q_y, Q_{xy} – продольное, поперечное и сдвиговое сжатие.

При температуре таяния во льду преобладают вязкие и пластические свойства. В качестве линейной вязкоупругой среды, имитирующей лед, рассматриваются модели Максвелла и Кельвина–Фойгта.

В монографиях Хейсина Д.Е. [128, стр. 182] и Зуева В.А. [30, стр. 19] отмечается, что для колебательных процессов, периоды которых много меньше времени релаксации льда, можно принять закон деформирования Кельвина–Фойгта. Тогда уравнение колебаний вязкоупругой ледяной пластины записывается в виде [30, 46, 128]:

$$\frac{Gh^3}{3} \left(1 + \tau_\phi \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4\zeta + \rho_1 h \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \rho g\zeta + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} = q(x, y, t), \quad (1.4)$$

где $\tau_\phi = \frac{\eta_\phi}{G}$ – время релаксации деформаций, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль упругости льда при сдвиге, η_ϕ – коэффициент вязкости при сдвиге.

В [128, стр. 185] отмечено, что, если колебания происходят с большим периодом, следует принимать модель Максвелла с линейной релаксацией. В этом случае уравнение малых колебаний ледяного покрова имеет вид [46, 128]:

$$\frac{Gh^3}{3} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \zeta + \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho g \zeta + \rho_1 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = q(x, y, t), \quad (1.5)$$

где $\tau_m = \frac{\eta_m}{G}$ – Максвелловское время релаксации напряжений, η_m – коэффициент вязкости при сдвиге.

В [30, стр. 19] отмечается, что, если период колебаний большой или если рассматривается поведение льда при медленном изменении нагрузки, то применяется модель Максвелла с линейной релаксацией [30]:

$$\frac{Gh^3}{3} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \zeta + \rho_1 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = q(x, y, t), \quad (1.6)$$

где τ_m – время релаксации напряжений.

Уравнения (1.1)–(1.6) являются основными линейными моделями ледяного покрова.

1.3. Физико-механические свойства льда

Значительная часть водных объектов страны (реки, озера, водохранилища и моря) в зимний период покрывается ледяным покровом. Поэтому изучение поведения плавающего ледяного покрова от воздействия на него различного рода нагрузок является одной из актуальных задач современной отечественной науки.

Морской лед ведет себя как вполне упругое тело, если соблюдается закон Гука. Упругие свойства ледяного покрова вполне описываются тремя характеристиками: модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона μ и плотностью ρ . Зная модуль Юнга и коэффициент Пуассона, модуль сдвига G и модуль объемной упругости K можно определить по следующим формулами:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

Упругие характеристики льда (модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона) определяются двумя основными методами: статическим и динамическим. Кроме указанных методов, значения упругих характеристик льда,

получают с помощью сейсмических, ультразвуковых и акустических методов, которые неплохо согласуются между собой. Исследованию физико-механических характеристик льда посвящен ряд работ: [1, 2, 22, 25, 40, 66, 79, 81, 112].

Приведем основные физико-механические параметры для пресноводного и морского льда, которые необходимы для дальнейшего исследования.

Плотность льда.

Плотность льда в значительной степени определяется структурой льда. Она зависит от температуры, давления, солёности и других факторов. Плотность морского льда незначительно отличается от плотности пресноводного. Плотность льда колеблется в пределах: $\rho_{\text{л}} = 830 \div 930 \text{ кг/м}^3$ для морского и $\rho_{\text{л}} = 800 \div 920 \text{ кг/м}^3$ для пресноводного. В работе [2] приводится эмпирическая формула зависимости плотности льда от температуры T ($^{\circ}\text{C}$) и давления P (Па)

$$\rho(P, T) = \rho_0 (1 + 0,94 \cdot 10^{-7} ((P/1,01 \cdot 10^5) - 1)) (1 - 1,53 \cdot 10^{-4} T),$$

где $\rho_0 = 916,8 \text{ кг/м}^3$ – плотность чистого льда, $P = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Коэффициент Пуассона.

Коэффициент Пуассона – это величина отношения относительного поперечного сжатия к относительному продольному растяжению. Этот коэффициент зависит от природы материала. Величина коэффициента Пуассона изменяется в пределах: $\mu = 0,30 \div 0,42$. Для практических расчетов величину коэффициента Пуассона льда при температуре T можно выразить формулой [81]:

$$\mu = 0,333 + 0,06105 \exp(T/5,48).$$

Для изотропных материалов, подчиняющихся закону Гука:

$$\mu = (E/2G) - 1.$$

Модуль упругости (модуль Юнга).

Модуль упругости E характеризует сопротивляемость льда упругой деформации при растяжении или сжатии: $E = \sigma/\varepsilon$, где σ – напряжение, вызываемое в образце действующей силой (равно силе, делённой на площадь приложения силы), ε – упругая деформация образца, вызванная напряжением (равна отношению изменения размера образца после деформации к его первоначальному размеру).

Результаты по определению E статическими методами существенно зависят от условий проведения экспериментов. Это связано с тем, что значение модуля упругости необходимо находить только в области упругих деформаций. При статических же испытаниях рассмотренными методами обязательно проявляют себя пластические деформации, то есть измеренная величина деформации обычно превышает истинную и полученные значения E оказываются заниженными. При определении E статическим методом проявляются пластические деформации. Модуль упругости E , зависит от температуры и структуры льда. Для определения модуля упругости льда используют статический и динамический способы. При статическом методе значение модуля упругости E_c меньше значения полученного при динамическом E_d [30]:

$$E_c = (5,69 - 0,0648 \cdot T) \cdot 10^9 \text{ Па} ; E_d = (8 \div 9,8) \cdot 10^9 \text{ Па} ,$$

где T – абсолютная температура воздуха.

В Таблице 1.1 приведены диапазоны изменения Модуля Юнга, коэффициента Пуассона и плотности для морского и пресноводного льда, полученные в результате анализа указанных выше работ.

Таблица 1.1 – Значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и плотности льда

Упругие характеристики льда	Морской лёд	Пресноводный лёд
Модуль Юнга E , (Па, Н/м ²)	$(1,2 \div 10,0) \cdot 10^9$	$(2,9 \div 12,3) \cdot 10^9$
Коэффициент Пуассона, μ	$0,30 \div 0,40$	$0,33 \div 0,42$
Плотность льда, ρ_l (кг/м ³)	$830 \div 930$	$800 \div 920$

Для количественной оценки численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu = 0,34$, $\rho_l = 870$ кг/м³, $\rho_g = 10^3$ кг/м³, $h = 0,2; 0,5; 1,0$ м, $H = 100$ м.

1.4. Фазовая и групповая скорости изгибно-гравитационных, гравитационных и упругих волн

Ледяной покров, плавающий на поверхности жидкости, существенно меняет характер поверхностного волнения. Поверхностные волны в сплошном ледяном покрове представляют собой комбинацию изгибной волны в ледяной пластине и гравитационной волны на воде. Сплошной ледяной покров, плавающий на поверхности жидкости, будем рассматривать как тонкую упругую пластину, лежащую на упругом основании. Для математического описания волновых процессов, происходящих на границе раздела пластина-жидкость, приходится привлекать известные из теории упругости уравнения изгиба пластин, а также уравнения гидродинамики.

Рассмотрим дисперсионные зависимости фазовых и групповых скоростей упругих волн в пластине, гравитационных волн на поверхности жидкости и изгибно-гравитационных волн в плавающей упругой пластине. Исследуем влияние сил сжатия и растяжения на фазовую скорость изгибно-гравитационных волн.

Дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний ледяной пластины, плавающей на поверхности жидкости, в рамках гипотез Кирхгофа-Лява имеет вид:

$$D\nabla^4\zeta + Q\Delta_l + \rho_1 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = p(x, y, t) + q(x, y, t), \quad z = 0, \quad (1.7)$$

где $p(x, y, t)$ – гидродинамическое давление на нижнюю поверхность льда, $q(x, y, t)$ – внешние силы, $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$ – цилиндрическая жесткость пластины, $\nabla^4 = \Delta_l^2$, $\Delta_l = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, ρ – плотность жидкости, E , h , ρ_1 , μ – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q – сжимающее усилие, ζ – возвышение поверхности пластина-жидкость.

Для потенциального волнового движения малой амплитуды гидродинамическое давление определяется по формуле:

$$p = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, z = 0, \quad (1.8)$$

где φ – потенциал движения жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Подставляя (1.8) в уравнение равновесия ледяной пластины (1.7), получим:

$$D \nabla^4 \zeta + Q \Delta_l + \rho_1 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = q(x, y, t), z = 0. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) представляет собой динамическое граничное условие на поверхности жидкости, покрытой сплошным ледяным покровом (упругой пластиной). Кроме того, прогиб пластины ζ и потенциал скорости φ связаны кинематическим условием:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, z = 0. \quad (1.10)$$

Линеаризованное условие (1.10) (условие прилипания) выражает тот факт, что нормальная компонента скорости жидкости на её поверхности равняется скорости перемещения пластины.

Рассмотрим свободные колебания плавающего ледяного покрова, происходящие в плоскости xOz (плоская задача). В этом случае уравнение (1.9) будет иметь вид [128]:

$$D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \rho_1 h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, z = 0. \quad (1.11)$$

Рассмотрим случай, когда в сплошном ледяном покрове бесконечной протяженности распространяется плоская монохроматическая волна изгиба

$$\zeta = \zeta_0 \exp(i(rx - \omega t)). \quad (1.12)$$

Решение для потенциала скорости φ будем искать в виде:

$$\varphi = \varphi_0 \exp(i(rx - \omega t)) ch(z + H), \quad (1.13)$$

удовлетворяющего уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$ и условию непроницаемости на дне: $\partial \varphi / \partial z = 0, z = H$.

Подставляя (1.12) и (1.13) с учетом (1.10) в уравнение (1.11), получим следующую зависимость между круговой частотой ω и волновым числом r для изгибно-гравитационной волны с учетом сжимающего усилия:

$$\omega = \sqrt{\frac{(Dr^4 - Qr^2 + \rho g)rthrH}{\rho_1 hrthrH + \rho}},$$

для гравитационной волны: $\omega = \sqrt{rgthrH}$,

для изгибной волны: $\omega = r \sqrt{\frac{Dr^2 - Q}{\rho_1 h}}$.

Фазовая v_ϕ и групповая v_g скорости волн определяются следующими формулами:

$$v_\phi = \frac{\omega}{r}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dr}.$$

На Рисунке 1.1 приведены зависимости фазовой (штриховые линии) и групповой (сплошные линии) скоростей от волнового числа при отсутствии сил сжатия и растяжения. Дисперсионные кривые 1 для изгибных волн в свободной пластине, 2 для гравитационных волн на чистой воде и 3 для изгибно-гравитационных волн в плавающем ледяном покрове.

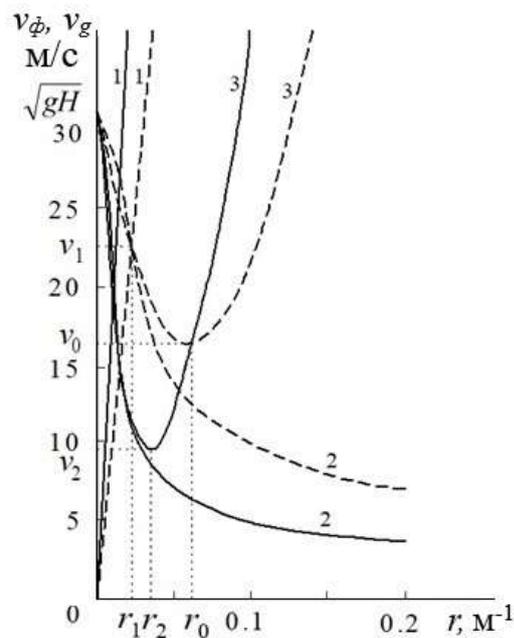


Рисунок 1.1 – Дисперсионные кривые фазовых и групповых скоростей волн для $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

Как фазовая, так и групповая скорость изгибно-гравитационной волны имеют минимум. Минимум фазовой скорости совпадает с групповой скоростью. На рисунке v_0 – минимальное значение фазовой скорости, v_1 – скорость при которой совпадают фазовые скорости изгибной, гравитационной и изгибно-гравитационной волн, \sqrt{gH} – скорость распространения длинных волн. При $v < v_0$, волны в ледяном покрове не образуются.

На Рисунке. 1.2 приведены фазовые (штриховые линии) и групповые (сплошные линии) скорости волн для различных значений сил растяжения и сжатия. Дисперсионные кривые 1 для сил растяжения ($Q = -0,5\sqrt{D\rho g}$), кривые 2 для значения $Q = Q_0$ и кривые 3 для сил сжатия ($Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$). При значении $Q = Q_0$ минимальное значение групповой скорости равно нулю. При дальнейшем увеличении сжимающего усилия ($Q_0 < Q < 2\sqrt{D\rho g}$) этот минимум становится отрицательным (групповая скорость становится отрицательной), где $Q = 2\sqrt{D\rho g}$ – статическое усилие, вызывающее потерю устойчивости ледяной пластины [128].

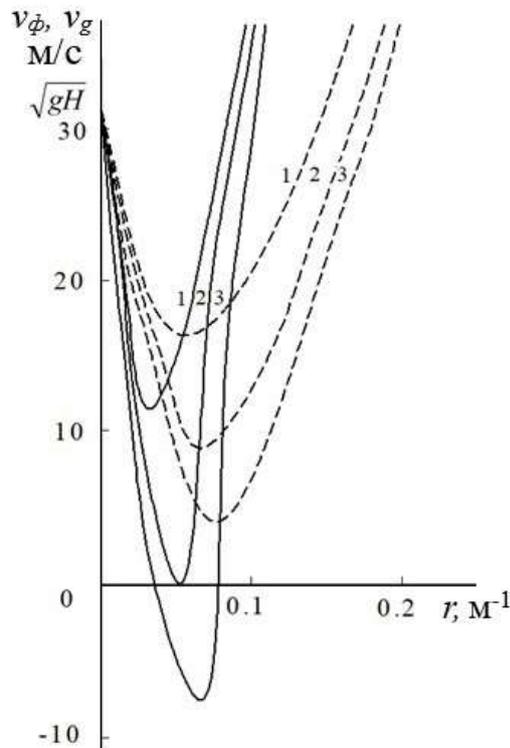


Рисунок 1.2 – Фазовая и групповая скорость изгибно-гравитационных волн для $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

Здесь

$$Q_0 = q_1(r_4),$$

где r_4 – положительный корень уравнения $q_1'(r) = 0$, а q_1 имеет вид:

$$q_1 = r^{-2}((1 + D_1 r^4)q_2 + 4D_1 q_3 r^4)(q_2 + 2q_3)^{-1},$$

$$q_2 = th rH + rH(chrH)^{-2}, q_3 = (1 + \chi_1 rg th rH)thrH.$$

На Рисунке 1.1:

$$v_0 = \tau(r_0)/r_0,$$

где $\tau = ((1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4)M(r))^{1/2}$, $M(r) = rg(1 + \chi_1 rg thrH)^{-1}thrH$, $\tau_0 = (rv)^{-1}\tau$, r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau_0'(r) = 0$, $D_1 = D/\rho g$, $Q_1 = Q/\rho g$, D – цилиндрическая жесткость пластины.

$$v_1 = \tau_3(r_3),$$

$\tau_3 = ((\tau/r)^2 - (\tau'(r\tau' - \tau)^2/r^3\tau'')^{1/2}$, r_3 – действительный корень уравнения $\tau_3'(r_3) = 0$, $r_3 < r_0$,

В Таблице 1.2 приведены значения критических скоростей v_0 и v_1 для сил растяжения (отрицательные значения) и сил сжатия (положительные значения) для значений $Q < Q_0$.

Таблица 1.2 – Значения критических скоростей v_0 и v_1 для сил сжатия и растяжения

$Q = k\sqrt{D\rho g}$	v_0 (м/с)		v_1 (м/с)	
	$h=0,2$ м	$h=0,5$ м	$h=0,2$ м	$h=0,5$ м
$-1,5\sqrt{D\rho g}$	10,2	14,4	18,7	23,4
$-1,0\sqrt{D\rho g}$	9,6	13,6	17,4	22,6
$-0,5\sqrt{D\rho g}$	8,9	12,5	15,8	21,3
0	8,1	11,3	14,0	19,4
$0,5\sqrt{D\rho g}$	7,2	9,9	12,3	16,6
$1,0\sqrt{D\rho g}$	6,0	8,2	10,0	13,6
$1,5\sqrt{D\rho g}$	4,2	6,4	6,3	8,6

При уменьшении сил растяжения и увеличении сжатия значения критических скоростей v_0 и v_1 уменьшаются.

На Рисунке 1.3 приведены зависимости критических скоростей v_0 и v_1 от сил сжатия и растяжения. Здесь $Q_3 = Q/\sqrt{D\rho g}$. Отрицательные значения Q_3 характеризуют растяжения, а положительные сжатие. Сплошные линии отвечают значениям v_0 , а штриховые v_1 . Линии по порядку, снизу вверх, соответствуют толщине ледяной пластины равной 0,2; 0,5 и 1 м.

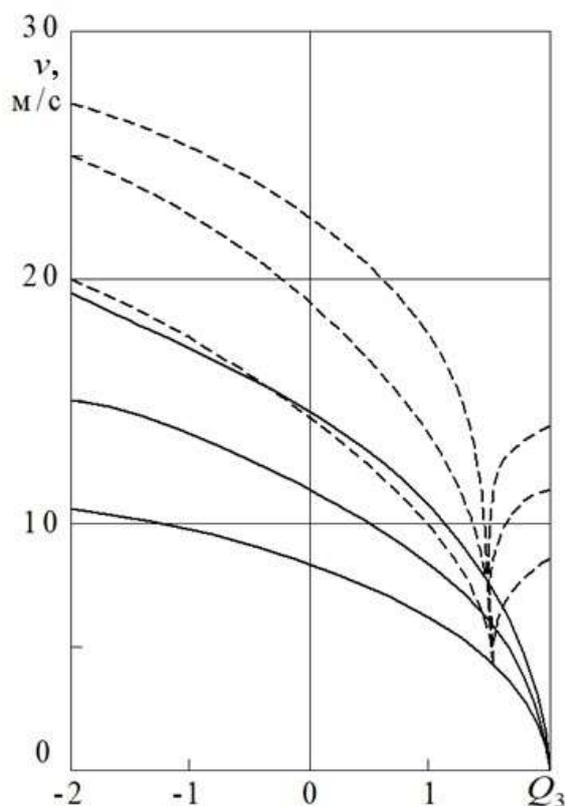


Рисунок 1.3 – Зависимость критических скоростей v_0 и v_1 от сил растяжения и сжатия

Силы растяжения увеличивают значения критических скоростей v_0 и v_1 , а силы сжатия уменьшают. Однако, при $Q_0 < Q < 2\sqrt{D\rho g}$ значение критической скорости v_1 увеличивается, а значение v_0 продолжает уменьшаться, стремясь к нулю при Q стремящемся к значению $2\sqrt{D\rho g}$. Значения критических скоростей v_0 и v_1 увеличиваются при увеличении толщины ледяного покрова.

При уменьшении толщины ледяного покрова и глубины жидкости уменьшаются значения критических скоростей v_0 и v_1 . С уменьшением глубины жидкости уменьшается разница между значениями критических скоростей. Таким образом, для разрушения ледяного покрова судно на воздушной подушке может двигаться с меньшей критической скоростью.

Исследованиям критических скоростей посвящен ряд работ: [45, 82, 90, 113, 129, 167, 168, 204, 205]. В [45] дан обзор работ, посвященных способам определения критических скоростей в результате экспериментальных исследований. Этим же исследованиям посвящены и работы [204, 205]. В данных работах не исследуется значение скорости v_1 как критической.

1.5. Заключение по главе 1

Свойства ледяного покрова зависят от температуры. При температурах ниже -3°C ледяной покров ведет себя как вполне упругое тело. Поэтому ледяной покров часто моделируют тонкой упругой изотропной пластинкой.

При воздействии на ледяной покров движущейся нагрузки, образуются изгибно-гравитационные волны. Эти волны не образуются, если скорость движения источника меньше некоторой критической скорости v_0 , зависящей от глубины водоема, толщины льда и его физико-механических характеристик. Этой скоростью является минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны.

Исследования плавающего ледяного покрова при движении по нему различного рода нагрузок строятся в зависимости от того, является ли разрушение льда желательным или нежелательным. Возникает необходимость исследований поведения ледяного покрова при движении по нему источника возмущений. Важно знать поведение ледяного покрова в зависимости от скорости перемещения нагрузки, знать критические скорости, при которых возможно разрушение ледяного покрова.

Знание значений критических скоростей, при использовании ледяного покрова в качестве ледовых дорог и переправ, позволит избежать опасных режимов движения транспортных средств. С другой стороны, при разрушении ледяного покрова, знание критических скоростей позволит повысить эффективность использования СВП.

По главе 1 опубликованы работы: [37, 63, 139, 144, 145]. Из них: [144] – статья из перечня ВАК; [37, 63, 139, 145] – материалы конференций.

ГЛАВА 2

**ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ОТ
ДВИЖУЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Реакция плавающего ледяного покрова на движущиеся нагрузки представляет большой интерес в северных регионах, где ледяной покров используется для доставки по нему грузов. При использовании ледяного покрова в качестве переправ важно знать не только физико-механические свойства льда, но и его поведение от воздействия на него различного рода нагрузок. При движении по ледяному покрову транспортного средства в нем образуются волны, которые, в определенных случаях, приводят к его разрушению. В большинстве случаев ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной, плавающей на поверхности жидкости. Такая модель хорошо согласуется экспериментальными данными.

В практике судоходства, для продления навигации, часто возникает необходимость разрушения ледяного покрова рек и водоемов. Для разрушения плавающего ледяного покрова используются суда на воздушной подушке (СВП), которые, двигаясь с определенной скоростью, создают условия для разрушения льда. Одним из способов разрушения льда СВП является резонансный способ. При резонансном способе разрушение ледяного покрова происходит вследствие возбуждения изгибно-гравитационной волны при движении СВП.

Среди работ, посвященных теоретическим исследованиям установившихся трехмерных изгибно-гравитационных волн в плавающих на поверхности идеальной несжимаемой жидкости тонких упругих пластин по поверхности которых перемещается нагрузка, отметим следующие работы: [3–6, 8, 10, 23, 104, 121, 122, 130, 157, 192, 199]. В монографиях [3, 192] и работе [199] изучается структура волн и прогибы ледяного покрова, вызванные движущимися нагрузками.

Исследованию структуры трехмерных изгибно-гравитационных волн, вызванных движущимися нагрузками посвящены работы [8, 10, 23, 121, 130]. В

[23, 130] исследуются трехмерные установившиеся гравитационно-упругие волны без учета сил сжатия и растяжения в ледяной пластине для различных режимов перемещения давлений. В [10] исследуется влияние сил растяжения и сжатия на изгибно-гравитационные волны, генерируемые движущимся источником возмущений. В [8] исследуется влияние неравномерного сжатия на трехмерные колебания плавающей упругой пластинки, по поверхности которой перемещается область давлений. Изучается фазовая структура портретов колебаний. В [121] исследуется структура волнового возмущения в равномерно сжатой упругой пластине при наличии течения со сдвигом скорости.

Исследованию прогибов ледяного покрова при движении источника возмущений посвящены работы [4–6, 121, 122, 157]. В [4] изучаются прогибы плавающего ледяного покрова вблизи области давлений движущейся с докритической скоростью ($v < v_0$). Показано что прогиб имеет форму близкую к осесимметричной, если скорость движения давлений близка к нулю, и становится вытянутым при увеличении скорости нагрузки. Глубина прогиба увеличивается при увеличении сил сжатия и убывает с увеличением растягивающих усилий. В [5] исследуются прогибы льда вблизи движущейся области давлений для скорости движения нагрузки выше критической ($v > v_0$). В [6] рассматриваются колебания для докритического и сверхкритического режимов движения нагрузки. Приводится сравнение теоретических профилей изгиба ледяного покрова с известными результатами экспериментальных исследований. В [157] изучаются волновые картины в плавающей пластине от стационарно движущегося источника. Приведено изменение амплитуды волн в зависимости от направления движения источника. В [121, 122] исследуется зависимость максимальных деформаций сжатого ледяного покрова, плавающего на поверхности жидкости при наличии течения со сдвигом скорости.

Исследуем прогибы ледяного покрова на удалении от области движущихся возмущений. Изучим влияние скорости перемещения нагрузки, толщины пластины, сил сжатия и растяжения на амплитуды образующихся трехмерных изгибно-гравитационных волн.

2.1. Постановка задачи

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает ледяной покров, который моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость не ограничены. По поверхности пластины перемещается с постоянной скоростью v нагрузка:

$$p = p_0 f(x_1, y), \quad x_1 = x + vt. \quad (2.1)$$

Считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластинки малыми, исследуем влияние скорости перемещения источника возмущений, сил сжатия и растяжения в пластинке на амплитуды образующихся волн.

В системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости φ

$$\Delta\varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (2.2)$$

удовлетворяющего следующими граничным условиям:

граничному условию на поверхности ($z = 0$)

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_l \zeta + \chi_1 v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -p_1 f(x, y), \quad (2.3)$$

граничному условию на дне ($z = -H$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

и кинематическому условию ($z = 0$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (2.5)$$

где $D_1 = D/\rho g$, $Q_1 = Q/\rho g$, $\chi_1 = \rho_1 h/\rho g$, $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$, $p_1 = p_0/\rho g$, $\nabla^4 = \Delta_l^2$, $\Delta_l = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, ρ – плотность жидкости, E , h , ρ_1 , μ – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q – сжимающее усилие (знак «минус» перед Q отвечает растягивающим усилиям), ζ –

возвышение поверхности пластина-жидкость. При этом и здесь, и далее у x_1 опущен индекс 1.

2.2. Решение задачи

Применяя для решения задачи (2.1) – (2.5) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y , получим следующее интегральное представление для прогиба пластинки:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right), \quad (2.6)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} k_0^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta, \quad (2.7)$$

где $\tau = ((1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4) M(r))^{1/2}$, $M(r) = rg(1 + \chi_1 rg thrH)^{-1} thrH$, $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $x = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$, $k_0 = rv \cos \theta - \tau$, $f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Вычисление интегралов (2.6), (2.7) проведём для трёх диапазонов скорости, перемещающей области давления:

$$0 < v < v_0, \quad v_0 < v < \sqrt{gH}, \quad v > \sqrt{gH}.$$

Здесь $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau'_0(r) = 0$, $\tau_0 = (rv)^{-1} \tau$, v_0 – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны, \sqrt{gH} – скорость распространения длинных волн.

Подынтегральное выражение в (2.7) при $0 < v < v_0$ не имеет особенностей на пути интегрирования. При условиях $v_0 < v < \sqrt{gH}$, $r_1 \leq r \leq r_2$ или $v > \sqrt{gH}$, $0 < r < r_2$ имеет полюса $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$, $r_{1,2}$ – положительные корни уравнения $\tau_0(r) = 1$.

Удовлетворяя условию излучения, заменим путь интегрирования в (2.7) на контур L , идущий по действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ с обходом точек $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ в комплексной плоскости θ по малым полуокружностям снизу и сверху соответственно.

Если $0 < \nu < \nu_0$, то применяя к (2.7) метод стационарной фазы и интегрируя после этого (2.6) по частям получим, что, при больших значениях R , ζ имеет порядок не ниже $O(R^{-1})$.

Пусть $\nu_0 < \nu < \sqrt{gH}$. Представим в этом случае интеграл (2.6) в виде суммы трёх интегралов по отрезкам $[0, r_1]$, $[r_1, r_2]$, $[r_2, \infty]$. Так как подынтегральное выражение в (2.6) на первом и третьем отрезках не имеет особенностей, то последовательное применение метода стационарной фазы и интегрирование по частям показывают, что двойные интегралы, соответствующие первому и третьему отрезкам, имеют порядок $O(R^{-1})$. Следовательно

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left(\int_{r_1}^{r_2} r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right) + O(R^{-1}), \quad (2.8)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_L k_0^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta. \quad (2.9)$$

Вычисляя (2.9) с учётом знаков выражения $\operatorname{Re}(i \cos(\theta - \gamma))$ на малых полуокружностях, обходящих точки $\theta = \theta_{1,2}$, и, подставляя в (2.8) полученные выражения для I , найдём:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^9 \eta_j + O(R^{-1}), \quad (2.10)$$

$$\eta_1 = \int_{r_1}^{r_2} N_1(r, \gamma) dr, \quad 0 \leq \gamma \leq \bar{\gamma}; \quad \eta_2 = \int_{r_1}^{n_1} N_1(r, \gamma) dr, \quad \bar{\gamma} < \gamma \leq \pi; \quad \eta_3 = \int_{n_2}^{r_2} N_1(r, \gamma) dr, \quad \bar{\gamma} < \gamma \leq \pi;$$

$$\eta_4 = \int_{n_1}^{n_2} N_1(r, \gamma) dr, \quad \bar{\gamma} - \pi \leq \gamma \leq 0;$$

$$\eta_5 = \int_{n_3}^{n_4} N_2(r, \gamma) dr, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi - \bar{\gamma}; \quad \eta_6 = \int_{r_1}^{r_2} N_2(r, \gamma) dr, \quad -\bar{\gamma} \leq \gamma \leq 0;$$

$$\eta_7 = \int_{r_1}^{n_3} N_2(r, \gamma) dr, \quad -\pi \leq \gamma < \bar{\gamma} - \pi; \quad \eta_8 = \int_{n_4}^{r_2} N_2(r, \gamma) dr, \quad -\pi \leq \gamma \leq \bar{\gamma} - \pi;$$

$$\eta_9 = R^{-1/2} \int_{r_1}^{r_2} B_3(r, \gamma) \cos(rR - \pi/4) dr,$$

$$N_{1,2} = B_{1,2} \exp(iR\Phi_{1,2}), \quad B_{1,2} = if^*(r)M(r)(\tau v \sqrt{1 - \tau_0^2})^{-1}, \quad B_3 = qrf^*(r)M(r)\tau^{-1},$$

$$\Phi_{1,2} = r(\tau_0 \cos \gamma \mp \sqrt{1 - \tau_0^2} \sin \gamma), \quad q = 2(\sqrt{2\pi r}(v^2 r^2 \cos^2 \gamma - \tau^2))^{-1},$$

$$\bar{\gamma} = \pi - \arctg(\max \tau_1(r)), \quad \tau_1 = \tau_0^{-1} \sqrt{1 - \tau_0^2},$$

где $n_{1,2}$ – вещественные корни уравнения $tg\gamma = -\tau_1(r)$, а $n_{3,4}$ – вещественные корни уравнения $tg\gamma = \tau_1(r)$.

Рассмотрим случай, когда сжимающие усилия удовлетворяют условию $Q_1 < Q_0$, где $Q_0 = q_1(r_4)$, r_4 – положительный корень уравнения $q_1'(r) = 0$, а q_1 имеет вид:

$$q_1 = r^{-2}((1 + D_1 r^4)q_2 + 4D_1 q_3 r^4)(q_2 + 2q_3)^{-1},$$

$$q_2 = th rH + rH (ch rH)^{-2}, \quad q_3 = (1 + \chi_1 rg th rH) thrH.$$

В этом случае фазовые функции Φ_1 и Φ_2 в интегралах η_2 , η_4 , η_5 , η_7 не имеют стационарных точек, а $\eta_9 = O(R^{-1})$. Следовательно, $\eta_2 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_7 = O(R^{-1})$. Стационарные точки фазовой функции Φ_1 в интегралах η_1 , η_3 являются корнями уравнения:

$$tg\gamma = \tau_2(r), \quad \tau_2 = (r\tau_0)' \sqrt{1 - \tau_0^2} (1 - \tau_0(r\tau_0))^{-1}, \quad (2.11)$$

а функции Φ_2 в интегралах η_6 , η_8 корнями уравнения

$$tg\gamma = -\tau_2(r). \quad (2.12)$$

На Рисунке 2.1 приведено качественное поведение функции $\tau_2(r)$ при $Q_1 < Q_0$.

При $v_0 < v < v_1$ уравнение (2.11) имеет в рассматриваемых диапазонах изменения $r \in [r_1, r_2]$ один корень $r = \alpha_3$, а $\tau_2'(r) > 0$. Один корень имеет уравнение

(2.11) и при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, если $0 < \gamma < \gamma_2$ или $\gamma_1 < \gamma < \pi$. Обозначим его через α_1 в первом случае и через α_3 во втором. Если же $v_1 < v < \sqrt{gH}$, а $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$, то имеется три корня $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. При этом $\tau'_2(r) = 0$ в двух точках $r = \alpha_4$ и $r = \alpha_5$. Если $v > \sqrt{gH}$, то $r_1 = 0$, а уравнение $\tau'_2(r) = 0$ имеет только один действительный корень α_5 . Уравнение (2.11) при этом не имеет действительных корней, если $0 < \gamma < \gamma_2$. При $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ имеется два корня α_2, α_3 , а при $\gamma_3 < \gamma < \pi$ только один α_3 .

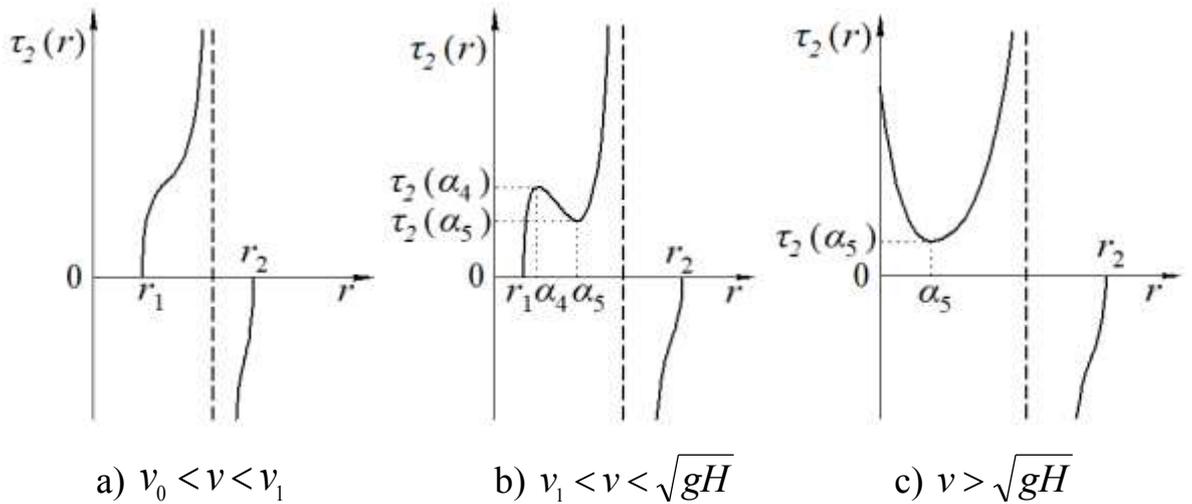


Рисунок 2.1 – Поведение функции $\tau_2(r)$ при $Q_1 < Q_0$

Здесь:
$$v_1 = \tau_3(r_3), \tau_3 = ((\tau/r)^2 - (\tau'(r\tau' - \tau)^2 / r^3 \tau'')^{1/2}, \quad (2.13)$$

где r_3 – действительный корень уравнения $\tau'_3(r_3) = 0$, $r_3 < r_0$.

$$\gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4), \gamma_2 = \arctg \tau_2(\alpha_5), \gamma_3 = \arctg((v^2 / gH) - 1)^{-1/2}, \quad (2.14)$$

$\alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2$ при $\gamma = \gamma_1$, $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_3$ при $\gamma = \gamma_2$. Корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ уравнения (2.11) удовлетворяют и уравнению (2.12) в соответствующих диапазонах изменения скорости перемещения источника v и угловых зонах в нижней полуплоскости ($-\pi \leq \gamma \leq 0$).

2.3. Анализ полученного решения

На основании анализа стационарных точек фазовых функций интегралов $\eta_1, \eta_3, \eta_6, \eta_8$ получим из (2.10):

$$\text{если } 0 < v < v_0, \text{ то } \zeta = O(R^{-1}), \quad (2.15)$$

$$\text{если } v_0 < v < v_1, \text{ то } \zeta = \zeta_3 + O(R^{-1}), 0 \leq |\gamma| \leq \pi, \quad (2.16)$$

если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1 + O(R^{-1}) & \text{при } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1, \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_1 \leq |\gamma| \leq \pi \end{cases} \quad (2.17)$$

если $v > \sqrt{gH}$, то

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2 \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3, \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_3 \leq |\gamma| \leq \pi \end{cases} \quad (2.18)$$

где $\zeta_k = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_k) \cos(R\Phi_j(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4)$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$,

$$\psi_j = -f_1(r)M(r)(v\tau\sqrt{1-\tau_0^2})^{-1}(2\pi|\Phi_j''|)^{-1/2}, f_1(r) = f^*(r)p_1,$$

$f^*(r) = (b/r)J_1(rb)$, J_1 – функция Бесселя, b – радиус области давлений.

При $0 < v < v_0$ (2.15) волн с амплитудой затухания как $R^{-1/2}$ не образуется.

При движении нагрузки со скоростью $v_0 < v < v_1$ образуется одна система волн ζ_3 , затухающих с расстоянием как $R^{-1/2}$ (2.16). Эти волны покрывают всю поверхность плавающей пластинки. На Рисунке 2.2 представлен фазовый портрет образующихся волн – линии равной фазы. Волны, распространяющиеся впереди источника возмущений, обусловлены упругими силами пластинки. Они относительно более короткие. Волны, распространяющиеся за источником возмущений, более длинные. Их поведение напоминает гравитационную волну на морской поверхности. Волны, бегущие впереди источника и за ним, имеют различные групповые скорости. Короткая (упругая) волна распространяется впереди источника, так как ее групповая скорость больше скорости источника и, наоборот, длинная (гравитационная) волна распространяется за источником. По

мере увеличения скорости нагрузки длина изгибной волны уменьшается, а длина волны, бегущей за источником, увеличивается и все больше приобретает характер гравитационной волны. Длина волны на луче $\gamma = 0$ равна $\lambda_1 = 2\pi/r_1$, а на луче $\gamma = \pi$ равна $\lambda_2 = 2\pi/r_2$, где r_1 и r_2 вещественные корни уравнения $\tau_0(r) = 1$. Направление гребней этих волн определяется углом $\gamma_0 = \arctg((v/v_0)^2 - 1)^{-1/2}$. При увеличении скорости перемещения нагрузки величина этого угла уменьшается, и упругие волны распространяются под более острым углом.

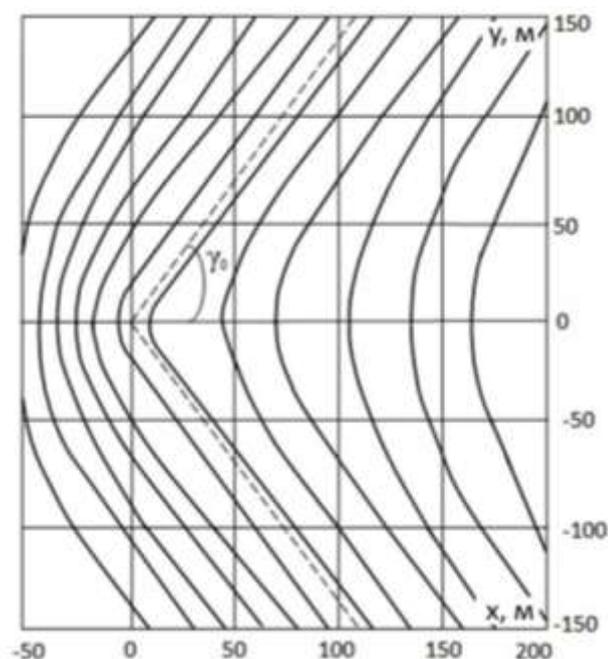


Рисунок 2.2 – Фазовый портрет изгибно-гравитационной волны ζ_3

для $v = 10$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

На Рисунках 2.3 и 2.4 приведено пространственное распределение амплитуды изгибно-гравитационной волны ζ_3 при отсутствии сил сжатия и растяжения. При скоростях движения нагрузки близких к минимальному значению фазовой скорости v_0 (Рисунок 2.3) максимальное значение амплитуды волны находится по трассе движения источника. Амплитуда волны, бегущей впереди источника, меньше амплитуды волны, бегущей за источником. При скоростях движения источника возмущений, приближающихся к критической

скорости v_1 (Рисунок 2.4), максимум амплитуды волн за источником смещается вверх и достигает максимума при $v = v_1$ на луче $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ (Рисунок 2.5).

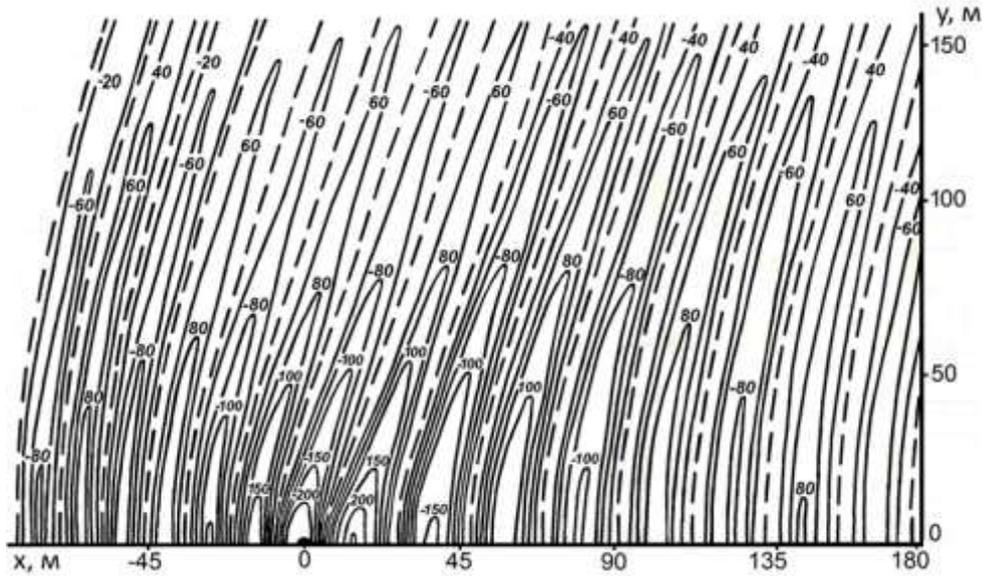


Рисунок 2.3 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3
для $v=8,5$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

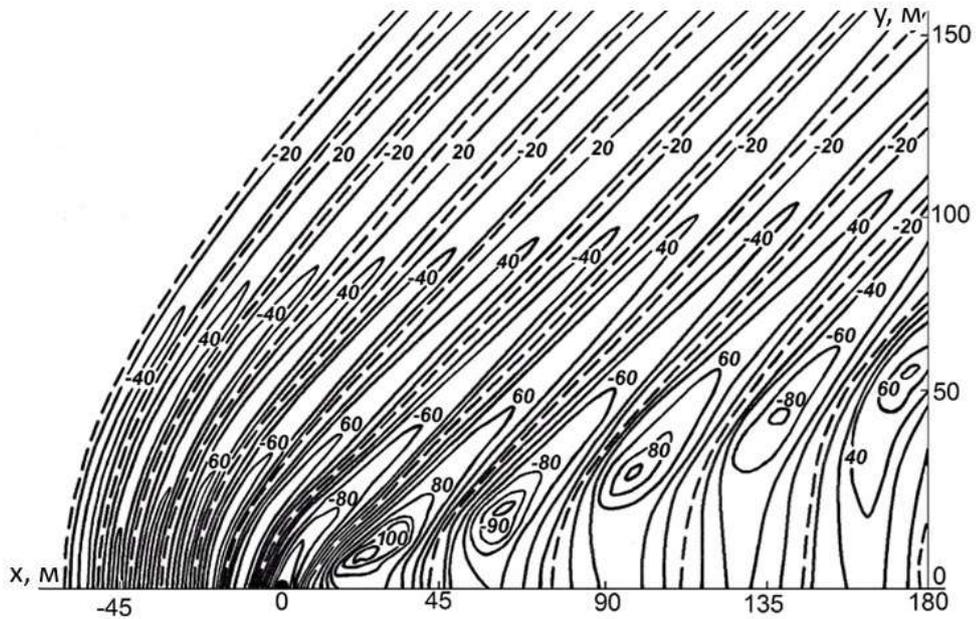


Рисунок 2.4 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3
для $v = 10$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

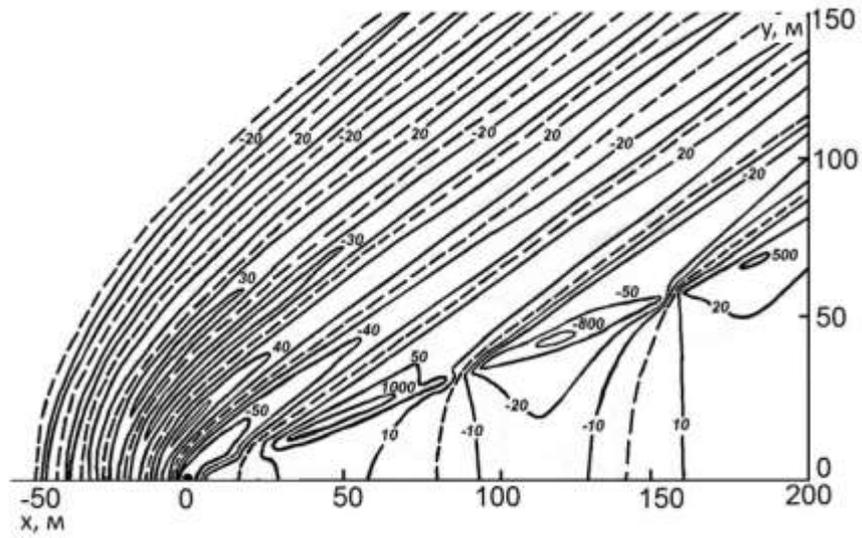


Рисунок 2.5 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3
 для $v = 14$ м/с ($v = v_1$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

На Рисунках 2.6 и 2.7 показано распределение амплитуды изгибно-гравитационной волны ζ_3 для сжимающего усилия (Рисунок 2.6) и силы растяжения (Рисунок 2.7).

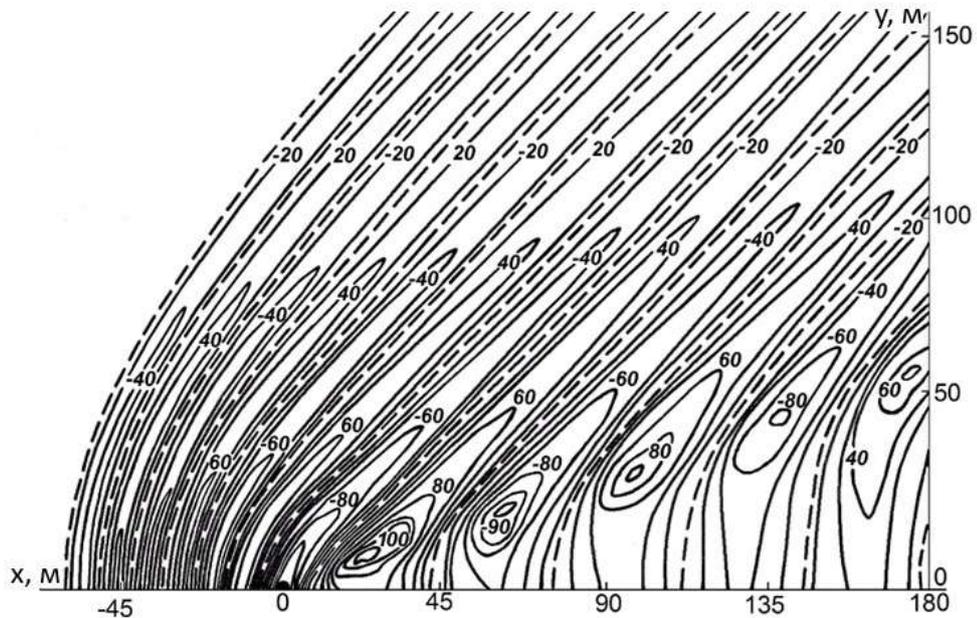


Рисунок 2.6 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3
 для $v = 10$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $Q = 0,5\sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

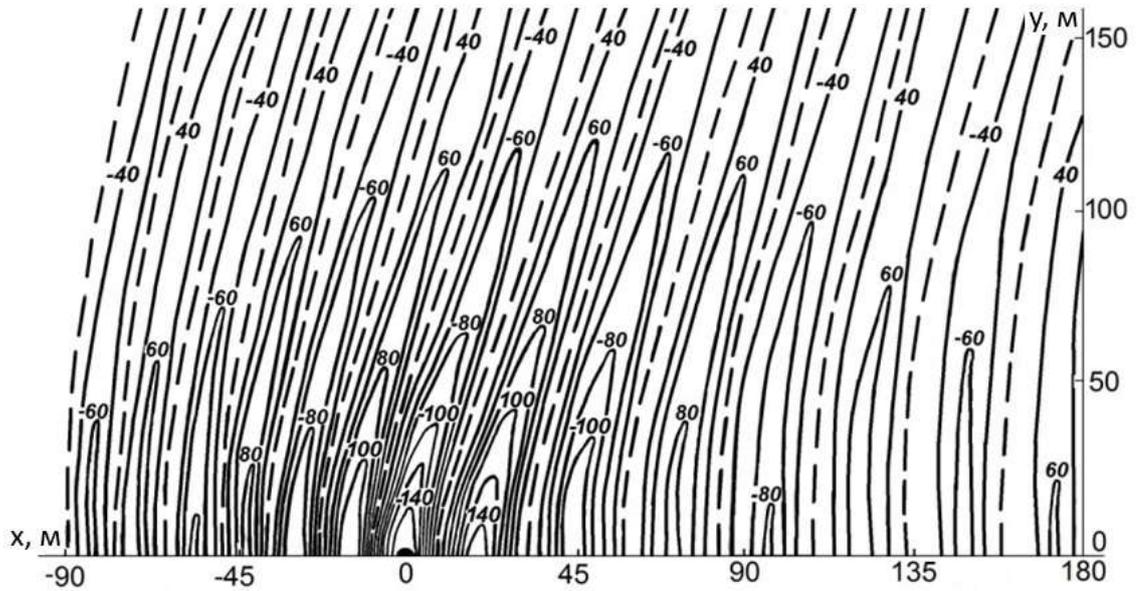


Рисунок 2.7 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3
 для $v = 10$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $Q = -\sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

Амплитуда изгибной волны ζ_3 при увеличении сжимающего усилия уменьшается, а при увеличении растягивающего усилия увеличивается. Это связано с тем, что для первого случая (Рисунок 2.6) скорость $v = 10$ м/с близка к критической скорости v_1 , а для второго случая (Рисунок 2.7) эта скорость близка к v_0 .

На Рисунках 2.8 и 2.9 приведено распределение амплитуды изгибно-гравитационной волны ζ_3 для толщины ледяного покрова равной 0,5 м.

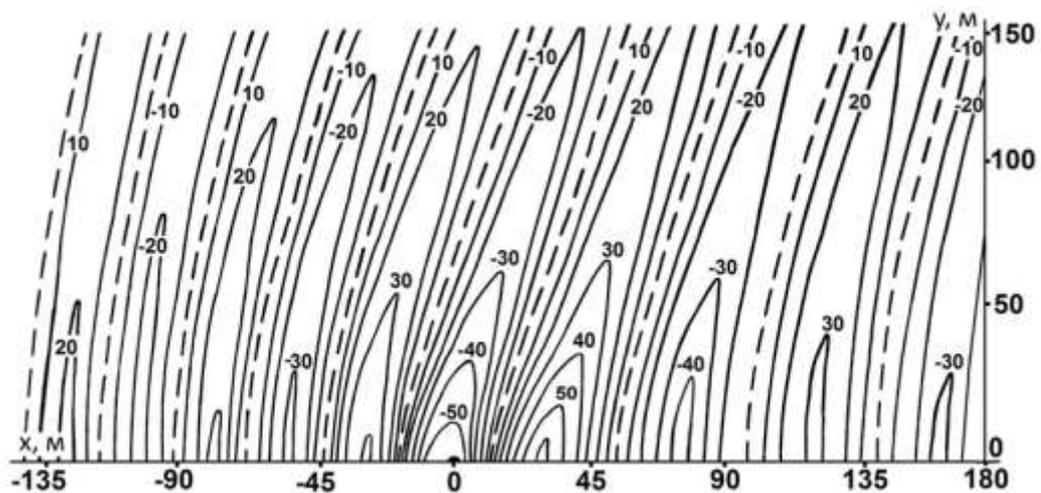


Рисунок 2.8 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 .
 для $v = 12$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $Q = 0$, $h = 0,5$ м, $H = 100$ м

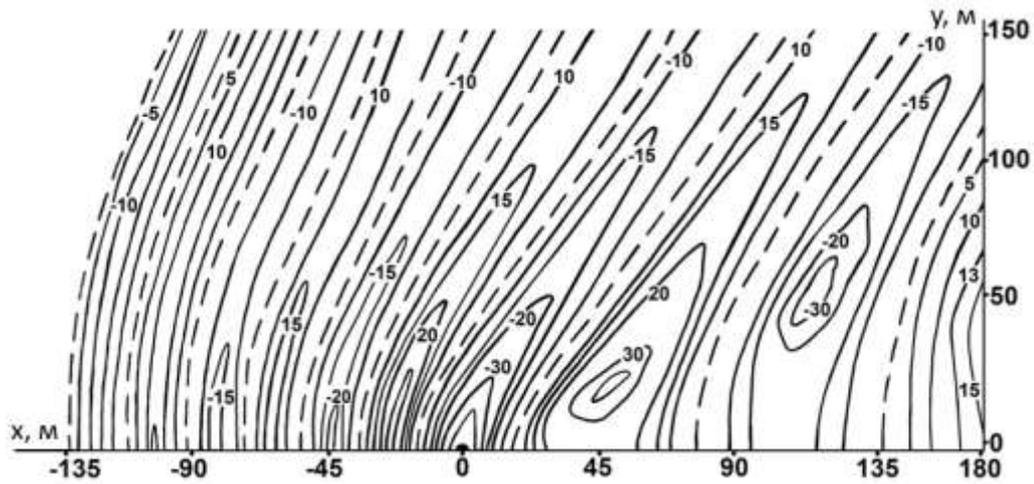


Рисунок 2.9 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 .
 для $v = 14$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $Q = 0$, $h = 0,5$ м, $H = 100$ м

При движении источника возмущений со скоростью близкой к v_0 (Рисунок 2.8) максимум амплитуды находится по трассе движения, а при движении со скоростью близкой к v_1 максимум амплитуды смещается. При увеличении толщины ледяного покрова амплитуда волны ζ_3 уменьшается.

При дальнейшем увеличении скорости перемещения нагрузки $v_1 < v < \sqrt{gH}$ образуются три системы волн: ζ_1 , ζ_2 и ζ_3 . Фазовый портрет этих волн представлен на Рисунке 2.10. Упругая волна ζ_3 распространяется впереди источника, а волны ζ_1 и ζ_2 распространяются за источником возмущений. Упругая волна ζ_3 распространяется в угловой зоне $\gamma_2 < \gamma < 2\pi - \gamma_2$. В угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ упругие волны ζ_3 не распространяются. Волны ζ_1 носят характер поперечных, а ζ_2 продольных корабельных волн, деформированных за счет упругих и массовых сил пластинки. При отсутствии пластинки распространяются только продольные и поперечные корабельные волны. Продольные волны ζ_2 распространяются в угловых зонах, $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$ и $-\gamma_1 < \gamma < -\gamma_2$. Поперечные волны ζ_1 распространяются за источником в угловой зоне $-\gamma_1 < \gamma < \gamma_1$. Эта зона увеличивается при увеличении скорости перемещения нагрузки и при $v = \sqrt{gH}$ $\gamma_1 = \pi/2$.

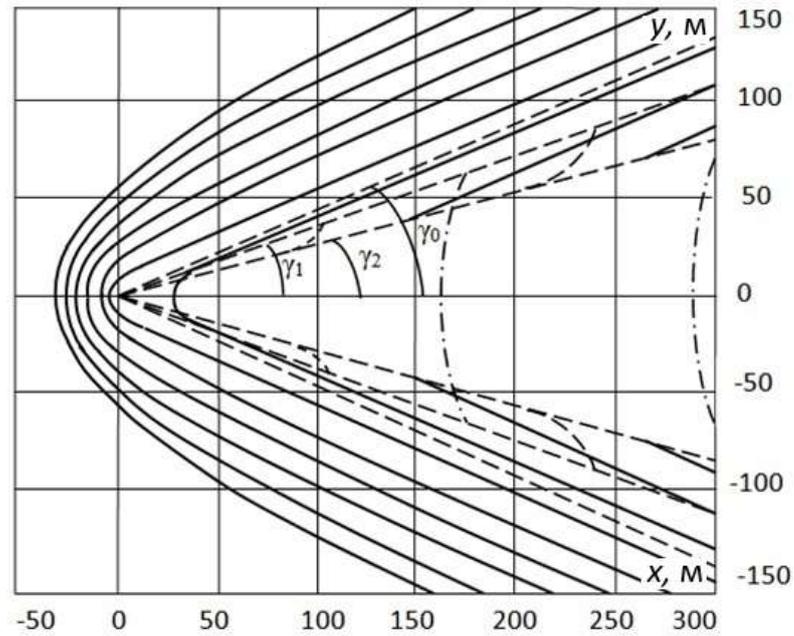


Рисунок 2.10 – Фазовый портрет изгибно-гравитационных волн ζ_1 , ζ_2 и ζ_3

для $v = 20$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

На Рисунках 2.11 – 2.13 представлены амплитуды этих волн: ζ_1 – поперечная волна (Рисунок 2.11); ζ_2 – продольная волна (Рисунок 2.12); ζ_3 – упругая волна (Рисунок 2.13). Амплитуда поперечной волны ζ_1 меньше амплитуды продольной ζ_2 и упругой ζ_3 волн.

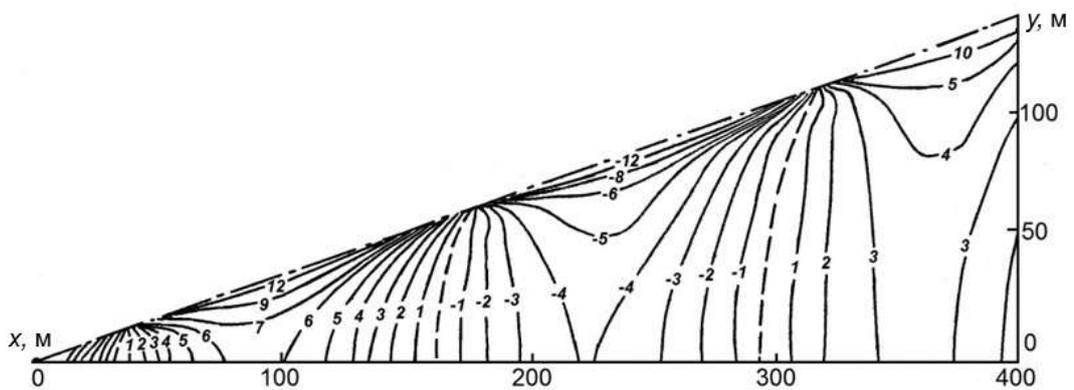


Рисунок 2.11 – Амплитуда поперечной волны ζ_1

для $v = 20$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

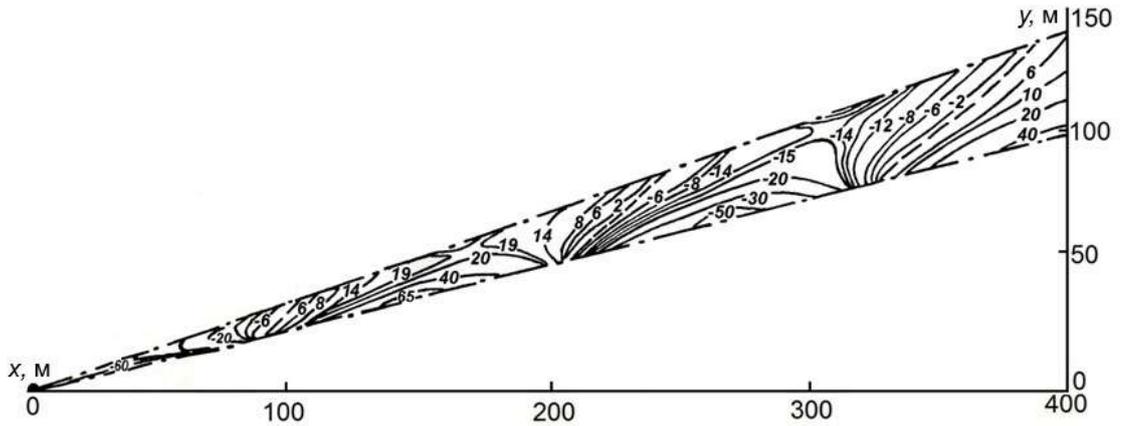


Рисунок 2.12 – Амплитуда продольной волны ζ_2

для $v = 20$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

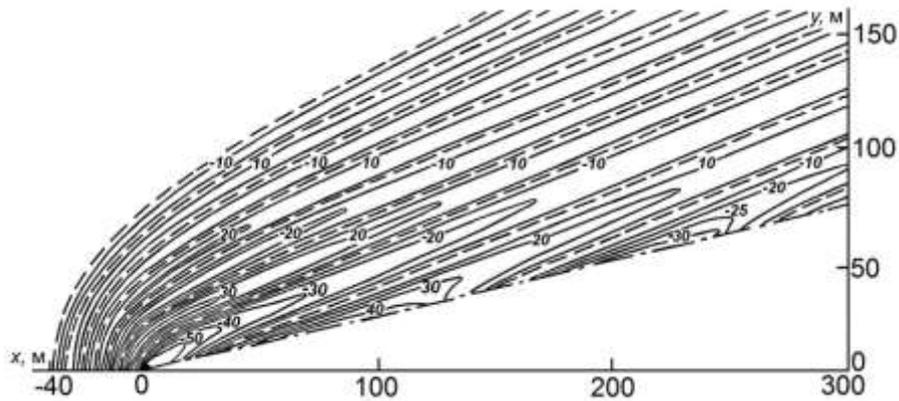


Рисунок 2.13 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3

для $v = 20$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

На Рисунках 2.14 – 2.16 приведены амплитуды поперечной волны ζ_1 (Рисунок 2.14), продольной ζ_2 (Рисунок 2.15) и упругой волны ζ_3 (Рисунок 2.16) волн для сжимающего усилия $Q = \sqrt{D\rho g}$.

Силы сжатия и растяжения существенного влияния на амплитуды волн ζ_1 и ζ_2 не оказывают. При увеличении сжимающих усилий амплитуда упругой волны ζ_3 увеличивается и уменьшается при увеличении сил растяжения. Увеличение толщины ледяного покрова уменьшает амплитуды волн ζ_2 , ζ_3 и не оказывает существенного влияния на амплитуду волны ζ_1 . Наибольшее влияние на

амплитуды волн оказывает скорость перемещения нагрузки. Увеличение скорости уменьшает амплитуды всех трех волн.

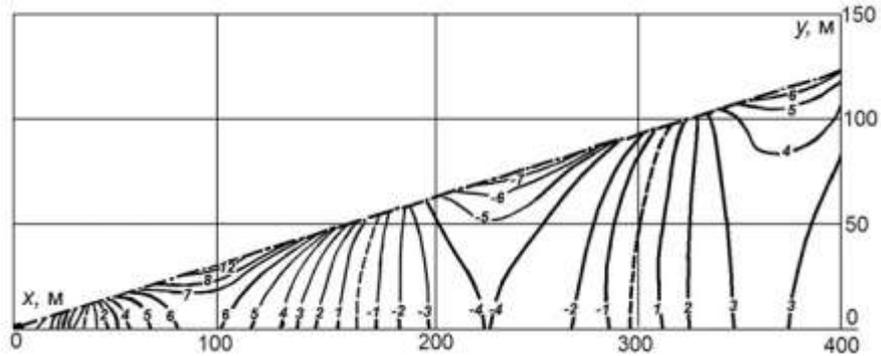


Рисунок 2.14 – Амплитуда поперечной волны ζ_1

для $v = 20$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $Q = \sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

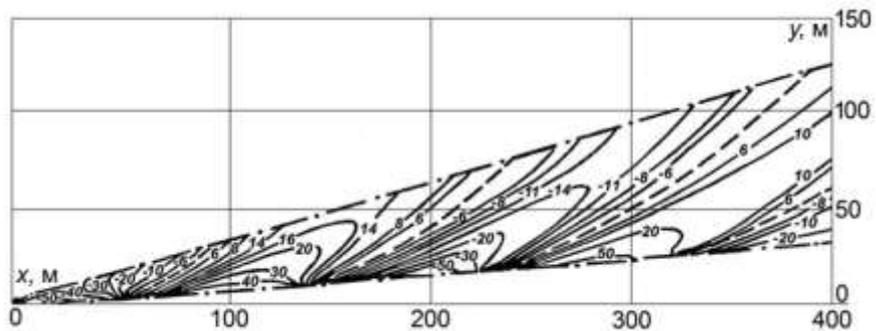


Рисунок 2.15 – Амплитуда продольной волны ζ_2

для $v = 20$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $Q = \sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

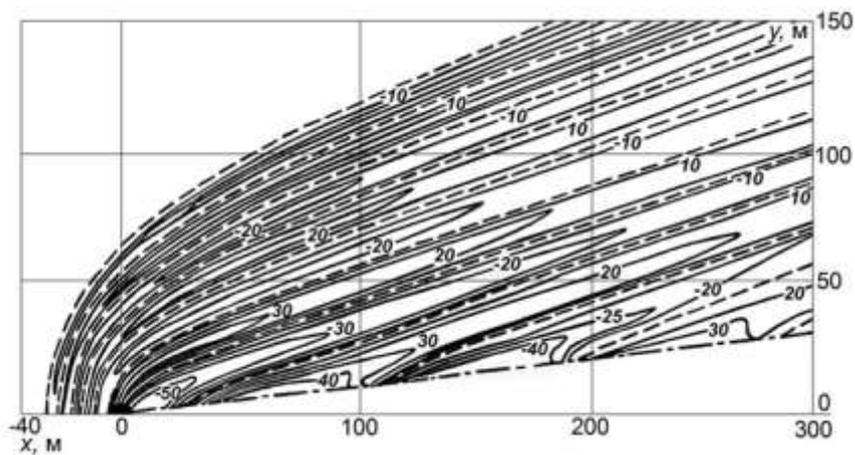


Рисунок 2.16 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3

для $v = 20$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $Q = \sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

При движения нагрузки со скоростью $v > \sqrt{gH}$ поперечные волны ζ_1 не образуются, а распространяются только упругие ζ_3 и продольные ζ_2 волны. На Рисунке 2.17 приведен фазовый портреты этих волн.

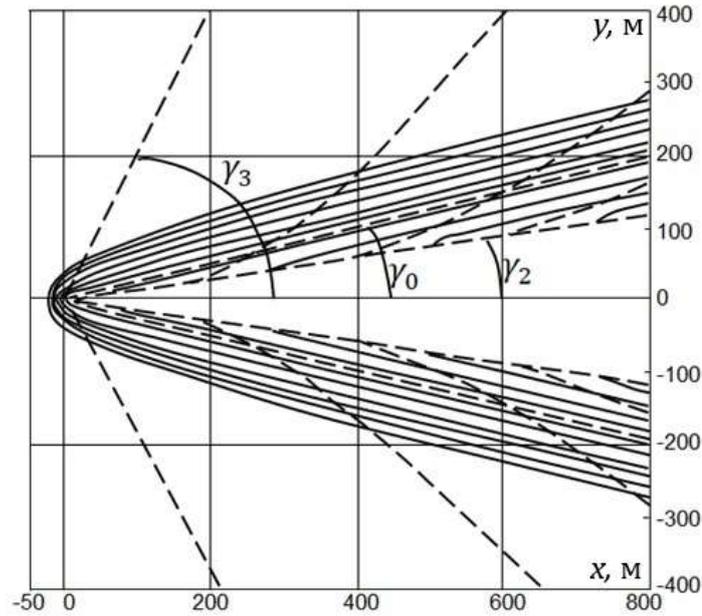


Рисунок 2.17 – Фазовый портрет изгибно-гравитационных волн ζ_2 и ζ_3

для $v = 35$ м/с ($v > \sqrt{gH}$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

Упругие волны ζ_3 образуются впереди источника и распространяются в угловой зоне $\gamma_2 < \gamma < 2\pi - \gamma_2$. Продольные волны ζ_2 распространяются в угловых зонах $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ и $-\gamma_3 < \gamma < -\gamma_2$. В угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ волн с амплитудой затухания $R^{-1/2}$ не образуется. Эта зона уменьшается при увеличении скорости движения нагрузки.

На Рисунках 2.18 и 2.19 представлены амплитуды продольной ζ_2 и упругой ζ_3 волн соответственно при отсутствии сил сжатия и растяжения. Амплитуда упругой волны ζ_3 больше амплитуды продольной волны ζ_2 . При увеличении скорости v амплитуды этих волн уменьшаются.

На Рисунках 2.20 и 2.21 приведены амплитуды продольной ζ_2 (Рисунок 2.20) и упругой ζ_3 (Рисунок 2.21) волн для сжимающего усилия $Q = \sqrt{D\rho g}$.

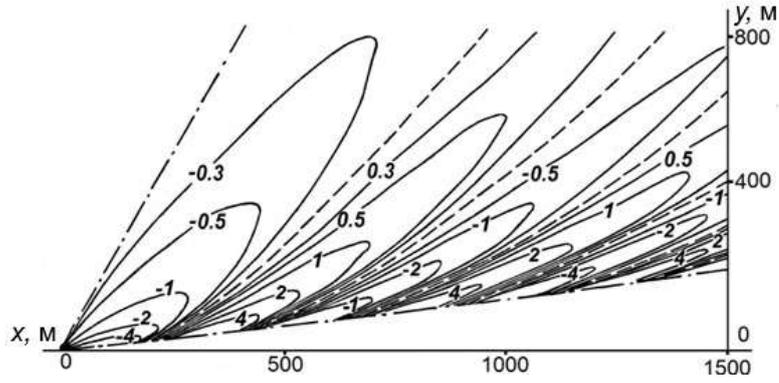


Рисунок 2.18 – Амплитуда продольной волны ζ_2
 для $v = 35$ м/с ($v > \sqrt{gH}$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

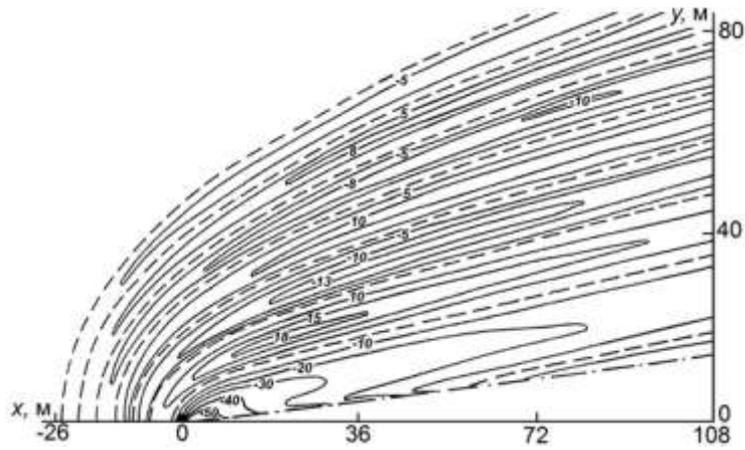


Рисунок 2.19 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3
 для $v = 35$ м/с ($v > \sqrt{gH}$), $Q = 0$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

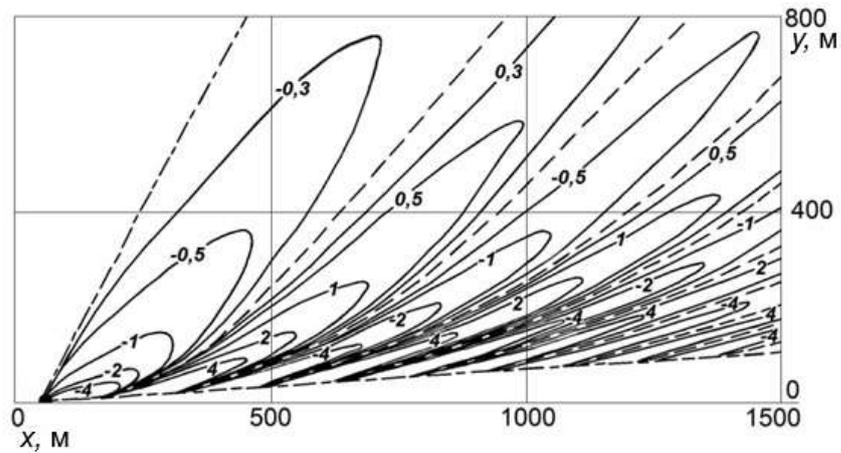


Рисунок 2.20 – Амплитуда продольной волны ζ_2
 для $v = 35$ м/с ($v > \sqrt{gH}$), $Q = \sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

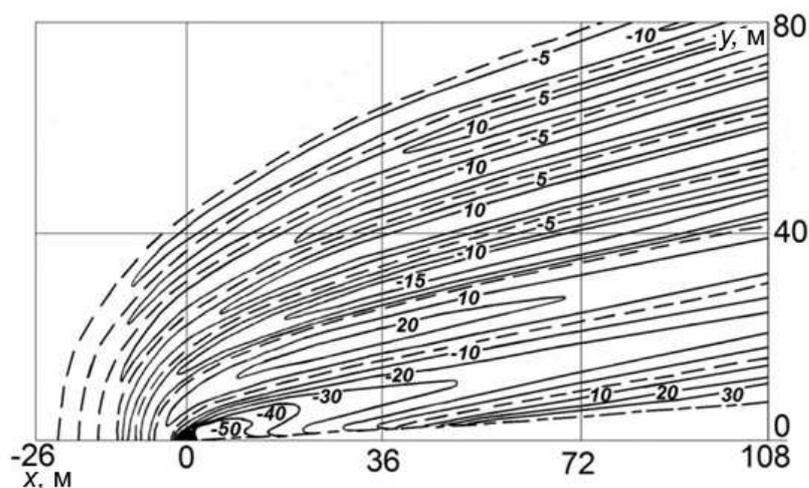


Рисунок 2.21 – Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3

для $v = 35$ м/с ($v > \sqrt{gH}$), $Q = \sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м

Увеличение сил сжатия, растяжения и толщины ледяного покрова на амплитуду волны ζ_2 существенного влияния не оказывает. Амплитуда упругой волны уменьшается при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова. При увеличении сил сжатия амплитуда волны ζ_3 увеличивается. С увеличением скорости движения источника возмущений, амплитуды волн ζ_2 и ζ_3 , как и при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, уменьшаются.

На Рисунках 2.3 – 2.9, 2.11 – 2.16, 2.18 – 2.21 шкала делений по осям координат x и y дана в метрах. Отклонение изолиний амплитуд волнового движения дано в миллиметрах.

2.4. Заключение по главе 2

Исследованы три значения критических скоростей движения нагрузки по плавающему ледяному покрову. При этих скоростях меняется характер волнового движения.

Если скорость движения нагрузки $v < v_0$, то изгибно-гравитационные волны не образуются. При этих скоростях прогиб ледяного покрова как при стационарной нагрузке. По мере приближения к критической скорости v_0 область

за нагрузкой становится шире и длиннее, переходя при $v > v_0$ в волновой (колебательный) режим.

При $v_0 < v < v_1$ образуются изгибно-гравитационные волны, которые распространяются впереди нагрузки и за ней. Перед движущейся нагрузкой образуются короткие волны, которые образуются только при наличии ледяного покрова. За нагрузкой образуются более длинные волны, имеющие характер гравитационных волн, деформированных за счет ледяного покрова. Амплитуда волн, бегущих впереди источника, меньше амплитуды волн, бегущих за источником.

Наибольший интерес для практических целей имеют критические скорости v_0 и v_1 . Транспортное средство при перемещении по ледяному покрову должно двигаться со скоростью либо меньше v_0 , либо больше v_1 , чтобы избежать разрушения льда. С другой стороны, для разрушения ледяного покрова судно на воздушной подушке должно двигаться с критической скоростью v_0 или v_1 .

Таким образом, критические скорости v_0 и v_1 могут быть рекомендованы для разрушения ледяного покрова. При движении с этими скоростями амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 максимальна. При $v = v_0$ амплитуда максимальна по трассе движения источника, а при $v = v_1$ максимальна вдоль лучей $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ и $\gamma = -\gamma_1 = -\gamma_2$. Если разрушение ледяного покрова нежелательно, то следует избегать движений с этими критическими скоростями.

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то образуется три системы волн – упругие ζ_3 впереди источника, продольные ζ_2 и поперечные ζ_1 гравитационные волны за источником. Наименьшая амплитуда у поперечной волны ζ_1 . Волны ζ_1 и ζ_2 носят характер поперечной и продольной корабельных волн.

Если $v > \sqrt{gH}$, то образуются упругие волны ζ_3 впереди источника и продольные волны ζ_2 за источником. За источником образуется угловая зона, в которой волны не образуются. При увеличении скорости движения источника эта зона сужается. Наибольшая амплитуда у упругой волны ζ_3 .

Амплитуды образующихся волн уменьшаются при движении со скоростью $v > v_1$. При движении с критической скоростью равной \sqrt{gH} происходит изменение характера волнового возмущения, но на амплитуды образующихся волн существенного влияния это не оказывает.

Силы сжатия и растяжения оказывают существенное влияние на амплитуду упругой волны ζ_3 и не оказывают существенного влияния на амплитуды волн ζ_1 и ζ_2 . Увеличение сжимающего усилия приводит к увеличению амплитуды упругой волны ζ_3 при $v > v_1$. Однако, при увеличении сжимающих усилий, если $v_0 < v < v_1$ амплитуда упругой волны ζ_3 уменьшается, и увеличивается, если $v > v_1$. На амплитуды поперечных ζ_1 и продольных ζ_2 волн увеличение сил сжатия и растяжения не оказывает существенного влияния. Упругие волны ζ_3 имеют большую амплитуду колебаний, чем продольные и поперечные волны.

При увеличении толщины ледяного покрова амплитуда упругой волны уменьшается. На амплитуды продольной ζ_2 и поперечной ζ_1 волн увеличение толщины ледяного покрова и сжимающего усилия существенного влияния не оказывает.

По главе 2 опубликованы работы: [36, 37, 41, 42, 63, 68-73, 76, 125, 138, 142, 144, 146, 147, 175]. Из них: [36, 71, 73, 76, 125, 144] – статьи из перечня ВАК; [175] – статья, входящая в международные системы цитирования Scopus и Web of Science; [36, 71] – статьи, входящие в международную систему цитирования Web of Science; [68] – научная статья; [37, 41, 42, 63, 69, 70, 72, 138, 142, 146, 147] – материалы конференций.

ГЛАВА 3

РАЗВИТИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исследование неустановившихся трехмерных колебаний плавающего ледяного покрова, вызванных возмущениями, которые движутся равномерно и прямолинейно имеет большое практическое приложение. Движущаяся нагрузка может представлять собой транспортное средство, движущееся по ледовой переправе. Это может быть самолет, совершающий взлет или посадку на ледовый аэродром. Суда на воздушной подушке часто используют для разрушения ледяного покрова. Ледяной покров может подвергаться растяжению или сжатию под воздействием ветра или температурных напряжений.

Среди работ, посвященных нестационарным задачам о поведении плавающих на поверхности жидкости пластин от движущихся источников возмущений, отметим работы [11, 12, 24, 29, 80, 87, 89, 92, 104, 111, 130, 158–160, 165, 172, 178, 182, 188, 192, 202, 209, 210]

В работах [24, 130] рассмотрено развитие трехмерных волн, генерируемых областью давлений, которая движется равномерно и прямолинейно по поверхности изотропной пластинки, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. В работах выполнен асимптотический анализ неустановившихся колебаний. Исследование неустановившихся трехмерных колебаний плавающего ледяного с учетом продольного сжатия и растяжения выполнено в работах [11, 12]. В [104, 111] изучается развитие прогибов ледяного покрова в зависимости от времени. Показано, что неравномерное сжатие существенно влияет на волновое возмущение. Волновой след несимметричен относительно курса движения источника возмущений. В работах [158–160] исследуется зависящая от времени реакция плавающего ледяного покрова на движущуюся нагрузку, которая перемещается со скоростью, зависящей от времени. В [158, 169] математическая модель ледяного покрова учитывает нелинейность. В [160] рассматриваются две вязкоупругие модели. В [165]

исследуется реакция ледяного покрова на движущийся с переменной скоростью груз. В [178] отмечается, что при движении с критической скоростью амплитуда линейно возрастает со временем. Если груз разгоняется до критической скорости, заметного эффекта не наблюдается. В [182, 188, 202] исследуется зависящий от времени отклик плавающей пластины на движущуюся нагрузку.

Исследуем развития трехмерных изгибно-гравитационных волн, генерируемых областью давлений, движущихся по поверхности ледяного покрова. Исследуем влияние равномерного сжатия и растяжения на область распространения изгибно-гравитационных волн.

3.1. Постановка задачи.

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает ледяной покров, который моделируем тонкой упругой изотропной пластинкой. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость не ограничены. В начальный момент времени поверхность пластина-жидкость горизонтальна. Начиная с момента времени $t = 0$ к поверхности пластинки прикладываются давления вида:

$$p = p_0 f(x_1, y), \quad x_1 = x + vt. \quad (3.1)$$

Исследуем влияние равномерного сжатия и растяжения на развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, вызываемых движущимся источником возмущений (3.1).

Считаем движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластинки ζ малыми. В системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости φ

$$\Delta\varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (3.2)$$

с граничными

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_1 \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = -p_1 f(x, y) \quad \text{при } z=0, \quad (3.3)$$

$$\partial\varphi/\partial z = 0 \text{ при } z = -H, \quad (3.4)$$

начальными

$$\varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0 \quad (3.5)$$

и кинематическим

$$\partial\zeta/\partial t = \partial\varphi/\partial z - v\partial\zeta/\partial x \text{ при } z=0, \quad (3.6)$$

условиями,

где $D_1 = D/\rho g$, $Q_1 = Q/\rho g$, $\chi_1 = \rho_1 h/\rho g$, $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$, $p_1 = p_0/\rho g$, $\nabla^4 = \Delta_1^2$, $\Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $F = \partial^2/\partial t^2 + 2v\partial^2/\partial t\partial x + v^2\partial^2/\partial x^2$, ρ – плотность жидкости, E , h , ρ_1 , μ – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q – сжимающее усилие (отрицательные значения Q отвечают растягивающим усилиям), ζ – возвышение поверхности пластина-жидкость. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

3.2. Решение задачи

Применяя к (3.2) – (3.6) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y и преобразование Лапласа по времени t получим следующее интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость:

$$\zeta = -\frac{p_1}{4\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\tau^{-1} M(r) f^*(r) e^{i\Phi(r, \theta, \xi)} d\theta d\xi dr, \quad (3.7)$$

$$\tau = \sqrt{l(r)M(r)}, \quad M(r) = rgthrH(1 + \chi_1 rgthrH)^{-1}, \quad l(r) = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4,$$

$$\Phi = rR \cos(\theta - \gamma) - \xi \Delta_1, \quad \Delta_1 = vrcos\theta - \tau, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{m^2 + n^2}, \quad x = R \cos \gamma, \\ y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta, \quad f^*(r) - \text{трансформанта Фурье функции } f(R).$$

Отсюда для больших значений R и t найдем асимптотическое выражение для ζ при условии $Q < 2\sqrt{D\rho g}$, необходимом для устойчивости пластины [128].

Рассмотрим случай сжимающих усилий, удовлетворяющих условию $Q < Q_0$,

$$\text{где } Q_0 = \tau_4(r_4), \quad \text{где } \tau_4 = \frac{(1 + D_1 r^4)\tau_5 + 4D_1 r^4 \tau_6}{(\tau_5 + 2\tau_6)r^2}, \quad \tau_5 = thrH + rHch^{-2}rH,$$

$\tau_6 = (1 + \chi_1 r g t h r H) t h r H$, r_4 – единственный положительный корень уравнения $\tau'_4(r) = 0$ (штрих означает производную по r).

Применяя к (3.7) метод стационарной фазы [126] последовательно по θ и ξ , получим:

$$\zeta = -\frac{P_1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{s=1}^4 I_s + O(R^{-1}), \quad (3.8)$$

$$I_1 = \int_{r_1}^{r_2} N_1 dr, \quad 0 < \gamma < \pi/2, \quad \cos \gamma < \nu; \quad I_2 = \int_{n_2}^{r_2} N_1 dr, \quad \pi/2 < \gamma < \pi;$$

$$I_3 = \int_{r_1}^{r_2} N_2 dr, \quad -\pi/2 < \gamma < 0, \quad \cos \gamma < \nu; \quad I_4 = \int_{n_4}^{r_2} N_2 dr, \quad -\pi < \gamma < -\pi/2;$$

$$N_{1,2} = B_1 \exp(iR\Phi_{1,2}), \quad B_1 = M(r) f^*(r) / \nu \tau (1 - \tau_0^2)^{1/2}, \quad \nu = \nu t / R,$$

$$\Phi_{1,2} = (\tau_0 \cos \gamma \mp (1 - \tau_0^2)^{1/2} \sin \gamma) r, \quad \tau_0 = \tau / \nu r, \quad n_2 > n_1, \quad n_4 > n_3.$$

Здесь r_1, r_2 – положительные корни уравнения $\tau = \nu r$, а n_1, n_2 и n_3, n_4 – положительные корни уравнений $t g \gamma = -\tau_1(r)$ и $t g \gamma = \tau_1(r)$ соответственно, где $\tau_1 = (1 - \tau_0^2)^{1/2} / \tau_0$. Принадлежность стационарных точек области интегрирования характеризуется условием:

$$0 \leq \xi_0 \leq t, \quad \xi_0 = (\tau_0 (1 - \tau_0^2)^{-1/2} \sin \gamma + \cos \gamma) R \nu^{-1}.$$

В интегралах I_1, I_2 стационарными точками фазовой функции Φ_1 являются корни уравнения:

$$t g \gamma = \tau_2(r), \quad \tau_2(r) = \tau' (1 - \tau_0^2)^{1/2} / (\nu - \tau_0 \tau'). \quad (3.9)$$

Качественное поведение функции $\tau_2(r)$ для различных диапазонов изменения скорости ν приведено на рис. 2.1.

В интегралах I_3, I_4 стационарными точками фазовой функции Φ_2 являются корни уравнения:

$$t g \gamma = -\tau_2(r). \quad (3.10)$$

Если $\nu_0 < \nu < \nu_1$, то уравнение (3.9) имеет один действительный корень $r = \alpha_3$, а $\tau'_2(r) > 0$. Здесь: $\nu_0 = \tau(r_0) / r_0$, r_0 – действительный корень уравнения

$$r\tau' - \tau = 0; \quad v_1 = \tau_3(r_3), \quad \tau_3 = \left(\left(\frac{\tau}{r} \right)^2 - \frac{(\tau'r - \tau)^2 \tau'}{r^3 \tau''} \right)^{1/2}, \quad r_3 - \text{действительный корень}$$

уравнения $\tau'_3(r) = 0$. Один корень имеет уравнение (3.9) и при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, если $0 < \gamma < \gamma_2$ или $\gamma_1 < \gamma < \pi$. Обозначим этот корень через α_1 в первом случае и через α_3 во втором. Если же $v_1 < v < \sqrt{gH}$ и $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$, то имеется три корня $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ уравнения (3.9), так как $\tau'_2(\alpha_4) = \tau'_2(\alpha_5) = 0$ в двух точках. Причем $\alpha_4 < \alpha_5$, $\tau_2(\alpha_4) > \tau_2(\alpha_5)$.

Если $v > \sqrt{gH}$, то $r_1 = 0$, а уравнение $\tau'_2(r) = 0$ имеет только один действительный корень α_5 . Уравнение (3.9) при этом не имеет действительных корней, если $0 < \gamma < \gamma_2$, имеет один корень α_3 при $\gamma_3 < \gamma < \pi$ и два корня α_2, α_3 если $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$.

Здесь

$$\gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = \arctg \tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \arctg((v^2 / gH) - 1)^{-1/2}, \quad (3.11)$$

$\alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3$; $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2$ при $\gamma = \gamma_1$; $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_3$ при $\gamma = \gamma_2$.

Корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ уравнения (3.9) удовлетворяют и уравнению (3.10) для соответствующих диапазонов изменения v и в соответствующих угловых зонах нижней полуплоскости ($-\pi < \gamma < 0$). При скоростях $v < v_0$ стационарных точек нет.

На основании проведенного анализа стационарных точек для возвышения поверхности пластина–жидкость (3.8) получим:

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 < v < v_0 \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_0 < v < v_1 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_1 < v < \sqrt{gH} \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v > \sqrt{gH} \end{cases}. \quad (3.12)$$

Если $v_0 < v < v_1$, то:

$$\zeta_3 = \begin{cases} \eta_{31}, & \text{если } 0 < |\gamma| < \pi, R < u_3 t \\ 0, & \text{если } 0 < |\gamma| < \pi, R > u_3 t \end{cases}. \quad (3.13)$$

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то:

$$\zeta_1 = \begin{cases} \eta_{11}, \text{ если } 0 < |\gamma| < \gamma_1, R < u_1 t \\ 0, \text{ если } \gamma_1 < |\gamma| < \pi; 0 < |\gamma| < \gamma_1, R > u_1 t \end{cases}, \quad (3.14)$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, \text{ если } \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, R < u_2 t \\ 0, \text{ если } 0 < |\gamma| < \gamma_2, \gamma_1 < |\gamma| < \pi; \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, R > u_2 t \end{cases}, \quad (3.15)$$

$$\zeta_3 = \begin{cases} \eta_{31}, \text{ если } \gamma_2 < |\gamma| < \pi, R < u_3 t \\ 0, \text{ если } 0 < |\gamma| < \gamma_2; \gamma_2 < |\gamma| < \pi, R > u_3 t \end{cases}. \quad (3.16)$$

В случае $v > \sqrt{gH}$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, \text{ если } \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, R < u_2 t \\ 0, \text{ если } 0 < |\gamma| < \gamma_2, \gamma_3 < |\gamma| < \pi; \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, R > u_2 t \end{cases}, \quad (3.17)$$

а ζ_3 определяется как в (3.16)

$$\zeta_3 = \begin{cases} \eta_{31}, \text{ если } \gamma_2 < |\gamma| < \pi, R < u_3 t \\ 0, \text{ если } 0 < |\gamma| < \gamma_2; \gamma_2 < |\gamma| < \pi, R > u_3 t \end{cases}.$$

Здесь

$$\eta_{kj} = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_k) \cos(R\Phi_j(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4), \quad u_k = u(\alpha_k, \gamma),$$

$$\psi_j(r) = -\frac{p_1 f^*(r) M(r)}{v\tau(2\pi(1-\tau_0^2)|\Phi_j''|)^{1/2}}, \quad u(r, \alpha) = \frac{v(1-\tau_0^2)^{1/2}}{\tau_0 \sin \gamma + (1-\tau_0^2)^{1/2} \cos \gamma}.$$

3.3. Анализ полученного решения

Из формул (3.12) – (3.17) видно, что колебания упругой пластинки и волновое движение жидкости под ней формируется одной системой волн ζ_3 , если $v_0 < v < v_1$, тремя системами волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, если $v_1 < v < \sqrt{gH}$ и двумя ζ_2, ζ_3 , если $v > \sqrt{gH}$.

На Рисунках 3.1, 3.3, 3.5 приведены фазовые портреты и передние фронты изгибно-гравитационных волн: ζ_3 (Рисунок 3.1); $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ (Рисунок 3.3) и ζ_2, ζ_3 (Рисунок 3.5). На Рисунках 3.2, 3.4, 3.6 приведены передние фронты изгибно-гравитационных волн: ζ_3 (Рисунок 3.2); $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ (Рисунок 3.4) и ζ_2, ζ_3 (Рисунок 3.6) для различных значений сил сжатия и растяжения. На Рисунках 3.2 – 3.6, так как

волновая картина симметрична относительно оси x , то узловые линии и границы их передних фронтов представлены только для верхней полуплоскости $y \geq 0$.

На Рисунке 3.1 приведены фазовые портреты и передние фронты изгибных волн ζ_3 для $v = 10$ м/с ($v_0 < v < v_1$). Сплошные линии в случае отсутствия сил сжатия и растяжения ($Q = 0$) и пунктирные линии для сил растяжения $Q = -\sqrt{D\rho g}$. Волны ζ_3 распространяются как впереди источника возмущений, так и за ним.

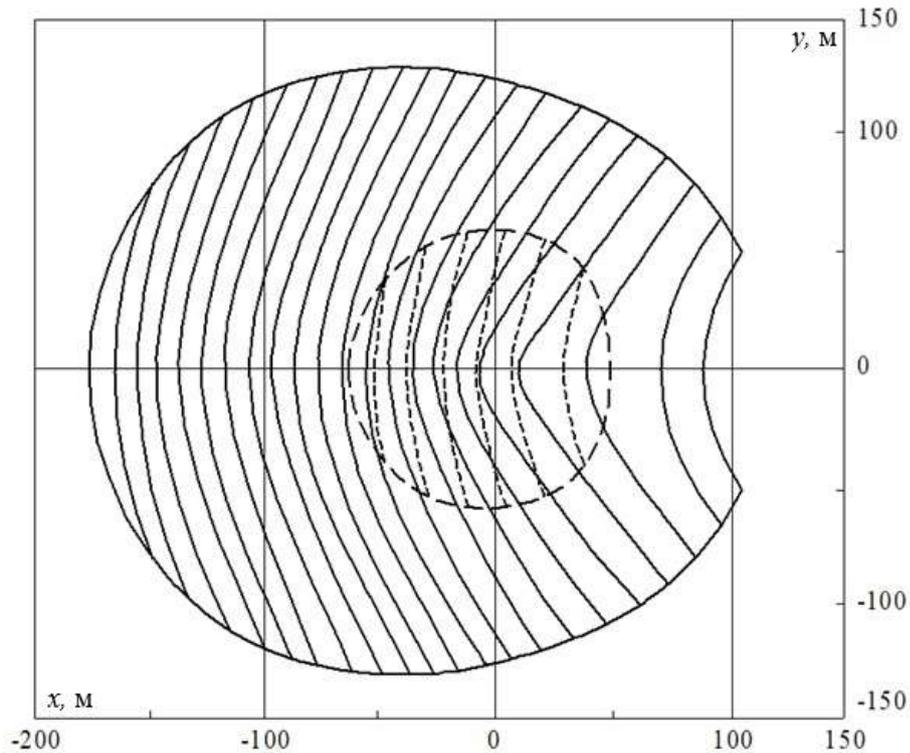


Рисунок 3.1 – Фазовые портреты и фронты изгибно-гравитационной волны ζ_3 для $v = 10$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 20$ с.
 $Q = 0$ (сплошные линии), $Q = -\sqrt{D\rho g}$ (штриховые линии)

На Рисунке 3.2 приведены фронты изгибных волн ζ_3 . Штрихпунктирная линия для сил сжатия $Q = 0,5\sqrt{D\rho g}$, сплошная линия для значений $Q = 0$, и штриховая линия для сил растяжения $Q = -0,5\sqrt{D\rho g}$.

Передний фронт u_3 упругой волны увеличивается при увеличении сил сжатия и уменьшается при увеличении сил растяжения. Скорость волн ζ_3 , распространяющихся впереди источника, больше скорости волн, распространяющихся за источником.

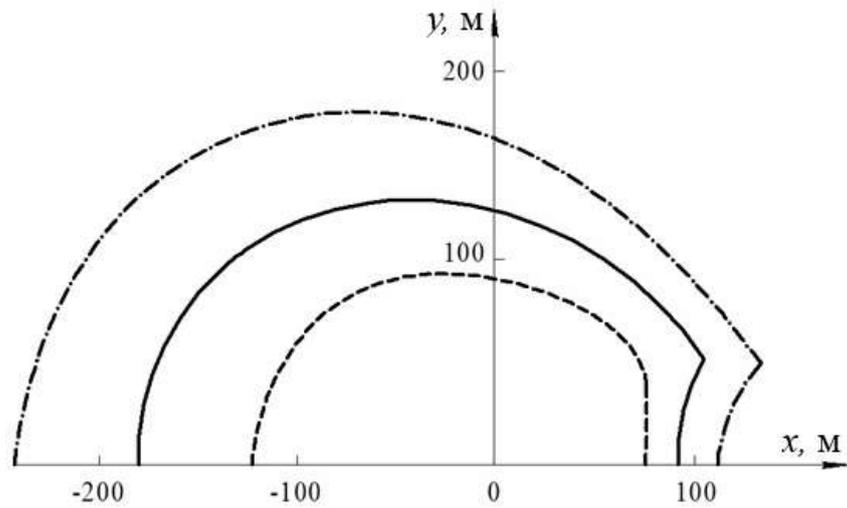


Рисунок 3.2 – Фронты изгибно-гравитационной волны ζ_3
 для $v = 10$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 20$ с,
 $Q = 0,5\sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирная линия), – $Q = 0$ (сплошная линия),
 $Q = -0,5\sqrt{D\rho g}$ (штриховая линия)

На Рисунке 3.3 фазовый портрет волн ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 и передние фронты поперечной ζ_1 (кривая ad), продольной ζ_2 (кривая ab) и часть фронта изгибной ζ_3 (кривая bc) волн. Поперечные волны ζ_1 распространяются в угловой зоне $|\gamma| < \gamma_1$, продольные волны ζ_2 внутри секторов $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1$, а упругие ζ_3 в области $\gamma_2 < |\gamma| \leq \pi$.

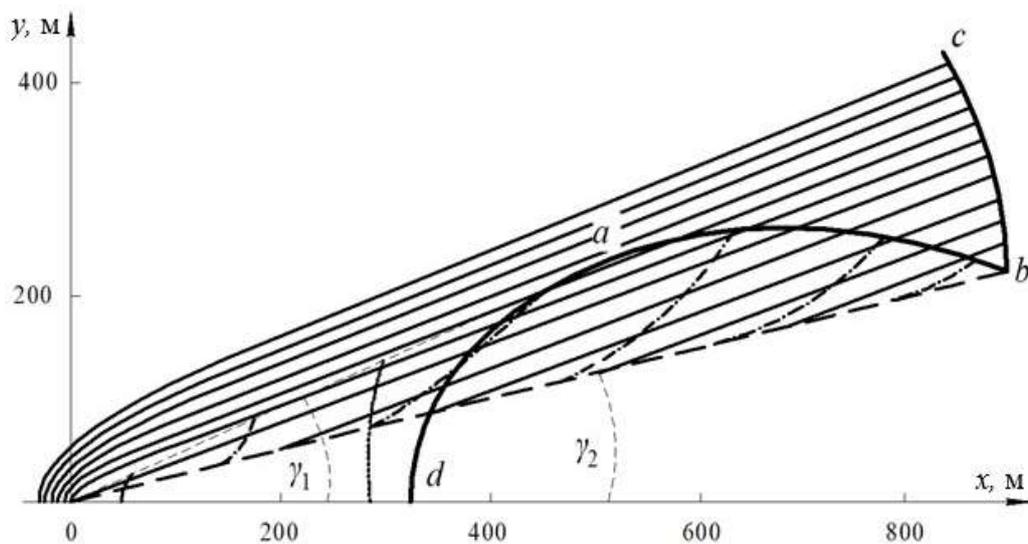


Рисунок 3.3 – Фазовый портрет и фронты изгибно-гравитационных волн ζ_1 , ζ_2 , и ζ_3
 для $v = 25$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $Q = -0,5\sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 40$ с

На Рисунке 3.4 приведены передние фронты изгибно-гравитационных волн ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 для различных значений сил сжатия и растяжения: $Q = \sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирная линия), $Q = 0$ (сплошная линия), $Q = -\sqrt{D\rho g}$ (штриховая линия).

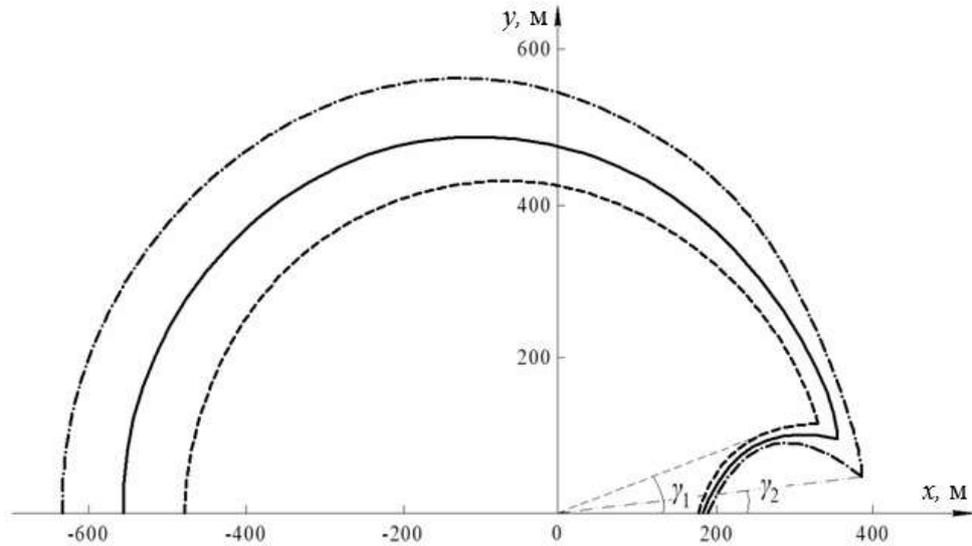


Рисунок 3.4 – Фронты изгибно-гравитационных волн ζ_1 , ζ_2 , и ζ_3

для $v = 20$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$), $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 20$ с,

$Q = \sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирная), $Q = 0$ (сплошная), $Q = -\sqrt{D\rho g}$ (штриховая)

Наибольшее влияние на скорость u_3 упругой волны ζ_3 оказывают силы сжатия и растяжения. При увеличении сжатия скорость u_3 растет и уменьшается при увеличении сил растяжения. Аналогичное влияние оказывают силы сжатия и растяжения на скорость u_1 фронта поперечной волны ζ_1 . Скорость u_2 переднего фронта продольной волны ζ_2 уменьшается при увеличении сжатия и растет при увеличении растяжения. Скорость волны, распространяющейся впереди источника выше скорости волн, распространяющихся за источником.

На Рисунке 3.5 фазовый портрет волн ζ_2 , ζ_3 и передние фронты продольной ζ_2 (кривая ab) и часть фронта изгибной ζ_3 (кривая bc) волн. Волны ζ_2 распространяются внутри угловых зон $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3$, а упругие волны ζ_3 в области $\gamma_2 < |\gamma| \leq \pi$. За источником в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ волн с амплитудой затухания как $R^{-1/2}$ не образуются.

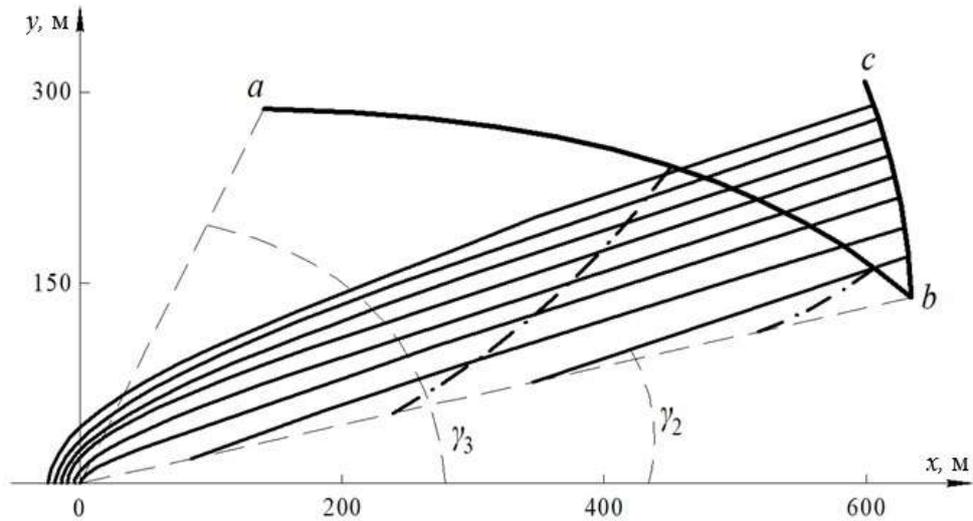


Рисунок 3.5 – Фазовые портреты и фронты изгибно-гравитационных волн ζ_2 и ζ_3 для $v = 35$ м/с ($v > \sqrt{gH}$), $Q = -1,9\sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 20$ с

На Рисунке 3.6 приведены передние фронты изгибно-гравитационных волн ζ_2 , ζ_3 для различных значений сил сжатия и растяжения: $Q = \sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирная линия), $Q = 0$ (сплошная линия), $Q = -1,9\sqrt{D\rho g}$ (штриховая линия).

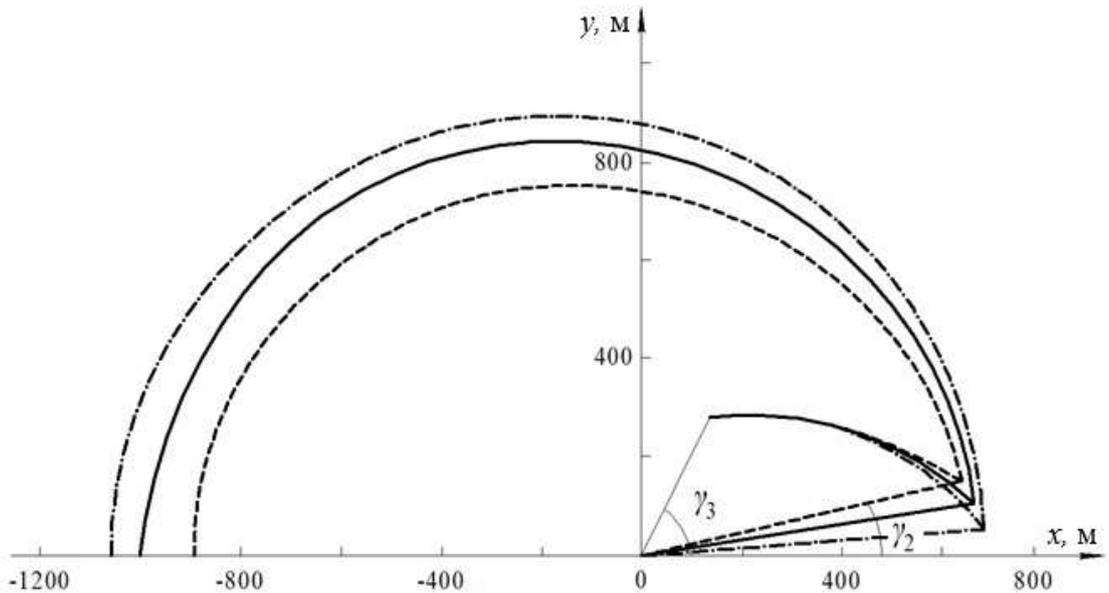


Рисунок 3.6 – Фронты изгибно-гравитационных волн ζ_2 и ζ_3

для $v = 35$ м/с ($v > \sqrt{gH}$), $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 20$ с,

$Q = \sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирная), $Q = 0$ (сплошная), $Q = -1,9\sqrt{D\rho g}$ (штриховая)

Из Рисунка 3.6 видно, что силы сжатия и растяжения наибольшее влияние оказывают на фронтальную скорость u_3 упругой волны ζ_3 . Она растет при увеличении сил сжатия и убывает при увеличении сил растяжения. Существенного влияния на фронтальную скорость u_2 продольной волны ζ_2 силы сжатия и растяжения не оказывают. Однако при увеличении сжатия она убывает и растет при увеличении сил растяжения.

Скорость перемещения источника возмущений v и силы сжатия и растяжения влияют на величины угловых зон, в которых распространяются волны ζ_1 , ζ_2 и ζ_3 . Влияние скорости v , для различных значений сил сжатия и растяжения, на величины углов γ_1 , γ_2 и γ_3 представлено на Рисунке 3.7. При $v = v_1$ значения углов γ_1 и γ_2 совпадают. На рисунке эти значения помечены кружками. Если $v = \sqrt{gH}$, то $\gamma_1 = \gamma_3$. Величина угла γ_3 не зависит от сил сжатия и растяжения. При увеличении сжатия уменьшаются значения углов γ_1 и γ_2 и увеличиваются при увеличении сил растяжения.

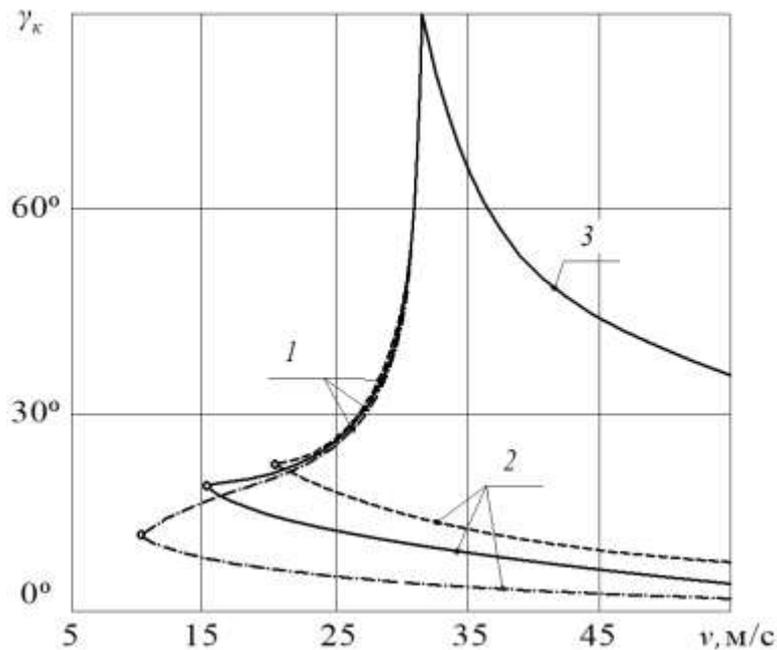


Рисунок 3.7 – Угловые зоны волн ζ_1 (γ_1 , кривые 1), ζ_2 (γ_2 , кривые 2), ζ_3 (γ_3 , кривая 3) для $h=0,2$ м, $H=100$ м, $Q = \sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирные линии), $Q = 0$ (сплошные линии), $Q = -1,9\sqrt{D\rho g}$ (пунктирные линии)

При увеличении скорости v от v_1 до \sqrt{gH} , угловая зона $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$ расширяется. При $v > \sqrt{gH}$ угловая зона $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ сужается. При $v > \sqrt{gH}$ угловая зона $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$, в которой волны не образуются, уменьшается при увеличении скорости v . При увеличении сил сжатия эта зона уменьшается и увеличивается при увеличении сил растяжения.

3.4. Случай больших значений сжимающих усилий

Рассмотрим случай больших сжимающих усилий, удовлетворяющих условию $Q_0 < Q < 2\sqrt{D\rho g}$. Применяя к (3.7) метод стационарной фазы [128] последовательно по θ и ξ , получим:

$$\zeta = -\frac{p_1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{s=1}^6 I_s + O(R^{-1}), \quad (3.18)$$

здесь $I_1 - I_4$ определяются формулами из (3.8), а I_5 и I_6 следующим образом:

$$I_5 = \int_{n_1}^{n_2} N_1 dr, \quad -\pi/2 < \gamma < 0, \quad \cos \gamma < v; \quad I_6 = \int_{n_3}^{n_4} N_2 dr, \quad 0 < \gamma < \pi/2.$$

В интегралах I_1, I_2, I_5 стационарными точками фазовой функции Φ_1 являются корнями уравнения (3.9). В интегралах I_3, I_4, I_6 стационарными точками фазовой функции Φ_2 являются корни уравнения (3.10): $\operatorname{tg} \gamma = -\tau_2(r)$. Поведение функции $\tau_2(r)$ в случае $Q_0 < Q < 2\sqrt{D\rho g}$ для различных диапазонов скорости перемещения нагрузки v представлено на Рисунке 3.8.

Если $v_0 < v < v_1$, то уравнение (3.9) при $0 < \gamma < \pi$ имеет один действительный корень α_3 , а при $-\gamma_2 < \gamma < 0$ два корня α_2, α_3 . Здесь: $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 — действительный корень уравнения $r\tau' - \tau = 0$; $v_1 = \tau(r_5)/r_5$, где $0 < r_5 < r_6$, r_5, r_6 — действительные корни уравнения $\tau'(r) = 0$.

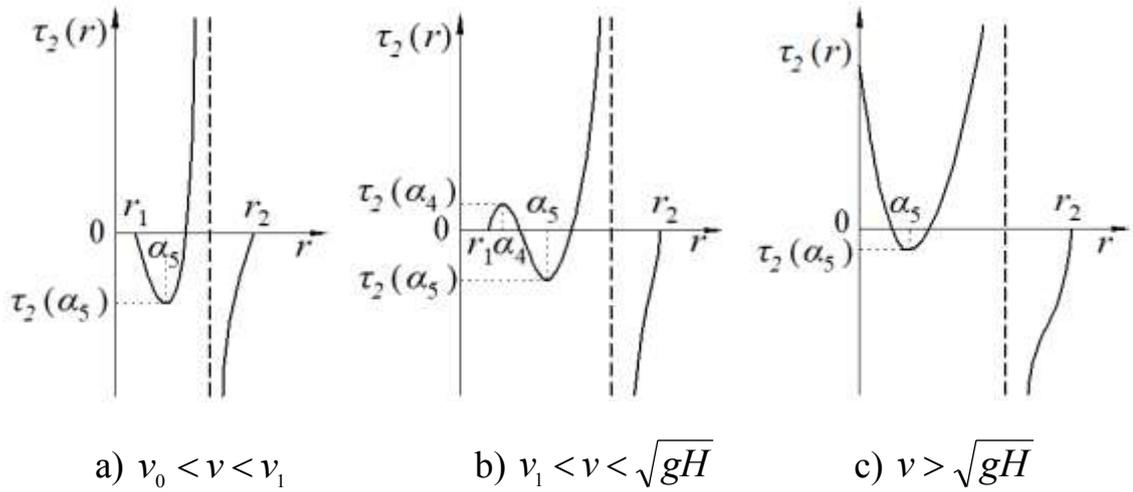


Рисунок 3.8 – Поведение функции $\tau_2(r)$ при $Q_0 < Q < 2\sqrt{D\rho g}$

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то $\tau_2'(\alpha_4) = \tau_2'(\alpha_5) = 0$, $\alpha_4 < \alpha_5$. Уравнение (3.9) имеет один α_3 , два α_2, α_3 или три $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ корня при $\gamma_1 < \gamma < \pi$, $-\gamma_2 < \gamma < 0$, $0 < \gamma < \gamma_1$ соответственно.

Для $v > \sqrt{gH}$ корнями уравнения (3.9) будут: α_2, α_3 в случае $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ и α_3 в случае $\gamma_3 < \gamma < \pi$. Причем $\tau_2'(\alpha_5) = 0$.

Аналогично определяются угловые зоны, в которых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ удовлетворяют уравнению (3.10). Углы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются следующими формулами:

$$\gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = -\arctg \tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \arctg((v^2 / gH) - 1)^{-1/2}.$$

Таким образом, вычисляя $I_1 - I_6$ методом стационарной фазы, получим:

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}), & \text{при } 0 < v < v_0 \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{при } v_0 < v < v_1; v > \sqrt{gH}. \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{при } v_1 < v < \sqrt{gH} \end{cases} \quad (3.19)$$

Причем для $v_0 < v < v_1$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < 0, R < u_2 t \\ \eta_{22}, & \text{если } 0 < \gamma < \gamma_2, R < u_2 t \\ 0, & \text{если } 0 < |\gamma| < \gamma_2, R > u_2 t; \gamma_2 < |\gamma| < \pi, \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\zeta_3 = \begin{cases} \eta_{31}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \pi, R < u_3 t \\ \eta_{32}, & \text{если } -\pi < \gamma < \gamma_2, R < u_2 t. \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \pi, R > u_3 t \end{cases} \quad (3.21)$$

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то:

$$\zeta_1 = \begin{cases} \eta_{11}, & \text{если } 0 < \gamma < 0, R < u_1 t \\ \eta_{12}, & \text{если } -\gamma_1 < \gamma < 0, R < u_1 t \\ 0, & \text{если } 0 < |\gamma| < \gamma_1, R > u_1 t; \gamma_1 < |\gamma| < \pi, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \gamma_1, R < u_2 t \\ \eta_{22}, & \text{если } -\gamma_1 < \gamma < \gamma_2, R < u_2 t \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, R > u_2 t; \\ \gamma^* < \gamma < 2\pi - \gamma^*, \gamma^* = \max(\gamma_1, \gamma_2), \end{cases} \quad (3.23)$$

а ζ_3 определяется по формуле (3.21).

В случае $v > \sqrt{gH}$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_{21}, & \text{если } -\gamma_2 < \gamma < \gamma_3, R < u_2 t \\ \eta_{22}, & \text{если } -\gamma_3 < \gamma < \gamma_2, R < u_2 t \\ 0, & \text{если } -\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, R > u_2 t; \gamma_3 < |\gamma| < \pi, \end{cases} \quad (3.24)$$

а ζ_3 определяется из (3.21).

Здесь

$$\eta_{kj} = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_k) \cos(R\Phi_j(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4), \quad u_k = u(\alpha_k, \gamma),$$

$$\psi_j(r) = -\frac{p_1 f^*(r) M(r)}{v\tau(2\pi(1-\tau_0^2)|\Phi_j''|)^{1/2}}, \quad u(r, \alpha) = \frac{v(1-\tau_0^2)^{1/2}}{\tau_0 \sin \gamma + (1-\tau_0^2)^{1/2} \cos \gamma}.$$

3.5. Анализ полученного решения для больших значений сжимающих усилий

Таким образом, для $Q_0 < Q < 2\sqrt{D\rho g}$, из формул (3.19) – (3.24) видно, что волновое возмущение пластина-жидкость формируется: при $v_0 < v < v_1$ двумя системами волн ζ_2, ζ_3 , при $v_1 < v < \sqrt{gH}$ тремя системами волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ и при $v > \sqrt{gH}$ двумя системами волн ζ_2, ζ_3 .

Для $Q = 1,7\sqrt{D\rho g}$ значения критических скоростей будут: $v_0 = 3,1$ м/с, $v_1 = 6,7$ м/с; для $Q = 1,8\sqrt{D\rho g}$ – $v_0 = 2,5$ м/с, $v_1 = 7,1$ м/с; для $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$ – $v_0 = 1,9$ м/с, $v_1 = 7,3$ м/с. Увеличение сжимающего усилия Q приводит к уменьшению v_0 и росту v_1 (Рисунок 1.3).

На Рисунке 3.9 представлен фазовый портрет упругой (изгибной) волны ζ_3 (сплошные линии) и волны ζ_2 (пунктирные линии). Передние фронты волн изображены сплошной жирной линией. Видно, что скорость распространения u_3 переднего фронта упругой волны ζ_3 , распространяющейся впереди источника больше, чем за источником. Скорость u_3 упругой волны ζ_3 , распространяющейся в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ за источником меньше скорости u_2 переднего фронта волны ζ_2 .

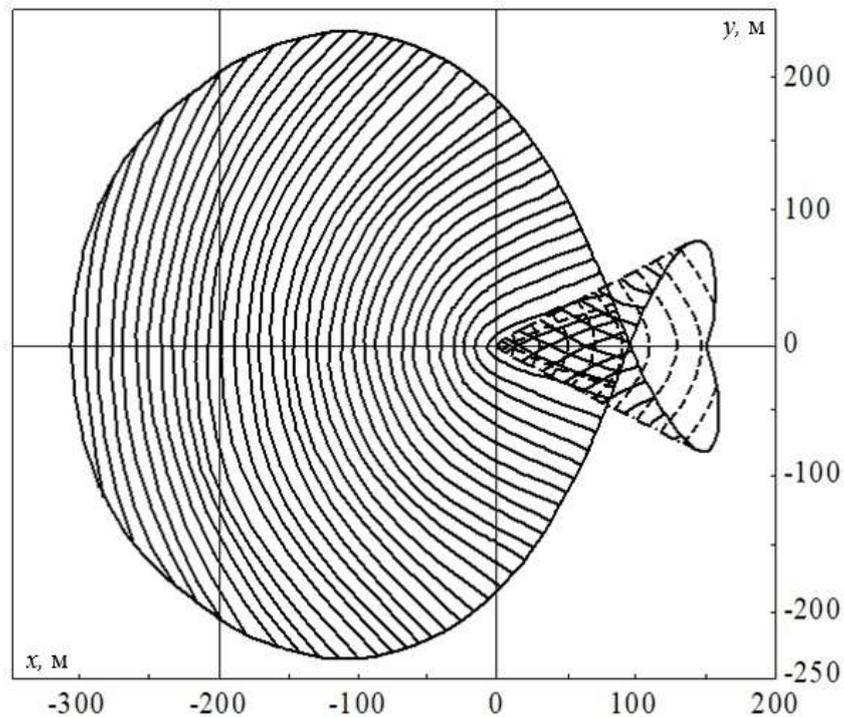


Рисунок 3.9 – Фазовый портрет и линии передних фронтов изгибно-гравитационных волн ζ_2 (штриховые линии), ζ_3 (сплошные линии)

для $v = 5$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$, $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 20$ с

На Рисунках 3.10, а – 3.13, а приведены фазовые портреты колебаний и их внешние границы, а на Рисунках 3.10, б – 3.13, б приведены линии передних фронтов образующихся волн для различных значений скорости перемещения источника и сжимающих усилий.

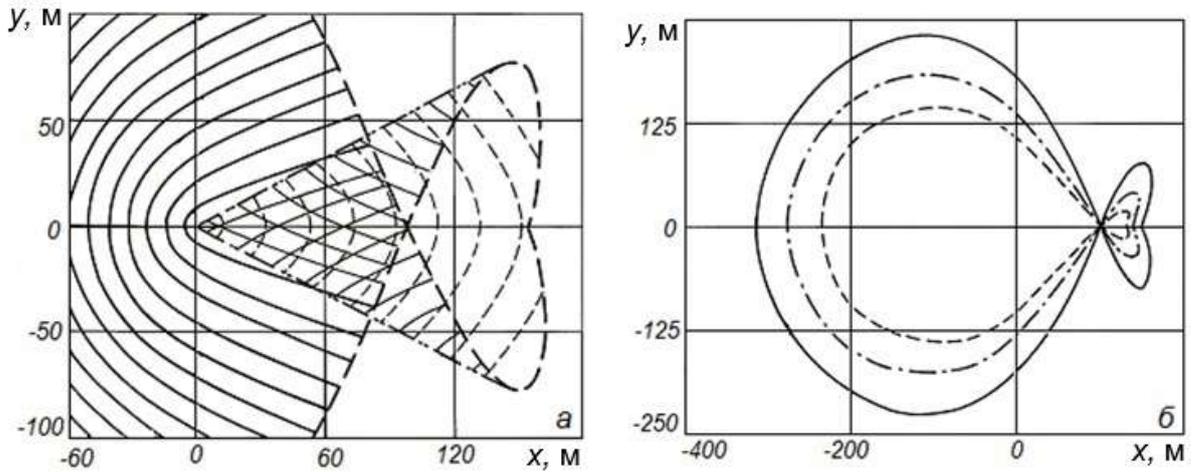


Рисунок 3.10 – Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн ζ_2, ζ_3 для $v = 5$ м/с ($v_0 < v < v_1$), $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 20$ с

а) ----- ζ_2 , — ζ_3 , — .. — γ_2 , $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$;

б) ----- $Q = 1,7\sqrt{D\rho g}$, — . — $Q = 1,8\sqrt{D\rho g}$, — $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$

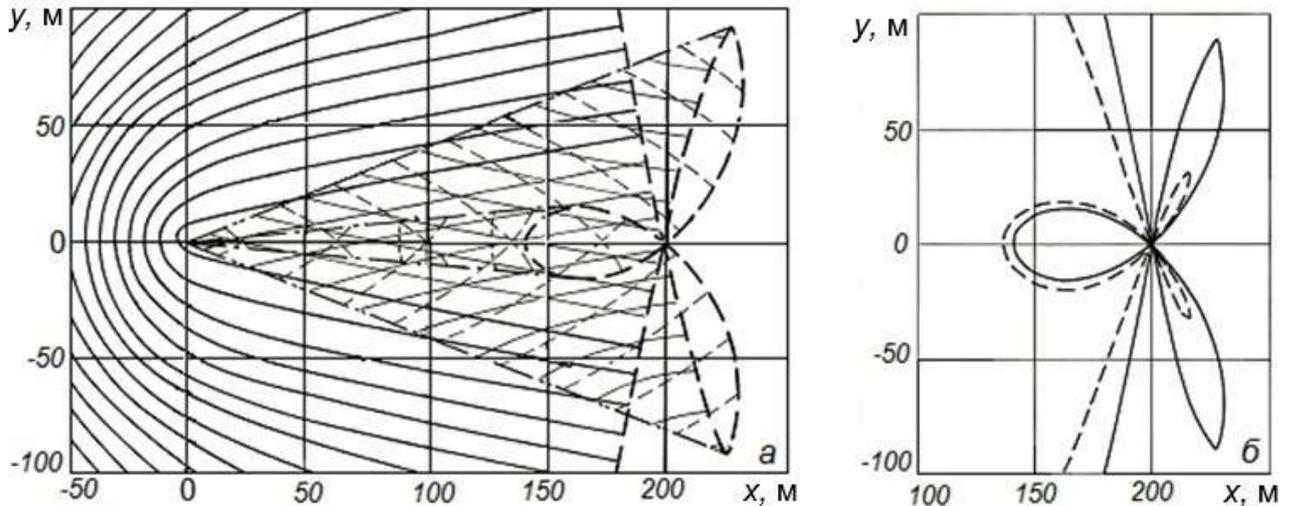


Рисунок 3.11 – Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б) изгибно-гравитационных волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ для $v = 10$ м/с ($v_1 < v < \sqrt{gH}$),

$h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $t = 20$ с, $\gamma_1 < \gamma_2$

а) ζ_1 , ----- ζ_2 , — ζ_3 , — . — γ_1 , — .. — γ_2 , $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$, $t = 20$ с;

б) ----- $Q = 1,7\sqrt{D\rho g}$, — $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$, $t = 20$ с

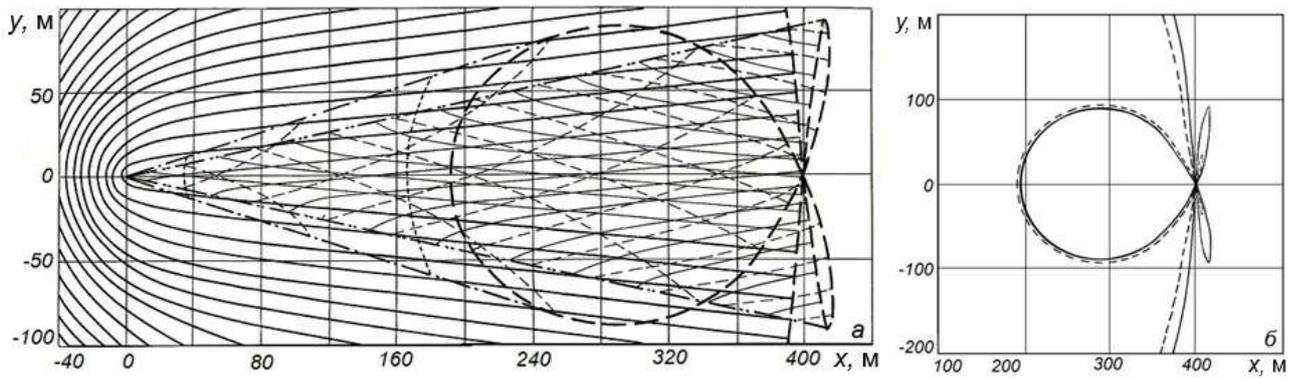


Рисунок 3.12 – Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б)

изгибно-гравитационных волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ для $v=20\text{ м/с}$ ($v_1 < v < \sqrt{gH}$),

$$h = 0,2 \text{ м}, H = 100 \text{ м}, t = 20 \text{ с}, \gamma_1 > \gamma_2$$

а) ζ_1 , ----- ζ_2 , — ζ_3 , — . . — γ_1 , — .. — γ_2 , $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$, $t = 20 \text{ с}$;

б) ----- $Q = 1,7\sqrt{D\rho g}$, — $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$, $t = 20 \text{ с}$

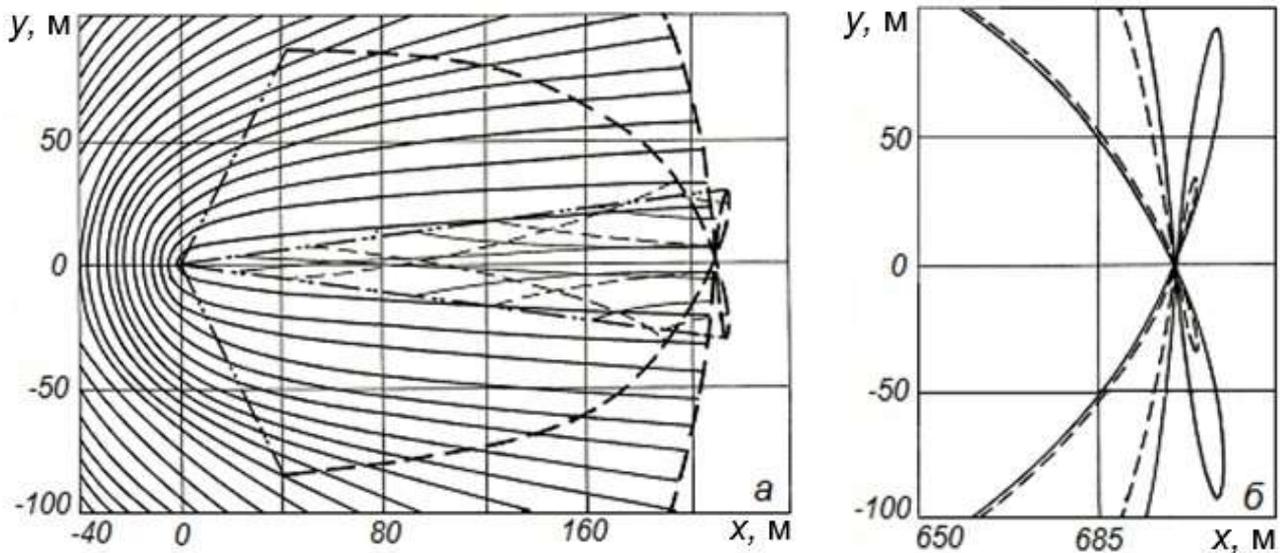


Рисунок 3.13 – Фазовый портрет (а) и линии передних фронтов (б)

изгибно-гравитационных волн ζ_2, ζ_3 для $v = 35 \text{ м/с}$ ($v > \sqrt{gH}$), $h = 0,2 \text{ м}, H = 100 \text{ м}$

а) ----- ζ_2 , — ζ_3 , — . . — γ_2 , — ... — γ_3 , $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$, $t = 6 \text{ с}$;

б) ----- $Q = 1,7\sqrt{D\rho g}$, — $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$, $t = 20 \text{ с}$

Упругие волны ζ_3 распространяются как перед областью давлений, так и за ней. Поперечные ζ_1 и продольные волны ζ_2 вместе с упругими волнами ζ_3 формируют волновой след за областью возмущений. В волновом следе левая и правая угловые зоны волн ζ_1 симметрично расположены по разные стороны от линии перемещения области. Левая и правая угловые зоны упругих волн ζ_3 , образующихся за областью возмущений, для $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$ так же, как и волн ζ_2 для $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$, заходят за эту линию, частично перекрывая друг друга.

Фронтальная скорость u_3 упругих волн ζ_3 , распространяющихся впереди источника, растет с увеличением сжимающих усилий. Для волн ζ_3 , распространяющихся за источником возмущений, в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ фронтальная скорость уменьшается, причем не существенно.

Продольные волны ζ_2 , при $v_0 < v < \sqrt{gH}$, распространяются в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$, а при $v > \sqrt{gH}$ в угловой зоне $-\gamma_3 < \gamma < \gamma_3$. Фронтальная скорость u_2 этих волн, в волновом следе, убывает с ростом сил сжатия.

Поперечные волны ζ_1 распространяются за источником в угловой зоне $-\gamma_1 < \gamma < \gamma_1$ при $v_1 < v < \sqrt{gH}$. При увеличении скорости движения источника эта зона увеличивается. Фронтальная скорость u_1 волн ζ_1 с увеличением сил сжатия незначительно возрастает.

Влияние скорости перемещения источника возмущений v на величины углов γ_1 , γ_2 и γ_3 иллюстрируется Рисунком 3.14. Сплошные и штрихпунктирные линии на рисунке отвечают значениям сжимающих усилий равных $1,9\sqrt{D\rho g}$ и $1,7\sqrt{D\rho g}$ соответственно. Величина угла γ_3 (пунктирная линия) не зависит от усилий сжатия. Кружками и треугольниками отмечены значения критических скоростей v_0 и v_1 соответственно. При $v = \sqrt{gH}$ $\gamma_1 = \gamma_3 = \pi/2$. Зона, в которой

происходит наложение волн ($-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$) при $v_0 < v < v_1$ расширяется, а при $v > v_1$ сужается.

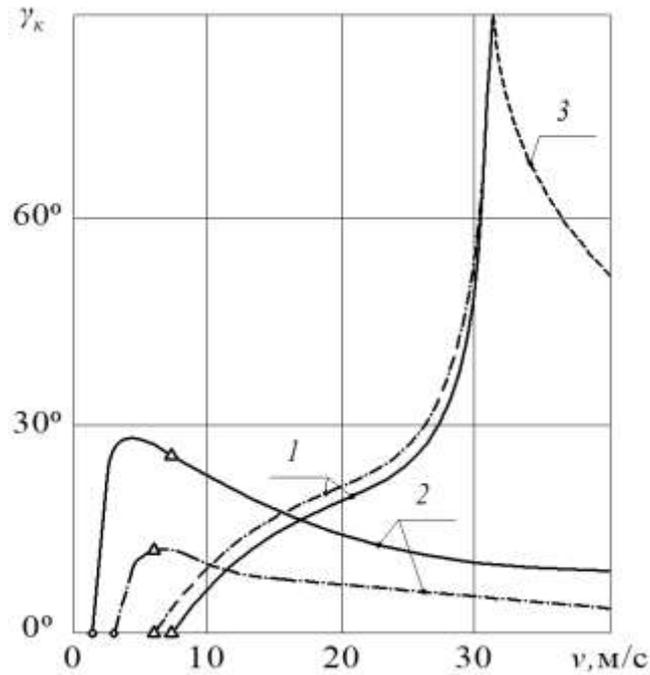


Рисунок 3.14 – Угловые зоны волн ζ_1 (γ_1 , кривые 1), ζ_2 (γ_2 , кривые 2), ζ_3 (γ_3 , кривая 3) для $h = 0,2$ м, $H = 100$ м, $Q = 1,7\sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирные линии), $Q = 1,9\sqrt{D\rho g}$ (сплошные линии)

3.6. Заключение по главе 3

Скорость распространения упругих волн ζ_3 бегущих впереди источника намного больше скорости волн, распространяющихся за источником. При увеличении сил сжатия существенно увеличивается скорость распространения упругих волн ζ_3 . Увеличение сил растяжения уменьшает скорость распространения упругих волн ζ_3 .

С увеличением сжимающих усилий и скорости перемещения источника расширяется область, покрытая волнами и сужается при увеличении сил растяжения. Наибольшее влияние сжимающие усилия оказывают на скорость распространения упругих волн ζ_3 и наименьшее на продольные ζ_2 и поперечные ζ_1 волны.

Увеличение сжимающих усилий приводит к увеличению фронтальных скоростей u_3 и u_1 волн ζ_3 и ζ_1 соответственно и уменьшению фронтальной скорости u_2 волны ζ_2 . Действие сил растяжения совершенно противоположно действию сил сжатия. При увеличении сил растяжения фронтальные скорости u_3 и u_1 уменьшаются, а фронтальная скорость u_2 растет. Силы сжатия и растяжения наибольшее влияние оказывают на фронтальную скорость u_3 изгибной волны ζ_3 .

При больших значениях сжимающих усилий существенно меняется структура волнового движения за источником – происходит наложение волн. За источником возмущений образуется зона, в которой происходит наложение волн. Угловая зона $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$, в которой происходит наложение волн, уменьшается при увеличении скорости движения источника возмущений.

По главе 3 опубликованы работы: [19, 36, 138]. Из них [19, 36] – статьи из перечня ВАК; [138] – материалы конференции.

ГЛАВА 4

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖУЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

В зимний период многие реки и озера Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока покрываются льдом. Для продления навигации возникает необходимость разрушения ледяного покрова. Для этих целей, кроме обычных ледокольных средств используют суда на воздушной подушке (СВП) [30–32]. Отсутствие у них осадки позволяет разрушать ледяной покров на акваториях любой глубины. Одним из способов разрушения ледяного покрова СВП является резонансный метод [44, 47, 51, 53, 54, 61], который основан на возбуждении в ледяном покрове изгибно-гравитационных волн достаточной амплитуды, чтобы произошло его разрушение. Эффективность применения СВП может быть увеличена, если при прямолинейном равномерном движении периодически менять давление в воздушной подушке судна [43, 62].

Воздействие периодического источника на развитие волнового движения свободной поверхности жидкости рассмотрено в работах [107, 130]. В [130] периодический источник находится на поверхности однородной жидкости. Рассматривается развитие трехмерных волн, вызванных периодическими колебаниями атмосферного давления. В [107] решена двумерная задача о вертикальных смещениях свободной поверхности жидкости, которые вызваны пульсирующим источником, находящимся в слое жидкости. Рассматривается двухслойная жидкость. Причем один из слоев со сдвиговым потоком.

Воздействие периодического источника на изгибно-гравитационные волны рассматривается в работах [103, 108, 109, 114, 120, 130, 169]. В монографии [130] приводятся исследования колебаний ледяного покрова, как от периодических, так и от движущихся нагрузок. В статье [169] дан обзор исследований и испытаний несущей способности ледяного покрова при воздействии на него статических, движущихся и колебательных нагрузок. В [114] методом Винера-Хопфа решена

плоская задача о поведении плавающей упругой пластины при воздействии на нее периодической нагрузки, которая находится на ее поверхности. В [108] методом нормальных мод решена плоская задача о воздействии периодической нагрузки на упругую пластину, которая плавает на поверхности жидкости бесконечной глубины. В [103] решена трехмерная задача о колебаниях тонкой упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости под действием периодического и импульсного возмущения. Исследовано влияние продольного, поперечного и сдвигового сжатий на развитие изгибно-гравитационных волн. В [109] методами преобразования Фурье и Винера-Хопфа в линейной постановке решаются задачи о колебаниях ледяного покрова, вызванные областью периодического по времени давления. Ледяной покров моделируется упругой полубесконечной пластиной либо двумя полубесконечными пластинами. В [120] Методом интегрального преобразования Фурье в линейной постановке решена трехмерная задача о колебаниях ледяного покрова при воздействии на него импульсной и периодической осесимметричной нагрузки. Равномерно сжатый ледяной покров плавает на поверхности жидкости при наличии сдвигового потока. Исследована зависимость прогиба ледяного покрова от сил сжатия, толщины ледяного покрова и градиента скорости течения жидкости.

В работах [3, 9, 13, 161] проводится исследование колебаний ледяного покрова, которые вызваны движущимися возмущениями переменной интенсивности. В работе [9] рассматривается задача о неустановившихся колебаниях ледяного покрова, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины, вызванные периодически перемещающимися давлениями. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая пластина. Для решения задачи применяется преобразование Фурье по переменной x . Получено интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость в виде суммы трех интегралов. Для вычисления интегралов применяются методы теории функций комплексной переменной и метод стационарной фазы. В [3, 13] изучаются трехмерные неустановившиеся изгибно-гравитационные волны, которые образуются при движении области

гармонически меняющихся со временем давлений по тонкой упругой пластинке, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. Методом интегральных преобразований Фурье по горизонтальным координатам по x и y и Лапласа по времени получено интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость. Асимптотическое исследование интеграла проведено методом стационарной фазы для многомерных интегралов. Показано, что в зависимости от скорости и частоты колебаний источника может возбуждаться от одной до семи систем волн. В статье [161] исследуется волновое движение в плавающем морском льду, возбуждаемое перемещением вибрирующего груза. Показано, что при фиксированной частоте, увеличение скорости нагрузки приводит к появлению более коротких волн впереди и более длинных волн за нагрузкой. Амплитуда волн впереди нагрузки меньше амплитуды волн за ней.

Исследуем трехмерные колебания плавающего ледяного покрова под действием движущихся возмущений переменной интенсивности с учетом сил сжатия и растяжения. В основу колебаний плавающего ледяного покрова положены линеаризованные уравнения гидромеханики и линейная классическая теория колебаний пластин. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая изотропная пластинка. Исследуем влияние частоты колебаний движущегося источника на значения критических скоростей, количество образующихся волн, угловые зоны распространения этих волн и их фронты.

4.1. Постановка задачи

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавают сплошной ледяной покров, по поверхности которого перемещается нагрузка переменной интенсивности:

$$p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\sigma t), \quad x_1 = x + vt, \quad v = \text{const}. \quad (4.1)$$

В рамках линейной теории исследуем развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимся источником возмущений (4.1). Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой толщины h , плавающей на поверхности жидкости. Полагаем, что до начала действия возмущений жидкость не возмущена и граница поверхности пластина-жидкость горизонтальна.

Считая движение жидкости потенциальным, в системе координат x_1, y , связанной с движущейся со скоростью v областью давлений (4.1), задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty \quad (4.2)$$

со следующими условиями:

граничное условие на поверхности

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_l \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = -\frac{p}{\rho g} \quad \text{при } z = 0,$$

граничное условие на дне $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ при $z = -H$, (4.3)

начальные условия $\varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0$,

кинематическое условие $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - v \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ при $z = 0$,

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

$D_1 = \frac{D}{\rho g}$, $Q_1 = \frac{Q}{\rho g}$, $\chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}$, $p_1 = \frac{p_0}{\rho g}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, ρ – плотность жидкости; D ,

Q , E , h , ρ_1 , μ – цилиндрическая жесткость, сжимающее усилие, модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки. ζ – возвышение поверхности пластина-жидкость. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

4.2. Решение задачи

Применяя для решения задачи (4.2) – (4.3) метод интегральных преобразований Фурье по горизонтальным координатам x и y для возвышения поверхности пластина-жидкость получим:

$$\zeta = \frac{P_0}{8\pi^2 \rho g} e^{i\sigma t} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int f^*(m, n) M(r) \psi(m, n, t) e^{i(mx+ny)} dmdn, \quad (4.4)$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad (4.5)$$

где $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $\Delta_j = \sigma + \nu m + \delta_j \tau$, $\delta_j = (-1)^j$, $j = 1, 2$,

$$\tau(r) = (l(r)M(r))^{1/2}, \quad l(r) = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4, \quad M(r) = rg(1 + \chi_1 r g t h r H)^{-1} t h r H,$$

$f^*(m, n)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$. Первое слагаемое в выражении (4.5) представляет установившиеся колебания. Второе и третье слагаемые определяются начальными условиями и характеризуют развитие волнового движения.

Преобразуем (4.5) следующим образом:

$$\psi = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\Delta_1} (1 - e^{-i\Delta_1 t}) - \frac{1}{\Delta_2} (1 - e^{-i\Delta_2 t}) \right),$$

и учтем, что

$$i(1 - e^{-i\Delta_j t}) / \Delta_j = - \int_0^t e^{-i\Delta_j \xi} d\xi.$$

После перехода к полярным координатам в случае осесимметричного распределения давлений (4.1) выражение (4.4) для ζ примет вид:

$$\zeta = - \frac{P_0}{8\pi^2 \rho g} \text{Im}(e^{i\sigma t} (J_1 - J_2)), \quad (4.6)$$

$$J_j = \int_0^t \int_0^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r f^*(r)}{\tau(r)} M(r) e^{-i(rR \cos(\theta-\gamma) - \Delta_j \xi)} d\theta d\xi dr,$$

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma,$$

4.3. Анализ полученного решения

Асимптотическое исследование выражения для ζ (4.6), при больших значениях R и t , выполним методом стационарной фазы для многомерных интегралов [126]. Стационарные точки (r, θ, ξ) интегралов J_j ($j = 1, 2$) удовлетворяют системе уравнений (4.7) – (4.8):

$$R \cos(\theta - \gamma) - (v \cos \theta + \delta_j \tau') \xi = 0, \quad v \xi \sin \theta - R \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad (4.7)$$

$$\sigma + \delta_j \tau + v r \cos \theta = 0, \quad (4.8)$$

где штрих означает производную по r .

Уравнение (4.8) имеет вещественные корни

$$\theta = \pm \theta_j, \quad \theta_j = \arccos(-\delta_j \tau_j), \quad \tau_j = (\tau + \delta_j \sigma) / v r \quad \text{при} \quad |\tau_j| \leq 1. \quad (4.9)$$

После подстановки (4.9) в (4.7) получим:

$$t g \gamma = \chi_j(r), \quad \chi_j(r) = \tau' (1 - \tau_j^2)^{1/2} (v - \tau_j \tau')^{-1}, \quad (4.10)$$

$$\xi = R / u_j, \quad u_j = (v - \delta_j \tau') \cos^{-1} \gamma. \quad (4.11)$$

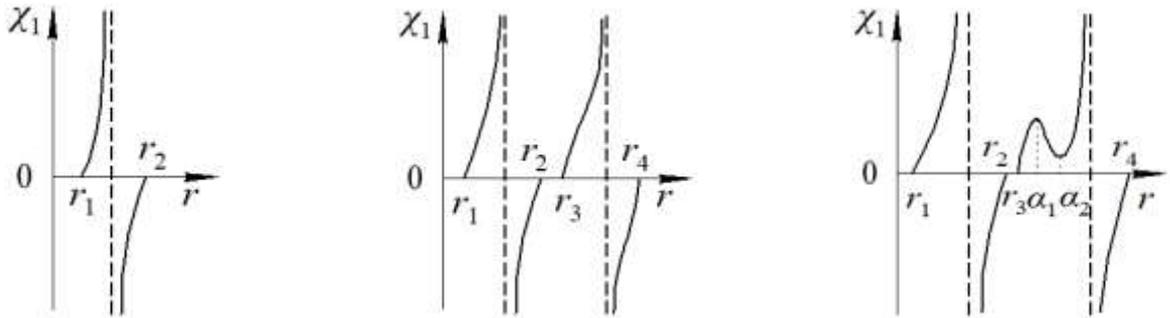
Из (4.10) определяются значения r , соответствующие стационарным точкам интегралов J_j в установившемся и неустойчившемся режимах. Принадлежность стационарных точек области интегрирования определяется условием $0 \leq \xi \leq t$. Это условие и соотношение (4.11) характеризуют распространение колебаний.

На Рисунках 4.1, а–ж приведено качественное поведение функции $\chi_1(r)$ для $0 < \sigma < \sigma_0$ (Рисунки 4.1, а–д) и для $\sigma > \sigma_0$ (Рисунки 4.1, е, ж). Поведение функции $\chi_2(r)$ для $\sigma > 0$ приведено на Рисунках 4.1, з и 4.1, и.

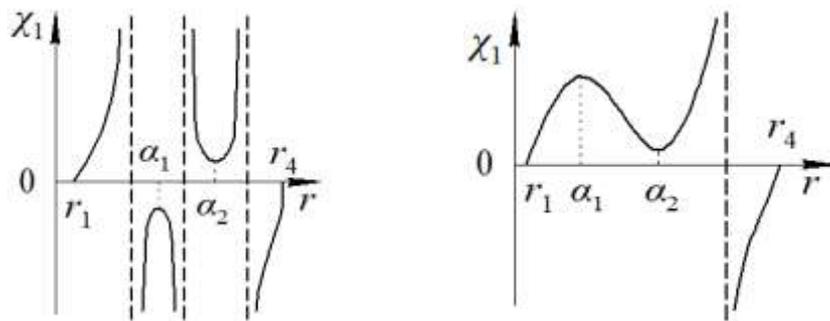
Уравнение $t g \gamma = \chi_1(r)$ при $0 < \sigma < \sigma_0$ имеет один корень, если $0 < v < v_{01}$; два корня, если $v_{01} < v < v_{11}$; два или четыре корня, если $v_{11} < v < v_{02}$; один или три корня, если $v > v_{02}$.

При $\sigma > \sigma_0$ уравнение $tg\gamma = \chi_1(r)$ имеет один корень, если $0 < v < v_{11}$; один либо три корня, если $v > v_{11}$.

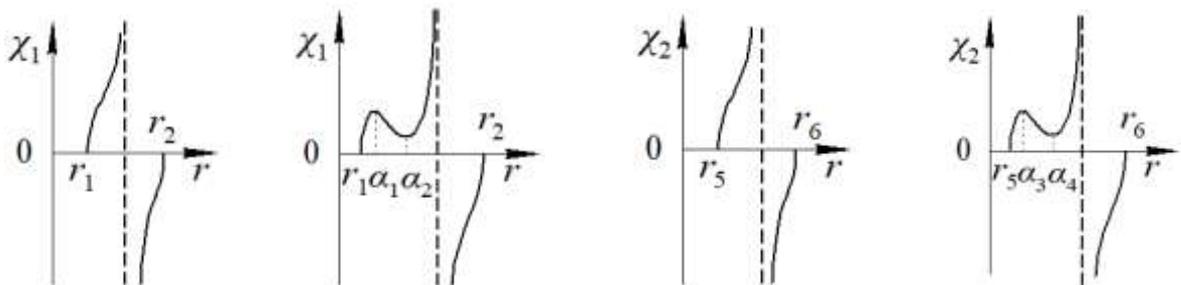
Уравнение $tg\gamma = \chi_2(r)$ имеет при $\sigma > 0$ один корень, если $v_{03} < v < v_{12}$; один либо три корня, если $v > v_{12}$.



а) $0 < v < v_{01}, 0 < \sigma < \sigma_0$ б) $v_{01} < v < v_{11}, 0 < \sigma < \sigma_0$ в) $v_{11} < v < v_{02}, 0 < \sigma < \sigma_0$



г) $v_{02} < v < v_{10}, 0 < \sigma < \sigma_0$ д) $v > v_{10}, 0 < \sigma < \sigma_0$



е) $0 < v < v_{11}, \sigma > \sigma_0$ ж) $v > v_{11}, \sigma > \sigma_0$ з) $v_{03} < v < v_{12}, \sigma > 0$ и) $v > v_{12}, \sigma > 0$

Рисунок 4.1 – Графики функций $\chi_1(r)$ и $\chi_2(r)$

Из анализа поведения функций $\chi_j(r)$ следует, что число положительных корней α_{jk} уравнений (4.10) зависит от скорости v перемещения давлений, частоты колебаний σ источника и величины угла γ .

В Таблицах 4.1 и 4.2 приведены системы волн ζ_{ij} в зависимости от скорости перемещения источника и его частоты колебаний, а также приведены угловые зоны, в которых распространяется каждая из волн.

Таблица 4.1 – Системы изгибно-гравитационных волн ζ_{1j}

σ	ν	γ	ζ_{1j}	
$0 < \sigma < \sigma_0$	$0 < \nu < \nu_{01}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14}	
	$\nu_{01} < \nu < \nu_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{13}, ζ_{14}	
	$\nu_{11} < \nu < \nu_{02}$		$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$	ζ_{11}, ζ_{14}
			$\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$	$\zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$
			$\gamma_1 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{13}, ζ_{14}
	$\nu > \nu_{02}$ ($\nu_{02} < \nu < \nu_{01}$, $\nu > \nu_{01}$)		$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$	ζ_{14}
			$\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$	$\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$
			$\gamma_3 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{13}
$\sigma > \sigma_0$	$0 < \nu < \nu_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14}	
	$\nu > \nu_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$	ζ_{14}	
		$\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$	$\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$	
		$\gamma_3 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{13}	

Таблица 4.2 – Системы изгибно-гравитационных волн ζ_{2j}

σ	ν	γ	ζ_{2j}
$\sigma > 0$	$\nu_{03} < \nu < \nu_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{23}
	$\nu > \nu_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_{22}$	ζ_{21}
		$\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	$\zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23}$
		$\gamma_{11} \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{23}

Здесь $\sigma_0 = (\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2))(\beta_2 - \beta_1)^{-1}$,

$v_{01} = \tau_5(\beta_2)$, $v_{02} = \tau_5(\beta_1)$, $v_{03} = \tau_6(\beta_3)$, $v_{11} = (\tau_7(\beta_4))^{1/2}$, $v_{12} = (\tau_8(\beta_6))^{1/2}$, $v_{10} = (\tau_9(\beta_8))^{1/2}$,
 $\tau_{5,6} = (\tau \pm \sigma)/r$, $\tau_7 = \tau_5^2 - r(\tau_5')^2 \tau'/\tau''$, $\tau_8 = \tau_6^2 - r(\tau_6')^2 \tau'/\tau''$, $\tau_9 = \tau_5 \tau'$, β_k ($k=1-9$)
являются корнями уравнений: $\tau_5'(\beta_{1,2}) = 0$, $\tau_6'(\beta_3) = 0$, $\chi_1''(\beta_{4,5}) = 0$, $\chi_2''(\beta_{6,7}) = 0$,
 $\tau_9'(\beta_{8,9}) = 0$, где $\beta_1 < \beta_2$, $\beta_4 < \beta_5$, $\beta_6 < \beta_7$, $\beta_8 < \beta_9$, $r_1 < r_2 < \beta_1 < r_3 < \beta_2 < r_4$, $r_5 < \beta_3 < r_6$,
 r_k ($k=1-4$) – положительные корни уравнения $1 - \tau_1^2 = 0$, а $r_{5,6}$ – уравнения
 $1 - \tau_2^2 = 0$.

Размеры угловых зон определяются величинами углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{11}, \gamma_{22}$.
 $\gamma_1 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$, если $v_{11} < v < v_{02}$, $\gamma_3 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$, если $v > v_{02}$, $\gamma_2 = \arctg \chi_1(\alpha_2)$,
 $\gamma_{11} = \arctg \chi_2(\alpha_3)$, $\gamma_{22} = \arctg \chi_2(\alpha_4)$, α_k ($k=1-4$) – корни уравнений: $\chi_1'(\alpha_{1,2}) = 0$,
 $\chi_2'(\alpha_{3,4}) = 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_3 < \alpha_4$.

Каждый корень α_{jk} уравнений (4.10) характеризует систему волн ζ_{jk} вида:

$$\zeta_{jk} = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_{jk}) \cos(R\Phi_j(\alpha_{jk}) + \sigma t + \delta_{jk} \pi/4) + O(R^{-1}), \quad (4.12)$$

$$\psi_j = -\frac{P_0}{\rho g} f^*(r) M(r) ((1 - \tau_j^2) \tau v)^{-1} (2\pi |\Phi_j''|)^{-1/2},$$

$$\Phi_j = \delta_j r ((1 - \tau_j^2)^{1/2} \sin \gamma - \tau_j \cos \gamma),$$

$$j=1, k=1-4; j=2, k=1-3; \delta_{jk} = (-1)^{j+k}, k \neq 4, \delta_{14} = 1.$$

Волны образуются в областях $R < u_{jk} t$, $u_{jk} = u_j(\alpha_{jk})$ (u_j см. (4.11)) угловых зон соответствующих диапазону изменения скорости перемещения источника возмущений.

При $0 < \sigma < \sigma_0$ для α_{1k} справедливы следующие оценки:

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ для } 0 < v < v_{01}; r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v_{01} < v < v_{11};$$

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{11} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v_{11} < v < v_{02};$$

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v > v_{02}.$$

При $\sigma > \sigma_0$ для α_{1k} справедливы следующие оценки:

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ для } 0 < v < v_{11}; r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_2 \text{ для } v > v_{11}.$$

При $\sigma > 0$ для α_{2k} справедливы следующие оценки:

$$r_5 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \text{ для } v_{03} < v < v_{12}; r_5 \leq \alpha_{21} \leq \alpha_3 \leq \alpha_{22} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \text{ для } v > v_{12}.$$

4.4. Зависимость критических скоростей от частоты колебаний источника.

Для количественной оценки численные расчеты здесь и далее проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0,34$, $\rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $H = 10^2 \text{ м}$.

На Рисунках 4.2 – 4.4 приведены зависимости критических скоростей перемещения области возмущений от частоты колебаний при отсутствии сил сжатия и растяжения для толщины ледяного покрова $h = 0,2 \text{ м}$ (Рисунок 4.2) и $h = 0,5 \text{ м}$ (Рисунок 4.4) и для сжимающего усилия $Q = 0,5\sqrt{D\rho g}$ (Рисунок 4.3).

Критические скорости v_{03} и v_{12} растут при увеличении σ , а скорости v_{01} , v_{02} и v_{10} убывают. Критическая скорость v_{11} имеет минимум. В окрестности этих скоростей меняется характер волнового возмущения. При $\sigma = 0$ $v_{01} = v_{03} = v_0$, $v_{11} = v_{12} = v_1$, $v_{10} = v_{02} = \sqrt{gH}$.

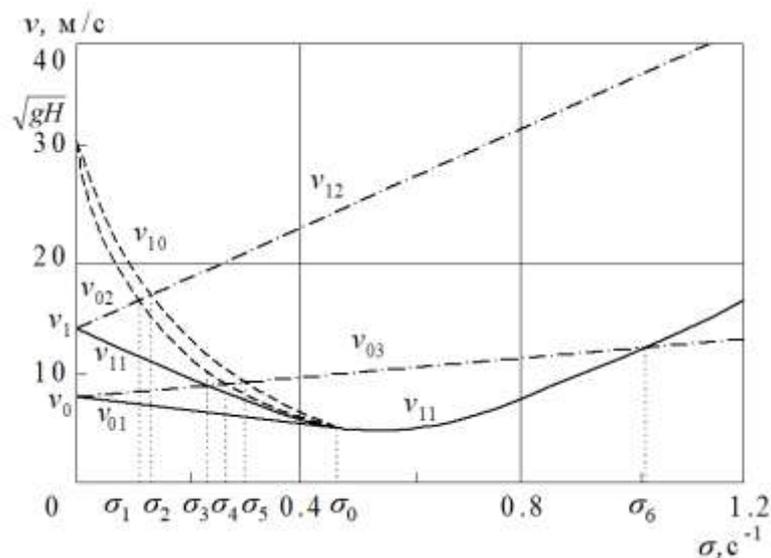


Рисунок 4.2 – Зависимость критических скоростей v_{ij} (м/с) от частоты колебаний источника σ (с^{-1}) для $h = 0,2 \text{ м}$, $Q = 0$

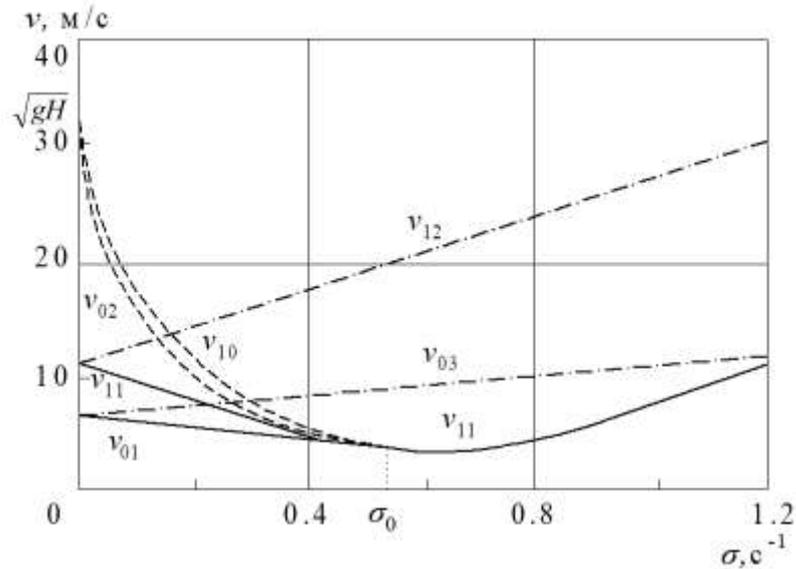


Рисунок 4.3 – Зависимость критических скоростей v_{ij} (м/с) от частоты колебаний источника σ (s^{-1}) для $h = 0,2$ м, $Q = 0,5\sqrt{D\rho g}$

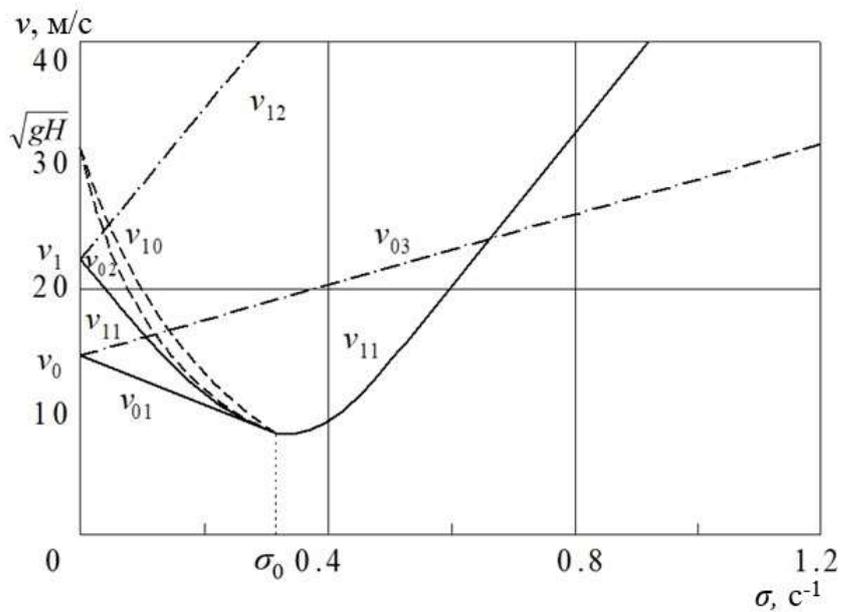


Рисунок 4.4 – Зависимость критических скоростей v_{ij} (м/с) от частоты колебаний источника σ (s^{-1}) для $h = 1,0$ м, $Q = 0$

При увеличении сил сжатия уменьшаются значения критических скоростей и увеличиваются при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова. При $\sigma = \sigma_0$ $v_{01} = v_{11} = v_{02} = v_{10}$. При частоте $\sigma = \sigma_0$ и скорости движения источника равной минимальному значению критических скоростей v_{01} , v_{02} , v_{10} наиболее вероятно разрушение ледяного покрова.

4.5. Фазовые портреты волн.

При движении области давлений (4.1), в зависимости от скорости перемещения и частоты колебаний, может возбуждаться от одной до семи систем волн (4.13) с амплитудами затухания как $R^{-1/2}$ (4.12). Эти волны формируют колебания пластинки и волновое движение жидкости, как перед областью давлений, так и за ней.

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_{14}, \text{ при } : 0 < \sigma < \sigma_0, 0 < \nu < \nu_{01}; \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, 0 < \nu < \nu_{11}; \\ \sigma > \sigma_6, 0 < \nu < \nu_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{13}, \text{ при } : 0 < \sigma < \sigma_3, \nu_{01} < \nu < \nu_{03}; \\ \sigma_3 < \sigma < \sigma_0, \nu_{01} < \nu < \nu_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{21}, \text{ при } : \sigma > \sigma_6, \nu_{03} < \nu < \nu_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при } : 0 < \sigma < \sigma_3, \nu_{03} < \nu < \nu_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при } : \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, \nu_{02} < \nu < \nu_{03}; \\ \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, \nu_{11} < \nu < \nu_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при } : \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, \nu_{11} < \nu < \nu_{03}; \\ \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, \nu_{11} < \nu < \nu_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при } : \sigma_1 < \sigma < \sigma_4, \nu_{02} < \nu < \nu_{12}; \\ \sigma_4 < \sigma < \sigma_6, \nu_{03} < \nu < \nu_{12}; \sigma > \sigma_6, \nu_{11} < \nu < \nu_{12} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при } : 0 < \sigma < \sigma_1, \nu_{11} < \nu < \nu_{12}; \\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_3, \nu_{11} < \nu < \nu_{02}; \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, \nu_{03} < \nu < \nu_{02} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23}, \text{ при } : 0 < \sigma < \sigma_1, \nu > \nu_{02}; \\ \sigma > \sigma_1, \nu > \nu_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23} \text{ при } : 0 < \sigma < \sigma_1, \nu_{12} < \nu < \nu_{02} \end{cases} \quad (4.13)$$

На Рисунках 4.5 – 4.13 представлены фазовые портреты и фронты образующихся волн ζ_{jk} ($j = 1, k = 1-4; j = 2, k = 1-3$) количество которых зависит от скорости перемещения источника возмущений и частоты его колебаний. Передние фронты этих волн перемещаются со скоростью u_{jk} (пунктирная линия на рисунках). Сплошные линии – линии равной фазы.

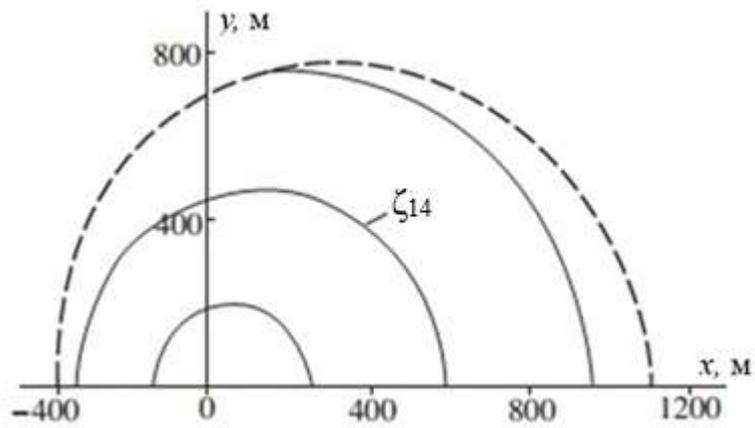


Рисунок 4.5 – Линии равной фазы и фронт волны ζ_{14} для $v = 5 \text{ м/с}$ ($0 < v < v_{01}$), $\sigma = 0,3 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $h = 0,2 \text{ м}$, $Q = 0$, $t = 40 \text{ с}$

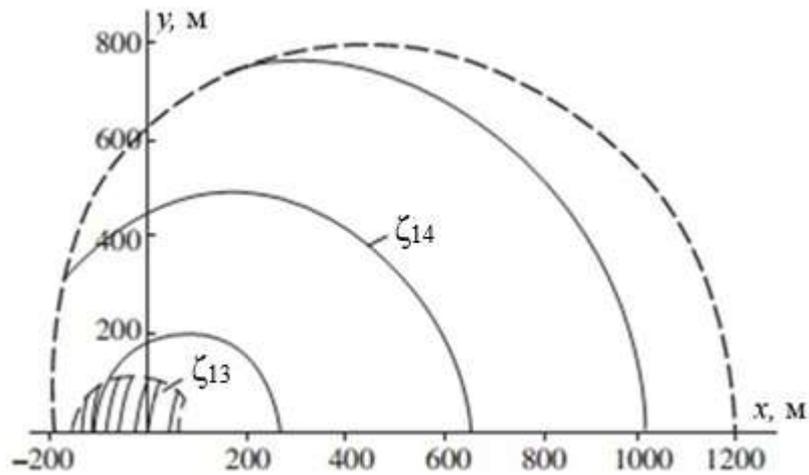


Рисунок 4.6 – Линии равной фазы и фронты волн ζ_{13} и ζ_{14} для $v = 7 \text{ м/с}$ ($v_{01} < v < v_{11}$), $\sigma = 0,3 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $h = 0,2 \text{ м}$, $Q = 0$, $t = 40 \text{ с}$

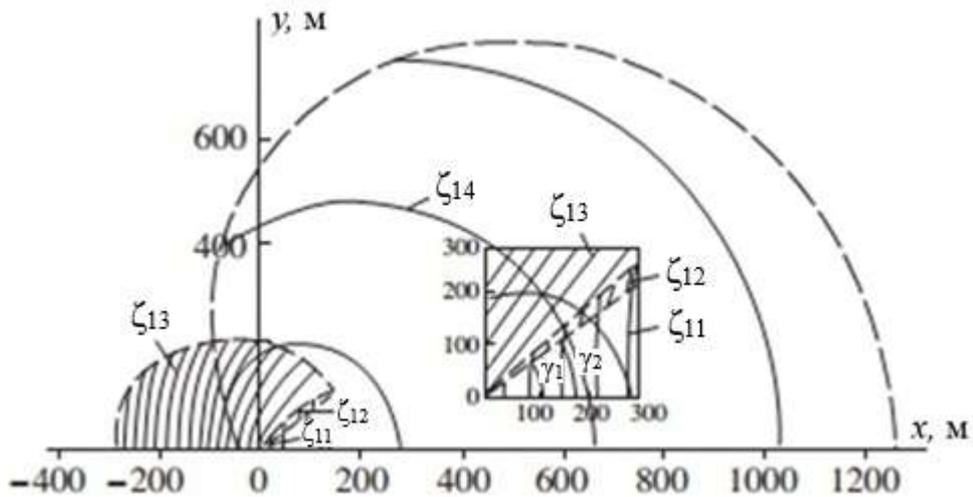


Рисунок 4.7 – Линии равной фазы и фронты волн ζ_{11} , ζ_{12} , ζ_{13} и ζ_{14} для $v = 8 \text{ м/с}$ ($v_{11} < v < v_{02}$), $\sigma = 0,3 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $h = 0,2 \text{ м}$, $Q = 0$, $t = 40 \text{ с}$

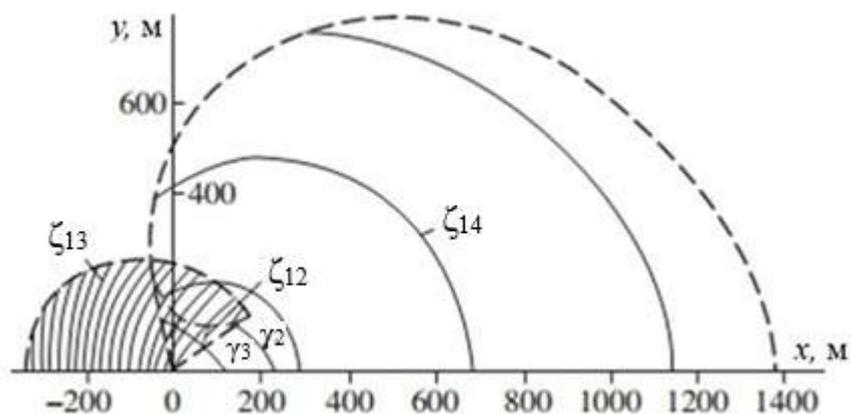


Рисунок 4.8 – Линии равной фазы и фронты волн ζ_{12} , ζ_{13} и ζ_{14} для $v = 8,5$ м/с ($v_{02} < v < v_{10}$), $\sigma = 0,3$ с⁻¹ ($\sigma < \sigma_0$), $h = 0,2$ м, $Q = 0$, $t = 40$ с

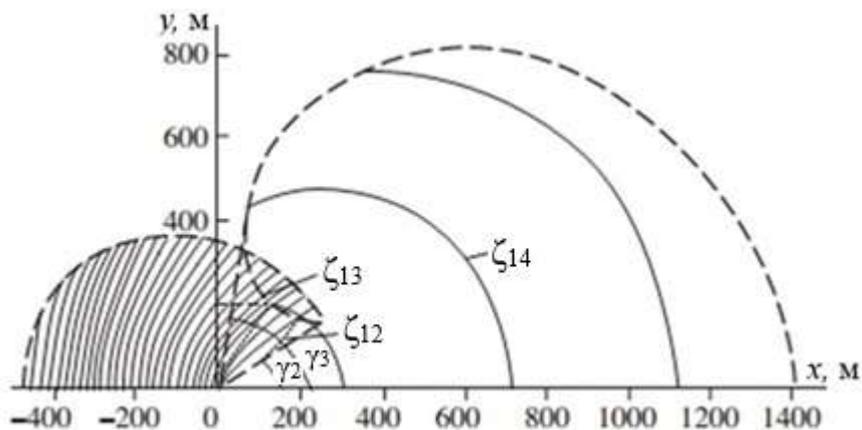


Рисунок 4.9 – Линии равной фазы и фронты волн ζ_{12} , ζ_{13} и ζ_{14} для $v = 10$ м/с ($v > v_{10}$), $\sigma = 0,3$ с⁻¹ ($\sigma < \sigma_0$), $h = 0,2$ м, $Q = 0$, $t = 40$ с

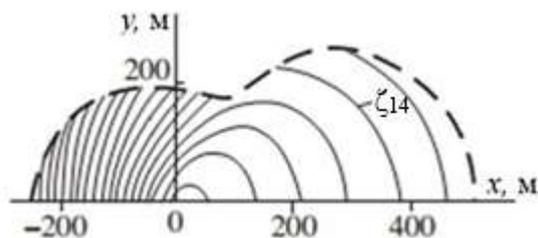


Рисунок 4.10 – Линии равной фазы и фронт волны ζ_{14} для $v = 5$ м/с ($0 < v < v_{11}$), $\sigma = 0,8$ с⁻¹ ($\sigma > \sigma_0$), $h = 0,2$ м, $Q = 0$, $t = 40$ с

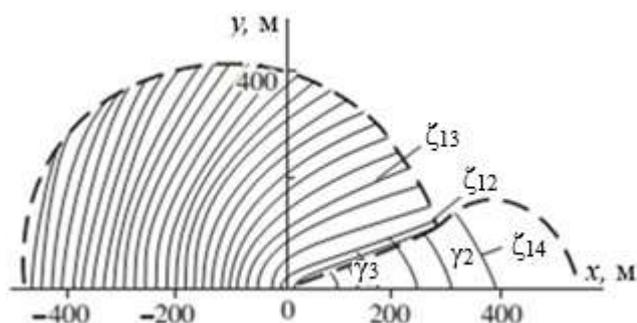


Рисунок 4.11 – Линии равной фазы и фронты волн ζ_{12} , ζ_{13} и ζ_{14} для $v = 16$ м/с ($v > v_{11}$), $\sigma = 0,8$ с⁻¹ ($\sigma > \sigma_0$), $h = 0,2$ м, $Q = 0$, $t = 40$ с

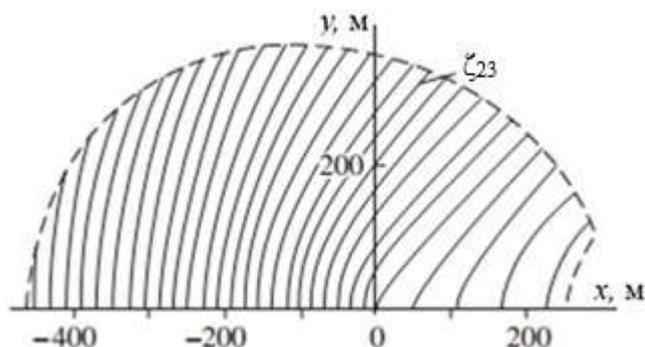


Рисунок 4.12 – Линии равной фазы и фронт волны ζ_{23} , для $v = 12$ м/с ($v_{03} < v < v_{12}$), $\sigma = 0,2$ с⁻¹ ($\sigma > 0$), $h = 0,2$ м, $Q = 0$, $t = 40$ с

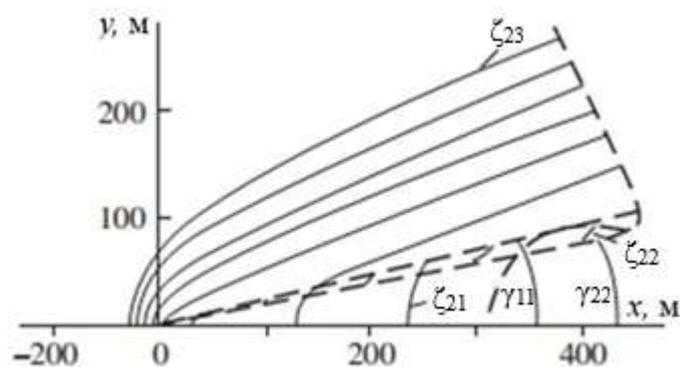


Рисунок 4.13 – Линии равной фазы и фронты волн ζ_{21} , ζ_{22} и ζ_{23} для $v = 25$ м/с ($v > v_{12}$), $\sigma = 0,2$ с⁻¹ ($\sigma > 0$), $h = 0,2$ м, $Q = 0$, $t = 40$ с

Волны ζ_{14} , ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} обусловлены периодическими изменениями давления и при $\sigma = 0$ не образуются. Кроме этого, волны ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} обусловлены наличием упругой пластинки.

Волны ζ_{14} имеют вид кольцевых волн и распространяются при любых значениях частоты колебаний ($\sigma > 0$) и скорости перемещения источника возмущений ($v > 0$). При $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < v < v_{02}$ и при $\sigma > \sigma_0$, $0 < v < v_{11}$ волны ζ_{14} распространяются вокруг источника возмущений ($0 \leq |\gamma| \leq \pi$). Если $0 < \sigma < \sigma_0$, $v > v_{02}$ и если, $\sigma > \sigma_0$, $v > v_{11}$, то волны распространяются в угловой зоне $-\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_3$.

Волны ζ_{21} носят характер поперечных, а ζ_{22} продольных корабельных волн, деформированных за счет упругих и массовых сил пластинки. Волны ζ_{21} распространяются в угловой зоне $-\gamma_{11} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$, а ζ_{22} в угловых зонах $\gamma_{22} \leq |\gamma| \leq \gamma_{11}$ за движущейся областью периодических давлений при $v > v_{12}$ и $\sigma > 0$.

Изгибно-гравитационные волны ζ_{23} при $v_{03} < v < v_{12}$ и $\sigma > 0$ покрывают всю поверхность пластинки, распространяясь как впереди источника возмущений, так и за ним. При $\sigma > 0$ и $v > v_{12}$ они распространяются в угловой зоне $\gamma_{22} \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_{22}$.

Волны ζ_{11} , ζ_{12} , и ζ_{13} при движении источника возмущений образуются и при $\sigma = 0$. Это волны ζ_1 , ζ_2 , и ζ_3 соответственно (см. глава 3).

Волны ζ_{11} и ζ_{12} носят характер продольных и поперечных корабельных волн, распространяющихся за источником возмущений. Волны ζ_{11} образуются при $v_{11} < v < v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ в угловой зоне $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_1$. Волны ζ_{12} образуются в угловых зонах $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1$ при $v_{11} < v < v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и угловых зонах $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$ при $v > v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и $v > v_{11}$, $\sigma > \sigma_0$.

Волны ζ_{13} – изгибно-гравитационные волны. Они обусловлены наличием упругой пластины и при её отсутствии не образуются. При $v_{01} < v < v_{11}$ и $0 < \sigma < \sigma_0$, волны распространяются как впереди области возмущений, так и за ней. Если $v > v_{11}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и $v > v_{11}$, $\sigma > \sigma_0$, эти волны распространяются в угловой зоне $\gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_2$.

4.6. Угловые зоны распространения волн

Зависимость размеров угловых зон, покрытых волнами, от скорости перемещения области давлений приведена на Рисунках 4.14 – 4.16. Штриховая

кривая на рисунках отвечает силам растяжения ($Q = -\sqrt{D\rho g}$), а сплошная отсутствию сил сжатия и растяжения ($Q = 0$), и штрихпунктирная – силам сжатия ($Q = \sqrt{D\rho g}$).

На Рисунке 4.14. представлено распределение γ_k ($k = 1, 2, 3$) в зависимости от скорости v . Линии 1–3 соответствуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Верхняя часть замкнутых кривых между треугольниками и квадратом представляют максимальные значения угла γ_3 , а нижняя угла γ_1 . Квадратом помечены максимальные значения углов γ_1 и γ_3 для $\sigma = 0$, а треугольниками максимальные значения γ_1 и γ_3 для $\sigma = \sigma_0$. Минимальное значение угла γ_1 и максимальное значение угла γ_2 равны, если $v = v_{11}$ (на рисунке помечены кружками). Из рисунка видно, что с увеличением скорости v значения углов γ_2 и γ_3 убывают, а величина угла γ_1 растет. Силы сжатия и растяжения на величину угла γ_3 влияния не оказывают. Величина угла γ_2 уменьшается при увеличении сжатия и увеличивается при увеличении растяжения.

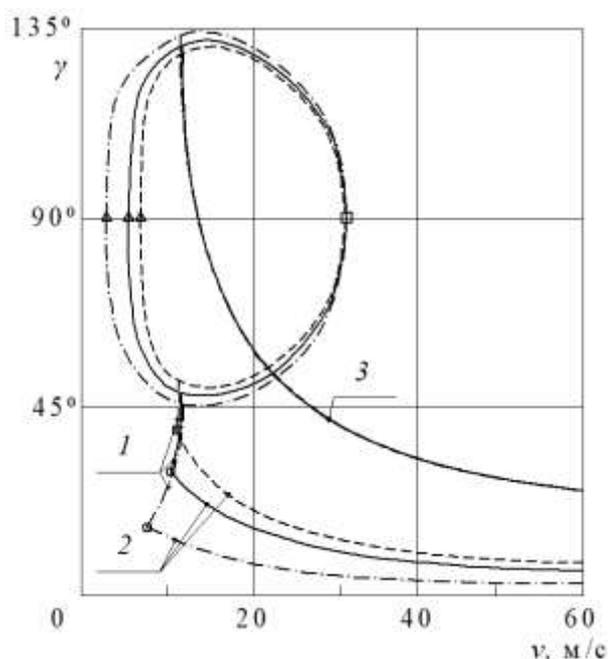


Рисунок 4.14 – Размеры угловых зон γ_k ($k = 1, 2, 3$) для $\sigma = 0,2 \text{ c}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $h = 0,2 \text{ м}$,

$Q = -\sqrt{D\rho g}$ (штриховая), $Q = 0$ (сплошная), $Q = \sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирная)

На Рисунке 4.15 представлены для частоты $\sigma > \sigma_0$ значения углов γ_2 и γ_3 , которые убывают с ростом v . При $v = v_{11}$ значения γ_2 и γ_3 равны. Это отмечено на рисунке кружками. Увеличение сил сжатия уменьшает значение угла γ_2 , а действие растяжения противоположно. Силы сжатия и растяжения при увеличении скорости v на величину угла γ_3 практически не оказывают влияния.

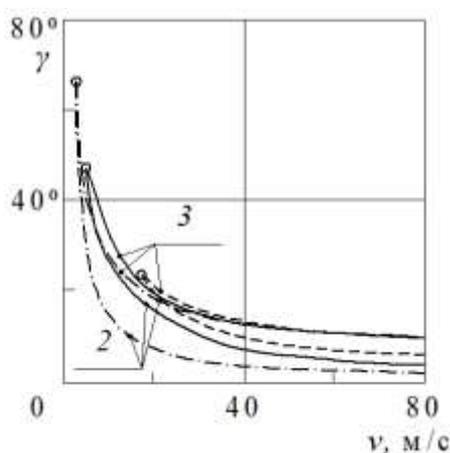


Рисунок 4.15 – Размеры угловых зон γ_k ($k = 2, 3$) для $\sigma = 0,8 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma > \sigma_0$), $h = 0,2 \text{ м}$,
 $Q = -\sqrt{D\rho g}$ (штриховая), $Q = 0$ (сплошная), $Q = \sqrt{D\rho g}$ (штрихпунктирная)

На Рисунке 4.16 дано распределение γ_{11} (кривые 1) и γ_{22} (кривые 2) в зависимости от скорости v для $\sigma = 0,05 \text{ с}^{-1}$. Кружками отмечены значения углов при $v = v_{12}$. Значение γ_{22} убывает с ростом v . Значение угла γ_{11} сначала возрастает при увеличении v , а затем достигнув максимума убывает при дальнейшем увеличении скорости движения нагрузки. При увеличении сил сжатия значение угла γ_{22} уменьшается, а при увеличении растягивающих усилий увеличивается. Из рисунка видно, что сжатие и растяжение не оказывают влияния на величину угла γ_{11} при больших значениях v .

Направление гребней волн ζ_{13} и ζ_{23} определяется углами:

$$\gamma_{01} = \arctg\left(\frac{v^2}{v_{01}^2} - 1\right)^{1/2}, \quad \gamma_{02} = \arctg\left(\frac{v^2}{v_{03}^2} - 1\right)^{1/2}.$$

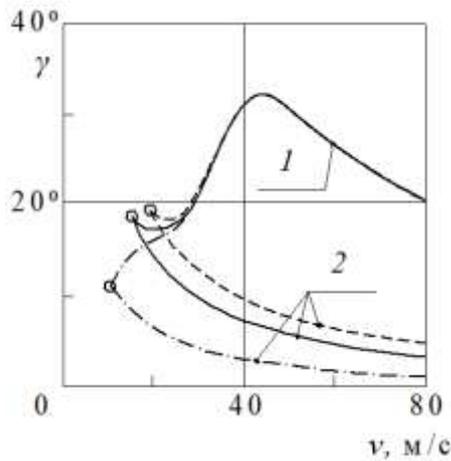


Рисунок 4.16 – Размеры угловых зон γ_{kk} ($k=1, 2$) для $\sigma = 0,05 \text{ c}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $h = 0,2 \text{ м}$,

$$Q = -\sqrt{D\rho g} \text{ (штриховая)}, Q = 0 \text{ (сплошная)}, Q = \sqrt{D\rho g} \text{ (штрихпунктирная)}$$

Значения этих углов уменьшается при увеличении скорости v . При этом $\gamma_{01} < \gamma_{02}$. Максимальные значения этих углов равны $\pi/2$ и достигаются для γ_{01} при $v = v_{01}$, а для γ_{02} при $v = v_{03}$. Увеличение σ приводит к уменьшению γ_{01} и росту γ_{02} . Увеличение сил сжатия приводит к уменьшению значений этих углов и уменьшению при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова. Если $\sigma = 0$, то $\gamma_{01} = \gamma_{02}$.

4.7. Заключение по главе 4

При перемещении по ледяному покрову возмущений переменной интенсивности, в зависимости от частоты колебаний источника и скорости его перемещения, существует шесть значений критических скоростей, если $0 < \sigma < \sigma_0$, и три, если $\sigma > \sigma_0$. При увеличении сил сжатия уменьшаются значения критических скоростей и увеличиваются при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова.

Если частота колебаний источника $\sigma = 0$, то значения критических скоростей v_{01} и v_{03} равны минимальному значению фазовой скорости изгибно-гравитационной волны, т.е. $v_{01} = v_{03} = v_0$. Критические скорости v_{11} и v_{12} равны значению критической скорости v_1 ($v_{11} = v_{12} = v_1$), а значения критических

скоростей v_{02} и v_{10} совпадают со скоростью распространения длинных волн ($v_{02} = v_{10} = (gH)^{1/2}$).

Движущимися возмущениями переменной интенсивности, в зависимости от скорости перемещения и частоты колебаний источника, может генерироваться от одной до семи систем волн, а движущимися возмущениями постоянной интенсивности ($\sigma = 0$) генерируется от одной до трех систем волн.

При скорости движения источника $v = v_{01} = v_{11} = v_{02} = v_{10}$ и частоте колебаний источника $\sigma = \sigma_0$ наиболее вероятно разрушение ледяного покрова.

По главе 4 опубликованы работы: [74, 75, 77, 78, 139, 141–144, 176]. Из них: [77, 141, 144] – статьи из перечня ВАК; [176] – статья, входящая в международные системы цитирования Scopus и Web of Science; [74, 75, 78, 139, 142, 143] – материалы конференций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для задачи о движении нагрузки с постоянной скоростью проведен расчет амплитуд образующихся изгибно-гравитационных волн. Получено, что при движении с критической скоростью v_0 (минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны) максимальное значение амплитуды находится по трассе движения источника. При движении с критической скоростью v_1 (скорость, при которой совпадают фазовые скорости упругой, гравитационной и изгибно-гравитационной волн) максимум амплитуды за источником смещается и расположен вдоль лучей $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ и $\gamma = -\gamma_1 = -\gamma_2$. При движении источника со скоростью $v > v_1$ амплитуда волн уменьшается, а критическая скорость $v = \sqrt{gH}$ не оказывает влияния на амплитуды волн, меняется только характер волнового возмущения. Таким образом, для безопасного движения транспортного средства следует избегать движения с критическими скоростями v_0 и v_1 . При уменьшении глубины водоема H уменьшаются значения критических скоростей v_0 , v_1 и \sqrt{gH} , а также сокращается разница между значениями этих скоростей. Поэтому для безопасного движения транспортного средства в мелких водоемах ($rH \ll 1$) следует рекомендовать скорость движения $v < v_0$, либо $v > \sqrt{gH}$.

2. С увеличением сжимающих усилий и скорости перемещения источника растет область, покрытая волнами. Наибольшее влияние сжимающие усилия оказывают на скорость распространения упругих волн ζ_3 и наименьшее на продольные ζ_2 и поперечные ζ_1 волны. За источником возмущений, для больших значений сжимающих усилий $Q_1 > Q_0$, (Q_0 – значение, при котором минимальное значение групповой скорости изгибно-гравитационной волны равно нулю), образуется зона, в которой происходит наложение волн. Угловая зона $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$, в которой происходит наложение волн, уменьшается при увеличении скорости движения источника возмущений.

3. При перемещении по ледяному покрову возмущений переменной интенсивности в зависимости от частоты колебаний источника и скорости его перемещения существует шесть значений критических скоростей ($v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{10}, v_{11}, v_{12}$), если $0 < \sigma < \sigma_0$, и три (v_{11}, v_{12}, v_{03}), если $\sigma > \sigma_0$. При движении по упругой пластинке возмущений постоянной интенсивности ($\sigma = 0$) существует три значения критических скоростей – v_0, v_1, \sqrt{gH} . При $\sigma = 0$ значения критических скоростей v_{01} и v_{03} равны значению v_0 ($v_{01} = v_{03} = v_0$). Критические скорости v_{11} и v_{12} равны значению критической скорости v_1 ($v_{11} = v_{12} = v_1$). Значения критических скоростей v_{02} и v_{10} равны \sqrt{gH} ($v_{02} = v_{10} = \sqrt{gH}$). Частота колебаний источника σ_0 является той частотой, при которой наиболее вероятно разрушение ледяного покрова. При этом источник возмущений должен двигаться со скоростью, которая равна минимальным значениям критических скоростей v_{01}, v_{02}, v_{10} . При этом $v = v_{01} = v_{11} = v_{02} = v_{10}$.

4. При воздействии на ледяной покров движущейся нагрузки, в зависимости от ее скорости, возникают изгибно-гравитационные волны. Изгибно-гравитационные волны не могут распространяться со скоростью меньшей некоторой критической скорости v_0 , зависящей от глубины водоема, толщины льда и его физико-механических характеристик. Этой скоростью является минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны. Форма прогиба льда при этом подобна статическому прогибу. При движении возмущений со скоростью $v > v_0$ может генерироваться от одной до трех систем изгибно-гравитационных волн. Движущимися возмущениями переменной интенсивности, в зависимости от скорости перемещения и частоты колебаний источника, может генерироваться от одной до семи систем волн.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ИГВ – изгибно-гравитационные волны;

СВП – судно на воздушной подушке;

НДС – напряженно-деформированное состояние;

ζ – прогиб льда (возвышение поверхности пластина-жидкость);

D – цилиндрическая жесткость пластины;

E (Па, Н/м²) – модуль нормальной упругости (модуль Юнга);

h (м) – толщина льда (пластины);

ρ (кг/м³) – плотность воды;

ρ_1 (кг/м³) – плотность льда;

μ – коэффициент Пуассона;

g (м/с²) – ускорение свободного падения;

x, y, z – переменные в прямоугольной системе координат;

t (с) – время;

$\varphi(x, y, z)$ – потенциал движения жидкости;

$q(x, y, t)$ – внешняя сила;

$p(x, y, t)$ – гидродинамическое давление;

G (Па) – модуль сдвига;

τ_φ – время релаксации деформаций (время запаздывания);

τ_m – время релаксации напряжений;

H (м) – глубина водоема;

v (м/с) – скорость движения нагрузки;

σ (с⁻¹) – частота колебаний источника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богородский, В.В. Упругие характеристики льда / В.В. Богородский // Акустический журнал. – 1958. – Т. 4, вып. 1. – С. 19–23.
2. Богородский, В.В. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии / В.В. Богородский, В.П. Гаврило. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1980. – 384 с.
3. Букатов, А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. / А.Е. Букатов. – Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. – 360 с. – ISBN: 978-5-9908460-2-9.
4. Букатов, А.Е. Прогиб плавающего льда вблизи движущейся с малой скоростью области давлений / А.Е. Букатов, В.В. Жарков // Морской гидрофизический журнал. – 1988. – № 2. – С. 3–8.
5. Букатов, А.Е. Трехмерные изгибно-гравитационные колебания вблизи движущейся области давлений / А.Е. Букатов, В.В. Жарков // Прикладная механика и техническая физика. – 1989. – № 3. – С. 158–166.
6. Букатов, А.Е. Моделирование трехмерных изгибных колебаний ледяного покрова при движении области давлений / А.Е. Букатов, В.В. Жарков // Морской гидрофизический журнал. – 1990. – № 4. – С. 10–14.
7. Букатов, А.Е. Распределение изгибного напряжения в морском ледяном покрове при равномерном перемещении области постоянных давлений / А.Е. Букатов, В.В. Жарков // Морской гидрофизический журнал. – 2005. – № 6. – С. 3–16.
8. Букатов, А.Е. Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии / А.Е. Букатов, В.В. Жарков, Д.Д. Завьялов // Прикладная механика и техническая физика. – 1991. – № 6. – С. 51–57.
9. Букатов, А.Е. Неустановившиеся колебания ледяного покрова, вызываемые периодическими перемещающимися давлениями / А.Е. Букатов, Л.В. Черкесов // Морские гидрофизические исследования. – 1969. – № 2(44). – С. 94–105.

10. Букатов, А.Е. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений / А.Е. Букатов, Л.В. Черкесов, А.А. Ярошенко // Прикладная механика и техническая физика. – 1984. – № 2. – С. 151–157.
11. Букатов, А.Е. Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости / А.Е. Букатов, А.А. Ярошенко // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1984. – № 6. – С. 78–83.
12. Букатов, А.Е. Развитие трехмерных колебаний упругой равномерно растянутой плавающей пластинки / А.Е. Букатов, А.А. Ярошенко // Динамические системы. – 1985, вып. 4. – С. 72–77.
13. Букатов, А.Е. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности / А.Е. Букатов, А.А. Ярошенко // Прикладная механика и техническая физика. – 1986. – № 5. – С. 54–60.
14. Булатов, В.В. Амплитудно-фазовая структура волновых возмущений на границе ледяного покрова и глубокой жидкости от локализованных источников / В.В. Булатов, И.Ю. Владимиров // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». Теоретическая и экспериментальная физика. – 2023. – Т. 12, № 3. – С. 135–142. – DOI: 10.26583/vestnik.2023.267.
15. Булатов, В.В. Силовое воздействие потока бесконечно глубокой жидкости на источник под ледяным покровом / В.В. Булатов, И.Ю. Владимиров // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2023. – Т. 16, № 3. – С. 120–128. – DOI: 10.59887/2073-6673.2023.16(3)-9.
16. Булатов, В.В. Дальние поля на поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником / В.В. Булатов, И.Ю. Владимиров // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 346–351. – DOI: 10.31857/S0002351523030033.

17. Булатов, В.В. Дальние поля возмущений поверхности раздела глубокого океана и ледяного покрова от локализованных источников / В.В. Булатов, И.Ю. Владимиров, Е.Г. Морозов // Доклады РАН. Науки о земле. Океанология. – 2023. – Т. 512, № 2. – С. 302–307. – DOI: 10.31857/S2686739723600716.
18. Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки / В.М. Козин, В.Л. Земляк, Е.Г. Рогожникова, А.В. Погорелова. – Новосибирск: Издательство Сибирского отделения РАН, 2020. – 123 с. – ISBN: 978-5-7692-1687-9.
19. Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко, Е.В. Маркина, Л.О. Костюкова, И.И. Бабилов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2022. – Т. 19, № 3. – С. 55–62. – DOI: 10.31429/vestnik-19-3-55-62.
20. Голушкевич, С.С. О некоторых задачах теории изгиба ледяного покрова / С.С. Голушкевич. – Ленинград: Воениздат, 1947. – 231 с.
21. Движение погруженного тела в приповерхностной водной среде, покрытой ледяным покровом / В.Л. Земляк, В.М. Козин, А.В. Погорелова, А.С. Васильев. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2020. – 126 с. – ISBN: 978-5-7692-1696-1.
22. Доронин, Ю.П. Морской лед / Ю.П. Доронин, Д.Е. Хейсин. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1975. – 318 с.
23. Доценко, С.Ф. Установившиеся гравитационно-упругие трехмерные волны от движущихся возмущений / С.Ф. Доценко // Цунами и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. – С. 144–155.
24. Доценко, С.Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах / С.Ф. Доценко // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1978. – № 5. – С. 26–32.

25. Епифанов, В.П. Некоторые результаты экспериментальных исследований механических свойств ледяного покрова / В.П. Епифанов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 2. – С. 182–191.
26. Жесткая, В.Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову / В.Д. Жесткая // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, №4. – С.243–248.
27. Жесткая, В.Д. Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, находящегося под действием движущейся нагрузки, в условиях мелководья / В.Д. Жесткая // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т. 41, № 4. – С. 206–210.
28. Жесткая, В.Д. Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом / В.Д. Жесткая, В.М. Козин. – Владивосток: Дальнаука, 2003. – 159 с. – ISBN: 5-8044-0384-2.
29. Жесткая, В.Д. Численный расчет напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, находящегося под действием нестационарной нагрузки / В.Д. Жесткая, С.Д. Чужимов. – Москва: Академия Естествознания, 2007. – 53 с. – ISBN: 978-5-91327-015-3.
30. Зуев, В.А. Средства продления навигации на внутренних водных путях / В.А. Зуев. – Ленинград: Судостроение, 1986. – 208 с.
31. Зуев, В.А. Новые технологии разрушения ледяного покрова и продления навигации судами на воздушной подушке / В.А. Зуев // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. – 2007. – № 3(318). – С. 78–96. – ISSN: 0869-8422.
32. Зуев, В.А. Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова / В.А. Зуев, В.М. Козин. – Владивосток: Изд-во ДВГУ, 1988. – 128 с. – ISBN: 5-7444-0004-4.
33. Иванов, И.К. Деформация ледяного покрова при движении грузов / И.К. Иванов, П.П. Кобеко, А.Р. Шульман // Журнал технической физики. – 1946. – Т. 16. – С. 257–262.

34. Иванов, К.Е. Грузоподъемность ледяного покрова и устройство дорог на льду / К.Е. Иванов, Н.С. Песчанский. – Москва; Ленинград: Главсевморпуть, 1949. – 182 с.
35. Избранные задачи ледотехники. Средства и методы решения / В.М. Козин, В.Л. Земляк, А.А. Куркин, В.В. Беляков. – Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. унив. им. Р.Е. Алексеева, 2023. – 772 с. – ISBN: 978-5-502-01733-6.
36. Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений в условиях равномерного сжатия / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко, Е.В. Маркина, А.Л. Боран-Кешишьян, А.И. Кондратьев // Морские интеллектуальные технологии. – 2022. – № 4-1 (58). – С. 251–257. – DOI: 10.37220/MIT.2022.58.4.050.
37. Изгибно-гравитационные волны в условиях равномерного сжатия / И.И. Бабиков, Л.О. Костюкова, Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Ломоносовские чтения: материалы ежегодной научной конференции МГУ. (21-23 апреля 2021 г. Севастополь) / Под ред. О.А. Шпырко. – Севастополь: Филиал МГУ в г. Севастополе, 2021. – С. 22–23. – DOI: 10.35103/SMSU.2021.31.74.001.
38. Ильичев, А.Т. Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины / А.Т. Ильичев // Теоретическая и математическая физика. – 2021. – Т. 208, № 3. – С. 387–408. – DOI: 10.4213/tmf10092.
39. Ильичев, А.Т. Процесс установления системы плоских волн на ледовом покрове над диполем, равномерно движущимся в толще идеальной жидкости / А.Т. Ильичев, А.С. Савин // Теоретическая и математическая физика. – 2017. – Т. 193. – № 3. – С. 455–465. – DOI: 10.4213/tmf9356.
40. Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова от воздействия на него движущейся нагрузки / К.И. Ипатов, В.Л. Земляк, В.М. Козин, А.С. Васильев // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. – 2017. – № 1(26). – С. 103–113.

41. Калинин, И.В. Колебания плавающего ледяного покрова под действием движущихся возмущений / И.В. Калинин, Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Ломоносовские чтения: материалы ежегодной научной конференции МГУ. (3-5 апреля 2019 года, г. Севастополь) / Под ред. О.А. Шпырко, В.В. Хапаева, С.И. Рубцовой и др. – Севастополь: Филиал МГУ в г. Севастополе, 2019. – С. 229. – ISBN: 978-5-907196-16-2.
42. Калинин, И.В. Волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений / И.В. Калинин, Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Моря России: Фундаментальные и прикладные исследования. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Севастополь 23-28 сентября 2019 г. – Севастополь: ФГБУН ФИЦ «МГИ РАН». 2019. – С. 80. – ISBN: 978-5-9908460-9-8.
43. Кожаев, А.В. Повышение эффективности резонансного метода интерференцией изгибно-гравитационных волн от периодического изменения давления в подушке СВП / А.В. Кожаев, В.М. Козин // IV Всероссийская конференция с международным участием «Полярная механика-2017», 14-15 сентября 2017 г., Санкт-Петербург, Россия: сборник докладов. – С. 265–271.
44. Козин, В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты / В.М. Козин. – Москва: Академия Естествознания, 2007. – 355 с. – ISBN: 978-5-91327-017-7.
45. Козин, В.М. Способы определения критических скоростей нагрузок, движущихся в условиях сплошного ледяного покрова (обзор) / В.М. Козин // Вестник инженерной школы ДВФУ. – 2019. – № 2(39). – С 30–38. – DOI: 10.24866/2227-6858/2019-2-4.
46. Козин, В.М. Релаксационные свойства ледяного покрова / В.М. Козин // Проблемы Арктики и Антарктики. 2021. – Т. 67, № 2. – С. 165–176. DOI: 10.30758/0555-2648-2021-67-2-165-176.
47. Козин, В.М. Результаты экспериментально-теоретических исследований возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова

- / В.М. Козин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 3. – С. 3–20. – DOI: 10.31857/S0572329922600396.
48. Козин, В.М. Критерии оценки ледоразрушающей способности изгибно-гравитационных волн / В.М. Козин, В.Ю. Верещагин, А.С. Верещагина // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2015. – № IV-1(24). – С. 95–104.
49. Козин, В.М. Обеспечение безопасности эксплуатации ледяного покрова при его использовании в качестве ледовых переправ / В.М. Козин, А.В. Видякин // Транспорт: наука, техника, управление. – 2010. – № 6. – С. 32–35.
50. Козин, В.М. Расчёт напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при движении по нему сосредоточенной силы / В.М. Козин, В.Д. Жесткая // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении: Сб. трудов ИМиМ ДВО РАН. – Владивосток: Дальнаука, 1997. – С. 113–119.
51. Козин, В.М. Физические основы разрушения ледяного покрова резонансным методом / В.М. Козин, В.Л. Земляк. – Комсомольск-на-Амуре: Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 2013. – 250 с. – ISBN: 978-5-85094-519-0.
52. Козин, В.М. Выбор критерия оценки ледоразрушающих свойств изгибно-гравитационных волн, возбуждаемых движущимися нагрузками / В.М. Козин, В.Л. Земляк // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. – 2015. – № 2(19). – С. 37–44.
53. Козин, В.М. Влияние физико-механических свойств льда на параметры резонансных изгибно-гравитационных волн / В.М. Козин, В.Л. Земляк, А.В. Кожаев // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2019. – № I-1(37). – С. 36–45.
54. Козин, В.М. Энергоэффективные технологии разрушения ледяного покрова судами на воздушной подушке резонансным методом / В.М. Козин, А.А. Лебедев // Вестник инженерной школы ДВФУ. – 2022. – № 3(52). – С. 19–29. – DOI: 10.24866/2227-6858/2022-3/19-29

55. Козин, В.М. Взлёт и посадка самолёта на ледяной покров в условиях переменной глубины водоёма / В.М. Козин, А.А. Матюшина // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. – 2016. – № 4(25). – С. 50–60.
56. Козин, В.М. Некоторые вопросы безопасности эксплуатации ледовых взлетно-посадочных полос / В.М. Козин, В.С. Морозов // Материалы международной научно-практической конференции в области экологии и безопасности жизнедеятельности. Комсомольск-на-Амуре: ГОУ ВПО «КНАГТУ», 2007. – С. 179–184. – ISBN: 978-5-7765-0639-0.
57. Козин, В.М. Исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова под действием движущегося с переменной скоростью мотодельтаплана / В.М. Козин, В.С. Морозов // Автоматизация и современные технологии. – 2009. – № 1. – С. 9–11.
58. Козин, В.М. Волновое сопротивление амфибийных судов на воздушной подушке при движении по ледяному покрову / В.М. Козин, А.В. Погорелова // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44, № 2 (258). – С. 49–55.
59. Козин, В.М. Влияние вязкостных свойств льда на прогиб ледяного покрова при движении по нему нагрузки / В.М. Козин, А.В. Погорелова // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 3(295). – С. 147–157.
60. Козин, В.М. Исследование интерференционных процессов, возникающих при движении по ледяному покрову внешних нагрузок / В.М. Козин, Е.Г. Рогожникова // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. – 2016. – № 4(25). – С. 61–65.
61. Козин, В.М. Оценка предельной несущей способности ледяного покрова при его разрушении резонансным методом / В.М. Козин, Е.Г. Рогожникова, К.И. Ипатов // Полярная механика. – 2018. – № 4. – С. 272–282.
62. Козин, В.М. Колебания ледяного покрова под действием периодически изменяющейся нагрузки / В.М. Козин, В.В. Скрипачев // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – № 5. – С. 141–146.

63. Колебания ледяного покрова под действием движущегося источника возмущений / И.И. Бабилов, Л.О. Костюкова, Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Моря России: Год науки и технологий в РФ – М79. Десятилетие наук об океане ООН: тезисы докладов Всероссийской научной конференции, г. Севастополь, 20–24 сентября 2021 г. – Севастополь: ФГБУН ФИЦ МГИ, 2021. – С. 74–76. – ISBN: 978_5_6043409_3_6.
64. Кулешов, А.А. Моделирование колебаний плавающего льда в приближении тонкой упругой пластины / А.А. Кулешов, В.В. Мымрин // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 6. – С. 28–40.
65. Кулешов, А.А. Моделирование колебаний плавающего льда при посадке самолетов на ледовые аэродромы / А.А. Кулешов, В.В. Мымрин // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11, № 1. – С. 7–13.
66. Лавров, В.В. Деформация и прочность льда / В.В. Лавров– Ленинград: Гидрометеиздат, 1969. – 206 с.
67. Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов / В.М. Козин, А.В. Онищук, Б.Н. Марьин [и др.]. – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 190 с. – ISBN: 5-8044-0508-X.
68. Маленко, Ж.В. Волны в плавающем ледяном покрове при движении нагрузки / Ж.В. Маленко, Е.В. Маркина, А.А. Ярошенко // Наукосфера. – 2022. – № 1(1) – С. 275–279. – ISSN: 2542-0402.
69. Маленко, Ж.В. Изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове, вызванные движущейся нагрузкой / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Научно-технические, экономические и правовые аспекты развития транспортного комплекса: материалы III национальной научно-практической конференции. Новороссийск, 14-15 ноября 2019 г. – Новороссийск: РИО ГМУ им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2019. – Ч. 1. – С. 53–55. – ISBN: 978-5-89426-163-8.
70. Маленко, Ж.В. Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Моря России: исследования береговой и шельфовой зон / Тезисы докладов Всероссийской научной конференции

- (XXVIII береговая конференция). Севастополь, 21–25 сентября 2020 г. – Севастополь: ФГБУН ФИЦ «МГИ РАН», 2020. – С. 133–134. – ISBN: 978-5-6043409-1-2.
71. Маленко, Ж.В. Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Морские интеллектуальные технологии. – 2021. – № 2-4 (52). – С. 157–161. – DOI: 10.37220/MIT.2021.52.2.086.
72. Маленко, Ж.В. Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающем ледяном покрове от движущегося источника возмущений / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Волны и вихри в сложных средах: сборник материалов 13-ой международной конференции–школы молодых ученых. Москва, 30 ноября – 02 декабря 2022 г. – Москва: ООО «ИСПО-принт», 2022. – С. 157–160. – ISBN: 978-5-91741-284-9.
73. Маленко, Ж.В. Влияние сжимающих усилий на амплитуды изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2022. – Т. 19, № 2. – С. 29–38. – DOI 10.31429/vestnik-19-2-29-38.
74. Маленко, Ж.В. Изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове от движущихся периодически меняющихся возмущений / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Волны и вихри в сложных средах: сборник материалов 14-ой международной конференции–школы молодых ученых. Москва, 28 ноября – 01 декабря 2023 г. – Москва: ООО «ИСПО-принт», 2023. – С. 187–190. – ISBN: 978-5-91741-289-4.
75. Маленко, Ж.В. Изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове от движущихся периодически меняющихся возмущений / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Многофазные системы. – 2023. – Т. 18, № 4. – С. 402–404. – DOI: 10.21662/mfs2023.4.125.
76. Маленко, Ж.В. Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающем ледяном покрове от движущегося источника возмущений / Ж.В. Маленко,

- А.А. Ярошенко // Прикладная математика и механика. – 2023. – Т. 87, вып. 6. – С. 1037–1048. – DOI: 10.31857/S0032823523060115.
77. Маленко, Ж.В. Изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове от движущихся периодически изменяющихся возмущений / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2024. – № 3 – С. 43–54.
78. Маленко, Ж.В. Колебания плавающей упругой пластинки, вызванные движущимся источником возмущений / Ж.В. Маленко, А.А. Ярошенко // Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых: Прикладная математика: современные проблемы математики, информатики и моделирования. Краснодар, 15–21 апреля 2024 г. – Краснодар: Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России, 2024. – С. 42–47. – ISBN: 978-5-91221-655-8.
79. Марченко, А.В. Экспериментальное определение упругих характеристик морского ледяного покрова / А.В. Марченко, Е.Б. Карулин, П.В. Чистяков // Научно-технический сборник. Вести газовой науки. – 2020. – № 3 (45). – С. 129–140.
80. Матюшина, А.А. Нестационарное движение нагрузки по ледяному покрову / А.А. Матюшина, В.М. Козин, В.Л. Земляк // Полярная механика. – 2018. – № 4. – С. 283–291.
81. Механические свойства морского льда / С.М. Ковалев, Г.А. Лебедев, О.А. Недошивин, К.К. Сухоруков. – Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 2001. – 76 с. – ISBN: 5-286-01422-4.
82. Напряженно-деформированное состояние ледяного покрова при движении по нему нагрузки с малой скоростью / В.А. Зуев, Лу Ян, В.В. Князьков, Ю.А. Москвичева, А.С. Себин // Транспортные системы. – 2020. – № 3(17). – С. 33–40. – DOI: 10.46960/62045_2020_3_33.
83. Папин, А.А. Математические вопросы динамики ледового покрова / А.А. Папин, М.А. Токарева, К.А. Шишмарев // Вестник Алтайской науки. – 2015. – № 1 (23). – С. 161–171.

84. Папин, А.А. Однозначная разрешимость задачи об упругих колебаниях ледового покрова в канале / А.А. Папин, К.А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. – 2016. – № 1(89). – С. 157–162. – DOI 10.14258/izvasu(2016)1-28.
85. Песчанский, И.С. Ледоведение и ледотехника. / И.С. Песчанский. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1967. – 461 с.
86. Повышение эффективности разрушения ледяного покрова судами на воздушной подушке резонансным методом / В.М. Козин, А.В. Погорелова, Е.Г. Рогожникова, В.Ю. Верещагин // Безопасность жизнедеятельности. – 2011. – № 9(129). – С. 37–42.
87. Погорелова, А.В. Особенности волнового сопротивления СВПА при нестационарном движении по ледяному покрову / А.В. Погорелова // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т.49, № 1. – С. 89–99.
88. Погорелова, А.В. Движение нагрузки по плавающей пластине при переменной глубине водоёма / А.В. Погорелова, В.М. Козин // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 2(324). – С. 168–179.
89. Погорелова, А.В. Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета / А.В. Погорелова, В.М. Козин, А.А. Матюшина // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 5 (333). – С. 214–221. – DOI: 10.15372/PMTF20150520.
90. Подходы к оценке разрушения ледяного покрова при движении над ним нагрузки с малой скоростью / В.А. Зуев, Лу Ян, Ю.А. Двойченко, А.С. Себин // Транспортные системы. – 2020. – № 3(17). – С. 41–47. – DOI: 10.46960/62045_2020_3_41.
91. Пожуев, В.И. О возможности использования теории пластин в задачах о действии подвижных нагрузок на ледяной покров, плавающий на поверхности идеальной жидкости / В.И. Пожуев // Динамика и прочность машин. – 1987. – № 46. – С. 49–53.

92. Пожуев, В.И. Нестационарная задача воздействия подвижной нагрузки на ледяной покров / В.И. Пожуев, Н.П. Полякова // Строительная механика и расчет сооружений. – Москва: Стройиздат, 1990. – № 6. – С. 46–50.
93. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. / В.М. Козин, В.Д. Жесткая, А.В. Погорелова [и др.]. – Москва: Академия Естествознания, 2008. – 328 с. – ISBN: 978-5-91327-019-1.
94. Рекомендации по использованию интерференции изгибно-гравитационных волн, возбуждаемых в ледяном покрове движущимися нагрузками, для повышения ледоразрушающей способности / В.М. Козин, В.Л. Земляк, Е.Г. Рогожникова, А.В. Кожаев // Полярная механика. – 2016. – № 3. – С. 214–224.
95. Савин, А.А. Возмущение ледяного покрова движущимся в жидкости диполем / А.А. Савин, А.С. Савин // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 2. – С. 3–100.
96. Савин, А.А. Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем / А.А. Савин, А.С. Савин // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2015. – №5. – С.16–23.
97. Серых, К.С. Эффект неоднородного сжатия в математической модели ледяного покрова / К.С. Серых, Т.А. Сибирякова, К.Е. Найденова // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – 2023. – № 9. – С. 153–162.
98. Способ разрушения ледяного покрова судном на воздушной подушке / В.М. Козин, В.Л. Земляк, Н.О. Баурин, К.И. Ипатов // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. – 2018. – № 4(33). – С. 85–91.
99. Стурова, И.В. Движение погруженного тела в жидкости под ледяным покровом / И.В Стурова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 3(4). – С. 1143–1144.

100. Стурова, И.В. Движение погруженной сферы в жидкости под ледяным покровом / И.В. Стурова // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, № 3. – С. 406–417.
101. Стурова, И.В. Гидродинамические нагрузки, действующие на погруженное тело при движении под ледяным покровом / И.В. Стурова // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12, вып. 4. – С. 114–122.
102. Стурова, И.В. Движение внешней нагрузки по полубесконечному ледяному покрову в докритическом режиме / И.В. Стурова // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2018. – № 1. – С. 51–60. – DOI: 10.7868/S056852811801005X.
103. Стурова, И.В. Влияние неравномерного сжатия упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости, на развитие нестационарных изгибно-гравитационных волн / И.В. Стурова // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2021. – № 2. – С. 63–71. – DOI: 10.31857/S0568528121020110.
104. Стурова, И.В. Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием / И.В. Стурова // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2021. – № 4. – С. 63–72. – DOI: 10.31857/S0568528121040125.
105. Стурова, И.В. Задача Коши-Пуассона для жидкости с ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) / И.В. Стурова // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2022. – № 1. – С. 47–56. – DOI: 10.31857/S0568528122010108.
106. Стурова, И.В. Задача Коши-Пуассона для жидкости со сдвиговым течением и неравномерно сжатым ледяным покровом / И.В. Стурова // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2022. – № 4. – С. 69–76. – DOI: 10.31857/S0568528122040107.
107. Стурова, И.В. Действие пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвигового слоя / И.В. Стурова // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2023. – № 4. – С. 14–26. – DOI: 10.31857/S102470842360001X.

108. Стурова, И.В. Плоская задача о воздействии периодической нагрузки на упругую пластину, плавающую на поверхности бесконечно глубокой жидкости / И.В. Стурова, А.А. Коробкин // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46, № 3. – С. 61–72.
109. Стурова, И.В., Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии / И.В. Стурова, Л.А. Ткачева // Полярная механика. – 2016. – № 3. – С. 997–1007.
110. Стурова, И.В. Генерация волн при равномерном движении нагрузки вдоль края ледяного покрова / И.В. Стурова, Л.А. Ткачева // Полярная механика. – 2018. – № 4. – С. 248-264.
111. Стурова, И.В. Влияние сжимающих усилий в ледяном покрове на генерацию изгибно-гравитационных волн / И.В. Стурова, Л.А. Ткачева // Труды Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – Санкт-Петербург: Изд-во «ЛЕМА». – 2023. – С. 209–212.
112. Технология определения физико-механических свойств модельного льда / В.М. Козин, В.Л. Земляк, Н.О. Баурин, К.И. Ипатов // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. – 2016. – № 4(25). – С. 32–40.
113. Тимохов, Л.А. Динамика морских льдов. Математические модели / Л.А. Тимохов, Д.Е. Хейсин. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1987. – 272 с.
114. Ткачева, Л. А. Воздействие периодической нагрузки на плавающую упругую пластину / Л.А. Ткачева // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 2. – С. 132–146.
115. Ткачева, Л.А. Поведение полубесконечного ледяного покрова при равномерном движении нагрузки / Л.А. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 2. – С. 82–98. – DOI: 10.15372/PMTF20180109.
116. Ткачева, Л.А. Волновое движение в ледяном покрове с трещиной при равномерном движении нагрузки / Л.А. Ткачева // Известия РАН. Механика

- жидкости и газа. – 2019. – № 1. – С. 17–35. – DOI: 10.1134/S0568528119010158.
117. Ткачева, Л.А. Волновые явления, возникающие при движении нагрузки по свободной поверхности жидкости вдоль кромки ледяного покрова / Л.А. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 3. – С. 73–84. – DOI: 10.15372/PMTF20190308.
118. Ткачева, Л.А. Краевые волны при движении судна в ледовом канале / Л.А. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 5. – С. 81–97. – DOI: 10.15372/PMTF20190508.
119. Ткачева, Л.А. Движение сферы под ледяным покровом при неравномерном сжатии / Л.А. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 2 (372). – С. 12–24. – DOI: 10.15372/PMTF20220202.
120. Ткачева, Л.А. Начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием нагрузки при наличии сдвигового потока / Л.А. Ткачева // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2022. – № 2. – С. 66–76. – DOI: 10.31857/S0568528122020104.
121. Ткачева, Л.А. Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости / Л.А. Ткачева // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2023. – № 2. – С. 113–122. – DOI: 10.31857/S0568528123700044.
122. Ткачева, Л.А. Деформации и волновые силы при движении нагрузки по ледяному покрову и наличию течения со сдвигом скорости / Л.А. Ткачева // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2023. – № 6. – С. 59–66. – DOI: 10.31857/S1024708423600203.
123. Ткаченко, В.А. Изгибно-гравитационные волны, вызванные перемещением по льду плоского фронта давления / В.А. Ткаченко, В.В. Яковлев // Гидромеханика. – Киев: ИГМ НАНУ, 1983. – № 4. – С. 27–29.
124. Ткаченко, В.А. Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны в системе жидкость-пластина / В.А. Ткаченко, В.В. Яковлев // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, № 3. – С. 70–75.

125. Трехмерные изгибно-гравитационные волны, генерируемые движущимися возмущениями / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко, Е.В. Маркина, Л.О. Костюкова, И.И. Бабилов // Таврический вестник информатики и математики. – 2022. – №4(57). – С. 83–94.
126. Федорюк, М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – Москва: Наука, (главная редакция физ.-мат. литературы), 1987. – 544 с.
127. Физическое моделирование деформации ледяного покрова нагрузкой, движущейся с малой скоростью / В.А. Зуев, Е.М. Грамузов, А.А. Куркин, Ю.А. Двойченко, А.С. Себин // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2022. – Т. 15, № 2. – С. 19–32. – DOI: 10.48612/fpg/mkmg-68r8-4h6v.
128. Хейсин, Д.Е. Динамика ледяного покрова / Д.Е. Хейсин. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1967. – 215 с.
129. Хейсин, Д.Е. Динамика ледяного покрова / Д.Е. Хейсин // Механика и физика льда. Серия: Прочность и вязко-упругопластичность. – Москва: Наука, 1983. – С. 152-162.
130. Черкесов, Л.В. Гидродинамика волн / Л.В. Черкесов. – Киев: Наукова думка, 1980. – 260 с.
131. Шишмарев, К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн / К.А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – №1/1(85). – С. 126–131. – DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.1-22.
132. Шишмарев, К.А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки / К.А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – №1/2(85). – С. 189–194. – DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-35.
133. Шишмарев, К.А. Влияние ширины канала на вязкоупругие колебания ледового покрова под действием движущейся нагрузки / К.А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. – 2016. – №1(89). – С. 196-201. – DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-35.

134. Шишмарев, К.А. Устойчивость решения по начальным данным задачи о колебаниях ледового покрова в канале / К.А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – №4(96). – С. 159-163. – DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-30.
135. Шишмарев, К.А. Движение нагрузки по ледовому покрову канала / К.А. Шишмарев, Т.И. Хабахпашева, А.А. Коробкин // Полярная механика. – 2016. – № 3. – С. 225–235.
136. Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения. / В.М. Козин, А.В. Погорелова, В.Л. Земляк [и др.] / под общ. ред. В.М. Козина. – Новосибирск: Издательство Сибирского отделения РАН, 2016. – 222 с. – ISBN: 978-5-7962-1504-9.
137. Экспериментальные исследования влияния ледовых условий на эффективность разрушения ледяного покрова изгибно-гравитационными волнами от движения подводных судов / В.М. Козин, В.Л. Земляк, Н.О. Баурин, К.И. Ипатов. – Новосибирск: Издательство Сибирского отделения РАН, 2017. – 142 с. – ISBN: 978-5-7692-1565-0.
138. Ярошенко, А.А. Колебания ледяного покрова под действием движущихся возмущений / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко // Ушаковские чтения: материалы Шестой Национальной научно-практической конференции, посвященной 274-годовщине со дня рождения адмирала Фёдора Фёдоровича Ушакова, 27-28 февраля 2019 года, г. Севастополь. – Севастополь: Полиграфический комплекс «КИА», 2019. – С. 201–205. – ISBN: 978-5-6041616-6-1
139. Ярошенко, А.А. Колебания плавающего ледяного покрова под действием движущихся периодических возмущений / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко // Ломоносовские чтения: материалы ежегодной научной конференции МГУ. (22–24 апреля 2020 года, г. Севастополь) / Под ред. О.А. Шпырко. – Севастополь: Филиал МГУ в г. Севастополе, 2020. – С. 71. – ISBN: 978-5-907196-23-0.

140. Ярошенко, А.А. Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающей упругой пластине от движущейся области давлений / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко // *Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: материалы VI Дальневосточной конференции с международным участием. Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г.* – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022. – С. 15–17. – ISBN: 978-5-7765-1473-9.
141. Ярошенко, А.А. Неустановившиеся трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движущимися возмущениями переменной интенсивности / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* – 2023. – Т. 20, № 1. – С. 41–51. – DOI: 10.31429/vestnik-20-1-41-51.
142. Ярошенко, А.А. Трехмерные изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове, вызванные движущимися источниками возмущений / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко // *Арктика: Прикладные и фундаментальные задачи ледотехники. Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Россия, Биробиджан 24-25 апреля 2024 г.* – Биробиджан: ИЦ ПГУ им. Шолом-Алейхема, 2024. – С. 92–97. – ISBN: 978-5-8170-0452-6.
143. Ярошенко, А.А. Волны в ледяном покрове от движущихся возмущений переменной интенсивности / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко // *Всероссийская конференция, посвященная 105-летию со дня рождения академика РАН Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред»: тезисы докладов, 13-17 мая 2024 г., г. Новосибирск, Россия.* – Новосибирск: СО РАН, 2024. – С. 187. – ISBN: 978-5-6049901-5-5.
144. Ярошенко, А.А. Трехмерные изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове, вызванные движущимися источниками возмущений / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко // *Труды Крыловского государственного*

научного центра. Специальный выпуск 1. – 2024. – С. 202–208. – ISSN: 2542-2324.

145. Ярошенко, А.А. Математические модели ледяного покрова / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко, А.Д. Корнилова // Ушаковские чтения: материалы десятой Национальной научно-практической конференции. (Севастополь, 27-28 февраля 2023 года). – Севастополь: Морской институт имени вице-адмирала В.А. Корнилова – филиал ФГБОУ ВО «ГМУ имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2023. – С. 130–134.
146. Ярошенко, А.А. Трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движущимся источником возмущений / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко, Е.В. Маркина // Прикладная математика и информатика в современном мире: материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 50-летию начала подготовки специалистов в области программирования и прикладной математики на Кубани. Краснодар, 20-23 сентября 2022 г. – Краснодар: ФГБУ «Российское энергетическое агентство» Минэнерго России, Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА» Минэнерго России, 2022. – С. 105–114. – ISBN: 978-5-91221-571-1.
147. Ярошенко, А.А. Колебания ледяного покрова, вызванные движущимися нагрузками / А.А. Ярошенко, Ж.В. Маленко, Е.В. Маркина // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XXI Международной конференции (Ростов-на-Дону, 11–13 октября 2023 г.) – Ростов-на-Дону, Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2023. – С. 126. – ISBN: 978-5-9275-4458-5.
148. Babaei, H. Lake Ice Cover Deflection Induced by Moving Vehicles: Comparing Theoretical Results with Satellite Observations / H. Babaei, J.J. Van der Sanden, N. Short, P.D. Barrette // Paper prepared for presentation at the NEW RESEARCH AND DEVELOPMENTS IN ROAD SAFETY Session of the 2016 Conference of the Transportation Association of Canada Toronto, ON. 2016. – P. 1–18.

149. Bates, H.F. Plane waves in a viscoelastic floating ice sheet / H.F. Bates, L.H. Shapiro // *J. Geophys. Res. Oceans.* – 1981. – Vol. 86, Iss. C5. – P. 4269–4723. – DOI: 10.1029/JC086IC05P04269.
150. Bates, H.F. Stress amplification under a moving load on floating ice / H.F. Bates, L.H. Shapiro // *J. Geophys. Res. Oceans.* – 1981. – Vol. 86, Iss. C7. – P. 6638–6642. – DOI: 10.1029/JC086IC07P06638.
151. Beltaos, S. Field studies on the response of floating ice sheets to moving loads / S. Beltaos // *Canadian Journal of Civil Engineering.* – 1981. – Vol. 8, No. 1. – P. 1–8. – DOI: 10.1139/L81-001.
152. Bonnefoy, F. Nonlinear higher-order spectral solution for a two-dimensional moving load on ice / F. Bonnefoy, M.H. Meylan, P. Ferrant // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2009. – Vol. 621. – P. 215–242. – DOI:10.1017/S0022112008004849.
153. Bukatov, A.E. Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. Pt.1. Surface waves / A.E. Bukatov, V.V. Zharkov // *International Journal Offshore and Polar Engineering.* – 1997. – Vol. 7, No. 1. – P. 1–12.
154. Chonan, S. Moving load on a pre-stressed plate resting on a fluid half-space / S. Chonan // *Ingenieur-Archiv.* – 1976. – Vol. 45, Iss. 3. – P. 171–178. – DOI: 10.1007/BF00539779.
155. Chonan, S. Moving load on a two-layered plate with imperfect bonding, resting on a fluid half-space / S. Chonan // *Ingenieur-Archiv.* – 1980. – Vol. 49, Iss. 2. – P. 97–106. – DOI: 10.1007/BF02627751.
156. Das, S. Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity / S. Das, T. Sahoo, M.H. Meylan // *Proceedings of the Royal Society A.* – 2018. – Vol. 474, Iss. 2209. – 19 p. – DOI:10.1098/rspa.2017.0223.
157. Davys, J.W. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate / J.W. Davys, R.J. Hosking, A.D. Sneyd // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1985. – Vol. 158. – P. 269–287. – DOI: 10.1017/S0022112085002646.

158. Dinvai, E. Fully dispersive models for moving loads on ice sheets / E. Dinvai, H. Kalisch, E.I. Părău // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2019. – Vol. 876 – P. 122–149. – DOI: 10.1017/jfm.2019.530.
159. Dinvai, E. Fully Dispersive Models for Flexural-Gravity Waves / E. Dinvai, H. Kalisch, E.I. Părău // *25-th IAHR International Symposium on Ice Trondheim*, 23 – 25 November, 2020. – 8 p.
160. Dinvai, E. Waves generated by moving loads on ice plates: Viscoelastic approximations / E. Dinvai, H. Kalisch, E.I. Părău // *Wave Motion*. – 2022. – Vol. 114. – P. 103011. – P. 1–10. – DOI: 10.1016/j.wavemoti.2022.103011.
161. Duffy, D.G. The Response of floating ice to a moving vibrating load / D.G. Duffy // *Cold Res. Sci. and Techn.* – 1991. – Vol. 20, Iss. 1. – P. 51–64. – DOI: 10.1016/0165-232X(91)90056-M.
162. Eyre, D. The flexural motions of a floating ice sheet induced by moving vehicles / D. Eyre // *J. Glaciology*. – 1977. – Vol. 19, Iss. 81. – P. 555–570. – DOI: 10.3189/S0022143000215475.
163. Greenhill, A.G. Wave Motion in Hydrodynamics / A.G. Greenhill // *American Journal of Mathematics*. – 1886. – Vol. 9, No. 1. – P. 62–96. – DOI: 10.2307/2369499.
164. Greenhill, A.G. Wave Motion in Hydrodynamics / A.G. Greenhill // *American Journal of Mathematics*. – 1887. – Vol. 9, No. 2. – P. 97–112. – DOI: 10.2307/2369329
165. Hosking, R.J. Two-dimensional response of a floating ice plate to a line load moving at variable speed / R.J. Hosking, F. Milinazzo // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2022. – Vol. 938, A2. – DOI: 10/1017/jfm.2022.109.
166. Hosking, R.J. Viscoelastic response of a floating ice plate to a steadily moving load / R.J. Hosking, A.D. Sneyd, D.W. Waugh // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1988. – Vol. 196. – P. 409–430. – DOI: 10.1017/S0022112088002757.
167. Kerr, A.D. The Critical Velocities of a Floating Ice Plate Subjected to In-Plane Forces and a Moving Load, by Defense Technical Information Center / A.D. Kerr // *CRREL Report 79-19*, 1979. – 18 p. – DOI: 10.21236/ada075455.

168. Kerr, A.D. The critical velocities of a load moving on a floating ice plate that is subjected to in-plane forces / A.D. Kerr // *Gold Regions Sci. Techn.* – 1983. – Vol. 6, Iss. 3. – P. 267–274. – DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-232X\(83\)90047-2](https://doi.org/10.1016/0165-232X(83)90047-2).
169. Kerr, A.D. Bearing Capacity of Floating Ice Covers Subjected to Static, Moving, and Oscillatory Loads / A.D. Kerr // *Applied Mechanics Reviews.* – 1996. – Vol. 49, Iss. 11. – P. 463–476. – DOI: 10.1115/1.3101919.
170. Khabakhpasheva, T. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel. / T. Khabakhpasheva, K. Shishmarev, A. Korobkin // *Applied Ocean Research.* – 2019. – Vol. 86. – P. 154–165. – DOI: 10.1016/J.APOR.2019.01.020.
171. Korobkin, A. Waves Propagating along a Channel with Ice Cover / A. Korobkin, T. Khabakhpasheva, A.8 Papin // *European Journal of Mechanics – B/Fluids.* – 2014. – Vol. 47. – P. 166–175. – DOI: 10.1016/j.euromechflu.2014.01.007.
172. Kozin, V.M. Nonstationary Movement of Load Along Ice Cover / V.M. Kozin, V.D. Zhyostkaya // *International Journal of Offshore and polar Engineering. USA.* – 1999. – Vol. 9, No. 4. – P. 293–297.
173. Li, Js. Flexural-gravity wave resistances due to a moving point source on 2-D infinite floating beam / Js. Li, L. Dong-qiang // *J. Hydrodynamics.* – 2017. – Vol. 29(6). – P. 1000–1009. – DOI: [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(16\)60814-4](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60814-4).
174. Lu, D.Q. Flexural-gravity wave resistances due to a surface-moving line source on a fluid covered by a thin elastic plate / D.Q. Lu, H. Zhang // *Theoretical and Applied Mechanics. Letters.* – 2013. – Vol. 3, No. 2. – 022002. – P. 1–4. – DOI: 10.1063/2.1302202.
175. Malenko, Zh.V. Three-Dimensional Bending-Gravitational Waves in a Floating Ice Sheet from a Moving Source of Disturbances / Zh.V. Malenko, A.A. Yaroshenko // *Fluid Dynamics.* – 2023. – Vol. 58, No. 9. – P. 1716–1724. – DOI: 10.1134/S0015462823603078.
176. Malenko, Zh.V. Flexural-Gravity Waves in an Ice Cover Exited by Periodically Varying Moving Perturbations / Zh.V. Malenko, A.A. Yaroshenko // *Fluid*

- Dynamics. – 2024. – Vol. 59, No. 3. – P. 415–426. – DOI: 10/1134/S0015462824602213.
177. Marchenko, A. Elastic moduli of first-year sea ice calculated from tests with vibrating beams / A. Marchenko // *Ocean Modelling*. – 2024. – Vol. 189. – P. 102365. – DOI: 10.1016/j.ocemod.2024.102365.
178. Miles, J. The response of a floating ice sheet to an accelerating line load / J. Miles, A.D. Sneyd // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2003. – Vol. 497. – P. 435–439. – DOI: 10.1017/S002211200300675X.
179. Milinazzo, F. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load / F. Milinazzo, M. Shinbrot, N.W. Evans // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1995. – Vol. 287. – P. 173–197. – DOI: 10.1017/S0022112095000917.
180. Nevel, D.E. Moving loads on a floating ice sheet / D.E. Nevel // *Cold Regions Research and Engineering Laboratory Res. Rep. 261*, Hanover, New Hampshire, USA. – 1970. – Vol. 261. – P. 1-13.
181. Ni, B. A Review of Ice Deformation and Breaking Under Flexural-Gravity Waves Induced by Moving Loads / B. Ni, H. Xiong, D. Han, L. Zeng, L. Sun, H., Tan // *Journal of Marine Science and Application*. – 2024. – 18 p. DOI: 10.1007/s11804-024-00408-3.
182. Nugroho, W.S. Time-dependent response of a floating flexible plate to an impulsively started steadily moving load / W.S. Nugroho, K. Wang, R.J. Hosking, F. Milinazzo // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1999. – Vol. 381. – P. 337–355. – DOI: 10.1017/S0022112098003875.
183. Părău, E.I. Waves Due to a Steadily Moving Load on a Floating Ice Plate / E.I. Părău, F. Dias // *Fluid Mechanics and Its Applications. IUTAM Symposium on Free Surface Flows*. – 2001. – Vol. 62. – P. 229–236. – DOI: 10.1007/978-94-010-0796-2_28.
184. Părău, E.I. Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load / E.I. Părău, F. Dias // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2002. – Vol. 460. – P. 281–305. – DOI: 10.1017/S0022112002008236.

185. Părău, E.I. Three-dimensional waves beneath an ice sheet due to a steadily moving pressure / E.I. Părău, J.-M. Vanden-Broeck // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 2011. – Vol. 369, Iss. 1947. – P. 2973–2988. – DOI: 10.1098/rsta.2011.0115.
186. Pogorelova, A.V. Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth / A.V. Pogorelova, V.L. Zemlyak, V.M. Kozin // *Journal of Hydrodynamics*. – 2019. – Vol. 31(3). – P. 562–569. – DOI: 10.1007/s42241-018-0143-1.
187. Schulkes, R.M.S.M. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Part 2 / R.M.S.M. Schulkes, R.J. Hosking, A.D. Sneyd // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1987. – Vol. 180. – P. 297–318. – DOI: 10.1017/S0022112087001812.
188. Schulkes, R.M.S.M. Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load / R.M.S.M. Schulkes, A.D. Sneyd // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1988. – Vol. 186. – P. 25–46. – DOI: 10.1017/S0022112088000023.
189. Shishmarev, K. Hydroelastic waves caused by a load moving along a frozen channel / K. Shishmarev, T. Khabakhpasheva, A. Korobkin // In: *Proceedings of the 7th international conference on hydroelasticity in marine technology*. UNSPECIFIED, Split. – 2015. – P. 149–160. – DOI: 10.1016/J.APOR.2016.06.008.
190. Shishmarev, K. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel / K. Shishmarev, T. Khabakhpasheva, A. Korobkin // *Applied Ocean Research*. – 2016. – Vol. 59. – P. 313–326. – DOI: 10.1016/J.APOR.2016.06.008.
191. Shishmarev, K.A. The ice response to an oscillating load moving along a frozen channel / K.A. Shishmarev, T.I. Khabakhpasheva, A.A. Korobkin // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. – 2018. – Vol. 193 (1). – P. 012072. – P. 1–7. – DOI: 10.1088/1755-1315/193/1/012072.
192. Squire, V.A. *Moving Loads on Ice Plates*. / V.A. Squire, R.J. Hosking, A.D. Kerr, P.J. Langhorne. – Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996. – 230 p. – DOI: 10/1007/978-94-009-1649-4. – ISBN: 0792339533.

193. Squire, V.A. Moving Loads on Ice Plates. / V.A. Squire, R.J. Hosking, A.D. Kerr, P.J. Langhorne. – Springer Netherlands, 2012. – 236 p. – ISBN: 9400916507.
194. Squire, V.A. Moving loads on sea ice / V.A. Squire, P.J. Langhorne, W.H. Robinson, A.J. Heine, T.G. Haskell // *J. Polar Record*. – 1987. – Vol. 23, Iss. 146. – P. 569–575. – DOI: 10.1017/S0032247400008068.
195. Squire, V.A. Dynamics strain response of lake and sea ice to moving loads / V.A. Squire, W.H. Robinson, T.G. Haskell, S.G. Moore // *Cold Regions Science and Technology*. – 1985. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 123–139. – DOI: 10.1016/0165-232X(85)90012-6.
196. Squire, V.A. Vehicles and aircraft on floating ice / V.A. Squire, W.H. Robinson, P.J. Langhorne, T.G. Haskell // *Nature (London)*. – 1988. – Vol. 333. – P. 159–161. – DOI: 10.1038/333159A0.
197. Strathdee, J. Moving loads on ice plates of finite thickness / J. Strathdee, W.H. Robinson, E.M. Haines // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1991. – Vol. 226. – P. 37–71. – DOI: 10.1017/S0022112091002288.
198. Takizawa, T. Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load / T. Takizawa // *Cold Regions Science and Technology*. – 1985. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 171–180. – DOI: 10.1016/0165-232X(85)90015-1.
199. Takizawa, T. Field Studies on Response of a Floating Sea Ice Sheet to a Steadily Moving Load / T. Takizawa // *Contrib. Inst. Low Temperature. Sci.* – 1987. – A36. – P. 31–76. – DOI: 10/1029/JC093IC05P05100.
200. Takizawa, T. Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load / T. Takizawa // *J. Geophys. Res.* – 1988. – Vol. 93, Iss. C5. – P. 5100–5112. – DOI: 10.1029/JC093iC05p05100
201. Van der Sanden, J.J., Radar satellites measure ice cover displacements induced by moving vehicles / J.J. Van der Sanden, N.H. Short // *Cold Regions Science and Technology*. – 2017. – Vol. 133 – P. 56–62. – DOI: 10.1016/j.coldregions.2016.10.001.
202. Wang, K., Time-dependent response of a floating viscoelastic plate to an impulsively started moving load / K. Wang, R.J. Hosking, F. Milinazzo // *Journal*

- of Fluid Mechanics. – 2004. – Vol. 521. – P. 295–317. – DOI: 10.1017/S002211200400179X.
203. Wang, Z.Q. Wave Resistance Caused by a Point Load Steadily Moving on the Surface of a Floating Viscoelastic Plate / Z.Q. Wang, D.Q. Lu // Journal of Marine Science and Engineering. – 2023. – Vol. 11, No. 9. – 1681. – P. 1–15. DOI: 10.3390/jmse11091681.
204. Whittenn, J.J. Critical speed phenomenon for floating ice sheets. / J.J. Whittenn // Faculty of engineering and applied science memorial university of Newfoundland. Newfoundland, Canada, 1987. – 173 p.
205. Whittenn, J. Critical speed data for model floating ice roads and runways / J. Whittenn, M.J. Hinchey // Canadian Aeronautics and Space Journal. – 1988. – Vol. 34. – P. 151–161.
206. Wilson, J.T. Coupling between moving loads and flexural waves in floating ice sheets / J.T. Wilson // US Army. SIPRE Report 34. Engineering Research Institute, University of Michigan. Department of the Army Project 8-66-02-004, 1955. – 35 p.
207. Wilson, J.T. Moving loads on floating ice sheets / J.T. Wilson // Final Report. University of Michigan Research Institute. Project 2432. Michigan, U.S.A., 1958. – 22 p.
208. Xue, Y.Z. Hydroelastic response of an ice sheet with a lead to a moving load / Y.Z. Xue, L.D. Zeng, B.Y. Ni, A.A. Korobkin, T.I. Khabakhpasheva // Phys. Fluids. – 2021. – Vol. 33. – P. 037109. – 23 p. – DOI: 10.1063/5.0037682.
209. Yeung, R.W. Effects of a translating load on a floating plate – structural drag and plate deformation / R.W. Yeung, J.W. Kim // J. Fluids and Structures. – 2000. – Vol. 14. – P. 993–1011. – DOI: 10.1006/jfls.2000.0307.
210. Zhang, H. Unsteady hydro-elastic wave resistances and deflections due to two-dimensional load moving on a floating plate. / H. Zhang, D.Q. Lu // Research Gate. – 2013. – Vol. 28(5). – P. 615–625. – DOI:10.3969/j.issn1000-4874.2013.05.015.