

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Кубанский государственный университет»

*На правах рукописи*

Дорошенко Ольга Валерьевна

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН В  
СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С НЕИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,

Голуб М.В.

Краснодар

2015

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Динамическая теория упругости и интегральный подход</b>	<b>16</b>
§1.1. Уравнения движения и граничные условия . . . . .	16
§1.2. Интегральные преобразования . . . . .	22
§1.2.1 Преобразование Фурье . . . . .	23
§1.2.2 Преобразование Ханкеля . . . . .	26
§1.3. Плоские упругие волны . . . . .	28
§1.4. Упругие волны в стратифицированном пространстве . . . . .	35
§1.4.1 Построение Фурье-символов матриц Грина в двумерном случае (плоские, антиплоские колебания) . . . . .	36
§1.4.2 Построение Фурье-символов матриц Грина в трехмерном случае (декартовы координаты) . . . . .	40
§1.4.3 Построение Фурье-символов матриц Грина в трехмерном случае (цилиндрические координаты) . . . . .	41
<b>2. Дифракция упругих волн на одиночных трещинах</b>	<b>49</b>
§2.1. Вывод и решение интегрального уравнения для одиночной трещины . . . . .	49
§2.1.1 Антиплоские колебания полосовой трещины . . . . .	50
§2.1.2 Плоские колебания полосовой трещины . . . . .	52
§2.1.3 Круговая трещина . . . . .	54

§2.2. Асимптотическое решение для одиночной интерфейсной трещины между двумя полупространствами . . . . .	60
§2.2.1 Полосовая трещина . . . . .	61
§2.2.2 Круговая трещина . . . . .	63
§2.3. Волновые поля, рассеиваемые интерфейсной круговой трещиной . . . . .	69
<b>3. Прохождение упругих волн через интерфейсы с неидеальным контактом</b>	<b>75</b>
§3.1. Граничные условия пружинного типа . . . . .	76
§3.2. Распределенный набор трещин . . . . .	77
§3.3. Соотношения для матрицы жесткости в граничных условиях пружинного типа для поврежденных интерфейсов . . . . .	84
§3.3.1 Полосовые микродефекты . . . . .	85
§3.3.2 Круговые микродефекты . . . . .	87
§3.3.3 Оценка полученных соотношений для описания поврежденных интерфейсов . . . . .	88
§3.4. Распространение волн Лэмба в многослойном пакете с поврежденным интерфейсом . . . . .	92
<b>Заключение</b>	<b>98</b>

## Введение

Предвестником разрушения образца из композитного или однородного материала обычно является образование микротрещин. Их последующий рост до макротрещин делает дальнейшую эксплуатацию конструкций невозможной или опасной. Появление трещин возможно как на стадии изготовления, так и при эксплуатации вследствие износа, нагрузок, близких к критическим, и т.д. Распространение новых композитных материалов, например, многослойных волоконно-армированных стекло- и углепластиков, естественным образом предрасположенных к образованию трещин и отслоений, только повышает актуальность задач обнаружения внутренних неоднородностей и восстановления их параметров [1, 2]. Одним из распространенных подходов обнаружения внутренних и поверхностных дефектов является ультразвуковой неразрушающий контроль [3]. Для его реализации требуются развитая приборная база, позволяющая с хорошей точностью измерять волновые поля [4, 5], и эффективные математические модели, описывающие дифракцию упругих волн на дефектах и позволяющие интерпретировать получаемые экспериментальные данные [6].

Наиболее простым и физически наглядным подходом к описанию взаимодействия упругих волн с неоднородностями является использование лучевых методов. Однако, в силу ограничений, связанных с их асимптотической природой, они могут быть использованы только для дефектов, характерный размер которых существенно больше длины волны. Для описания дифракции на объектах, соизмеримых с длиной волны, требуется построение решений, получаемых другими методами, например, методом конечных элементов [7, 8], методом граничных элементов [9–11] и некоторыми другими [12–15]. В настоящем исследовании использовался метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) [16, 17]. Задача дифракции

плоских волн на изотропных волноводах с полосовой одиночной трещиной была впервые решена в работе [18], а позднее обобщена на случай анизотропных материалов [19]. МГИУ успешно применялся к решению динамических задач для круговых (в осесимметричной [20, 21] и неосесимметричной постановках [22, 23]), прямоугольных [24, 25] и эллиптических трещин [26–28], а также трещин произвольной формы [29, 30] в изотропных средах, в анизотропных [31–33], пьезоэлектрических [34–36] и функционально-градиентных [37, 38].

Традиционно используется математическая модель трещины со свободными от напряжений берегами. Однако, в ряде случаев, когда речь идет о зоне неидеального контакта или концентрации микродефектов, то есть области с чередующимися зонами непрерывности и разрывности в перемещениях, этого недостаточно. На практике колебания тел с трещинами, которые могут быть криволинейными или ветвящимися, нередко происходят еще и со смыканием берегов [39]. Иначе говоря, полное описание реальной трещины является сложной математической задачей, так как требует учета сложной геометрии и нелинейного взаимодействия поверхностей трещины. Через зону неидеального контакта проходит ток энергии ненулевой мощности, тогда как поток энергии через берега идеальной трещины отсутствует. Поэтому, вследствие меньшего рассеяния на отслоениях, их обнаружение более затруднительно, чем выявление полостей и трещин.

Математически описать динамическое поведение трещиноватой среды или зоны, содержащей внутренние дефекты, можно введением распределения микротрещин (полостей) [40–42] или, наоборот, пятен контакта между несоприкасающимися слоями [41, 43]. Получили развитие и другие подходы к моделированию поврежденных материалов, например, представление поврежденной зоны тонким вязко-упругим слоем, в том числе и в комбинации с граничными условиями пружинного типа [44, 45], рассматриваемыми

в данной работе. В любом случае для описания поведения упругой среды с отслоением необходима информация о поврежденности (трещиноватости) области: размеры и форма микротрещин, их количество, распределение, ориентация и т.п.

Использование граничных условий пружинного типа, по-видимому, впервые предложенных в работе [46], является весьма эффективным инструментом при моделировании неидеального контакта материалов и шероховатых контактирующих поверхностей [45, 47]. Во-первых, эти условия являются более общими граничными условиями нежели условия на одиночной трещине и позволяют описывать более широкий класс отслоений. Во-вторых, при моделировании отслоений решение зачастую проще построить для граничных условий пружинного типа, нежели для множественных трещин. В-третьих, при решении задач об идентификации дефектов они могут дать знание о размерах отслоения и степени поврежденности. Для получения этих знаний нужна связь между константами в граничных условиях пружинного типа и параметрами отслоения.

Для описания динамического поведения поврежденных зон часто используется распределенный набор трещин. Здесь необходимо отметить цикл работ [48–59], где было рассмотрено прохождение плоских волн в пространстве и рассеяние на разных вариантах распределения трещин, а также монографию [41], включающую обзор методов, использующих усредняющие подходы. В частности, было установлено, что при прохождении плоских волн через поврежденный интерфейс амплитудные коэффициенты отражения, рассчитанные с помощью усредняющих подходов и для периодического набора трещин, имеют близкие значения [52]. Было также построено решение для случая одинаковых произвольно ориентированных трещин [57, 60] и трещин, длины которых изменяются согласно нормальному закону распределения [60]. Коэффициент отражения в обоих случаях был

не более чем в два раза больше по сравнению с периодическим набором. В целом, выполненные исследования указывают на достаточно небольшое различие между амплитудами в дальней зоне при различных вариантах распределения трещин, но при одинаковой поврежденности интерфейса. Во многих случаях это позволяет подбирать наиболее простой для каждой конкретной задачи вариант распределения дефектов.

Вполне естественно воспользоваться таким произволом при построении более простой с математической точки зрения пружинной модели, которая предполагает замену распределенного набора интерфейсных трещин пружинными граничными условиями, заданными на поверхности, содержащей или аппроксимирующей этот набор. Переход выполняется из предположения об эквивалентности амплитуд, рассчитываемых на основе пружинной и трещиноватой моделей в дальней от отслоения зоне. В модели Баика-Томпсона [44], построенной в квазистатическом приближении, вводятся граничные условия пружинного типа для описания колебаний неограниченной поврежденной поверхности между двумя полупространствами. Такие же условия были выведены из решения задачи о колебаниях частично закрытой трещины в работе [43], а также была предложена очень схожая модель Рохлина-Ванга [61]. Эффективность этих моделей была показана в ряде работ по моделированию неполного контакта между поверхностями одинаковых материалов (см. например, [45, 47, 62]), в том числе и экспериментально в [63].

Данная диссертационная работа посвящена изучению распространения и дифракции упругих волн на трещинах малого размера, расположенных на границе раздела разнородных сред, путем построения математической модели стохастически распределенного набора микротрещин и пружинной модели, а также разработке методов определения пружинных констант, характеризующих степень поврежденности материала.

**Актуальность** проведенного диссертационного исследования определяется необходимостью построения и развития механико-математических моделей для описания динамического поведения зон концентрации микродефектов, расположенных на границе раздела двух сред. Создание таких моделей необходимо для идентификации зон неидеального контакта средствами ультразвукового неразрушающего контроля.

Основными **целями** диссертационной работы являются:

- 1) разработка эффективной математической и компьютерной моделей, описывающих распространение и дифракцию упругих волн на одиночной круговой трещине, расположенной на границе раздела двух различных сред;
- 2) построение модели, позволяющей описывать прохождение упругих волн через границы материалов с неидеальным контактом;
- 3) вывод определяющих соотношений для компонент матрицы жесткости в граничных условиях пружинного типа для полосовых микротрещин различных размеров;
- 4) вывод определяющих соотношений для компонент матрицы жесткости в граничных условиях пружинного типа для круговых микротрещин одинаковых размеров.

Для достижения поставленных целей были решены следующие **задачи**:

- 1) построение в цилиндрической системе координат Фурье-символа матрицы Грина для упругого полупространства;
- 2) вывод системы граничных интегральных уравнений для определения скачка перемещений при рассеянии упругих волн на одиночной круговой интерфейсной трещине и ее решение методом Бубнова-Галеркина;



- 3) нахождение соотношений для амплитудных коэффициентов прохождения, описывающих дифракцию упругих волн на границе раздела сред с неидеальным контактом, моделируемой распределенным набором микротрещин и граничными условиями пружинного типа;
- 4) построение асимптотического решения для скачка перемещений при рассеянии плоских упругих волн на одиночной круговой микротрещине, расположенной между двумя разнородными полупространствами;
- 5) нахождение элементов матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, описывающих поведение полосовых интерфейсных микротрещин различных размеров;
- 6) определение нормальных и тангенциальных элементов матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, описывающих поведение круговых интерфейсных микротрещин одинаковых размеров.

**Методы исследования.** Для описания волновых полей, рассеиваемых трещиной при падении упругих волн, используется интегральный подход, основанный на применении интегральных преобразований, метод граничных интегральных уравнений и метод Бубнова-Галеркина. Для описания распределенного набора трещин применяется техника усреднения по ансамблю, теорема Бетти-Рэлея и граничные условия пружинного типа.

**Достоверность и обоснованность** результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых граничных задач, применением строгих математических методов, а также сравнением результатов с данными, полученными иными методами, или известными результатами других авторов.

**Научную новизну** работы составляют следующие результаты:

- 1) модификация метода граничных интегральных уравнений для моделирования дифракции упругих волн на одиночной круговой трещине, расположенной на границе раздела двух различных сред;
- 2) метод построения аналитического асимптотического решения задачи о рассеянии плоских упругих волн на круговых микротрещинах, расположенных на границе раздела двух различных упругих полупространств;
- 3) подход к описанию динамического поведения неидеального контакта материалов и зон концентрации круговых микродефектов, основанный на применении граничных условий пружинного типа;
- 4) определение компонент матриц жесткости граничных условий пружинного типа, описывающих динамическое поведение интерфейса с неидеальным контактом для случаев разноразмерных полосовых микротрещин и круговых микротрещин одинаковых размеров, расположенных на границе раздела двух разнородных сред.

**Теоретическая ценность и практическая значимость** полученных результатов определяются возможностью их применения в неразрушающем ультразвуковом контроле материалов и элементов конструкций.

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33011 «Теоретико-экспериментальное решение обратных задач по восстановлению упругих свойств слоистых композитов и идентификации в них неоднородностей с применением упругих волн Лэмба»), Министерства образования и науки Российской Федерации (1.189.2014К «Математическое и компьютерное моделирование волновых процессов в приложении к проблемам развития инфокоммуникационных технологий и волнового мониторин-

га композитных материалов») а также в рамках выполнения ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (14.740.11.0578 «Моделирование динамического поведения композитных материалов с повреждениями, неоднородностями и зонами неидеального контакта: приложения в неразрушающем контроле»; 14.В37.21.0387 «Волновая динамика слоистых фоновых кристаллов: моделирование неповрежденных и поврежденных структур, фильтрационные и блокирующие свойства»).

### **На защиту выносятся**

- 1) метод решения задачи о дифракции упругих волн на круговой трещине, расположенной на границе раздела двух разнородных сред;
- 2) метод построения асимптотического решения задачи о дифракции плоских упругих волн на круговой трещине, расположенной на границе раздела двух различных полупространств;
- 3) модель, описывающая динамическое поведение зон неидеального контакта в предположении стохастического распределения круговых микротрещин между разнородными материалами;
- 4) оценки компонент матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, описывающих неидеальный контакт между двумя различными упругими материалами в случае полосовых микродефектов различных размеров и круговых микродефектов одинаковых размеров.

Диссертационная работа общим объемом 115 страниц имеет следующую структуру: введение, три главы основной части, заключение и список литературы, включающий 122 источника. Работа содержит 19 рисунков и 2 таблицы.

В **первой главе** изложены теоретические основы динамической теории упругости и интегрального подхода, применяемые в диссертационном исследовании. В *разделе 1.1.* приводятся формулировки уравнений движения линейной теории упругости с краевыми задачами I и II рода и постановка задачи об установившихся гармонических колебаниях упругой области с трещиной, находящейся на границе раздела двух сред; определяются граничные условия для описания различного типа взаимодействия сред. Интегральный подход предполагает использование интегральных преобразований, поэтому *раздел 1.2.* содержит определение и свойства интегральных преобразования Фурье и Ханкеля. *Раздел 1.3.* посвящен вопросам возбуждения и распространения плоских упругих волн в изотропных волноводах, представляющих собой два разнородных полупространства. В *разделе 1.4.* предлагается схема построения Фурье-символов матриц Грина в декартовой и цилиндрической системах координат для случая поверхностной нагрузки.

Во **второй главе** рассматриваются задачи дифракции упругих волн на одиночных трещинах; отдельно изучается случай, когда характерный размер дефекта меньше длины падающей волны; описывается применение метода граничных интегральных уравнений к решению этих задач. В *разделе 2.1.* приводится схема определения волновых полей, возбуждаемых при рассеянии упругих волн на одиночных полосовой и круговой трещинах, расположенных на границе раздела двух сред. В *разделе 2.2.* выводится асимптотика для ядер интегральных уравнений и в аналитической форме строится асимптотическое решение для скачка перемещений на трещине для случая круговой и полосовой микротрещин (характерный размер дефекта меньше длины падающей волны). *Раздел 2.3.* посвящен рассмотрению волновых полей, возникающих при дифракции плоских волн на круговой трещине. Здесь приводятся результаты сравнения с аналогич-

ными работами, рассматривавшими случай одинаковых материалов, а также выполняется сопоставление с результатами, полученными с помощью вариационно-разностного метода [29].

В **третьей главе** рассматриваются два подхода к описанию зон неидеального контакта. С одной стороны, поврежденная зона может моделироваться распределенными пружинами и описываться граничными условиями пружинного типа, которым посвящен *раздел 3.1*. Другой подход, описанный в *разделе 3.2.*, заключается во введении распределенного или периодического набора микротрещин, для которого применяется усреднение по ансамблю, а возникающий на неоднородностях скачок перемещений, с использованием теоремы Релея-Бетти, выражается через скачок на одиночной трещине. В *разделе 3.3.* выводятся соотношения для нормальной и тангенциальной компонент матрицы жесткости, которая входит в граничные условия пружинного типа как для полосовых разноразмерных трещин, так и для круговых трещин одинакового радиуса. Компоненты матрицы находятся из предположения равенства полных коэффициентов отражения двух моделей и зависят от упругих модулей материалов и удельной поврежденности границы раздела сред. Производится сопоставление со схожими моделями и приводятся графики, иллюстрирующие результаты сравнения с работами других авторов. В *разделе 3.4.* рассматривается пример моделирования двухслойной изотропной пластины с поврежденным интерфейсом граничными условиями пружинного типа. Демонстрируется отличие групповых скоростей волн Лэмба, распространяющихся в поврежденной пластине, от скоростей в целой пластине, что указывает на возможность практического применения полученных оценок параметров жесткости для идентификации степени поврежденности интерфейса.

В **заключении** дана краткая сводка основных полученных в данной работе результатов, указано их научное и практическое значение.

**Публикации.** Основное содержание и результаты диссертационных исследований отражены в 15 работах, в том числе 2 публикациях, вышедших в изданиях из перечня, утвержденного ВАК РФ, 1 статья отправлена в журнал. Для компьютерной реализации разработанных алгоритмов было получено свидетельство об официальной регистрации программы.

Результаты диссертационной работы докладывались на XVIII Зимней школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2013 г.), Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2013 г.), VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 2013 г.), Акустическом симпозиуме «КОНСОНАНС-2013» (Украина, г. Киев, 2013 г.), IX Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2014 г.), V Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат-2014» (г. Геленджик, 2014 г.), The 11th European Conference on Non-Destructive Testing ECNDT 2014 (Чешская республика, г. Прага, 2014 г.), XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2014г.), IX Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2015г.), XI Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (г.Казань, 2015 г.), а также на семинарах Института математики, механики и информатики КубГУ.

Основное содержание и результаты диссертационных исследований отражены в статьях [64–72]. В указанных публикациях идеи постановок задач и методы их исследования разрабатывались совместно с научным руководителем М.В. Голубом. Лично соискателем построена математическая модель, описывающая рассеяние волновых полей на круговой интерфейсной

трещине в слоистом упругом стратифицированном пространстве, разработаны алгоритмы для численного решения возникающих интегральных уравнений, получены аналитические асимптотические решения при падении плоской волны круговую трещину и поврежденный интерфейс, расположенные на границе раздела двух полупространств, а также получены соотношения для жесткости, необходимые для применения граничных условий пружинного типа для описания поврежденного интерфейса. В совместных работах с М.В. Голубом [64–66] соискателем найдены оценки пружинной жесткости для граничных условий пружинного типа, описывающих неидеальный контакт между двумя различными упругими материалами в случае полосовых микродефектов различных размеров. В работах [68, 69, 72] изложена модификация МГИУ в приложении к круговой интерфейсной трещине, а в статье [69] приведен метод построения Фурье-символа матрицы Грина и вывод асимптотического решения задачи о дифракции плоских упругих волн на круговой трещине, расположенной на границе раздела двух различных полупространств. В работах [70–72] получены оценки пружинной жесткости для граничных условий пружинного типа, описывающих неидеальный контакт между двумя различными упругими материалами в случае круговых микродефектов одинаковых размеров.

Автор выражает благодарность за помощь и поддержку в работе научному руководителю М.В. Голубу, а также профессорам Е.В. Глушкову и Н.В. Глушковой и сотрудникам института математики, механики и информатики А.А. Еремину и С.И. Фоменко за ценные советы, обсуждение полученных результатов и замечания к тексту диссертационной работы.

# ГЛАВА 1. Динамическая теория упругости и интегральный подход

## §1.1. Уравнения движения и граничные условия

Рассматривается линейно-упругое тело, занимающее некоторый объем  $V$  и ограниченное поверхностью  $S = \partial V$ . Точки упругого тела  $\mathbf{x} \in V$  в результате действия заданных поверхностных и объемных сил отклоняются от первоначального положения на величину, характеризуемую вектором перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Вектор-функция  $\mathbf{u}$  является непрерывной функцией пространственных координат, например, декартовых  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ , и времени  $t$ , а напряженно-деформируемое состояние тела описывается компонентами тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  [73–75].

В линейной теории упругости перемещения, деформация и напряжения в условиях отсутствия объемных сил связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = c_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}(\mathbf{x}, t), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

и геометрическими соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $c_{ijkl}(\mathbf{x})$  – заданные распределения плотности и коэффициентов, характеризующих упругое поведение материала. При использовании тензорной записи предполагается суммирование по одинаковым индексам и для производных используется обозначение  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Здесь и далее полужирным курсивом обозначены вектор-столбцы, а прямым жирным шрифтом – матрицы. Компоненты векторов, записанные в строку, даются в фи-



гурных скобках:  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^3$ ,  $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$  и т.п. Наряду с цифровой индексацией координат и компонент векторов и тензоров в дальнейшем также используются их традиционные обозначения  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  и т.д.

Если  $c_{ijkl}(\mathbf{x})$  и  $\rho(\mathbf{x})$  зависят только от одной пространственной координаты, то такое тело называют стратифицированным. В случае полностью однородного тела коэффициенты упругости  $c_{ijmn}$  и плотность  $\rho$  являются постоянными величинами, не зависящими от координаты  $\mathbf{x}$ . В случае упругой симметрии материала – изотропии, при которой все направления симметрии являются упругоэквивалентными и главными, закон Гука (1.2) можно записать в следующем виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.4)$$

где  $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, а  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие константы Ламе. Нередко вместо констант Ламе и плотности материала  $\rho$  пользуются коэффициентом Пуассона  $\nu$  и модулем Юнга  $E$ . Соотношения, связывающие упругие характеристики изотропного материала, имеют следующий вид [76]:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

Вектор напряжений  $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ , возникающих в упругом теле на некоторой элементарной площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ , связан с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

С учетом (1.2), (1.3) вектор  $\boldsymbol{\tau}$  можно выразить через перемещения  $\mathbf{u}$  с помощью линейного дифференциального оператора напряжений  $T$ :  $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}} = T_{\mathbf{n}} \mathbf{u}$ . В изотропном случае

$$T_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \equiv \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \mu [\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{u}]. \quad (1.5)$$

Квадратными скобками обозначена операция векторного произведения. Далее если в векторе  $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$  не указывается нормаль, то по умолчанию предполагается что  $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ .

Для однородной изотропной среды уравнения движения (1.1) сводятся к известным уравнениям Ламе относительно перемещений  $\mathbf{u}$ :

$$(\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.6)$$

На всей поверхности тела  $S$  могут быть заданы либо перемещения (I краевая задача теории упругости)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (1.7)$$

либо напряжения (II краевая задача)

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S \quad (1.8)$$

К смешанным краевым задачам относятся те, в которых условия (1.7) заданы на некоторой части поверхности  $S_1$ , а на остальной части  $S_2$  – условия (1.8), при этом  $S = S_1 \cup S_2$ .

Наряду с краевыми условиями (1.7)–(1.8) решение должно удовлетворять некоторым начальным условиям

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (1.9)$$

задающим первоначальное отклонение  $\mathbf{u}_0$  точек тела от положения равновесия и их мгновенную скорость  $\mathbf{v}_0$  в начальный момент времени  $t = 0$ . Предполагается, что до начального момента времени  $t = 0$  точки тела находились в покое

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t \leq 0) \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t \leq 0) \equiv 0. \quad (1.10)$$

Важным частным случаем движения точек тела являются установившиеся гармонические колебания относительно положения равновесия, при

которых зависимость от времени вектора смещений  $\mathbf{u}$  в комплексной форме записи имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}].$$

Здесь  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega)$  – комплексная амплитуда перемещений  $\mathbf{u}$ ,  $\omega$  – круговая частота колебаний. В дальнейшем, там где это не приводит к путанице, для комплексной амплитуды будет использоваться то же обозначение, что и для самого вектора смещений:  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$ .

При рассмотрении многослойных композитных материалов или соединений элементов из различных материалов можно разбить всю область  $V$  на однородные подобласти  $D_i$ . При этом необходимо задать граничные условия для описания различных типов взаимодействий. Наиболее частым условием является жесткое сцепление сред, которое формулируется как непрерывность перемещений и напряжений на границе. Для контакта двух материалов, обозначаемых номерами 1 и 2, по границе  $S_0$ , ортогональной оси  $z$ , они имеют вид

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{x} \in S_0$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2, \quad \mathbf{x} \in S_0.$$

В случае, когда необходимо учитывать упругие свойства бесконечно тонкой прослойки при клеевом или сварном соединении, используются модели Баика-Томпсона [44]

$$\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{G}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \quad \mathbf{x} \in S_0$$

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{F}\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2), \quad \mathbf{x} \in S_0$$

и Рохлина-Ванга [61], записываемые соответственно в виде аналогичных матричных соотношений [77]

$$\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{G}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \mathbf{B}\boldsymbol{\tau}_2, \quad \mathbf{x} \in S_0$$

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2) + \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{x} \in S_0,$$

где  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  – некоторые матрицы, характеризующие соединение, см. подробнее [44, 61].

Для задач практики необходимо моделировать внутренние неоднородности или дефекты (полости, трещины или отслоения), которые могут находиться как внутри сред, так и на границе их раздела. В этом случае рассматривается неоднородность, занимающая область  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ , при этом в области  $V \setminus \Omega$  поля перемещений непрерывны. Виды наиболее часто изучаемых типов неоднородностей (трещины, отслоения и полости) схематически изображены на рис. 1.1.

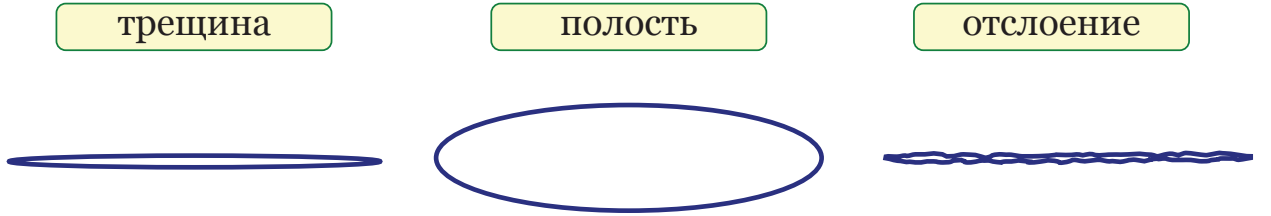


Рис. 1.1: Виды типичных неоднородностей.

В зависимости от типа рассматриваемого дефекта различаются граничные условия. Между поверхностью трещины (бесконечно тонкий разрез) или полости  $\partial\Omega$  и внешней нормалью  $\mathbf{n}$  к ней отсутствуют нормальные и касательные напряжения

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (1.11)$$

Раскрытая или идеальная трещина описывается равными нулю нормальными и касательными напряжениями, т.е. имеет место II краевая задача, где в условии (1.8) необходимо положить  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ . К примеру, для трещины, расположенной на границе раздела двух сред ( $j = 1, 2$ ) в плоскости  $xOy$ ,

граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1 &= \mathbf{u}^2, & \mathbf{x} &\notin \partial\Omega, \\ \boldsymbol{\tau}^1 &= \boldsymbol{\tau}^2, & \mathbf{x} &\notin \partial\Omega, \\ \boldsymbol{\tau}^1 &= \boldsymbol{\tau}^2 = 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для описания отслоения без включений могут использоваться модели Баика-Томпсона и Рохлина-Ванга в предположении нулевых значений матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$ . В этом случае граничные условия пружинного типа имеют следующий вид [43, 44, 58, 78]:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa} (\mathbf{u}_{\mathbf{n}^-}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{\mathbf{n}^+}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.13)$$

где  $\boldsymbol{\kappa}$  – матрица жесткостей  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{n}^\pm$  – внешняя и внутренняя нормали к поверхности в рассматриваемой точке  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}$  – вектор, составленный из нормальных и касательных компонент тензора напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  в точке  $\mathbf{x}$ , а  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений. В изотропном случае можно выбрать локальную систему координат таким образом, что три диагональные компоненты матрицы жесткости остаются ненулевыми:

$$\kappa_{11} = \kappa_x, \quad \kappa_{22} = \kappa_y, \quad \kappa_{33} = \kappa_z.$$

Использование интегрального преобразования Фурье по переменной  $t$  в случае нулевых начальных условий позволяет свести нестационарную задачу (1.4)–(1.13) относительно вещественного вектора перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  к краевой задаче относительно комплексной амплитуды  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{F}_t[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = \int_0^\infty \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{F}_\omega^{-1}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Тем самым, решение гармонической задачи можно рассматривать как необходимый этап построения решения соответствующей нестационарной задачи. Соотношение (1.15) отражает принцип суперпозиции для линейных систем, в соответствии с которым произвольные нестационарные колебания в системе можно представить в виде суперпозиции ее гармонических колебаний  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$  (частотного спектра).

Далее рассматриваются задачи об установившихся гармонических колебаниях волноводов, составленных из двух слоев или полупространств  $D_1$  и  $D_2$  с повреждениями, расположенными на границе раздела сред (интерфейсные дефекты). Полупространство и слой представляют собой области, неограниченные по двум направлениям, поэтому для построения волновых полей в них можно использовать интегральные преобразования, основные свойства которых приводятся в следующем разделе.

## §1.2. Интегральные преобразования

Для построения решения краевых задач для неограниченных упругих тел, необходимо сначала построить волновые поля смещений и напряжений, возникающих в однородной среде без неоднородностей под действием некоторых нагрузок, приложенных к его поверхности. Для этого часто пользуются интегральными преобразованиями, описанными в настоящем разделе.

Интегральные преобразования были предложены О. Коши, Ж. Фурье, П. Лапласом, С. Пуассоном в XIX в. при работе над задачами по распространению тепла [79]. Они являются эффективным средством решения уравнений в частных производных, позволяя свести их во многих случаях к обыкновенным дифференциальным уравнениям или, по крайней мере, уменьшить число переменных, по которым берутся частные производные.

Если  $K(\alpha, x)$  – некоторая функция, то интеграл

$$F(\alpha) = \int_a^b K(\alpha, x)f(x)dx$$

является интегральным преобразованием с ядром  $K(\alpha, x)$  и образом  $F(\alpha)$ .

Наиболее широко используется интегральное преобразование Фурье – одно из важнейших понятий классического и современного анализа [80]. Интегральные преобразования постепенно развивались и находили новые приложения, в частности, при обработке и анализе сигналов и данных [81]. В 1920-х гг. Б.Бромвич и Д.Карсон установили, что интегральные преобразования лежат в основе операционного исчисления [82], важнейшая роль при этом отведена теореме о свёртках. После разработки аппарата обобщённых функций многие вопросы теории интегральных преобразований получили более общую трактовку, а спектр приложений увеличился. Интегральные преобразования также нашли широкое применение в задачах динамической теории упругости и акустики [83–89]. Математические основы аппарата интегральных преобразований представлены в многочисленных монографиях и учебниках, например [90, 91].

В настоящем диссертационном исследовании используются три из наиболее часто применяемых интегральных преобразований – преобразования Фурье и Ханкеля. Основные свойства, используемые в данной работе, приводятся в текущем разделе.

### §1.2.1 Преобразование Фурье

Преобразование Фурье часто применяется для решения дифференциальных уравнений, в особенности краевых задач для областей неограниченных по одной или нескольким координатам [85, 92]. На практике используют преобразование Фурье в комплексной форме. Интегральные операторы

прямого и обратного преобразования будут в дальнейшем обозначаться  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}^{-1}$  соответственно:

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = F(\alpha),$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x).$$

Далее описываются основные свойства преобразования Фурье.

1. *Обращение преобразования Фурье.*

Если в окрестности  $x_0$  функция  $f(x)$  непрерывна, то

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f(x_0),$$

а если  $x_0$  – точка разрыва, то

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)].$$

2. *Преобразование Фурье производных.*

Если  $f(x), f'(x)e^{i\alpha x} \in L_1[-\infty, +\infty]$ , то  $\mathcal{F}[f'] = -i\alpha\mathcal{F}[f]$ . Аналогично, если функция и все ее производные до  $k$ -порядка включительно интегрируемы на оси, то

$$\mathcal{F}[f^k] = (-i\alpha)^k \cdot F(\alpha) \tag{1.16}$$

или иначе

$$\mathcal{F}^{-1}[(-i\alpha)^k F(\alpha)] = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)]. \tag{1.17}$$

При обращении двукратных преобразований Фурье свойство (1.17) позволяет сводить их к однократным интегралам.

3. *Преобразование Фурье от свертки функций.*

Пусть  $f_1, f_2 \in L_1(-\infty, +\infty)$ , тогда преобразование Фурье свертки функций  $f_1, f_2$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x - \xi)d\xi \stackrel{Def}{=} (f_1 * f_2)(x).$$



после замены порядка интегрирования и замену переменной интегрирования  $x = y + \xi$  имеет вид:

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1]\mathcal{F}[f_2].$$

#### 4. Скалярное произведение Фурье-символов.

Скалярное произведение в пространстве  $L_2$  функций, интегрируемых с квадратом, вводится соотношением

$$(f, g)_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx,$$

здесь и далее звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

Непосредственно из теоремы Планшереля следует равенство

$$(f, g)_{L_2} = \frac{1}{2\pi}(F, G)_{L_2}, \quad (1.18)$$

здесь  $F(\alpha), G(\alpha)$  – трансформанты Фурье  $f, g$ , соответственно.

#### 5. Кратные преобразования Фурье.

Для функций  $n$  переменных  $f(x)$ ,  $x \in R_n$  преобразование Фурье выглядит следующим образом:

$$\mathcal{F}[f] = \int_{R^n} f(x)e^{i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} dx,$$

здесь  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$  –  $n$ -мерные векторы и, соответственно  $\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ .

Например, в двумерном случае

$$\mathcal{F}[f] = F(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Для производных справедливо выражение

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2}} f \right] = (-i\alpha_1)^{p_1} (-i\alpha_2)^{p_2} F(\alpha_1, \alpha_2). \quad (1.19)$$

### §1.2.2 Преобразование Ханкеля

Преобразование Ханкеля является двумерным преобразованием Фурье функции с круговой (осевой) симметрией. В решении некоторых задач теории упругости удобно использовать разложение по цилиндрическим функциям, что позволяет применять интегральное преобразование Ханкеля (иногда его также называют преобразованием Бесселя) и подобные им преобразования Мейера. Для неосесимметричных задач преобразование Ханкеля также может быть полезно, так как по угловой координате можно раскладывать решение в ряд Фурье [93].

Преобразованием Ханкеля  $\mathfrak{H}_\nu$  порядка  $\nu$  называется отображение, которое переводит функцию  $f(r)$  в функцию  $\hat{F}_\nu(\alpha)$  комплексного аргумента  $\alpha$  по правилу

$$\mathfrak{H}_\nu[f(x)] = \hat{F}_\nu(\alpha) = \int_0^\infty f(r)rJ_\nu(\alpha r)dr. \quad (1.20)$$

Для применимости необходимо, чтобы функция  $f(r)$  имела ограниченную вариацию, т.е.

$$\int_0^{+\infty} |f(r)|r^{1/2}dr < \infty.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$f(r) = \mathfrak{H}_\nu^{-1}[\hat{F}_\nu(\alpha)] = \int_0^\infty \hat{F}_\nu(\alpha)\alpha J_\nu(\alpha r)d\alpha,$$

т.е. преобразование Ханкеля является инволюцией:  $\mathfrak{H}_\nu^{-1} = \mathfrak{H}_\nu$ . Основные свойства преобразования Ханкеля:

1. *Подобие*

$$\mathfrak{H}_\nu[f(ar)] = \frac{1}{a^2}\hat{F}_\nu\left(\frac{\alpha}{a}\right);$$

2. *Преобразования дифференциального оператора уравнения Бесселя в*

радиальных координатах

$$\mathfrak{H}_\nu \left[ \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} f \right] = -\alpha^2 \mathfrak{H}_\nu [f(r)];$$

3. Равенство Парсеваля в осесимметричном случае

$$\int_0^\infty f(r)g(r)r \, dr = \int_0^\infty \mathfrak{H}_\nu[f] \mathfrak{H}_\nu[g] \alpha \, d\alpha;$$

4. Производная

$$\mathfrak{H}_\nu \{f'(r)\} = \alpha \left[ \frac{\nu+1}{2\nu} \hat{F}_{\nu-1}(\alpha) + \frac{\nu-1}{2\nu} \hat{F}_{\nu+1}(\alpha) \right];$$

5. Деление на  $r$

$$\mathfrak{H}_\nu \{r^{-1}f(r)\} = \frac{\alpha}{2\nu} \left[ \hat{F}_{\nu-1}(\alpha) + \hat{F}_{\nu+1}(\alpha) \right];$$

6.

$$\mathfrak{H}_\nu \left\{ r^{\nu-1} \frac{d}{dr} [r^{1-\nu} f(r)] \right\} = -\alpha \hat{F}_{\nu-1}(\alpha);$$

7.

$$\mathfrak{H}_\nu \left\{ r^{-\nu-1} \frac{d}{dr} [r^{1+\nu} f(r)] \right\} = \alpha \hat{F}_{\nu+1}(\alpha);$$

Пусть рассматривается функция с круговой симметрией

$$\phi(x, y) = f(r), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Её двумерное преобразование Фурье заменой ( $\alpha_1 = \alpha \cos \theta$ ,  $\alpha_2 = \alpha \sin \theta$ ) сводится к преобразованию Ханкеля:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{-i(x\alpha_1 + y\alpha_2)} \, dx \, dy = \int_0^\infty f(r) J_0(\alpha r) r \, dr = \mathfrak{H}_0[f(r)].$$

Этот результат можно обобщить:  $N$ -мерное преобразование Фурье функции с круговой симметрией от  $N$  переменных соотносится с преобразованием Ханкеля порядка  $N/2 - 1$ . Если функция  $f(r, \theta)$  зависит от  $\theta$ , то её можно разложить в ряд Фурье

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\theta}$$

и аналогично

$$\hat{F}(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{\infty} e^{-ir\alpha \cos(\theta-\varphi)} f(r, \theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n(\alpha) e^{in\varphi},$$

где

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$\hat{F}_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{F}(\alpha, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

### §1.3. Плоские упругие волны

После приложения динамической нагрузки к упругому телу, в нем возникают упругие волны [94]. Если в каком-либо месте упругой (твёрдой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание начнет распространяться в среде с некоторой скоростью. Частицы среды, в которой распространяется волна, не переносятся ею, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебания частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные волны. В первом случае частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне – в направлениях перпендикулярных направлению распространения волны. Механические поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в идеальной жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В упругой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

Простейшими решениями волновых уравнений, имеющими существенное прикладное значение, являются решения в виде плоских волн. Для

целей данного исследования важно, что в случае полупространства волновое поле источника колебаний, удаленного от интерфейса, можно приближенно описать плоской волной. В плоской волне возмущение зависит лишь от времени и расстояния до источника колебаний вдоль некоторого выбранного направления, например, вдоль оси  $Ox$ . Так, если рассмотреть одномерное волновое уравнение, где общее решение можно представить в виде суперпозиции гармонических волн, то для некоторой величины  $\varphi$ , характеризующей волновое движение среды (смещение, скорость смещения, потенциал) справедливо

$$\varphi(t, x) = f_1(vt + x) + f_2(vt - x),$$

где,  $v$  – скорость распространения волны в среде,  $f_1$  и  $f_2$  – произвольные функции, причем первая функция описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Ox$ , а вторая – в противоположном направлении.

Строго говоря, ни одна реальная волна не является плоской волной, так как распространяющаяся вдоль оси  $x$  плоская волна должна охватывать всю область пространства по координатам  $y$  и  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Однако, во многих случаях можно указать ограниченный по осям  $y$  и  $z$  участок волны, на котором она практически совпадает с плоской волной. Например, волны, которые беспрепятственно уходят на большие расстояния  $R$  от источника в однородной изотропной среде, будут очень близки к плоским волнам. Можно показать, что всякую гармоническую волну можно считать плоской волной на участке шириной  $r \leq \sqrt{2Rl}$ , где  $l$  – длина волны [95].

Для произвольной вектор-функции перемещений  $\mathbf{u}(x, y, z)$  справедливо разложение Грина-Ламе [76]

$$\mathbf{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\mathbf{a}. \quad (1.21)$$

Для однородного упругого пространства представление решения в виде

(1.21) позволяет перейти от системы уравнений Ламе (1.6) к двум независимым уравнениям относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и векторного потенциала  $\mathbf{a}$ :

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad v_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (1.22)$$

$$\Delta\mathbf{a} - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = 0, \quad v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (1.23)$$

Любая дважды дифференцируемая функция вида  $f((\mathbf{n}, \mathbf{x}) - v_1 t)$ , где  $\mathbf{n}$  – произвольный единичный вектор, определяющий направление распространения волны, а  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор произвольной точки упругого тела, удовлетворяет уравнению (1.22). Поскольку  $(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - v_1 t = \text{const}$  является уравнением распространения плоской волны с нормалью к фронту  $\mathbf{n}$  и скоростью  $v_1$ , то общее решение (1.22) является суперпозицией таких волн. Аналогично, второе слагаемое (1.21) описывает распространение возмущений со скоростью  $v_2$ .

Для дальнейшего описания динамического поведения упругих тел необходимо решить вопрос о конкретном виде функции  $f$ . Широко распространён спектральный метод изучения волновых явлений [96], который позволяет свести поведение волн произвольной формы к анализу поведения простейших, гармонических волн, комплексная запись которых имеет вид  $f(x, \omega)e^{-i\omega t}$ . Физический смысл придается только их вещественной части.

Ввиду того, что  $\text{rot grad}\varphi \equiv 0$ , волны первого типа являются безвихревыми. Они связаны с процессами расширения–сжатия в упругой среде. Общее выражение для скалярного потенциала плоской волны имеет вид

$$\varphi = \Phi_0 e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad k_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}.$$

Анализ поляризации этих волн [76] показывает, что при распространении возмущения частицы среды смещаются вдоль направления нормали к фронту волны, отсюда их название – продольные волны.

Для волн второго типа справедливо  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$ , т.е. при их прохождении не меняется объем элементов среды. Их распространение обусловливается сдвиговыми деформациями, поэтому их называют волнами сдвига или поперечными, так как перемещение частиц среды при их прохождении лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Скорость продольных волн  $v_1$  больше скорости поперечных  $v_2$ , поэтому в геофизике продольные волны называют первичными (primary) или  $P$ -волнами, а поперечные – вторичными (secondary) или  $S$ -волнами. В связи с тем, что волновой вектор и направление смещения частиц, возникающих при распространении волны, различаются для упругой среды, важной кинематической характеристикой волны является поляризация. Волна, у которой вектор смещения частиц параллелен некоторой фиксированной плоскости, называется плоскополяризованной. Горизонтально поляризованная волна называется  $SH$ -волной и определяется соотношениями

$$u_x = U_x e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad u_y = u_z = 0, \quad k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}.$$

Аналогично определяется и вертикально поляризованная  $SV$ -волна

$$u_y = U_y e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad u_x = u_z = 0.$$

Здесь  $k_1, k_2$  – волновые числа.

Возможность разделения системы уравнений Ламе на два независимых соотношения (1.22) и (1.23) означает, что в безграничной однородной среде  $P$  и  $S$ -волны распространяются независимо друг от друга. При наличии границ или неоднородностей эта независимость нарушается [76, 96, 97], так как граничные условия в общем случае не расщепляются на вихревую и потенциальную составляющие. Это необходимо, чтобы в отраженной и преломленной волнах были составляющие, соответствующие как волне сжатия ( $P$ -волне), так и волне сдвига ( $S$ -волне). Данное условие должно

выполняться даже в том случае, если падающая волна была чистой волной одного какого-либо типа. Исключение составляют случаи нормального падения и сдвиговые волны с движением частиц параллельно поверхности раздела (*SH*-волны) [98].

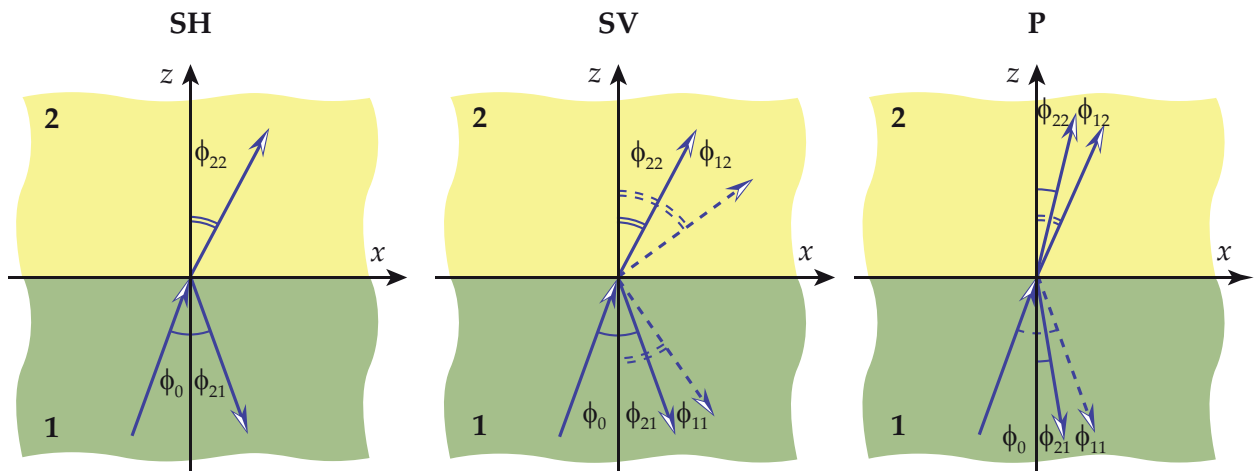


Рис. 1.2: Распространение плоских волн через границу раздела двух сред

Далее рассматривается отражение и преломление плоских волн на границе раздела двух сред  $z = 0$ , при этом, сами полупространства предполагаются жестко сцепленными, см. рис. 1.2. Выводу формул волновых полей плоских волн на границе раздела сред посвящено достаточно много работ, например, [76, 98].

В начале необходимо описать падение плоской упругой *SH*-волны под углом  $\phi_0$  из одного полупространства в другое. Для определенности полагается, что плоская волна падает из нижнего полупространства  $z < 0$ . Непрерывность скорости и напряжения на границе раздела может быть обеспечена, если в среде  $j = 1$  распространяется отраженная волна, а в среде  $j = 2$  – прошедшая. Падающая *SH*-волна имеет единственную отличную от нуля компоненту вектора смещений. Волновое поле, возникающее при прохождении плоской волны через границу раздела двух сред без



дефекта, можно записать в виде

$$\mathbf{u}^{\text{in}} = \begin{cases} \mathbf{p}_3 \left( e^{ik_{21}(x \sin \phi_0 + z \cos \phi_0)} + R_3^- e^{ik_{21}(x \sin \phi_{21} - z \cos \phi_{21})} \right), & z < 0, \\ \mathbf{p}_3 T_3^- e^{ik_{22}(x \sin \phi_{22} + z \cos \phi_{22})}, & z > 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

где  $\mathbf{p}_3 = (0, 1, 0)^t$ .

Для углов  $\phi_1$  и  $\phi_2$  отраженной и преломленной волн выполняется закон Снеллиуса:  $k_{21} \sin \phi_0 = k_{21} \sin \phi_1 = k_{22} \sin \phi_2$ , из которого получается, что угол падения равен углу отражения  $\phi_0 = \phi_1$ , а угол преломления определяется из соотношения  $\sin \phi_2 = v_{22}/v_{21} \sin \phi_0$ .

Вектор напряжений для  $SH$ -волны имеет вид

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{in}} = \begin{cases} \mathbf{p}_3 \mu_1 i k_{21} \cos \phi_0 \left( e^{ik_{21}(x \sin \phi_0 + z \cos \phi_0)} - R_3^- e^{ik_{21}(x \sin \phi_0 - z \cos \phi_0)} \right), & z < 0, \\ \mathbf{p}_3 \mu_2 i k_{22} \cos \phi_2 T_3^- e^{ik_{22}(x \sin \phi_2 + z \cos \phi_2)}. & z > 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

Тогда амплитудные коэффициенты прохождения и отражения выводятся из непрерывности сдвигового напряжения

$$R_3 = \frac{\mu_1 k_{21} \cos \phi_0 - \mu_2 k_{22} \cos \phi_2}{\mu_1 k_{21} \cos \phi_0 + \mu_2 k_{22} \cos \phi_2}, \quad T_3 = \frac{2\mu_1 k_{21} \cos \phi_0}{\mu_1 k_{21} \cos \phi_0 + \mu_2 k_{22} \cos \phi_2}.$$

Потом необходимо рассмотреть случай падения плоской продольной  $P$ -волны и сдвиговых  $SV$ -волн. Отраженное и преломленное волновое движение представляет собой суперпозицию продольных и поперечных волн. Вследствие двумерности задачи из трех компонент вектора перемещений отличными от нуля будут  $u_x$  и  $u_z$ . Поле без дефекта принимает вид

$$\mathbf{u}^{\text{in}} = \begin{cases} \mathbf{u}_1^{\text{in}}, & z < 0, \\ \mathbf{u}_2^{\text{in}}, & z > 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{\text{in}} = & \mathbf{p}_s(\phi_0) e^{ik_{s1}(x \sin \phi_0 + z \cos \phi_0)} + \mathbf{p}_1(\phi_{11}) R_1 e^{ik_{11}(x \sin \phi_{11} - z \cos \phi_{11})} + \\ & + \mathbf{p}_2(\phi_{21}) R_2 e^{ik_{21}(x \sin \phi_{21} - z \cos \phi_{21})} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_2^{\text{in}} = \mathbf{p}_1(\phi_{12}) T_1 e^{ik_{12}(x \sin \phi_{12} + z \cos \phi_{12})} + \mathbf{p}_2(\phi_{22}) T_2 e^{ik_{22}(x \sin \phi_{22} + z \cos \phi_{22})},$$

где  $\mathbf{p}_1(\phi) = (\sin \phi, 0, \cos \phi)^T$ ,  $\mathbf{p}_2(\phi) = (\cos \phi, 0, -\sin \phi)^T$  – единичные векторы в направлении распространения волн. Для углов  $\phi_{11}$  и  $\phi_{21}$  отраженной и углов  $\phi_{12}$  и  $\phi_{22}$  преломленной волн выполняется закон Снеллиуса:

$$k_{s1} \sin \phi_0 = k_{11} \sin \phi_{11} = k_{21} \sin \phi_{21} = k_{12} \sin \phi_{12} = k_{22} \sin \phi_{22}.$$

Для построения вектора напряжений достаточно применить к полю без дефекта (1.26) линейный дифференциальный оператор (1.5)

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{in}} = \mathbf{T}_z \cdot \mathbf{u}^{\text{in}}, \quad \mathbf{T}_z = \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \mu \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x} & 0 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

В том случае, если плоская волна падает из полупространства  $z < 0$  под нормальным углом к интерфейсу, то формулы волновых полей, а также коэффициентов отражения и прохождения упрощаются. Тип падающей волны обозначается индексом  $s$ : при  $s = 1$  – это продольная (P-волна), а при  $s = 2$  – поперечная (S-волна). Поле перемещений в отсутствии трещины выражается через коэффициенты прохождения  $T_s$  и отражения  $R_s$  и имеет вид [76]

$$\mathbf{u}_s^{\text{in}} = \begin{cases} \mathbf{p}_s (e^{ik_{s1}z} + R_s^- e^{-ik_{s1}z}) & z < 0 \\ \mathbf{p}_s T_s^- e^{ik_{s2}z} & z > 0 \end{cases}, \quad (1.28)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s^{\text{in}} = \begin{cases} ic_{s1}k_{s1}\mathbf{p}_s (e^{ik_{s1}z} - R_s^- e^{-ik_{s1}z}) & z < 0 \\ ic_{s2}k_{s2}\mathbf{p}_s T_s^- e^{ik_{s2}z} & z > 0 \end{cases}, \quad (1.29)$$

где коэффициенты прохождения и отражения выражаются через волновые числа и модули упругости ( $c_{1j} = \lambda_j + 2\mu_j$ ,  $c_{2j} = \mu_j$ )

$$T_s^- = \frac{2c_{s1}k_{s1}}{c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2}} \quad R_s^- = \frac{c_{s1}k_{s1} - c_{s2}k_{s2}}{c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2}}$$

## §1.4. Упругие волны в стратифицированном пространстве

В данном разделе рассматривается задача описания волновых полей в двух изотропных полупространствах ( $z \leq 0$ ) при действии гармонической нагрузки, приложенной к поверхности полупространств  $z = 0$  в области  $\Omega_0$

$$\boldsymbol{\tau}(x, y, 0) = \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z\}(x, y, 0) = \mathbf{q}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_0. \quad (1.30)$$

Вне области  $\Omega_0$  границы волновода считаются свободными от напряжений.

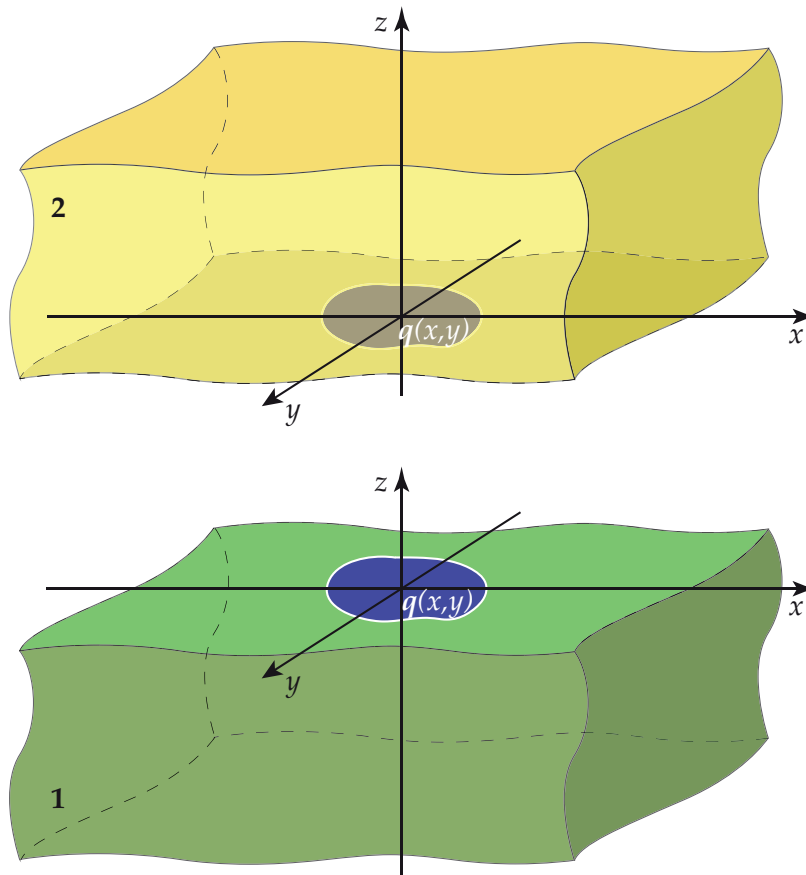


Рис. 1.3: Геометрия задачи о возбуждении упругих волн нагрузкой на поверхности стратифицированного полупространства

Волновые поля строятся с использованием матриц Грина, которые определяются для антиплоского, плоского и трехмерного случаев. В трехмерном случае матрицы Грина определяются как для произвольной формы области  $\Omega_0$ , так и в случае круговой неосесимметричной нагрузки. Решения,

построенные в данном разделе, будут использоваться в главе 2 для построения волновых полей, рассеиваемых трещинами произвольной формы, а также полосовыми и круговыми дефектами при падении на них упругих волн.

### §1.4.1 Построение Фурье-символов матриц Грина в двумерном случае (плоские, антиплоские колебания)

Первой будет описано решение антиплоской задачи о гармонических установившихся колебаниях интерфейса между двумя полупространствами  $z \lessgtr 0$ . При распространении SH-волн смещения частиц среды параллельны поверхности границы. Декартова система координат выбрана так, чтобы ось  $z$  была ортогональна границе раздела сред, а в качестве области  $\Omega_0 = \{|y| < \infty, b_1 < x < b_2\}$  рассматривается полоса. Источником перемещений в упругих полупространствах является поверхностная нагрузка  $\mathbf{q}(x, y) = \mathbf{q}(x)$ , определяемая условием (1.30) и состоящая из единственной ненулевой компоненты вектора нагрузки  $q_2$ , т.е. граничные условия принимают вид

$$\sigma_{yz} = q_2, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Для выполнения граничных условий достаточно, чтобы вектор перемещений имел только одну ненулевую компоненту  $u_y$ . В данном случае уравнение (1.6) для каждого полупространства записывается относительно перемещений с помощью двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u_{yj}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{yj}}{\partial z^2} + k_{2j}^2 u_{yj} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.31)$$

Компоненты тензора напряжений согласно закону Гука выражаются через перемещения следующим образом:

$$\sigma_{xyj} = \mu_j \frac{\partial u_{yj}}{\partial x}, \quad \sigma_{yzj} = \mu_j \frac{\partial u_{yj}}{\partial z}.$$

Геометрия задачи позволяет применить преобразование Фурье по переменной  $x$  к уравнению (1.31) и граничному условию  $\mu_j \frac{\partial u_{yj}}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_y$ . В результате получается обыкновенное дифференциальное уравнение с граничным условием, решение которого можно записать, используя обратное преобразование Фурье

$$u_j(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_j(\alpha, z) \cdot Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

где  $K_j(\alpha, z) = F_x[k(x, z)]$  – Фурье-символ функции Грина (здесь и в дальнейшем для Фурье-символов будут использоваться заглавные латинские буквы). Нетрудно получить выражение для Фурье-символ функции Грина

$$K_j(\alpha, z) = (-1)^j \frac{e^{-\gamma_{2j}|z|}}{\mu_j \gamma_{2j}}$$

где  $\gamma_{2j} = \sqrt{\alpha^2 - k_{2j}}$ ,  $\operatorname{Re} \gamma_{2j} \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \gamma_{2j} \leq 0$ .

В плоском случае вид нагрузки (1.30) на поверхности полупространства остается таким же как и в антиплоском случае. Однако, вследствие двумерности задачи вектор смещений имеет две ненулевые компоненты  $\mathbf{u}_j = \{u_{xj}, u_{zj}\}$  и удовлетворяет уравнению Ламе (1.6), которое в двумерном случае имеет вид

$$\begin{aligned} k_{1j}^{-1} \left( \frac{\partial^2 u_{xj}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{zj}}{\partial x \partial z} \right) - k_{2j}^{-1} \left( \frac{\partial^2 u_{zj}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_{xj}}{\partial z^2} \right) + u_x &= 0 \\ k_{1j}^{-1} \left( \frac{\partial^2 u_{xj}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_{zj}}{\partial z^2} \right) - k_{2j}^{-1} \left( \frac{\partial^2 u_{xj}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_{zj}}{\partial x^2} \right) + u_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Граничные условия имеют вид  $\tau = (\sigma_{xz}, 0, \sigma_z) \Big|_{z=0} = (q_1, 0, q_3)$ , где

$$\begin{aligned} \sigma_{xzj} &= \mu_j \left( \frac{\partial u_{xj}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zj}}{\partial x} \right), \\ \sigma_{zzj} &= \lambda_j \left( \frac{\partial u_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zj}}{\partial z} \right) + 2\mu_j \frac{\partial u_{zj}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

После применения преобразования Фурье уравнения движения (1.32) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора, записанного в Фурье-символах  $\mathbf{Y} = \{U_x, U_z, U'_x, U'_z\}$  [85]

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dz} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \quad (1.34)$$

с преобразованными граничными условиями (1.33)

$$\mathbf{T}\mathbf{Y}|_{z=0} = \mathbf{Q}. \quad (1.35)$$

Матрица  $\mathbf{A}$  имеет все нулевые элементы, кроме  $a_{13} = a_{24} = 1$  и

$$a_{31} = \frac{\alpha^2(\lambda_j + 2\mu_j) - \rho_j\omega^2}{\mu_j}, \quad a_{42} = \frac{\alpha^2\mu_j - \rho_j\omega^2}{\lambda_j + 2\mu_j},$$

$$a_{34} = \frac{i\alpha(\lambda_j + \mu_j)}{\mu_j}, \quad a_{43} = \frac{i\alpha(\lambda_j + \mu_j)}{\lambda_j + 2\mu_j},$$

а матрица Фурье-символов оператора напряжения

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha\mu_j & -i\alpha\mu_j & 0 \\ -i\alpha\lambda_j & 0 & 0 & \lambda_j + 2\mu_j \end{pmatrix}.$$

получается в соответствии с преобразованием Фурье для оператора дифференцирования.

Решение системы дифференциальных уравнений (1.34) можно записать в виде

$$\mathbf{Y}_j = t_1\mathbf{m}_1e^{\gamma_{1j}z} + t_2\mathbf{m}_2e^{-\gamma_{1j}z} + t_3\mathbf{m}_3e^{\gamma_{2j}z} + t_4\mathbf{m}_4e^{-\gamma_{2j}z}, \quad (1.36)$$

где  $\mathbf{m}_i$  – собственные векторы

$$\mathbf{m}_1 = \{i\alpha, -\gamma_{1j}, i\alpha\gamma_{1j}, -\gamma_{1j}^2\}, \quad \mathbf{m}_2 = \{i\alpha, \gamma_{1j}, -i\alpha\gamma_{1j}, -\gamma_{1j}^2\}$$

$$\mathbf{m}_3 = \{\gamma_{2j}, i\alpha, \gamma_{2j}^2, i\alpha\gamma_{2j}\}, \quad \mathbf{m}_4 = \{\gamma_{2j}, -i\alpha, -\gamma_{2j}^2, i\alpha\gamma_{2j}\},$$

а  $\gamma_{nj} = \sqrt{\alpha^2 - k_{nj}^2}$ ,  $n = 1, 2$  – собственные числа матрицы  $A$ .

После подстановки соотношения (1.36) в граничные условия (1.35) и с использованием условий излучения [85] при  $z \rightarrow \pm\infty$  получаются системы уравнений, из которых находятся значения  $\{t_1, t_3\}$  для нижнего полупространства и  $\{t_2, t_4\}$ , соответственно, для верхнего

$$\mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_{k1} = \mathbf{T}(\mathbf{m}_1e^{\gamma_{11}z} + \mathbf{m}_3e^{\gamma_{21}z})|_{z=0} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2), \quad k = 1, 3$$

$$\mathbf{B}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}_{k2} = \mathbf{T} (\mathbf{m}_2 e^{-\gamma_{12}z} + \mathbf{m}_4 e^{-\gamma_{22}z}) |_{z=0} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2), \quad k = 2, 4$$

где  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  – единичные двумерные вектора. Решение системы находится по формулам Крамера

$$t_{jk}^{(i)} = \frac{\Delta_{jn}^{(i)}}{\Delta_j}, \quad \Delta_j = \det \mathbf{B}_j, \quad \Delta_{jn}^{(i)} = \det \mathbf{C}_{jn}^{(i)}$$

(матрица  $\mathbf{C}_{jn}^{(i)}$  получается из матрицы  $\mathbf{B}_j$  заменой  $n$ -го столбца на  $\mathbf{e}_i$ ).

Фурье-символ вектора перемещений для нижнего полупространства можно представить в виде

$$\mathbf{U}_1 = \left( t_1^{(1)} \mathbf{m}_1 e^{\gamma_{11}z} + t_3^{(1)} \mathbf{m}_3 e^{\gamma_{21}z} \right) Q_1 + \left( t_1^{(2)} \mathbf{m}_1 e^{\gamma_{11}z} + t_3^{(2)} \mathbf{m}_3 e^{\gamma_{21}z} \right) Q_3$$

или в матричном виде  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{K}_1$  – Фурье символ матрицы Грина нижнего полупространства

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{21}}{\Delta_1} (\eta_1 e^{\gamma_{21}z} - 2\alpha^2 e^{\gamma_{11}z}) & \frac{i\alpha}{\Delta_1} (2\gamma_{11}\gamma_{21} e^{\gamma_{21}z} - \eta_1 e^{\gamma_{11}z}) \\ -\frac{i\alpha}{\Delta_1} (2\gamma_{11}\gamma_{21} e^{\gamma_{11}z} - \eta_1 e^{\gamma_{21}z}) & \frac{\gamma_{11}}{\Delta_1} (\eta_1 e^{\gamma_{11}z} - 2\alpha^2 e^{\gamma_{21}z}) \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Фурье-символ вектора перемещений для верхнего полупространства можно представить аналогично

$$\mathbf{U}_2 = \left( t_2^{(1)} \mathbf{m}_2 e^{-\gamma_{12}z} + t_4^{(1)} \mathbf{m}_4 e^{-\gamma_{22}z} \right) Q_1 + \left( t_2^{(2)} \mathbf{m}_2 e^{-\gamma_{12}z} + t_4^{(2)} \mathbf{m}_4 e^{-\gamma_{22}z} \right) Q_3$$

или в свернутом виде  $\mathbf{U}_2 = \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{K}_2$  – Фурье символ матрицы Грина верхнего полупространства

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_{22}}{\Delta_2} (\eta_2 e^{-\gamma_{22}z} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_{12}z}) & \frac{i\alpha}{\Delta_2} (2\gamma_{12}\gamma_{22} e^{-\gamma_{22}z} - \eta_2 e^{-\gamma_{12}z}) \\ -\frac{i\alpha}{\Delta_2} (2\gamma_{12}\gamma_{22} e^{-\gamma_{12}z} - \eta_2 e^{-\gamma_{22}z}) & -\frac{\gamma_{12}}{\Delta_2} (\eta_2 e^{-\gamma_{12}z} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_{22}z}) \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

где  $\eta_j = \alpha^2 - k_{2j}^2$ ,  $\Delta_j = \mu[(2\alpha^2 - k_{2j}^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_{1j} \gamma_{2j}]$ .

### §1.4.2 Построение Фурье-символов матриц Грина в трехмерном случае (декартовы координаты)

В этом разделе рассматривается краевая задача (1.30) для полупространств в трехмерной постановке в декартовой системе координат. Для записи уравнений используется цифровая индексация координатных осей и соответствующих векторов и тензоров, например, вектор перемещений  $\mathbf{u}_j = \{u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}\}$ , где  $j = 1$  соответствует нижнему полупространству  $x_3 < 0$ , а  $j = 2$  – верхнему  $x_3 > 0$ . Колебания среды предполагаются гармонически установившимися с частотой  $\omega$  и определяемыми уравнениями Ламе

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ikj}}{\partial x_k} + \rho_j \omega^2 u_{ij} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.39)$$

Компоненты тензора напряжений и вектора смещений в изотропном случае связаны соотношениями закона Гука

$$\sigma_{ik}^j = \lambda_j \left( \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{3j}}{\partial x_3} \right) \delta_{ik} + \mu_j \left( \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{kj}}{\partial x_i} \right), \quad (1.40)$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера. К поверхности в области  $\Omega_0$  приложена нагрузка  $\tau_i = q_i$ , а вне области  $\Omega_0$  напряжения отсутствуют. Описание алгоритма построения матрицы Грина для такой задачи можно найти в работах [85, 99–101]. Построить волновое поле в данном случае можно с помощью двукратного преобразования Фурье по параметрам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$

$$\mathbf{u}_j(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_1} \mathbf{K}_j(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.41)$$

где  $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ , а Фурье-символ матрицы Грина ищется аналогично рассмотренным выше антиплоскому и плоскому случаям и имеет вид [85]

$$\mathbf{K}_j = \begin{pmatrix} (\alpha_1^2 M_j + \alpha_2^2 N_j) & \alpha_1 \alpha_2 (M_j - N_j) & i \alpha_1 P_j \\ \alpha_1 \alpha_2 (M_j - N_j) & (\alpha_1^2 M_j + \alpha_2^2 N_j) & i \alpha_2 P_j \\ \alpha_1 S_j / \alpha^2 & \alpha_2 S_j / \alpha^2 & R_j \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$



где фундаментальные решения задаются векторами  $\{P_j(\alpha, z), 0, R_j(\alpha, z)\}$  и  $\{M_j(\alpha, z), 0, S_j(\alpha, z)\}$  в плоском случае, и соответственно  $\{0, N_j(\alpha, z), 0\}$  – в антиплоском следующим образом [85]:

$$\begin{aligned}
M_j(\alpha, z) &= (-1)^{j+1} \frac{\gamma_{2j}}{\Delta_j} \left[ \eta_j e^{-\gamma_{2j}|z|} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_{1j}|z|} \right], \\
S_j(\alpha, z) &= \frac{\alpha}{\Delta_j} \left[ \eta_j e^{-\gamma_{2j}|z|} - 2\gamma_{1j}\gamma_{2j} e^{-\gamma_{1j}|z|} \right], \\
P_j(\alpha, z) &= \frac{\alpha}{\Delta_j} \left[ 2\gamma_{1j}\gamma_{2j} e^{-\gamma_{2j}|z|} - \eta_j e^{-\gamma_{1j}|z|} \right], \\
R_j(\alpha, z) &= (-1)^j \frac{\gamma_{1j}}{\Delta_j} \left[ 2\alpha^2 e^{-\gamma_{2j}|z|} - \eta_j e^{-\gamma_{1j}|z|} \right], \\
N_j(\alpha, z) &= \frac{(-1)^{j+1}}{\mu_j \gamma_{2j}} e^{-\gamma_{2j}|z|}, \quad \eta_j = 2\alpha^2 - k_{2j}^2.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Множитель  $(-1)^n$  возникает из-за разнонаправленности нормалей к поверхностям полупространств.

При переходе в цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$ :  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  и замены  $\alpha_1 = \alpha \cos \gamma$ ,  $\alpha_2 = \alpha \sin \gamma$  в (1.42) получается рассеянное волновое поле в виде обратного преобразования Фурье [102]

$$\mathbf{u}_j^{\text{sc}}(r, \theta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \mathbf{K}_1(\alpha, \gamma, z) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha r \cos(\theta-\gamma)} d\alpha d\gamma, \tag{1.44}$$

где  $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma) = \mathcal{F}[\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}(r, \theta, 0)]$  – Фурье преобразование напряжения на интерфейсе. Фурье-символ матрицы Грина принимает вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K}_j(\alpha, \gamma, z) = \\
&= \begin{pmatrix} M_j \cos^2 \gamma + N_j \sin^2 \gamma & (M_j - N_j) \cos \gamma \sin \gamma & iP_j \cos \gamma \\ (M_j - N_j) \cos \gamma \sin \gamma & M_j \sin^2 \gamma + N_j \cos^2 \gamma & iP_j \sin \gamma \\ iS_j \cos \gamma & iS_j \sin \gamma & R_j \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

### §1.4.3 Построение Фурье-символов матриц Грина в трехмерном случае (цилиндрические координаты)

Далее рассматривается задача приложения нагрузки (1.30) к поверхности полупространств в круговой области  $\Omega_0 = \{x^2 + y^2 < a^2\}$ . Для ее

решения удобно использовать цилиндрическую систему координат, где ось  $z$  параллельна нормали к границе раздела сред, а граничные условия задаются поверхностной нагрузкой, определяемой вектором

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \{\sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{zz}\}|_{z=0} = \mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\} \quad (1.46)$$

из касательных и нормальных напряжений на  $z = 0$ . Вектор смещений  $\mathbf{v} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$  в цилиндрической системе координат в терминах потенциалов имеет вид [76]

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \\ u_z &= \frac{\partial \psi_3}{\partial z} - \left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_2, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через перемещения

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \mu_j \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \sigma_{\theta z} &= \mu_j \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda_j \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Здесь и ниже индекс  $j$  для  $\mathbf{v}$  и  $\sigma$  будет опущен.

Таким образом, уравнения движения могут быть записаны в потенциалах, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца в цилиндрических координатах [23]

$$\nabla^2 \psi_{3j} + k_{1j}^2 \psi_{3j} = 0, \quad \nabla^2 \psi_{ij} + k_{2j}^2 \psi_{ij} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.49)$$

Для построения интегрального представления волнового поля удобно использовать преобразование Фурье-Ханкеля по  $r$  и разложение в виде

рядов Фурье по  $\theta$ . Тогда для потенциалов справедливы представления [23]

$$\begin{aligned}\psi_{1j}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\psi_{1j}^{1m}(r, z) \sin(m\theta) - \psi_{1j}^{2m}(r, z) \cos(m\theta)) \\ \psi_{2j}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\psi_{2j}^{1m}(r, z) \cos(m\theta) + \psi_{2j}^{2m}(r, z) \sin(m\theta)) \\ \psi_{3j}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\psi_{3j}^{1m}(r, z) \cos(m\theta) + \psi_{3j}^{2m}(r, z) \sin(m\theta))\end{aligned}\quad (1.50)$$

Подстановка разложений (1.50) в волновые уравнения (1.49) и использование интегрального преобразования Ханкеля (1.20) позволяет получить следующие выражения для потенциалов [23]:

$$\begin{aligned}\psi_{1j}^{nm}(r, z) &= \int_0^{\infty} \Psi_{1j}^{nm}(\alpha) e^{-\gamma_{2j}|z|} J_m(\alpha r) \alpha \, d\alpha \\ \psi_{2j}^{nm}(r, z) &= \int_0^{\infty} \Psi_{2j}^{nm}(\alpha) e^{-\gamma_{2j}|z|} J_m(\alpha r) \alpha \, d\alpha \\ \psi_{3j}^{nm}(r, z) &= \int_0^{\infty} \Psi_{3j}^{nm}(\alpha) e^{-\gamma_{1j}|z|} J_m(\alpha r) \alpha \, d\alpha.\end{aligned}\quad (1.51)$$

$$\gamma_{1j} = \sqrt{\alpha^2 - k_{1j}^2}, \quad ; \quad \gamma_{2j} = \sqrt{\alpha^2 - k_{2j}^2}, \quad \text{Im } \gamma_{nj} \geq 0, \text{ Re } \gamma_{nj} \leq 0.$$

Дальнейшие преобразования проводятся для построения векторов перемещений и напряжений в терминах потенциалов (1.51). Для третьей (нормальной) компоненты вектора перемещений  $\mathbf{v}$  нетрудно получить следующее представление:

$$u_z(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (u_z^{1m}(r, z) \cos(m\theta) + u_z^{2m}(r, z) \sin(m\theta))$$

где

$$u_z^{nm}(r, z) = \frac{\partial \psi_3^{nm}(r, z)}{\partial z} - \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left( \frac{m}{r} \right)^2 \right] \psi_2^{nm}(r, z).$$

Здесь и ниже индекс  $j$  опущен для  $\gamma_{ij}$  и  $\psi_{ij}$ , так как соотношения записываются одинаково для обоих полупространств.

Используя второе свойство преобразования Ханкеля (§1.1.2), коэффициенты в ряде Фурье можно выразить по угловой координате следующим

образом:

$$u_z^{nm}(r, z) = \int_0^{\infty} [(-1)^{j+1} \Psi_3^{nm}(\alpha) \gamma_1 e^{-\gamma_1 |z|} + \Psi_2^{nm}(\alpha) \alpha^2 e^{-\gamma_2 |z|}] J_m(\alpha r) \alpha d\alpha \quad (1.52)$$

В случае радиальной и азимутальной компонент вектора  $\mathbf{v}$  имеют место данные выражения:

$$u_r(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (u_r^{1m}(r, z) \cos(m\theta) + u_r^{2m}(r, z) \sin(m\theta)),$$

$$u_\theta(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (u_\theta^{1m}(r, z) \sin(m\theta) - u_\theta^{2m}(r, z) \cos(m\theta)).$$

В более компактной форме записи соответствующие ряды Фурье

$$\mathbf{v}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \mathbf{\Upsilon}^{1m}(\theta) \mathbf{v}^{1m}(r, z) + \mathbf{\Upsilon}^{2m}(\theta) \mathbf{v}^{2m}(r, z) \right). \quad (1.53)$$

могут быть выражены с помощью диагональных матриц

$$\mathbf{\Upsilon}^{1m}(\theta) = \text{diag}(\cos(m\theta), \sin(m\theta), \cos(m\theta)),$$

$$\mathbf{\Upsilon}^{2m}(\theta) = \text{diag}(\sin(m\theta), -\cos(m\theta), \sin(m\theta)).$$

Коэффициенты разложения при этом также представляются через потенциалы (1.51)

$$u_r^{nm}(r, z) = \frac{\partial \psi_3^{nm}(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_2^{nm}(r, z)}{\partial r \partial z} + \frac{m}{r} \psi_1^{nm}(r, z),$$

$$u_\theta^{nm}(r, z) = -\frac{m}{r} \psi_3^{nm}(r, z) - \frac{m}{r} \frac{\partial \psi_2^{nm}(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1^{nm}(r, z)}{\partial r}.$$

Учитывая свойства преобразования Ханкеля, удобнее использовать следующий вектор перемещений

$$\mathbf{w}^{nm} = \{u_r^{nm} + u_\theta^{nm}, u_r^{nm} - u_\theta^{nm}, u_z^{nm}\}, \quad (1.54)$$

так как в этом случае

$$(u_r^{nm} + u_\theta^{nm})(r, \theta) = \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{r} \right) \left( \psi_3^{nm}(r, z) + \frac{\partial \psi_2^{nm}(r, z)}{\partial z} - \psi_1^{nm}(r, z) \right)$$

$$(u_r^{nm} - u_\theta^{nm})(r, \theta) = \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m}{r} \right) \left( \psi_3^{nm}(r, z) + \frac{\partial \psi_2^{nm}(r, z)}{\partial z} + \psi_1^{nm}(r, z) \right).$$

Используя рекуррентные формулы для функций Бесселя

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m}{r} \right) J_m(\alpha r) = \alpha J_{m-1}(\alpha r), \quad \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{r} \right) J_m(\alpha r) = -\alpha J_{m+1}(\alpha r),$$

нетрудно получить следующие соотношения для потенциалов:

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m}{r} \right) \psi^{nm}(r, z) = \int_0^\infty \Psi^{nm}(\alpha) e^{-\gamma|z|} \alpha J_{m-1}(\alpha r) \alpha \, d\alpha,$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{r} \right) \psi^{nm}(r, z) = - \int_0^\infty \Psi^{nm}(\alpha) e^{-\gamma|z|} \alpha J_{m+1}(\alpha r) \alpha \, d\alpha.$$

Следовательно, для компонент нового вектора перемещений  $\mathbf{w}^{nm}$

$$\begin{aligned} (u_r^{nm} + u_\theta^{nm})(r, z) &= \int_0^\infty \left( -\Psi_3^{nm}(\alpha) e^{-\gamma_1|z|} \alpha + \Psi_2^{nm}(\alpha) (-1)^j \gamma_2 e^{-\gamma_2|z|} \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_1^{nm}(\alpha) e^{-\gamma_2|z|} \alpha \right) J_{m+1}(\alpha r) \alpha \, d\alpha, \\ (u_r^{nm} - u_\theta^{nm})(r, z) &= \int_0^\infty \left( \Psi_3^{nm}(\alpha) e^{-\gamma_1|z|} \alpha - \Psi_2^{nm}(\alpha) (-1)^j \gamma_2 e^{-\gamma_2|z|} \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_1^{nm}(\alpha) e^{-\gamma_2|z|} \alpha \right) J_{m-1}(\alpha r) \alpha \, d\alpha. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Вектор напряжений раскладывается в ряд Фурье аналогично вектору перемещений

$$\boldsymbol{\tau}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^\infty \left( \mathbf{\Upsilon}^{1m}(\theta) \boldsymbol{\tau}^{1m}(r, z) + \mathbf{\Upsilon}^{2m}(\theta) \boldsymbol{\tau}^{2m}(r, z) \right)$$

Поскольку компоненты тензора напряжений выражаются через перемещения по формуле (1.48), то их можно записать в терминах образов потенциалов. Как и в случае перемещений, удобнее использовать вектор напряжений, две первые компоненты которого составлены из суммы и разности радиальной и азимутальной компонент

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}} = \{ \sigma_{rz} + \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz} - \sigma_{\theta z}, \sigma_z \}, \tag{1.56}$$

и который можно представить с виде ряда Фурье

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \boldsymbol{\Upsilon}^{1m}(\theta) \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{1m}(r, z) + \boldsymbol{\Upsilon}^{2m}(\theta) \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{2m}(r, z) \right).$$

Коэффициенты разложения в этом случае согласно формулам (1.48) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^{nm} + \sigma_{\theta z}^{nm} &= \mu \left( \frac{\partial u_z^{nm}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{nm}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r^{nm}}{\partial z} + \frac{\partial u_{\theta}^{nm}}{\partial z} \right) \\ \sigma_{rz}^{nm} - \sigma_{\theta z}^{nm} &= \mu \left( \frac{\partial u_z^{nm}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{nm}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r^{nm}}{\partial z} - \frac{\partial u_{\theta}^{nm}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Вычислив соответствующие производные для перемещений (1.52) и (1.55), можно найти представление для радиальных и азимутальных напряжений

$$\begin{aligned} (\sigma_{rz}^{nm} + \sigma_{\theta z}^{nm})(r, \theta) &= \mu_j \int_0^{\infty} [(-1)^j \Psi_3^{nm}(\alpha) 2\alpha \gamma_1 e^{-\gamma_1 |z|} - \\ &- \Psi_2^{nm}(\alpha) (2\alpha^2 - k_2^2) \alpha e^{-\gamma_2 |z|} - (-1)^j \Psi_1^{nm}(\alpha) \gamma_2 \alpha e^{-\gamma_2 |z|}] J_{m+1}(\alpha r) \alpha \, d\alpha \\ (\sigma_{rz}^{nm} - \sigma_{\theta z}^{nm})(r, \theta) &= \mu_j \int_0^{\infty} [(-1)^{j+1} \Psi_3^{nm}(\alpha) 2\alpha \gamma_1 e^{-\gamma_1 |z|} + \\ &+ \Psi_2^{nm}(\alpha) (2\alpha^2 - k_2^2) \alpha e^{-\gamma_2 |z|} - (-1)^j \Psi_1^{nm}(\alpha) \gamma_2 \alpha e^{-\gamma_2 |z|}] J_{m-1}(\alpha r) \alpha \, d\alpha \end{aligned} \quad (1.57)$$

а для нормальных, соответственно,

$$\begin{aligned} \sigma_z^{nm}(r, z) &= \mu_j \int_0^{\infty} [\Psi_3^{nm}(\alpha) (2\alpha^2 - k_2^2) e^{-\gamma_1 |z|} - \\ &- (-1)^j \Psi_2^{nm}(\alpha) \gamma_2 2\alpha^2 e^{-\gamma_2 |z|}] J_m(\alpha r) \alpha \, d\alpha. \end{aligned} \quad (1.58)$$

При этом вектор, составленный из нормальных и касательных напряжений, представим в виде ряда Фурье

$$\boldsymbol{\tau}(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{\Upsilon}^{nm}(\theta) \boldsymbol{\tau}^{nm}(r, z). \quad (1.59)$$

Для построения волнового поля, возбуждаемого на поверхности  $z = 0$  нагрузкой, заданной формулой (1.46), естественно представить нагрузку в виде ряда Фурье

$$\boldsymbol{q}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \boldsymbol{\Upsilon}^{1m}(\theta) \boldsymbol{q}^{1m}(r) + \boldsymbol{\Upsilon}^{2m}(\theta) \boldsymbol{q}^{2m}(r) \right),$$

а затем составить из коэффициентов разложения вектора

$$\widehat{\mathbf{q}}^{nm}(r) = \{q_1^{nm}(r) + q_2^{nm}(r), q_1^{nm}(r) - q_2^{nm}(r), q_3^{nm}(r)\}.$$

После чего можно компактно записать поле перемещений, возбуждаемых произвольной нагрузкой в круговой области, используя разложение в ряд Фурье и обратное преобразование Ханкеля

$$\mathbf{w}_j^{\text{sc},nm}(r, z) = \int_0^\infty \mathbf{J}^m(\alpha r) \mathbf{K}_j(\alpha, z) \widehat{\mathbf{Q}}^{nm}(\alpha) \alpha \, d\alpha, \quad (1.60)$$

от образа матрицы Грина  $\mathbf{K}_j(\alpha, z)$ , вывод которой приведен ниже и преобразования Фурье-Ханкеля для нагрузки

$$\widehat{\mathbf{Q}}^{nm}(\alpha) = \int_0^\infty \mathbf{J}^m(\alpha r) \widehat{\mathbf{q}}^{nm}(r) r \, dr.$$

Здесь  $\mathbf{w}^{nm}(r)$  описывается соотношением (1.54), а диагональная матрица  $\mathbf{J}^m$  составляется из функций Бесселя  $J_m$  следующим образом:

$$\mathbf{J}^m(\alpha r) = \begin{pmatrix} J_{m+1}(\alpha r) & 0 & 0 \\ 0 & J_{m-1}(\alpha r) & 0 \\ 0 & 0 & J_m(\alpha r) \end{pmatrix}.$$

Вывод Фурье-символа матрицы Грина для упругого полупространства в декартовой системе координат подробно описан в работах [85, 100]. В цилиндрических координатах компоненты Фурье-символа матрицы Грина  $\mathbf{K}_j(\alpha, z)$  имеют вид, отличающийся от (1.45). Поскольку вид матрицы Грина различен для верхнего и нижнего полупространств, индекс  $j$  снова будет использоваться в дальнейших формулах. Применение оператора напряжений равносильно умножению вектора  $\{\Psi_1^{nm}, \Psi_2^{nm}, \Psi_3^{nm}\}$ , составленного из потенциалов, на матрицу

$$\mathbf{A}_j(\alpha) = \mu_j \begin{pmatrix} -(-1)^j \alpha \gamma_{2j} & -\alpha (2\alpha^2 - k_{2j}^2) & (-1)^j 2\alpha \gamma_{1j} \\ -(-1)^j \alpha \gamma_{2j} & \alpha (2\alpha^2 - k_{2j}^2) & -(-1)^j 2\alpha \gamma_{1j} \\ 0 & -(-1)^j 2\alpha^2 \gamma_{2j} & 2\alpha^2 - k_{2j}^2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальными решениями системы  $\mathbf{A}_j(\alpha) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}$  являются векторы  $\mathbf{a}_1(\alpha), \mathbf{a}_2(\alpha), \mathbf{a}_3(\alpha)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1(\alpha) &= \left\{ -\frac{(-1)^j}{2\alpha\gamma_{2j}}, \frac{(2\alpha^2 - k_{2j}^2)}{2\alpha\Delta_j}, \frac{(-1)^j\alpha\gamma_{2j}}{\Delta_j} \right\}, \\ \mathbf{a}_2(\alpha) &= \left\{ -\frac{(-1)^j}{2\alpha\gamma_{2j}}, -\frac{(2\alpha^2 - k_{2j}^2)}{2\alpha\Delta_j}, -\frac{(-1)^j\alpha\gamma_{2j}}{\Delta_j} \right\}, \\ \mathbf{a}_3(\alpha) &= \left\{ 0, \frac{(-1)^j 2\gamma_{1j}}{\Delta_j}, \frac{(2\alpha^2 - k_{2j}^2)}{\Delta_j} \right\}, \\ \Delta_j &= \mu_j[(2\alpha^2 - k_{2j}^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_{1j}\gamma_{2j}].\end{aligned}$$

Перемещение можно представить как умножение некоторой матрицы на вектор  $\{\Psi_1^{nm}, \Psi_2^{nm}, \Psi_3^{nm}\}$ , составленный из потенциалов. Используя представления (1.52) и (1.55), можно получить строки этой матрицы

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_1(\alpha, z) &= \left( \alpha e^{-\gamma_{2j}|z|}, -(-1)^j \gamma_{2j} \alpha e^{-\gamma_{2j}|z|}, \alpha e^{-\gamma_{1j}|z|} \right), \\ \mathbf{m}_2(\alpha, z) &= \left( \alpha e^{\gamma_{2j}|z|}, (-1)^j \gamma_{2j} \alpha e^{-\gamma_{2j}|z|}, -\alpha e^{-\gamma_{1j}|z|} \right), \\ \mathbf{m}_3(\alpha, z) &= \left( 0, \alpha^2 e^{-\gamma_{2j}|z|}, -(-1)^j \gamma_{1j} e^{-\gamma_{1j}|z|} \right)\end{aligned}$$

Элементы матрицы Грина находятся как скалярные произведения векторов  $\mathbf{a}_k(\alpha)$  и  $\mathbf{m}_p(\alpha, z)$  по формуле  $\mathbf{K}_j(\alpha, z) = (\mathbf{m}_p(\alpha, z) \cdot \mathbf{a}_k(\alpha))$ . После преобразований получается образ матрицы Грина  $\mathbf{K}_j(\alpha, z)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} [M_j(\alpha, z) + N_j(\alpha, z)] & -\frac{1}{2} [M_j(\alpha, z) - N_j(\alpha, z)] & P_j(\alpha, z) \\ -\frac{1}{2} [M_j(\alpha, z) - N_j(\alpha, z)] & \frac{1}{2} [M_j(\alpha, z) + N_j(\alpha, z)] & -P_j(\alpha, z) \\ -\frac{1}{2} S_j(\alpha, z) & \frac{1}{2} S_j(\alpha, z) & R_j(\alpha, z) \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

При этом компоненты выражаются через фундаментальные решения (1.43), которые совпадают с результатами из [29, 85, 100].



## ГЛАВА 2. Дифракция упругих волн на одиночных трещинах

Большинство подходов к описанию дифракции упругих волн на определенном наборе дефектов или поврежденной границе раздела двух сред использует решения задач о рассеянии на одиночном микродефекте [44, 103–105]. В случае периодического набора используется теорема Флоке-Блоха, и схема решения претерпевает небольшие изменения [41, 106]. В настоящей главе рассматриваются вопросы описания и анализа взаимодействия плоских упругих волн с препятствиями в виде единичной полосовой и круговой трещин, расположенных на границе раздела двух сред. Получаемые решения используются в дальнейшем в главе 3 для построения описания поврежденных областей. Кроме того, с целью получения аналитических соотношений строятся асимптотические решения для трещин, характерный размер которых значительно меньше длины волны.

### §2.1. Вывод и решение интегрального уравнения для одиночной трещины

В данном разделе описывается схема применения метода граничных интегральных уравнений для построения волновых полей, рассеянных интерфейсной трещиной. Предполагается, что на трещину, представляющую собой бесконечно тонкий разрез  $\Omega$ , расположенный на границе раздела двух разнородных изотропных полупространств, падает некоторое поле  $\mathbf{u}_{\text{in}}$ . Рассеянное волновое поле  $\mathbf{u}_{\text{sc}}$  удовлетворяет уравнениям Ляме (1.32), а граничные условия на трещине  $\Omega$  задают равенство нулю нормальных и касательных напряжений

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.1)$$

### §2.1.1 Антиплоские колебания полосовой трещины

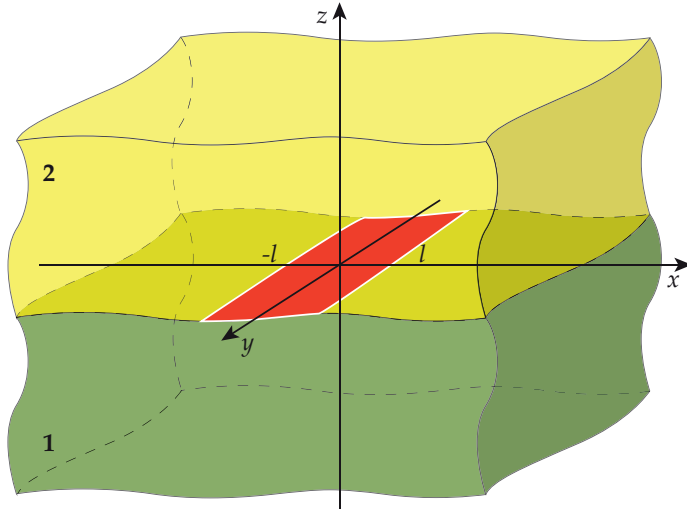


Рис. 2.1: Геометрия задачи для одиночной полосовой трещины.

Рассматриваются упругие колебания в многослойном упругом волноводе с полосовой трещиной. Декартова система координат выбрана так, что ось  $z$  ортогональна интерфейсу, на котором расположена трещина  $|x| < l$ ,  $-\infty < y < \infty$ . В качестве источника колебаний предполагается заданным некоторое волновое поле  $\sigma_{yz}^{\text{in}}$ . Рассеянные и падающие поля удовлетворяют уравнениям движения (1.32), а также граничным условиям на интерфейсе

$$\begin{cases} u_{y1}^{\text{sc}} = u_{y2}^{\text{sc}}, & |x| > l \\ \sigma_{yz1}^{\text{sc}} = \sigma_{yz2}^{\text{sc}}, & |x| > l \\ \sigma_{yz1}^{\text{sc}} = \sigma_{yz2}^{\text{sc}} = -\sigma_{yz1}^{\text{in}}, & |x| < l. \end{cases} \quad (2.2)$$

В антиплоском случае рассеянное трещиной поле характеризуется непрерывностью напряжений  $\tau_j^{\text{sc}} = \sigma_{yzj}^{\text{sc}}$  на интерфейсе  $z = 0$  и отсутствием непрерывности перемещений, которые в каждом из полупространств записываются в виде интегралов Фурье

$$u_y^{\text{sc}} = \begin{cases} u_{y1}^{\text{sc}} = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, & z < 0 \\ u_{y2}^{\text{sc}} = \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, & z > 0 \end{cases}, \quad (2.3)$$

Для построения решения вводится функция раскрытия берегов трещины

$$\Delta u_y(x) = u_{y1}^{\text{sc}}(x, 0^-) - u_{y2}^{\text{sc}}(x, 0^+),$$

применение преобразования Фурье к которой дает функциональное уравнение для Фурье-символа напряжений на границе

$$Q(\alpha) = [K_1(\alpha, 0) - K_2(\alpha, 0)]^{-1} \cdot \Delta U_y(\alpha) = L(\alpha) \Delta U_y(\alpha),$$

Учитывая обозначения (1.43), в случае двух упругих изотропных полупространств получается следующее выражение для ядра интегрального уравнения

$$L(\alpha) = [N_1(\alpha, 0) - N_2(\alpha, 0)]^{-1} = \tilde{N}^{-1} = \frac{\mu_1 \mu_2 \gamma_{21} \gamma_{22}}{\mu_2 \gamma_{22} + \mu_1 \gamma_{21}}. \quad (2.4)$$

Подстановка рассеянных трещиной полей в виде интегралов Фурье (2.3) в граничные условия (2.2) приводит к уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha) \Delta u_y(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = -\sigma_{yz}^{\text{in}}(x), \quad |x| < l, \quad (2.5)$$

где неизвестный скачок смещений раскладывается в ряд по полиномам Чебышева второго рода  $v_y(x)$ , которые составляют полную систему функций на интервале  $[-l, l]$  и учитывают поведение скачка перемещений у краев дефекта [17, 107, 108]:

$$\Delta u_y(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t \psi_t(x/l), \quad \psi_t(x) = U_t(x/l) \sqrt{1 - (x/l)^2}. \quad (2.6)$$

Интегральные уравнения проектируются также на систему полиномов Чебышева, и тем самым происходит дискретизации системы методом Бубнова-Галеркина

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t \int_{-l}^l L(\alpha) \Psi_t(\alpha) \Psi_{t'}(-\alpha) d\alpha = - \int_{-l}^l \sigma_{yz}^{\text{in}}(x) \psi_{t'}(x) dx, \quad (2.7)$$

где

$$\Psi_t(\alpha) = \int_{-l}^l \psi_t(x) e^{-i\alpha x} dx = \Psi_t(\alpha) = i^t \pi(t+1) \frac{J_{t+1}(\alpha l)}{\alpha}$$

преобразование Фурье от  $\psi_t$  с параметром преобразования  $\alpha$ . В итоге получается система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{t=0}^{\infty} A_{t't} \beta_t = f_{t'}, \quad (2.8)$$

где коэффициенты в левой и правой части – интегралы

$$A_{t't} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \gamma_{21} \gamma_{22}}{\mu_2 \gamma_{22} + \mu_1 \gamma_{21}} \Psi_t(\alpha) \Psi_{t'}(-\alpha) d\alpha,$$

$$f_{t'} = - \int_{-l}^l \sigma_{yz}^{\text{in}}(x) \psi_{t'}(x) dx.$$

Система (2.8) для численной реализации требует редукции

$$\sum_{t=0}^T A_{t't} \beta_t = f_{t'}, \quad t = 0, \dots, T.$$

Выбор количества базисных функций в разложении скачка смещений осуществляется на основе численного анализа сходимости решения [17]:  $T_{\text{max}} = k_{21}l + 6$ .

### §2.1.2 Плоские колебания полосовой трещины

Далее рассматривается плоская задача рассеяния упругих волн на полосовой трещине, во-многом повторяется схема и обозначения из [109–111]. Вектор напряжений  $\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}} = \{\sigma_{xz}, \sigma_{zz}\}$  рассеянного трещиной поля удовлетворяет на границе раздела двух сред условиям,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1^{\text{sc}} = \mathbf{u}_2^{\text{sc}}, & |x| > l \\ \boldsymbol{\tau}_1^{\text{sc}} = \boldsymbol{\tau}_2^{\text{sc}}, & |x| > l \\ \boldsymbol{\tau}_1^{\text{sc}} = \boldsymbol{\tau}_2^{\text{sc}} = -\boldsymbol{\tau}_1^{\text{in}}, & |x| < l. \end{cases} \quad (2.9)$$

а вектор перемещений представим в следующем интегральном виде

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_x(x) \\ u_z(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_1(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x}, d\alpha, & z < 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_2(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x}, d\alpha, & z > 0 \end{cases}, \quad (2.10)$$

Аналогично антиплоскому случаю рассматривается скачок перемещений на трещине, к которому применяется преобразование Фурье

$$\Delta \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} \Delta u_x(x) \\ \Delta u_z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x1}^{\text{sc}}(x, 0^-) - u_{x2}^{\text{sc}}(x, 0^+) \\ u_{z1}^{\text{sc}}(x, 0^-) - u_{z2}^{\text{sc}}(x, 0^+) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha) \Delta \mathbf{U}(\alpha), \quad \mathbf{L}(\alpha) = [\mathbf{K}_1(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2(\alpha, 0)]^{-1}$$

В терминах обозначения (1.43), элементы матрицы  $[\mathbf{K}_1(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2(\alpha, 0)]$  как функции параметра  $\alpha$  выражаются через функции, введенные при построении Фурье-символов матриц Грина (1.43)

$$\begin{aligned} M &= M_1(\alpha, 0) - M_2(\alpha, 0) = -\frac{\gamma_{21}k_{21}^2}{\Delta_1} - \frac{\gamma_{22}k_{22}^2}{\Delta_2}, \\ S &= (S_1(\alpha, 0) - S_2(\alpha, 0)) = -P = -(P_1(\alpha, 0) - P_2(\alpha, 0)) = \\ &= -\alpha \left( \frac{\gamma_{11}\gamma_{21} - \alpha^2 + k_{21}^2/2}{\Delta_1/2} - \frac{\gamma_{12}\gamma_{22} - \alpha^2 + k_{22}^2/2}{\Delta_2/2} \right), \\ R &= R_1(\alpha, 0) - R_2(\alpha, 0) = -\frac{\gamma_{11}k_{21}^2}{\Delta_1} - \frac{\gamma_{12}k_{22}^2}{\Delta_2}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

и тогда

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \tilde{M}(\alpha) & i\tilde{P}(\alpha) \\ i\tilde{S}(\alpha) & \tilde{R}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= R/(MR + PS), & \tilde{P} &= -P/(MR + PS), \\ \tilde{S} &= -S/(MR + PS), & \tilde{R} &= M/(MR + PS). \end{aligned}$$

Функция раскрытия берегов трещины, как и в антиплоском случае, аппроксимируется рядом ортогональных полиномов Чебышева, поскольку,

как было указано выше, они имеют корневое поведение на берегах. Подстановка интегрального представления перемещений (2.10) в граничные условия (2.2) дает систему интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{L}(\alpha) \Delta \mathbf{U}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = -\boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(x), \quad |x| < l, \quad (2.13)$$

в котором ядро описывается формулой (2.12). Скалярное домножение уравнений на  $\psi_{t'}(x/l)$  позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{A}_{t't} \boldsymbol{\beta}_t = - \int_{-l}^l \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(x) \psi_{t'}(x) dx, \quad (2.14)$$

где коэффициенты в левой части есть интегралы

$$\mathbf{A}_{t't} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{L}(\alpha) \Psi_t(\alpha) \Psi_{t'}(-\alpha) d\alpha.$$

Как и в антиплоском случае производится редукция (2.14):

$$\sum_{t=0}^T \mathbf{A}_{t't} \boldsymbol{\beta}_t = - \int_{-l}^l \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(x) \psi_{t'}(x) dx, \quad t = 0, \dots, T.$$

### §2.1.3 Круговая трещина

Рассматриваются гармонические установившиеся колебания круговой трещины радиуса  $a$  на интерфейсе между упругими изотропными полупространствами в условиях некоторого падающего волнового поля. Здесь вектор перемещений удовлетворяет (1.6), а вектор, составленный из нормальных и касательных напряжений, удовлетворяет (2.1). На границе раздела сред  $z = 0$  вне трещины, т.е. при  $r > a$  предполагается идеальный контакт между полупространствами

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2, \quad z = 0, \quad r > a, \quad (2.15)$$

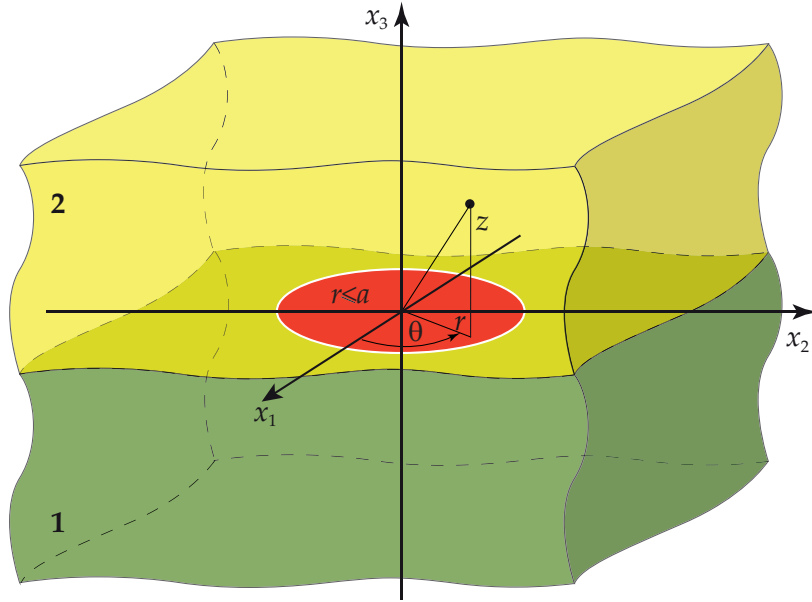


Рис. 2.2: Геометрия задачи одиночной круговой трещины.

тогда как на берегах трещины заданы условия отсутствия нормальных и касательных напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = 0.$$

Полное поле перемещений  $\mathbf{u}$  представляется как сумма падающего волнового поля (в отсутствии трещины)  $\mathbf{u}^{\text{in}}$  и рассеянного трещиной поля  $\mathbf{u}^{\text{sc}}$ . Соответственно, граничные условия на трещине можно переписать в виде:

$$\boldsymbol{\tau}_1^{\text{sc}} = \boldsymbol{\tau}_2^{\text{sc}} = -\boldsymbol{\tau}^{\text{in}}, r < a \quad (2.16)$$

Фурье-преобразование вектора напряжений, заданного в цилиндрической системе координат, на интерфейсе

$$\widehat{\mathbf{Q}}^{nm}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha) \Delta \mathbf{W}^{nm}(\alpha)$$

может быть выражено через произведение матрицы

$$\mathbf{L}(\alpha) = [\mathbf{K}_1(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2(\alpha, 0)]^{-1}.$$

и Фурье-символа неизвестного скачка  $\Delta \mathbf{W}^{nm}(\alpha)$ . Сам скачок смещений  $\Delta \mathbf{w}^{nm}(r)$  используется для нахождения коэффициентов разложения  $\Delta \mathbf{v}^{nm}(r)$

полного скачка

$$\Delta v_k(r, \theta) = v_{k1}^{\text{sc}}(r, \theta, 0) - v_{k2}^{\text{sc}}(r, \theta, 0)$$

в ряд Фурье по переменной  $\theta$

$$\Delta \mathbf{v}(r, \theta) = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{r}^{nm}(\theta) \Delta \mathbf{v}^{nm}(r).$$

Соотношения, связывающие  $\Delta v_k^{nm}$  и  $\Delta w_k^{nm}$  имеют вид:

$$\Delta v_1^{nm}(r) = (\Delta w_1^{nm}(r) + \Delta w_2^{nm}(r))/2,$$

$$\Delta v_2^{nm}(r) = (\Delta w_1^{nm}(r) - \Delta w_2^{nm}(r))/2,$$

$$\Delta v_3^{nm}(r) = \Delta w_3^{nm}(r).$$

Таким образом, для получения решения необходимо использовать символ матрицы Грина для полупространств в цилиндрических координатах. Переформулировка граничных условий в терминах напряжения на границе раздела сред  $\hat{\mathbf{q}}$  приводит к соотношению  $\hat{\mathbf{q}}(r, \theta) = \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\text{in}}(r, \theta, 0)$ . Таким образом интегральное уравнение принимает вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \mathbf{J}^{nm}(\alpha r) \mathbf{Q}^{nm}(\alpha) \alpha d\alpha + \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\text{in}, nm}(r, 0) \right] = 0$$

Последующая замена  $\mathbf{Q}$  скачком перемещений для каждой пары индексов  $n$  и  $m$  приводит к системе интегральных уравнений относительно неизвестных  $\Delta \mathbf{W}^{nm}$

$$\int_0^{\infty} \mathbf{J}^m(\alpha r) \mathbf{L}(\alpha) \Delta \mathbf{W}^{nm}(\alpha) \alpha d\alpha = -\hat{\boldsymbol{\tau}}^{\text{in}, nm}(r), \quad (2.17)$$

Компоненты скачка смещений  $\Delta \mathbf{w}^{nm}(r) = \{\Delta w_k^{nm}\}_{k=1}^3$  находятся в виде разложения по присоединенным полиномам Лежандра  $P_m^l(x)$ :

$$\Delta w_k^{nm}(r, \theta) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_{kt}^{nm} \phi_{kt}^m(r), \quad (2.18)$$



где

$$\begin{aligned}\phi_{1t}^m(r) &= \frac{P_{m+2t+2}^{m+1}(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{m+2t+2}^{m+2}(0)}, \\ \phi_{2t}^m(r) &= \frac{P_{m+2t}^{m-1}(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{m+2t}^m(0)}, \\ \phi_{3t}^m(r) &= \frac{P_{m+2t+1}^m(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{m+2t+1}^{m+1}(0)}.\end{aligned}$$

При  $m = 0$  необходима поправка в индексах, а именно

$$\begin{aligned}\phi_{1t}^0(r) &= \frac{P_{2t+2}^1(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{2t+2}^2(0)}, \quad \phi_{2t}^0(r) = \phi_{1t}^0(r), \\ \phi_{3t}^0(r) &= \frac{P_{2t+1}^0(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{2t+1}^1(0)}.\end{aligned}$$

Преобразование Ханкеля от данных базисных функций выражается через функции Бесселя при  $m = 0$  с учетом равенства  $J_{-1} = -J_1$ :

$$\begin{aligned}\Phi_{1t}^0(\alpha a) &= \int_0^a \phi_{1t}^0(r) J_1(\alpha r) r dr = (-1)^t \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{J_{2t+5/2}(\alpha a)}{\alpha^{3/2}}, \\ \Phi_{2t}^0(\alpha a) &= \int_0^a \phi_{1t}^0(r) J_{-1}(\alpha r) r dr = -\Phi_{1t}^0(\alpha a), \\ \Phi_{3t}^0(\alpha a) &= \int_0^a \phi_{3t}^0(r) J_0(\alpha r) r dr = (-1)^t \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{J_{2t+3/2}(\alpha a)}{\alpha^{3/2}},\end{aligned}$$

а при  $m \geq 1$  соответственно

$$\begin{aligned}\Phi_{1t}^m(\alpha a) &= \int_0^a \phi_{1t}^m(r) J_{m+1}(\alpha r) r dr = (-1)^t \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{J_{m+2t+5/2}(\alpha a)}{\alpha^{3/2}}, \\ \Phi_{2t}^m(\alpha a) &= \int_0^a \phi_{2t}^m(r) J_{m-1}(\alpha r) r dr = (-1)^t \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{J_{m+2t+1/2}(\alpha a)}{\alpha^{3/2}}, \\ \Phi_{3t}^m(\alpha a) &= \int_0^a \phi_{3t}^m(r) J_m(\alpha r) r dr = (-1)^t \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{J_{m+2t+3/2}(\alpha a)}{\alpha^{3/2}}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Для решения интегрального уравнения (2.17) необходимо построить матрицу  $\mathbf{L}(\alpha)$ . Для этого сначала записывается разность между Фурье-символами матриц Грина двух полупространств

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_1(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2(\alpha, 0) = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M + N) & -\frac{1}{2}(M - N) & P \\ -\frac{1}{2}(M - N) & \frac{1}{2}(M + N) & -P \\ -\frac{1}{2}S & \frac{1}{2}S & R \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь элементы матрица находятся по формулам (2.4) и (2.11).

Тогда обратная матрица имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\alpha) &= [\mathbf{K}_1(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2(\alpha, 0)]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{M} + \tilde{N}) & -\frac{1}{2}(\tilde{M} - \tilde{N}) & \tilde{P} \\ -\frac{1}{2}(\tilde{M} - \tilde{N}) & \frac{1}{2}(\tilde{M} + \tilde{N}) & -\tilde{P} \\ -\frac{1}{2}\tilde{S} & \frac{1}{2}\tilde{S} & \tilde{R} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

которая содержит компоненты, выведенные для антиплоского (2.4) и плоского (2.11) случаев. Применение схемы Бубнова-Галеркина позволяет дискретизировать интегральное уравнение (2.17) в систему уравнений

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{A}_{t't}^m \boldsymbol{\beta}_t^{nm} = -\mathbf{g}_{t's}^{nm}, \quad (2.21)$$

где матрица системы состоит из блоков  $3 \times 3$

$$\mathbf{A}_{t't}^m = \int_0^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_{t'}^m(\alpha) \mathbf{L}(\alpha) \boldsymbol{\Phi}_t^m(\alpha) \alpha \, d\alpha, \quad g_{it'}^{nm} = \int_0^a \hat{\tau}_i^{\text{in},nm}(r, 0) \phi_{it'}^m(r) r \, dr,$$

получаемых при помощи вектор-функции  $\boldsymbol{\Phi}_{t'}^m = \text{diag}(\Phi_{1t'}^m, \Phi_{2t'}^m, \Phi_{3t'}^m)$ . После редукции получается  $T + 1$  уравнение:

$$\sum_{t=0}^T \mathbf{A}_{t't}^m \boldsymbol{\beta}_t^{nm} = -\mathbf{g}_{t's}^{nm}, \quad t' = 0, \dots, T.$$

Для корректной записи граничных условий (2.15), нормальные и тангенциальные составляющие вектора напряжений (1.56) необходимо также разложить в ряд Фурье по угловой координате  $\theta$  согласно формуле (1.59).

Для описания рассеяния на круговой трещине помимо использования МГИУ с разложением по ортогональным полиномам может быть использован МГИУ с вариационно-разностной аппроксимацией скачка (ВРМ), предложенный в [29, 100] для трещин произвольной формы в основе которого лежат те же идеи, что в бессеточных методах (Meshless methods) [112]. Для применения ВРМ интегральное уравнение относительно скачка смещений

$$\Delta \mathbf{u}(x, y) = \sum_{k=1}^N \mathbf{c}_k \phi_k(x, y) \quad (2.22)$$

формулируется в декартовой системе координат с применением преобразования Фурье по переменным  $x, y$ , т.е. на основе представления (1.41)

$$\Delta \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^N \mathbf{c}_k \Phi_k(\alpha_1, \alpha_2).$$

Подстановка интегрального представления перемещений (1.44) в граничные условия (1.12) дает систему интегральных уравнений

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{L}(\alpha, \theta) \Delta \mathbf{U}(\alpha, \theta) e^{i\alpha r \cos(\theta-\gamma)} \alpha d\alpha d\gamma = -\boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(r, \theta). \quad (2.23)$$

получаемую из Фурье-преобразования вектора напряжений на границе раздела сред через Фурье-образ неизвестного скачка перемещений

$$\mathbf{Q}(\alpha, \theta) = \mathbf{L}(\alpha, \theta) \Delta \mathbf{U}(\alpha, \theta)$$

посредством матрицы

$$\mathbf{L}(\alpha, \theta) = [\mathbf{K}_1(\alpha, \theta) - \mathbf{K}_2(\alpha, \theta)]^{-1}.$$

Дискретизация уравнения (2.23) выполняется на основе схемы Бубнова-

Галеркина, что приводит к системе

$$\mathbf{A}_{n'n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{L}(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_{n'}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*) d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\mathbf{f}_n = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\sum_{n'=1}^N \mathbf{A}_{nn'} \mathbf{c}_{n'} = \mathbf{f}_n, \quad n' = 1, 2, \dots, N$$

В качестве базисных функций при вариационно-разностном подходе удобно использовать осесимметричный базис [100]

$$\phi_n(x, y) = \phi(x - x_n, y - y_n),$$

$$\phi(x, y) = \begin{cases} (1 - x^2 - y^2)^{\pi-1}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases},$$

что после применения преобразования Фурье дает явный вид:

$$\Phi_n(\alpha_1, \alpha_2) = h^2 e^{i(\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n)} \Phi(\alpha_1 h, \alpha_2 h)$$

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \left( \frac{2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \right)^{\pi} \Gamma(\pi + 1) J_{\pi} \left( \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right).$$

Здесь  $h$  – шаг сетки, покрывающей область  $\Omega$ .

## §2.2. Асимптотическое решение для одиночной интерфейсной трещины между двумя полупространствами

Так как в области неидеального контакта предполагается наличие микротрещин, размер которых меньше длины падающей волны, то эта информация может быть использована для получения более наглядных аналитических представлений. Этот прием позволяет сократить затраты на численную реализацию задачи и построить асимптотическое решение для скачка перемещений при  $a \cdot k_{ij} \rightarrow \infty$ , которое для полосовых трещин было получено в работах [19, 113]. Асимптотическое решение можно получить для

падающих  $P$ - и  $SV$ -волн из нижнего полупространства  $z < 0$  под нормальным углом к интерфейсу. Эти волны частично отражаются при прохождении через границу раздела сред и частично рассеиваются на трещине. Поле перемещений в отсутствие трещины, по-прежнему, выражается через коэффициенты прохождения по формулам (1.24) и (1.29), а после подстановки соответствующего падающего поля  $\tau^{in}$  в уравнения (2.7), (2.14) и (2.21) их можно решить численно. Однако для трещин, размер которых меньше длины падающей волны, то есть выполняется условие  $a \cdot k_{ij} \rightarrow \infty$ , оказывается возможным и построить достаточно простые асимптотические представления для скачков перемещений. Для этого используется идея аппроксимация Фурье образов ядер интегральных уравнений [19, 114], что позволяет заменить ядра интегральных уравнений (2.5), (2.13) и (2.17) аналитическими выражениями с линейной зависимостью от переменной интегрирования. Так как рассматривается все три типа плоских волн, распространяющихся в изотропной среде, то асимптотические решения помечаются верхним индексом "as" с указанием на тип падающей волны.

### §2.2.1 Полосовая трещина

На низких частотах и при малых размерах дефекта квадратные корни (1.36) можно разложить в ряд Тейлора

$$\gamma_{nj} \approx \alpha - \frac{k_{nj}^2}{2\alpha},$$

что приводит к следующим приближениям ядра интегрального уравнения (2.8) в антиплоском случае

$$L(\alpha) = i\alpha\beta + O(1/\alpha), \quad \beta = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Подстановка асимптотического представления  $L(\alpha)$  в интегральное уравнение (2.7) при  $T = 0$  позволяет получить асимптотическое решение для

антиплоского случая [78, 115]:

$$\Delta U_y^{\text{as}}(\alpha) = \frac{ik_{21}lJ_1(\alpha l)}{2\beta\alpha} (1 - R_3^-)$$

или после применения обратного преобразования Фурье

$$\Delta u_y^{\text{as}}(x) = 2i \frac{(\mu_1 + \mu_2) \cos \theta \cos \theta_1 k_{21} k_{22}}{\mu_1 k_{21} \cos \theta + \mu_2 k_{22} \cos \theta_1} \sqrt{l^2 - x^2}. \quad (2.24)$$

Для сравнения точного и асимптотического решения удобно ввести среднее значение функции раскрытия берегов одиночной трещины [78, 115]

$$\overline{\Delta u_y} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \Delta u_y(x) dx.$$

Для одиночной трещины при падении на нее  $SH$ -волны среднее значение

$$\overline{\Delta u_{SH}^{\text{as}}} = i\pi l \frac{(\mu_1 + \mu_2) k_{21} k_{22}}{\mu_1 k_{21} + \mu_2 k_{22}} \quad (2.25)$$

Аналогично для (2.14) в плоском случае нетрудно получить

$$\mathbf{L}(\alpha) \approx \alpha \tilde{\mathbf{L}} = \alpha \left[ \tilde{\mathbf{K}}_1 - \tilde{\mathbf{K}}_2 \right]^{-1}$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}}_j = -\frac{1}{2\mu_j(\lambda_j + \mu_j)} \begin{pmatrix} (-1)^j(\lambda_j + 2\mu_j) & i\mu_j \\ -i\mu_j & (-1)^j(\lambda_j + 2\mu_j) \end{pmatrix}$$

Тогда асимптотика ядра принимает вид

$$\tilde{\mathbf{L}} = \frac{2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \begin{pmatrix} \beta_1 & -i\beta_2 \\ i\beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)\mu_1} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{(\lambda_2 + \mu_1)\mu_2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2},$$

а решение для падающей  $P$ -волны и для падающей  $S$ -волны соответственно

$$\Delta \mathbf{u}^{\text{as},P}(x) = H_1 \begin{pmatrix} i\beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \sqrt{l^2 - x^2}$$

$$\Delta \mathbf{u}^{\text{as},S}(x) = H_2 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -i\beta_2 \end{pmatrix} \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (2.26)$$

где  $H_s = i \frac{c_{1s}k_{1s}c_{2s}k_{2s}}{c_{1s}k_{1s} + c_{2s}k_{2s}}$ .

Аналогично антиплоской проблеме вводится среднее значение скачков смещений на берегах трещины

$$\overline{\Delta \mathbf{u}_s} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \Delta \mathbf{u}_s(x) dx.$$

Для асимптотических решений при падении  $P$ - и  $S$ -волн они имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \mathbf{u}}^{\text{as},P} &= \frac{\pi l H_1}{2} \begin{pmatrix} im_1 \\ m_1 \end{pmatrix} \\ \overline{\Delta \mathbf{u}}^{\text{as},S} &= \frac{\pi l H_2}{2} \begin{pmatrix} m_3 \\ -im_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Рис. 2.3 демонстрирует точность асимптотик (2.26) на примере средних значений скачка смещений, полученных с помощью асимптотики и численного решения: для разных сочетаний упругих свойств  $\mu_2 = B\mu_1$ ,  $B = 1, 2, 3, 4$  и при одинаковых коэффициентах Пуассона  $\nu_j = 0.3333$  можно видеть достаточно малое отклонение асимптотического решения от точного при малых  $k_{11}l < 0, 5$ .

### §2.2.2 Круговая трещина

В случае круговой трещины Фурье-символ ядра интегрального уравнения (2.21) матрицу  $\mathbf{L}(\alpha)$  при условии  $\alpha \rightarrow \infty$  можно разложить

$$\mathbf{L}(\alpha) = \alpha \mathbf{L}_{\text{as}} + \tilde{\mathbf{L}}(\alpha), \quad \tilde{\mathbf{L}}(\alpha) \sim O(\alpha^{-1})$$

Асимптотика матрицы  $\mathbf{L}(\alpha)$  может быть найдена при больших  $\alpha \rightarrow \infty$  или малых  $ak_{ij}$ , поскольку при этих условиях

$$\gamma_{ij} \approx \alpha \left( 1 - \frac{k_{nj}^2}{2\alpha^2} \right) + O(1). \quad (2.28)$$

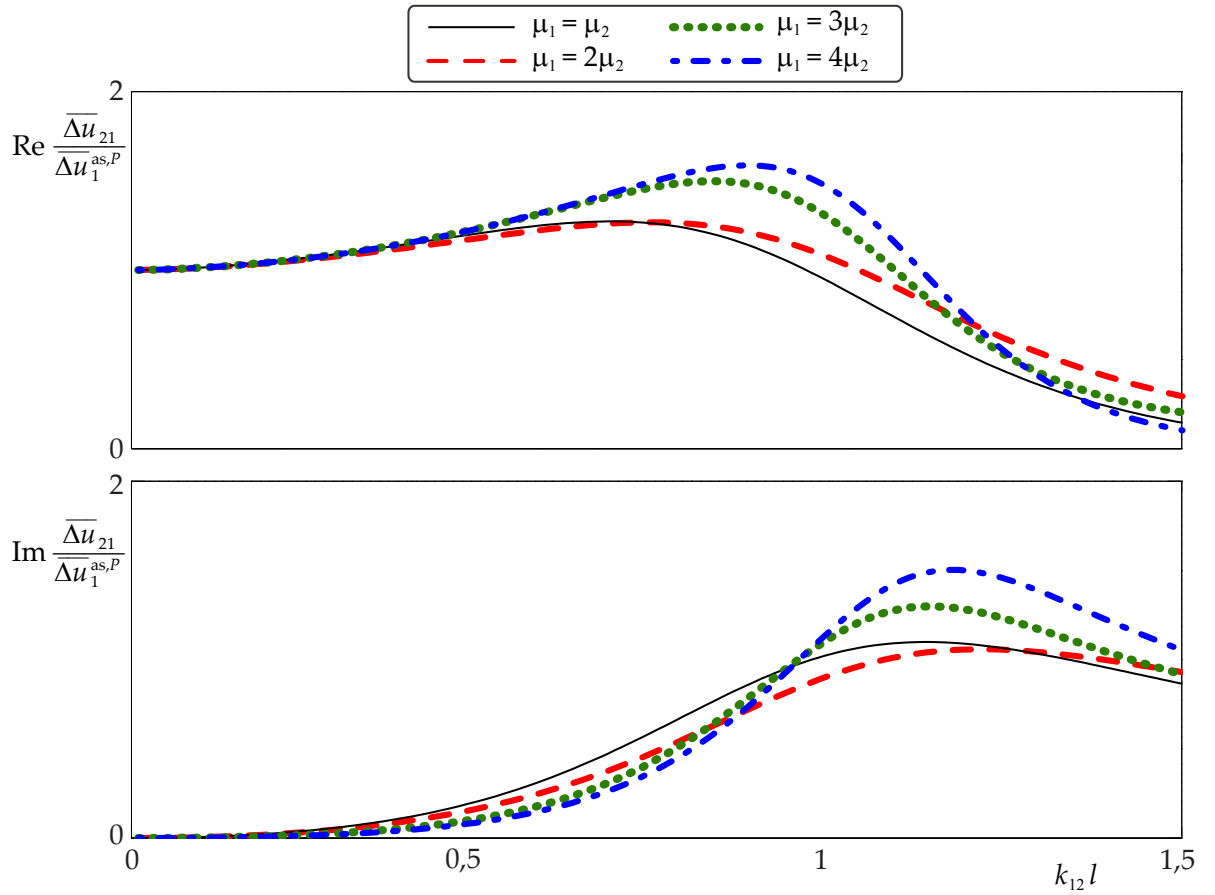


Рис. 2.3: Вещественная и мнимая части отношения  $\overline{\Delta u}_{12} / \overline{\Delta u}_2^{as,P}$  между средними значениями точного  $\overline{\Delta u}_{12}$  и асимптотического решения  $\overline{\Delta u}_2^{as,P}$ , принимающего чисто мнимые значения

Соответственно, все функции, содержащие  $\gamma_{nj}$  так же могут быть разложены в ряды, например

$$\Delta_j \approx 2\mu_j \alpha^2 (k_{1j}^2 - k_{2j}^2) + O(1).$$

Используя эти приближения во всех функциях, связанных с матрицей Грина  $\mathbf{K}(\alpha, z = 0)$ , можно построить асимптотику для ядра интегрального уравнения  $L(\alpha)$  в пространстве Фурье-образов:

$$M(\alpha) \approx -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{k_{21}^2}{2\mu_1(k_{11}^2 - k_{21}^2)} + \frac{k_{22}^2}{2\mu_2(k_{12}^2 - k_{22}^2)} \right) = \frac{1}{\alpha} m_1,$$

$$N(\alpha) \approx \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = \frac{1}{\alpha} m_2, \quad R(\alpha) \approx -\frac{1}{\alpha} m_1$$

$$S(\alpha) = -P(\alpha) \approx \frac{1}{\alpha} \left( \frac{k_{11}^2}{2\mu_1(k_{11}^2 - k_{21}^2)} - \frac{k_{12}^2}{2\mu_2(k_{12}^2 - k_{22}^2)} \right) = \frac{1}{\alpha} m_3,$$



С учетом выведенных асимптотик и следующих из этого разложений матрицы  $\mathbf{L}(\alpha)$ , получается следующий итоговый вид асимптотики ядра интегрального уравнения (2.17)

$$\mathbf{L}_{\text{as}} = \frac{1}{2m_2(m_3^2 - m_1^2)} \begin{pmatrix} m_1^2 + m_1m_2 - m_3^2 & m_1^2 - m_1m_2 - m_3^2 & 2m_2m_3 \\ m_1^2 - m_1m_2 - m_3^2 & m_1^2 + m_1m_2 - m_3^2 & -2m_2m_3 \\ -m_2m_3 & m_2m_3 & 2m_1m_2 \end{pmatrix},$$

где

$$m_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \right),$$

$$m_2 = \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right), \quad m_3 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2} \right).$$

Построенная асимптотика позволяет разложить матрицу системы (2.21)

$\mathbf{A}_{tt'}^{nm}$  в сумму

$$\mathbf{A}_{tt'}^{nm} = \tilde{\mathbf{A}}_{tt'}^{nm} + \int_0^\infty \Phi_{t'}^{nm}(\alpha) \tilde{\mathbf{L}}(\alpha) \Phi_t^{nm}(\alpha) d\alpha, \quad (2.29)$$

где блок  $\tilde{\mathbf{A}}_{tt'}^{nm} = \int_0^\infty \Phi_{t'}^{nm}(\alpha) \tilde{\mathbf{L}}_{\text{as}}(\alpha) \Phi_t^{nm}(\alpha) \alpha^2 d\alpha$  может быть вычислен с использованием формулы [116]

$$\int_0^\infty J_\mu(at) J_\nu(at) \frac{dt}{t} = \frac{2 \sin(\pi/2(\nu - \mu))}{\pi (\nu^2 - \mu^2)}. \quad (2.30)$$

Для случая  $P$ -волны при решении системы, получаемой после редукции системы (2.21), достаточно взять  $T = 0$ , поскольку в разложения (2.18) коэффициент  $\beta_t^{10}$  быстро затухает при увеличении  $t$ . Графики среднего значения скачка смещений при разных  $T$ , демонстрирующие быстрое убывание  $\beta_t^{10}$ , приводятся ниже. Учитывая асимптотику ядра интегрального уравнения, получается алгебраическая система уравнений  $3 \times 3$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{t=0}^T \beta_{kt}^{nm} \int_0^\infty l_{ik}(\alpha) \Phi_{kt}^m(\alpha a) \Phi_{it'}^m(\alpha a) \alpha d\alpha = -f_1 \int_0^a \phi_{it'}^m(r) r dr, \quad (2.31)$$

где нижний индекс  $i$  обозначает номер уравнения, а  $l_{ik}(\alpha)$  – элементы матрицы  $\mathbf{L}_{\text{as}}$ . Асимптотическое решение данной системы можно записать аналитически. Для этого удобно ввести

$$Y_{kt,it'}^m = \int_0^\infty \Phi_{kt}^m(\alpha a) \Phi_{it'}^m(\alpha a) \alpha da.$$

Вычисление данных интегралов производится согласно формуле (2.30) при условии  $t = t'$ , которое необходимо для существования нетривиальных решений системы (2.31),

$$\begin{aligned} Y_{1t,1t}^m &= \frac{\pi a}{2} \frac{1}{4t + 2m + 5} & Y_{2t,2t}^m &= \frac{\pi a}{2} \frac{1}{4t + 2m + 1} \\ Y_{3t,3t}^m &= \frac{\pi a}{2} \frac{1}{4t + 2m + 3} & Y_{1t,3t}^m &= \frac{a}{4t + 2m + 4} \\ Y_{2t,3t}^m &= \frac{a}{4t + 2m + 2} & Y_{1t,2t}^m &= 0 \end{aligned}$$

Следует также учесть, что при  $m = 0$  используются другие базисные функции для второй компоненты скачка:  $\Phi_{2t}^0 = \Phi_{1t}^0$ . Таким образом для падающей  $P$ -волны коэффициенты разложения (2.18)

$$\Delta w_k^{\text{as},P} = \widehat{\beta}_{k0}^{10} \phi_{k0}^0 \quad (2.32)$$

находятся из системы уравнений (2.31) и вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{10}^{10} &= f_1 \frac{20am_3(m_1^2 - m_3^3)}{4\pi^2 m_1^2 - 15m_3^2}, \\ \widehat{\beta}_{20}^{10} &= f_1 \frac{20am_3(m_1^2 - m_3^2)}{4\pi^2 m_1^2 - 15m_3^2}, \\ \widehat{\beta}_{30}^{10} &= f_1 \frac{8a\pi m_1(m_1^2 - m_3^2)}{4\pi^2 m_1^2 - 15m_3^2}. \end{aligned}$$

Система линейных алгебраических уравнений (2.28) в случае падающей  $SV$ -волны решается при значениях индексов  $m = 1$  и  $n = 1$ . В данном случае асимптотическое решение также возможно записать аналитическое решение при  $T = 0$  аналогично случаю  $P$ -волны

$$\Delta w_k^{\text{as},S} = \widehat{\beta}_{k0}^{11} \phi_{k0}^1 \quad (2.33)$$

где коэффициенты  $\widehat{\beta}_{k0}^{11}$  имеют более громоздкий вид:

$$\widehat{\beta}_{10}^{11} = f_2 \frac{1680am_2^2m_3^2(m_1^2 - m_3^2)}{(m_1^2 + m_1m_2 - m_3^2)\pi(36m_1(m_1^2 - m_3^2)\pi^2 + m_2(-275m_3^2 + 36m_1^2\pi^2))},$$

$$\widehat{\beta}_{20}^{11} = f_2 \frac{-32am_2(m_1^2 - m_3^2)(9m_1(m_1^2 - m_3^2)\pi^2 + m_2(-35m_3^2 + 9m_1^2\pi^2))}{(m_1^2 + m_1m_2 - m_3^2)\pi(36m_1(m_1^2 - m_3^2)\pi^2 + m_2(-275m_3^2 + 36m_1^2\pi^2))},$$

$$\widehat{\beta}_{30}^{11} = f_2 \frac{-360a\pi m_2 m_3 (m_1^2 - m_3^2)}{\pi(36m_1(m_1^2 - m_3^2)\pi^2 + m_2(-275m_3^2 + 36m_1^2\pi^2))}.$$

Вектор среднего скачка смещений  $\overline{\Delta \mathbf{u}}$  получается с помощью формулы (1.53), где коэффициенты разложения  $\Delta \mathbf{v}^{nm}(r, \theta)$  выражаются через коэффициенты  $\Delta \mathbf{w}^{nm}(r)$  следующим образом

$$2\Delta v_1^{nm} = \Delta w_1 - \Delta w_2^{nm}, \quad 2\Delta v_2^{nm} = \Delta w_1^{nm} + \Delta w_2^{nm}, \quad \Delta v_3^{nm} = \Delta w_3^{nm}.$$

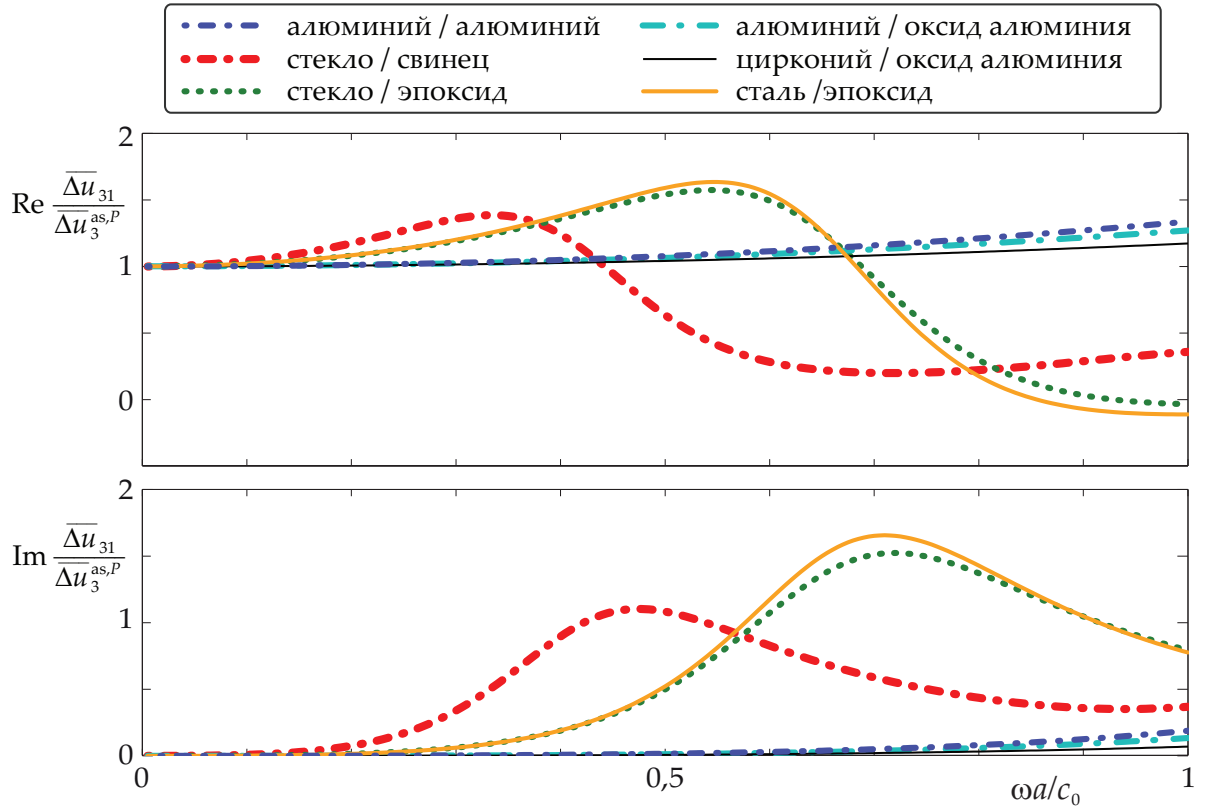


Рис. 2.4: Отношения точного и асимптотического средних значений вертикальных компонент скачков смещений на круговой трещине при падении  $P$ -волны,  $c_0 = 3160$  м/с

Среднее значение скачка смещений определяется разложением (2.18), в котором неизвестные  $\beta_{kt}^{nm}$  могут находиться как численно из (2.21), так и

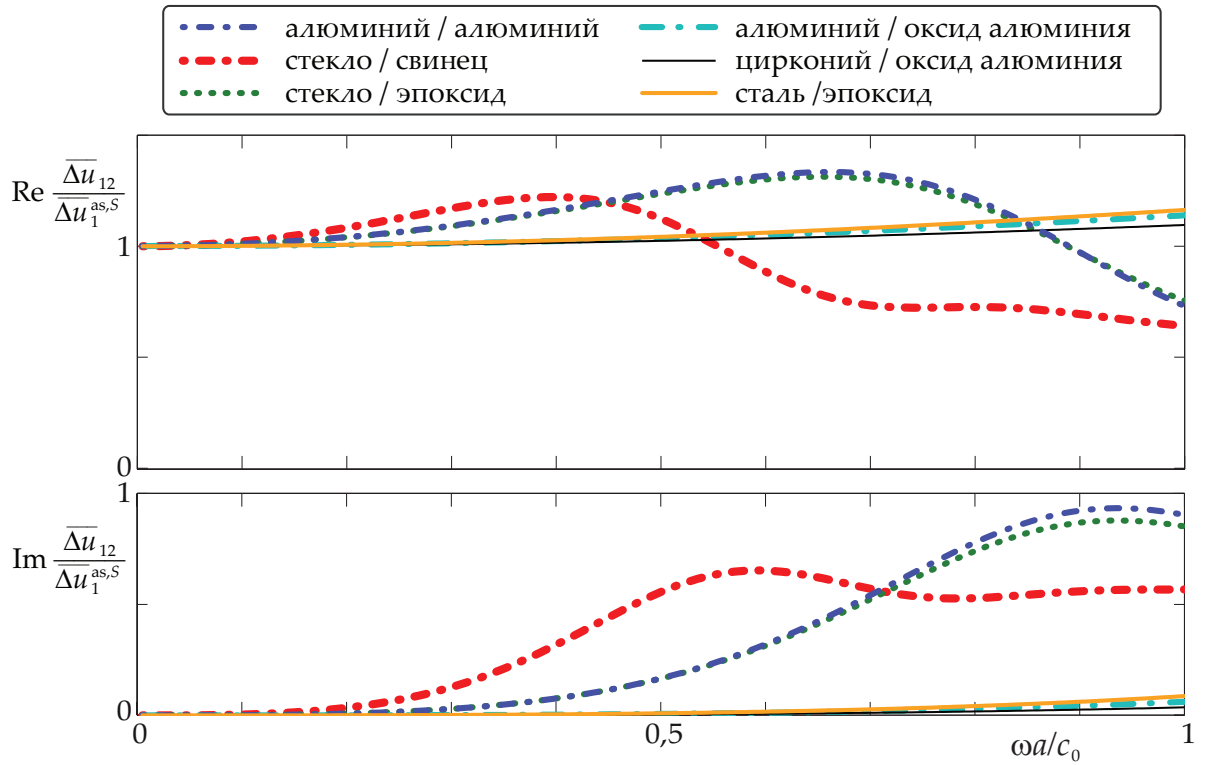


Рис. 2.5: Отношения точного и асимптотического средних значений горизонтальных компонент скачков смещений на круговой трещине при падении  $SV$ -волны,  $c_0 = 3160$  м/с

в виде асимптотики

$$\overline{\Delta u_s}^{as} = \frac{1}{\pi a^2} \iint_{\Omega} \Delta u_s^{as}(x, y) dx dy$$

где  $\Delta \mathbf{u}_s(x, y)$  связаны с  $\Delta \mathbf{v}_s(r, \theta)$  соотношениями

$$u_x = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \quad u_y = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta, \quad u_z = u_z.$$

Для демонстрации точности найденного асимптотического решения на рис. 2.4–2.5 приводятся графики отношения численного решения  $\overline{\Delta \mathbf{u}}_1$  к асимптотическому  $\overline{\Delta \mathbf{u}}_1^{as}$  в случае падающих  $P$  и  $SV$ -волн на круговую трещину, расположенную на границе двух материалов (характеристики рассматриваемых материалов приводятся в таблице 2.1). Графики демонстрируют хорошую точность полученных асимптотик даже для достаточно

высоких частот, что указывает на возможность их использования в дальнейших построениях.

Материал	Плотность, $\rho$ [кг/м <sup>3</sup> ]	Модуль Юнга, $E$ [ГПа]	коэффициент Пуассона, $\nu$
Алюминий	2700	70	0.33
Стекло	2770	69.15	0.25
Оксид алюминия	4000	400	0.231
Эпоксид	1200	4.5	0.399
Цирконий	5700	200	0.3
Свинец	11400	17.76	0.43
Сталь	7860	81	0.288

Таблица 2.1: Упругие свойства и плотности материалов

### §2.3. Волновые поля, рассеиваемые интерфейсной круговой трещиной

В § 2.2 было продемонстрировано, что для описания волновых полей, рассеиваемых интерфейсной круговой трещиной, могут использоваться два подхода. В первом случае разложение скачка смещений происходит по присоединенным полиномам Лежандра (2.18), во втором используется осесимметричный базис (2.22). Во втором случае можно свести задачу к расчету одномерных интегралов, но для вычисления скачка с хорошей точностью требуется достаточно мелкая сетка. Далее приводятся результаты сопоставления обоих подходов между собой и с известными результатами на примере скачков смещений и волновых полей в дальней от дефекта зоне.

Для проверки корректности разработанной математической модели и ее компьютерной реализации было выполнено сравнение с работами [20, 56, 117], где рассматривалось падение плоских волн на круговую трещину в однородном пространстве. Результаты сопоставления приведены на

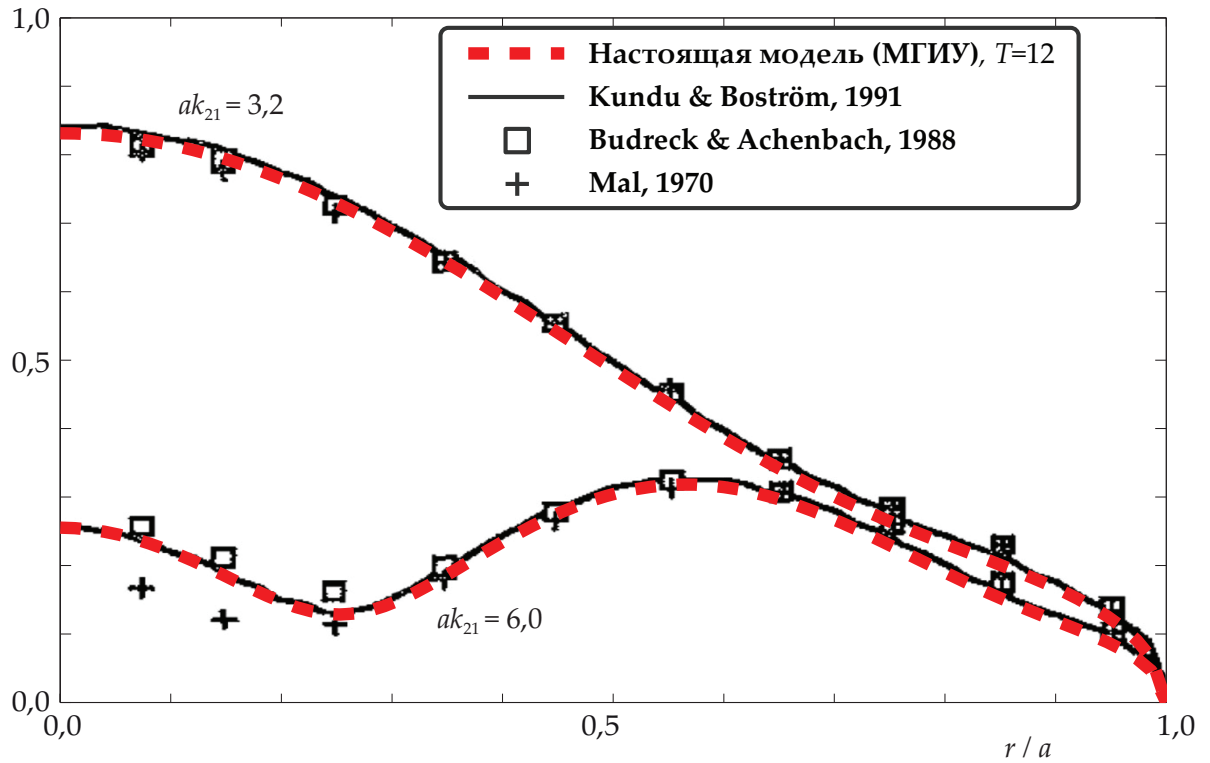


Рис. 2.6: Нормализованный скачок перемещений при падении Р-волны на круговую трещину в упругом пространстве под нормальным углом: сравнение с [20, 56, 117], материал – стекло

рис. 2.6. Вычисления были сделаны для разных частот для материала с упругими свойствами, взятыми из работы [117]:  $\lambda_j/\mu_j = 1, j = 1, 2$ . Кроме того, для дополнительного контроля было произведено сравнение с [117] с применением ВРМ, см. рис. 2.7.

Если в качестве падающего поля рассматриваются плоские  $P$ - и  $SV$ -волны, падающие из нижнего полупространства ( $j = 1$ ) под углом  $\phi_0$  к оси  $Oz$  в плоскости  $xOz$ , то вектор перемещений при падении  $P$ -волны имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_x(x, z) \\ u_y(x, z) \\ u_z(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi_0 \\ 0 \\ \cos \phi_0 \end{pmatrix} e^{ik_{11}(x \sin \phi_0 + z \cos \phi_0)}.$$

Соответственно, компоненты тензора напряжений на интерфейсной трещине ( $z = 0$ ) в декартовой системе координат находятся с использованием

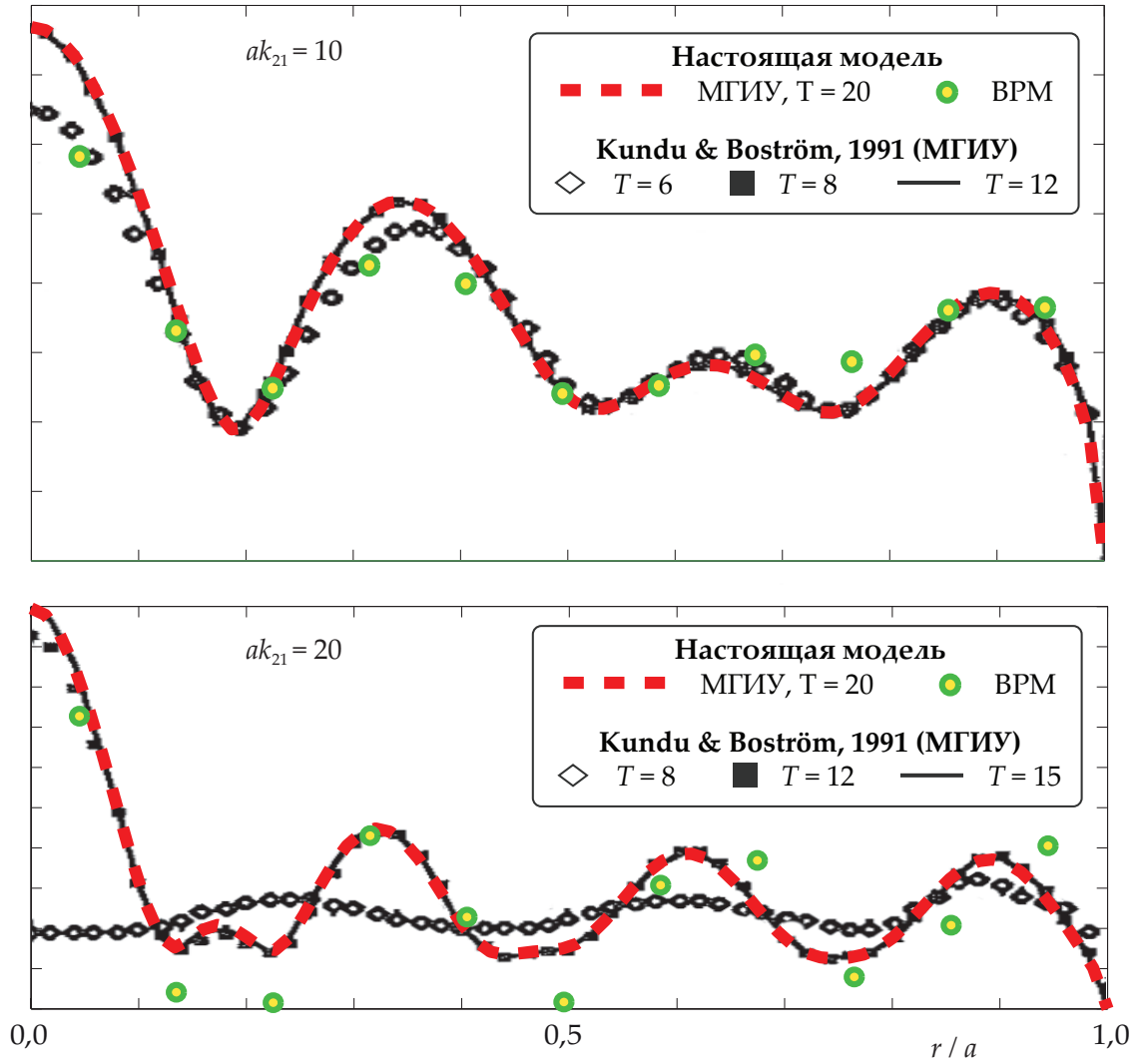


Рис. 2.7: Нормализованный скачок перемещений при падении Р-волны на круговую трещину в упругом пространстве под нормальным углом: сравнение с [117], материал – стекло

линейного дифференциального оператора (1.27):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xz}(x, z) \\ \sigma_{yz}(x, z) \\ \sigma_{zz}(x, z) \end{pmatrix} = ik_{11}\mu_1 \begin{pmatrix} \sin 2\phi_0 \\ 0 \\ k_{21}^2/k_{11}^2 - 2\sin^2 \phi_0 \end{pmatrix} e^{ik_{11}x \sin \phi_0}$$

Поле перемещений в случае падения SV-волны

$$\begin{pmatrix} u_x(x, z) \\ u_y(x, z) \\ u_z(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_0 \\ 0 \\ -\sin \phi_0 \end{pmatrix} e^{ik_{21}(x \sin \phi_0 + z \cos \phi_0)}$$

и вектор напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xz}(x, z) \\ \sigma_{yz}(x, z) \\ \sigma_{zz}(x, z) \end{pmatrix} = ik_{21}\mu_1 \begin{pmatrix} \cos 2\phi_0 \\ 0 \\ -\sin 2\phi_0 \end{pmatrix} e^{ik_{21}x \sin \phi_0}$$

Переход из декартовой системы координат в цилиндрическую производится по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r, \theta) &= \sigma_{xz}(r, \theta) \cos \theta + \sigma_{yz}(r, \theta) \sin \theta \\ \sigma_{\theta z}(r, \theta) &= -\sigma_{xz}(r, \theta) \sin \theta + \sigma_{yz}(r, \theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.34)$$

Тогда из разложения  $\tau_1^{\text{in}}$  в ряд Фурье следует, что в случае падающей под нормальным углом  $P$ -волны правая часть системы (2.17) имеет вид

$$\hat{\tau}_1^{\text{in}, nm} = f_1 \begin{cases} (0, 0, 1), & n = 1, m = 0 \\ (0, 0, 0), & \text{иначе} \end{cases},$$

т.е. ненулевые члены при индексах  $n = 1$  и  $m = 0$ . Для падающей под нормальным углом к интерфейсу  $SV$ -волны ненулевыми являются только члены при  $m = 1$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_2^{\text{in}, nm} &= f_2 \begin{cases} (0, 2, 0), & n = 1, m = 1 \\ (0, 0, 0), & \text{иначе} \end{cases}, \\ f_s &= \frac{2ic_{s1}k_{s1}c_{s2}k_{s2}}{c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2}}. \end{aligned}$$

Сопоставления с известными результатами, приведенные на рис. 2.6 и 2.7 были выполнены для нормального угла падения. Однако для более полной проверки модели необходимо произвести сопоставление результатов для произвольных углов падения  $\phi_0$ . Воспользовавшись формулами (2.34), а также хорошо известным разложением экспоненты в ряд по функциям Бесселя [31, р. 294]

$$e^{ik_0 r \cos \theta} = J_0(k_0 r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^m J_m(k_0 r) \cos(m\theta)$$



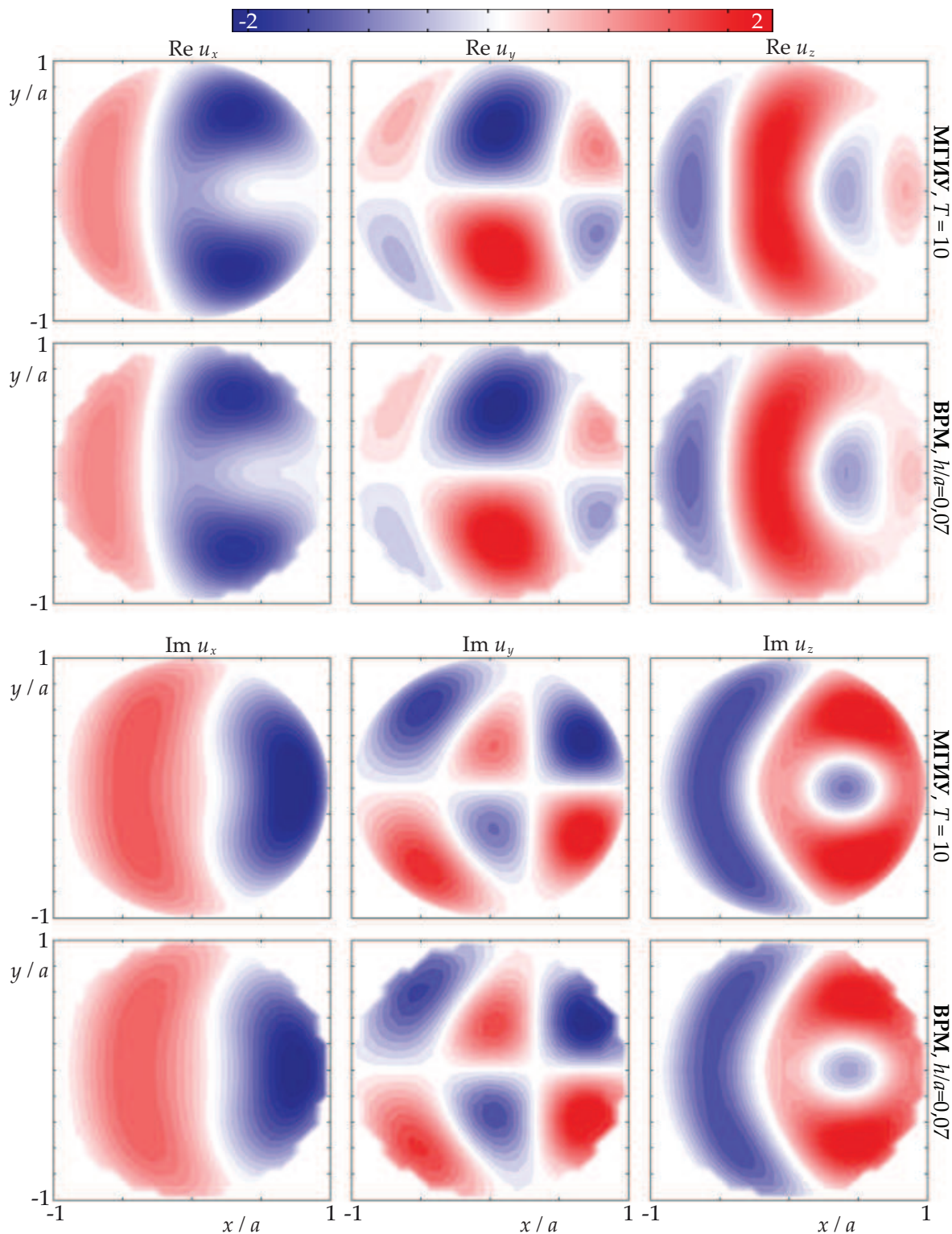


Рис. 2.8: Вещественные и мнимые части компонент скачка перемещений на круговой трещине в однородном пространстве при падении  $SV$ -волны под углом  $30^\circ$ , рассчитанные с помощью метода граничных интегральных уравнений и вариационно-разностного метода, материал – стекло

и следующими из него равенств

$$e^{ik_0r \cos \theta} \cos \theta = iJ_1(k_0r) + \sum_{m=1}^{\infty} i^{m-1} \left( J_{m-1}(k_0r) - J_{m+1}(k_0r) \right) \cos(m\theta),$$

$$e^{ik_0r \cos \theta} \sin \theta = \sum_{m=1}^{\infty} i^{m-1} \left( J_{m-1}(k_0r) + J_{m+1}(k_0r) \right) \sin(m\theta),$$

можно получить разложения в ряд Фурье для напряжений, возникающих при падении плоской волны под углом  $\phi_0$  к оси  $z$ . Формулы для ненулевых коэффициентов при  $m = 0$ :

$$\hat{\tau}_3^{\text{in},10} = J_0(k_0r) \sigma_{zz}^0, \quad \hat{\tau}_1^{\text{in},10} = \hat{\tau}_2^{\text{in},10} = iJ_1(k_0r) \sigma_{xz}^0$$

и при  $m \geq 1$ :

$$\hat{\tau}_1^{\text{in},1m} = 2\sigma_{xz}^0 i^{m+1} J_{m+1}(k_0r),$$

$$\hat{\tau}_2^{\text{in},1m} = 2\sigma_{xz}^0 i^{m-1} J_{m-1}(k_0r),$$

$$\hat{\tau}_3^{\text{in},1m} = 2i^m \sigma_{zz}^0 J_m(k_0r).$$

После этого достаточно подстановки полученных выражений для  $\hat{\tau}^{\text{in},nm}$  в (2.21). Рис. 2.8 на примере скачков смещений иллюстрирует хорошее совпадение всех величин при использовании двух описанных в § 2.1 подходов.

## ГЛАВА 3. Прохождение упругих волн через интерфейсы с неидеальным контактом

Для описания зон неидеального контакта используются разные подходы. Один из них заключается во введении стохастически или периодически распределенного набора микротрещин для описания зон неидеального контакта [44, 58]. Для случая одинаковых материалов по обе стороны от повреждения в работе [58] было продемонстрировано, что прохождение плоских упругих волн через поврежденную зону, описываемую различными вариантами распределения полосовых микротрещин, дает близкие результаты, тем лучше совпадающие, чем меньше характерный размер дефекта относительно длины волны [118]. Альтернативный подход заключается в моде-

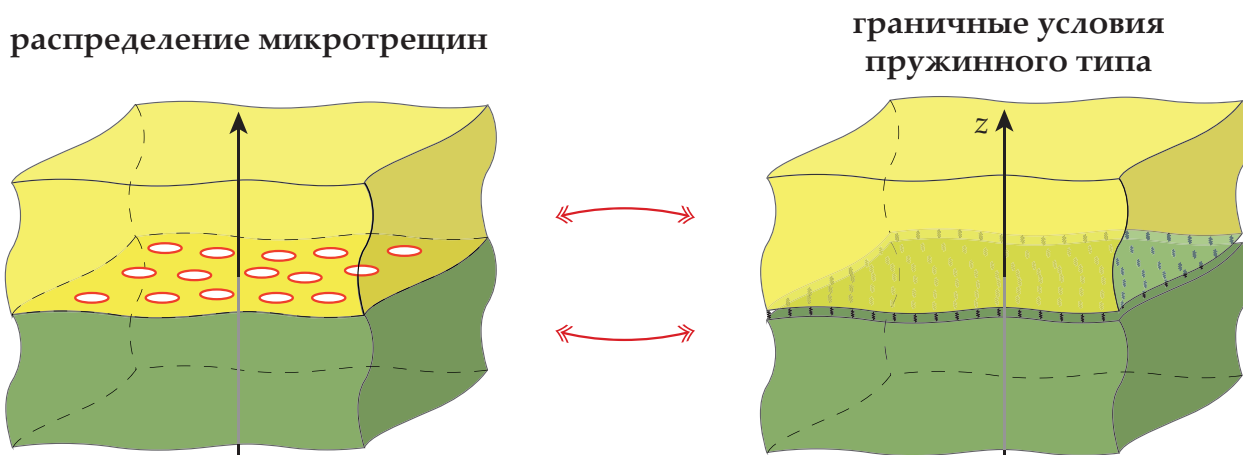


Рис. 3.1: Моделирование неидеального контакта между материалами

лировании зоны неидеального контакта поврежденного интерфейса с помощью граничных условий пружинного типа [44, 119]. В § 3.1-3.2 рассматриваются обе модели для описания динамики поврежденных интерфейсов при неидеальном контакте. На основе предположения об эквивалентности этих моделей в § 3.3 устанавливается соответствие между жесткостью распределенной пружины и параметрами поврежденного интерфейса.

### §3.1. Граничные условия пружинного типа

Граничные условия пружинного типа вводятся на поврежденном интерфейсе для области неидеального контакта и записываются как условие непрерывности напряжений при скачке перемещений. В общем трехмерном случае граничные условия пружинного типа в точке  $\mathbf{x}$  поверхности  $S$  с нормалью  $\mathbf{n}$  можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa} (\mathbf{u}_{\mathbf{n}-}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{\mathbf{n}+}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S \quad (3.1)$$

$\boldsymbol{\kappa}$  – матрица жесткости  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{n}_{\pm}$  – внешняя и внутренняя нормали к поверхности в рассматриваемой точке  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}$  – вектор, состоящий из нормальных и касательных компонент тензора напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  в  $\mathbf{x}$ , а  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений. Соотношения для жесткости в граничных условиях пружинного типа могут иметь различный вид в зависимости от типа и характера повреждения. В изотропном случае можно выбрать локальную систему координат в  $\mathbf{x}$  таким образом, что остаются ненулевыми три диагональные компоненты матрицы жесткости  $\boldsymbol{\kappa}$ .

Для случая полосовых отслоений в силу возможности переформулировки задачи в плоской и антиплоской постановке все ненулевые элементы матрицы жесткости имеют равные значения [119]. В антиплоском случае только компонента  $\kappa_{22}$  матрицы жесткости ненулевая, а в плоском случае  $\kappa_{11}$  и  $\kappa_{33}$ . В трехмерной постановке необходимо определить три диагональных компоненты, которые в общем случае могут иметь различные значения [104].

Для падения под нормальным углом плоской волны на границу раздела двух сред, на которой задана распределенная пружина, подстановкой представлений для плоских упругих волн в граничные условия (3.1) можно

получить выражение для перемещений [76, 119]

$$\mathbf{u}_s^\kappa = \begin{cases} \mathbf{p}_s (e^{ik_{1s}z} + R_s^\kappa e^{-ik_{1s}z}), & z < 0, \\ \mathbf{p}_s T_s^\kappa e^{ik_{2s}z}, & z > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$R_s^\kappa = \frac{ic_{1s}k_{1s}c_{2s}k_{2s} + \kappa(c_{1s}k_{1s} - c_{2s}k_{2s})}{ic_{1s}k_{1s}c_{2s}k_{2s} + \kappa(c_{1s}k_{1s} + c_{2s}k_{2s})},$$

$$T_s^\kappa = \frac{2\kappa c_{1s}k_{1s}}{ic_{1s}k_{1s}c_{2s}k_{2s} + \kappa(c_{1s}k_{1s} + c_{2s}k_{2s})},$$

где  $s$  обозначает тип падающей волны аналогично § 1.3 и обуславливает место  $\kappa$  в матрице жесткости  $\boldsymbol{\kappa}$ .

### §3.2. Распределенный набор трещин

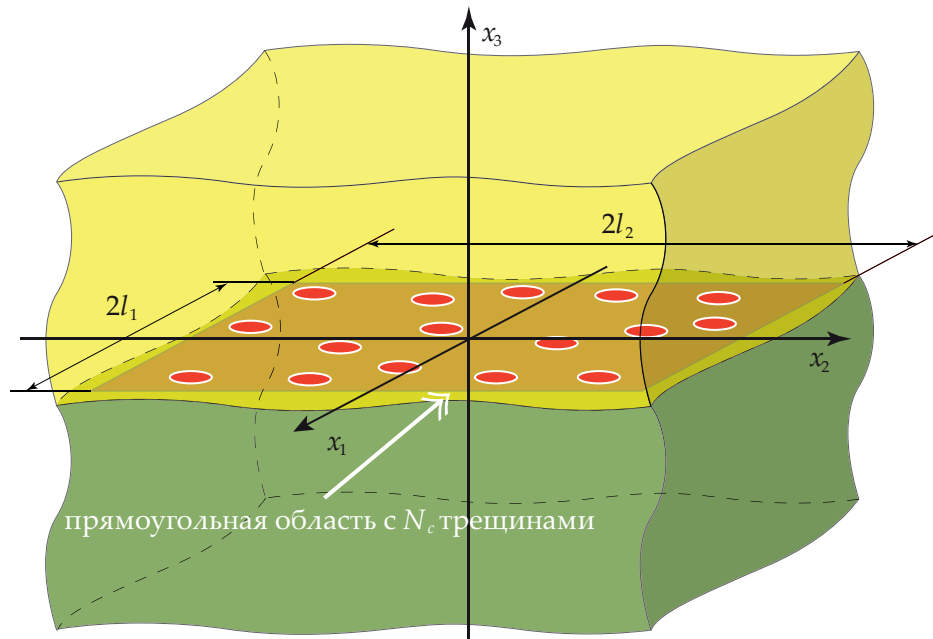


Рис. 3.2: Постановка задачи для распределенного набора трещин

Далее рассматривается падение плоской упругой волны, описываемой представлением (3.2) при  $\kappa \rightarrow \infty$ , на набор трещин  $\{\Omega_i\}_{i=0}^\infty$ , стохастически расположенных на границе раздела двух сред. Будем предполагать, что размеры трещин малы по сравнению с расстоянием между ними и, соответственно, взаимодействием между ними будем пренебрегать. Для опи-

сания степени поврежденности интерфейса вводится плотность распределения трещин, или трещиноватость. Тогда поврежденность определяется отношением  $C = S_{crack}/S_{total}$ , где  $S_{crack}$  – суммарная площадь трещин,  $S_{total}$  – площадь некоторой рассматриваемой области на границе раздела сред, причем  $S_{total} \gg S(\Omega_i)$ . Полное волновое поле – это суперпозиция поля без дефекта  $\mathbf{u}^{in}$  и рассеянного трещиной поля  $\mathbf{u}^{sc}$ . Для стохастически распределенного набора трещин можно применять усреднение по ансамблю [43, 115], что позволяет представить рассеянное волновое поле вдали от границ полупространств в виде плоских волн с амплитудами  $P^\pm$ , распространяющихся от плоскости  $z = 0$ :

$$\mathbf{u}_s^{sc} = \begin{cases} P_s^- e^{ik_{1s}z}, & z < 0 \\ P_s^+ e^{ik_{2s}z}, & z > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для определения коэффициентов  $P^\pm$  к падающему  $\mathbf{u}_s^{in} = \mathbf{u}_s^{\kappa \rightarrow \infty}$  и рассеянному  $\mathbf{u}_s^{sc}$  полям применяется теорема Бетти-Рэлея

$$\iint_S [u_i^{in} \cdot \sigma_{ij}^{sc} - u_i^{sc} \cdot \sigma_{ij}^{in}] n_j dS = 0. \quad (3.4)$$

В качестве поверхности интегрирования  $S$  в нижнем полупространстве выбирается параллелепипед  $S^-$  с вершинами в точках  $(\pm x_0, \pm y_0, 0^-)$  и  $(\pm x_0; \pm y_0; -z_0)$ . Аналогично теорема Бетти-Рэлея применяется для параллелепипеда  $S^+$  из верхнего полупространства симметрично к  $S^-$  относительно плоскости  $z = 0$  с вершинами в точках  $(\pm x_0; \pm y_0; 0^+)$  и  $(\pm x_0; \pm y_0; z_0)$ . Интегралы вдоль вертикальных плоскостей  $x = \pm x_0$  в обоих случаях обращаются в ноль, а интегралы по горизонтальным плоскостям дают ненулевой вклад, т.е.

$$\left( \iint_{z=z_0} - \iint_{z=-z_0} \right) [u_i^{in} \cdot \sigma_{ij}^{sc} - u_i^{sc} \cdot \sigma_{ij}^{in}] dx dy - \iint_{\Omega} \Delta u_i \sigma_{ij}^{in} dx dy = 0.$$

Здесь  $\Omega$  – отслоившаяся область, занимаемая микротрещинами, а  $\Delta u(x, y)$

– вектор-функция раскрытия трещины. Более подробно схема применения техники усреднения и преобразования (3.4) приводится в § 3.2.1. Поскольку ненулевой вклад в интегралы дают лишь два слагаемых, то подставляя выражения (3.2)–(3.3) и используя закон Гука для вычисления напряжений, можно получить выражения для амплитуд рассеянного поля

$$P_s^\pm = -\frac{1}{2} (1 \pm R_s^-) C(\overline{\Delta \mathbf{u}_s}, \mathbf{p}_s).$$

При этом коэффициент прохождения  $\bar{T}_s$  выражается через среднее значение скачка смещений на трещине  $\overline{\Delta \mathbf{u}_s}$ , который зависит от типа падающей волны и упругих модулей материалов [113].

$$\bar{T}_s = T_s^- + P_s^+ = T_s^- \left( 1 - \frac{1}{2} C(\overline{\Delta \mathbf{u}_s}, \mathbf{p}_s) \right) \quad (3.5)$$

Среднее значение скачка смещений на трещине функционально выражается через скачок на одиночной трещине  $\Omega_0$  с площадью  $S(\Omega_0)$

$$\overline{\Delta \mathbf{u}_s} = \frac{1}{S(\Omega_0)} \iint_{\Omega_0} \Delta u_s(x, y) dx dy, \quad (3.6)$$

Таким образом, коэффициент прохождения определяется геометрией микротрещин; далее рассматриваются полосовые и круговые микродефекты.

Изучение распространения плоских волн через поврежденные интерфейсы с полосовыми трещинами одинаковых размеров было выполнено в [78, 113, 115], где задача рассматривалась в антиплоской и плоской постановках. В настоящем исследовании применяется аналогичная схема нахождения среднего скачка перемещений для случая поврежденных интерфейсов с полосовыми трещинами различной длины. Декартова система координат выбирается так, что ось  $z$  ортогональна интерфейсу, на котором расположены трещины шириной  $2l$ , а волна падает под нормальным углом к нему, см. рис. 3.3.

Вначале рассматривается падение  $SH$ -волны под произвольным углом  $\theta$ . Падающее волновое поле без дефектов, как и ранее, определяется (3.2).

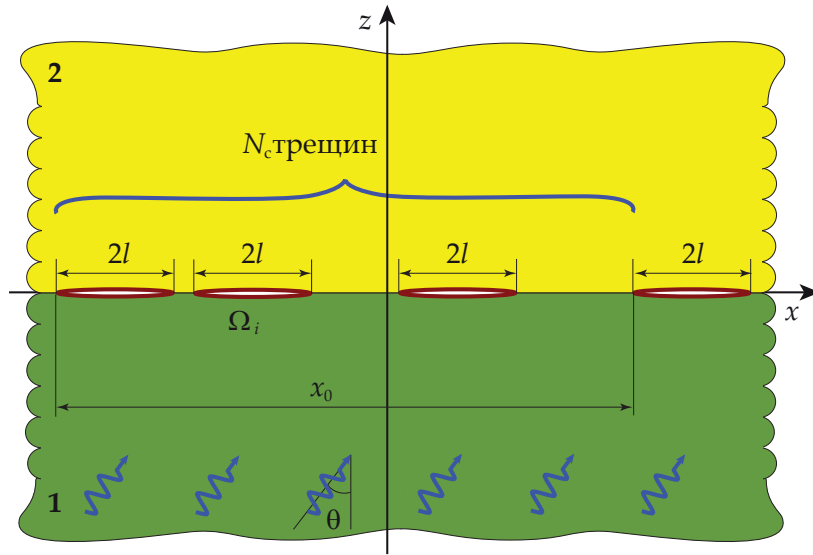


Рис. 3.3: Геометрия задачи для распределения полосовых трещин

Точное выражение для суммарного волнового поля  $u_y = u_y^{\text{in}} + u_y^{\text{sc}}$  в силу произвольности расположения трещин не может быть получено. Вместо точного решения, вычисляется среднее по ансамблю значение рассеянного поля, определяемое вдали от границы раздела сред. Так как полосовые трещины не ограничены вдоль оси  $y$ , то решается задача в плоскости  $xOz$  и двукратные интегралы в теореме Бетти-Рэлея заменяются на однократные. В двумерном случае контуром интегрирования является прямоугольный контур  $S^-$ , который опирается на точки  $x = \pm x_0$ ,  $z = -z_0$ , и  $z = 0^-$ , значения  $x_0$  и  $z_0$  выбираются произвольными. Для определения среднего по ансамблю значения рассеянного поля теорема взаимности Бетти-Рэлея применяется к  $u_y^{\text{sc}}$  и  $\tilde{u}_y^{\text{in}}$ , получаемого из  $u^{\text{in}}$  заменой  $\theta$  на  $-\theta$ :

$$\int_{S^-} (\tilde{u}_y^{\text{in}} \sigma_{yj}^{\text{sc}} - u_y^{\text{sc}} \tilde{\sigma}_{yj}^{\text{in}}) n_j dS = 0,$$

Аналогично теорема Бетти применяется к  $u_y^{\text{sc}}$ ,  $\tilde{u}_y^{\text{in}}$  для контура  $S^+$ , симметричного к  $S^-$  относительно оси  $z = 0$ . Если сложить полученные равенства и применить усреднение по ансамблю к распределению трещин, то есть взять среднее значение соответствующих величин по всем возможным



положениям трещин [120], то в результате интегралы вдоль вертикальных отрезков  $x = \pm x_0$  компенсируют вклад друг друга и останутся лишь интегралы вдоль горизонтальных отрезков:

$$\left( \int_{z=z_0} - \int_{z=-z_0} \right) (\tilde{u}_y^{\text{in}} \langle \sigma_{yz}^{\text{sc}} \rangle - \langle u_y^{\text{sc}} \rangle \tilde{\sigma}_{yz}^{\text{in}}) dx + \left\langle \int_{\Omega} \Delta u_y \tilde{\sigma}_{yz}^{\text{in}} dx \right\rangle = 0, \quad (3.7)$$

Здесь  $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$  – поврежденная часть границы, а угловые скобки обозначают среднее значение по ансамблю трещин. При этом среднее по ансамблю рассеянное волновое поле представляет собой плоские волны, распространяющиеся от интерфейса в направлениях  $\pm z$

$$\langle u_y^{\text{sc}} \rangle = \begin{cases} P^- e^{ik_{21}(z \cos \theta + x \sin \theta)}, & z < 0 \\ P^+ e^{ik_{22}(z \cos \theta_1 + x \sin \theta_1)}, & z > 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Первый член в (3.7) обращается в нуль, второй после подстановки выражений (3.2) и (3.8) упрощается

$$\int_{z=-z_0} (\tilde{u}_y^{\text{in}} \sigma_{yz}^{\text{sc}} - u_y^{\text{sc}} \tilde{\sigma}_{yz}^{\text{in}}) dx = -2ik_{21} \cos \theta \mu_1 P^-(2x_0), \quad (3.9)$$

а третье слагаемое

$$\left\langle \int_{\Omega} \Delta u_y \tilde{\sigma}_{yz}^{\text{in}} dx \right\rangle = 2ik_{21} \cos \theta \mu_1 (1 - R^-)(2x_0) C \overline{\Delta u_y} \Psi_n(k_{21} \sin \theta l).$$

выражается через среднее значение функции раскрытия берегов одиночной трещины при падении на нее  $SH$ -волны  $\overline{\Delta u_y}$ . Здесь  $C_l = Nl/x_0$  – отношение суммарной длины  $N$  трещин на интервале  $[-x_0, x_0]$  к длине рассматриваемой области, т.е. трещиноватость. Для  $\overline{\Delta u_y}$  можно использовать разложение (2.6) по полиномам Чебышева и воспользоваться асимптотикой (2.24), для которой среднее значение скачка смещений на берегах трещины для низких частот определяется выражением (2.25).

При падении плоских упругих  $P$  и  $SV$  волн под произвольным углом в каждом из полупространств возбуждается два типа волн и коэффициенты прохождения и отражения имеют громоздкий вид [76]. Однако для

целей данного исследования достаточно рассмотрения только нормально-го угла падения, при котором не появляются дополнительных типов волн. Поле без дефекта определяется формулами (3.2), где векторы распространения  $\mathbf{p}^1 = \{0, 1\}$  для  $P$ -волны и соответственно  $\mathbf{p}^2 = \{1, 0\}$  для  $SV$ -волны. Для вектора перемещений  $\mathbf{u}^{sc}$  рассеянного трещиной поля справедливо интегральное представление (2.3). Аналогично схеме, примененной к антиплоской проблеме, можно также использовать решение для одиночной трещины, а именно, соотношение (2.27).

Описанная выше схема в настоящей работе, как было уже сказано выше, применяется также к более общей задаче о рассеянии упругих волн на интерфейсе с полосовыми трещинами различной полуширины  $l_i$ . Аналогично случаю одинаковых трещин для определения рассеянного поля используется усреднение по ансамблю, что также позволяет вдали от границ полупространств представлять рассеянное поле в виде плоских волн, а затем к полям  $u_y^{in}$  и  $u_y^{sc}$  применить теорему Бетти с теми же контурами интегрирования. В уравнении (3.7) повреждённая часть границы между полупространствами имеет вид  $\Omega = \bigcup \Omega_i$ , где  $\Omega_i = \{|x - x_i| < l_i\}$ . После подстановки выражений  $u_y^{in}$  и  $u_y^{sc}$  по сравнению со случаем одинаковых трещин изменяется только третье слагаемое в (3.7)

$$ik_{21}\mu_1 P^-(2x_0) = 1/2 i\mu_1 k_{21}(1 - R^-)\pi \sum_{i=1}^N l_i^2$$

Для трещин разной полуширины  $l_i$ , принадлежащих интервалу  $[-x_0; x_0]$  можно ввести трещиноватость аналогично используемой для модели с одинаковыми по размеру трещинами

$$C_{l_i} = \sum_{i=1}^N l_i / x_0,$$

тогда среднее значение скачка смещений на берегах трещины в случае раз-

норазмерных полосовых трещин в антиплоском случае

$$\overline{\Delta u_{SH}} = \frac{\pi Kl^*}{2} \quad (3.10)$$

и в плоском

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \mathbf{u}_P}(x) &= \frac{\pi l^* H_1}{2} \begin{pmatrix} im_1 \\ m_1 \end{pmatrix} \\ \overline{\Delta \mathbf{u}_{SV}}(x) &= \frac{\pi l^* H_2}{2} \begin{pmatrix} m_3 \\ -im_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

выражается через оценку математического ожидания и оценку дисперсии для набора трещин

$$\begin{aligned} \hat{M}_i &= \sum_{i=1}^N l_i / N, \\ \hat{D}_{l_i} &= \left( \sum_{i=1}^N l_i^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N l_i \right)^2 \right) \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

В трехмерном случае рассматривается зона неидеального контакта разнородных материалов с произвольным распределением круговых трещин, имеющих одинаковый радиус  $a$ . Распределение предполагается инвариантным относительно перестановок, поэтому вновь можно применять технику, описанную в § 3.2. Для применения теоремы Бетти выбирается прямоугольная область  $\{|x| < x_0, |y| < y_0\}$ , поэтому при наличии в ней  $N$  дефектов трещиноватость в заданной области определяется как

$$C_a = \frac{N\pi a^2}{x_0 y_0},$$

а среднее значение скачка смещений  $\overline{\Delta \mathbf{u}_s}(x)$  в случае падения  $S$ -волны может определяться как численно [23, 121] так и асимптотически [69]. В случае падающей  $P$ -волны интегральное уравнение (2.17) с использованием асимптотики ядра при  $k_{12}a \ll 1$ , см. подробнее [69], преобразовывается в дискретную систему уравнений (2.31), которая решается при  $T = 0$ . Это

позволяет найти аналитическое решение для скачка перемещений на трещине через присоединенные полиномы Лежандра  $P_m^n$  согласно асимптотикам (2.32) и (2.33). Далее можно аналитически выразить значения среднего скачка перемещений  $\overline{\Delta \mathbf{u}_s}$ . Тогда скалярное произведение для  $P$ -волн принимает вид:

$$(\overline{\Delta \mathbf{u}_1}, \mathbf{p}_1) = -\frac{2\pi a}{3} \widehat{\beta}_{30}^{10} = f_1 \frac{16a\pi^2 a m_1 (m_1^2 - m_3^2)}{12\pi^2 m_1^2 - 45m_3^2}$$

а для  $SV$ -волн:

$$(\overline{\Delta \mathbf{u}_2}, \mathbf{p}_2) = \widehat{\beta}_{20}^{11} = f_2 \frac{-32am_2(m_1^2 - m_3^2)(9m_1(m_1^2 - m_3^2)\pi^2 + m_2(-35m_3^2 + 9m_1^2\pi^2))}{3(m_1^2 + m_1m_2 - m_3^2)(36m_1(m_1^2 - m_3^2)\pi^2 + m_2(-275m_3^2 + 36m_1^2\pi^2))}.$$

### §3.3. Соотношения для матрицы жесткости в граничных условиях пружинного типа для поврежденных интерфейсов

Схема получения оценок для элементов матрицы жесткости  $\mathbf{k}$ , связывающая жесткость с характеристиками поврежденного интерфейса, основана на сопоставлении двух моделей зоны неидеального контакта (при контакте изотропных материалов у матрицы жесткости ненулевыми остаются только диагональные элементы). Первая модель, предполагающая задание в поврежденной области граничных условий пружинного типа в виде (3.1), описана в § 3.1. Прохождение волн через интерфейс с распределенным набором микротрещин на границе раздела двух сред рассмотрено в § 3.2. Соответственно далее можно опираться на результаты § 3.1-3.2, где были получены коэффициенты прохождения плоских продольных и поперечных упругих волн через зону неидеального контакта между двумя упругими разнородными полупространствами для обеих моделей. Так, приравнивая коэффициенты прохождения  $\bar{T}_s$  и  $T_s^\kappa$  отдельно для  $P$  и  $SV$  волн, можно вывести итоговое соотношение для всех ненулевых компонент матрицы

жесткости  $\kappa$ , которое принимает следующий вид

$$\frac{c_{1s}k_{1s}c_{2s}k_{2s}}{c_{1s}k_{1s} + c_{2s}k_{2s}} \cdot \frac{1}{C(\overline{\Delta\mathbf{u}_s}, \mathbf{p}_s)}, \quad (3.12)$$

где соответствие элементу матрицы жесткости определяется типом падающего поля и постановки задачи.

### §3.3.1 Полосовые микродефекты

Для полосовых отслоений в антиплоской постановке определяется только одна компонента которую можно обозначить  $\kappa_{22} = \kappa_{SH}$ . В случае падения плоских волн под углом  $\theta$  полный коэффициент прохождения, который определяется из граничных условий пружинного типа на интерфейсе, имеет вид

$$T_{SH}^\kappa = \frac{2\kappa_{SH}\mu_1k_{21}\cos\theta}{i\mu_1k_{21}\cos\theta\mu_2k_{22}\cos\theta_1 + \kappa_{SH}(\mu_1k_{21}\cos\theta + \mu_2k_{22}\cos\theta_1)} \quad (3.13)$$

Подстановка средних значений функции раскрытия полосовой трещины (2.25) при рассеянии  $SH$ -волны в условие равенства коэффициентов прохождения позволяет найти коэффициенты жесткости пружины [78]:

$$\kappa_{SH} = \frac{4}{C\pi\beta l} \left( \frac{2J_1(k_{21}\sin\theta l)}{\pi l k_{21}\sin\theta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

Последнее выражение может быть упрощено в силу сделанного предположения о малости  $k_{21}l$  и с применением асимптотики для функций Бесселя  $J_n(\alpha) \approx \frac{2^{-n}\alpha^n}{n!}$  верной при малых  $\alpha$ , тогда

$$\kappa_{SH} = \frac{4}{C\pi\beta l}. \quad (3.14)$$

Выражение (3.14) для жесткости в граничных условиях пружинного типа совпадает со значением, полученным в [115] для нормального угла падения. Так как коэффициент  $\kappa_{SH}$  фактически не зависит от угла падения, то, следовательно, граничные условия пружинного типа могут быть применены для описания отслоений разных размеров в волноводах различного

типа. Необходимо также отметить, что для одинаковых материалов значение жесткости (3.14) близко к значению, полученному на низких частотах в [52] из энергетических соображений.

При плоской постановке задачи диагональные элементы  $\kappa_{11}$  и  $\kappa_{33}$  отличны от нуля и можно говорить о тангенциальной  $\kappa_{11} = \kappa_T$  и нормальной жесткости  $\kappa_{33} = \kappa_N$ . Подстановка средних значений скачков смещений для трещин одинаковых размеров (2.27) в выражение для жесткости (3.12) позволяет найти коэффициенты жесткости пружины

$$\kappa_{11} = \kappa_{33} = \frac{8}{\pi\beta_1 C_l l}, \quad \beta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)\mu_1} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{(\lambda_2 + \mu_2)\mu_2}, \quad (3.15)$$

которые для полосовых микродефектов оказываются одинаковыми, что подтверждается работами [113, 122].

Аналогично схеме, применённой к интерфейсу с одинаковыми трещинами, выводятся формулы связи жесткости и параметров повреждённого интерфейса с трещинами различной длины.

$$\kappa_{SH} = \frac{2(1 + d_2)}{\pi\beta C_{l_j} l^*}, \quad d_2 = \sqrt{1 + \pi K C_{l_j} l^*}. \quad (3.16)$$

Далее, подобно схеме, примененной к антиплоской проблеме, выполняется переход к решению задачи о множественных интерфейсных трещинах в плоской постановке. В результате получаются одинаковые константы для граничных условий пружинного типа вне зависимости от типа волн

$$\kappa_{11} = \kappa_{33} = \frac{4(1 + d_1)}{\pi\beta C_{l_j} l^*}, \quad d_1 = \sqrt{1 + i \frac{\pi\beta C_{l_j} l^*}{2}}. \quad (3.17)$$

Можно видеть, что в частном случае одинаковых дефектов формулы (3.16) и (3.17) приближённо равны с полученными для одинаковых трещин [113, 115, 122]. Данные формулы являются более общими и точными. Полученные соотношения могут служить для решения обратных задач о степени деградации интерфейсов в слоистых композитах, если известны законы распределения характерных усталостных дефектов.

### §3.3.2 Круговые микродефекты

Для того, чтобы получить пружинные жесткости в трехмерном случае, рассматриваются поочередно падающая под нормальным углом к интерфейсу  $P$ -волна, позволяющая определить нормальную компоненту  $\kappa_N = \kappa_{33}$ , и  $SV$ -волна для нахождения тангенциальных составляющих  $\kappa_{11}$  и  $\kappa_{22}$  равных  $\kappa_T$ . Вследствие симметрии задачи  $\kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa_T$ . Приравнивание коэффициентов прохождения дает следующие формулы диагональных элементов матрицы жесткости

$$\begin{aligned}\kappa_N = \kappa_{33} &= f_1 \left( \frac{1}{C(\overline{\Delta \mathbf{u}_1}, \mathbf{p}_1)} - \frac{1}{2} \right), \\ \kappa_T = \kappa_{11} &= f_2 \left( \frac{1}{C(\overline{\Delta \mathbf{u}_2}, \mathbf{p}_2)} - \frac{1}{2} \right) \\ f_s &= \frac{2ic_{1s}k_{1s}c_{2s}k_{2s}}{c_{1s}k_{1s} + c_{2s}k_{2s}}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Чтобы найти нормальную  $\kappa_{33} = \kappa_N$  и тангенциальные  $\kappa_{11} = \kappa_2 = \kappa_T$  компоненты матрицы жесткости необходимо определить значение  $\overline{\Delta \mathbf{u}_s}$  в соответствии с типом падающей волны  $s$ . При конкретных значениях свойств материалов и параметров повреждений ( $C$  и  $a$ ) можно определить матрицу  $\boldsymbol{\kappa}$ , используя численное решение  $\Delta \mathbf{w}_s$  интегрального уравнения (2.17), позволяющее найти  $\Delta \mathbf{u}_s$ . Используя аналитические асимптотические решения (2.32) и (2.33) для  $\Delta \mathbf{v}_s$ , можно получить следующее представление нормальной компоненты матрицы жесткости

$$\begin{aligned}\kappa_N &= \frac{\kappa_N^{\text{static}}}{aC} - \frac{f_1}{2}, \\ \kappa_N^{\text{static}} &= \frac{3}{16\pi} \cdot \frac{15m_3^2 - 4m_1^2\pi}{m_1(m_1^2 - m_3^2)}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Формулы для тангенциальных составляющих матрицы жесткости:

$$\kappa_T = \frac{\kappa_T^{\text{static}}}{aC} - \frac{f_2}{2},\tag{3.20}$$

$$\kappa_T^{\text{static}} = \frac{3(m_1^2 + m_1 m_2 - m_3^2)\pi(36m_1(m_1^2 - m_3^2)\pi^2 + m_2(-275m_3^2 + 36m_1^2\pi^2))}{32m_2(m_1^2 - m_3^2)(9m_1(m_1^2 - m_3^2)\pi^2 + m_2(-35m_3^2 + 9m_1^2\pi^2))}.$$

Если повреждение расположено между одинаковыми материалами, то упругие свойства материалов совпадают, следовательно  $m_3 = 0$ , а  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . В этом случае формулы нормальной (3.19) и тангенциальной (3.20) эффективной пружинной жесткости упрощаются:

$$\kappa_T^{\text{homogeneous}} = \frac{\mu(3\lambda + 4\mu)}{4(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{Ca} - \frac{f_2}{2}, \quad (3.21)$$

$$\kappa_N^{\text{homogeneous}} = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{Ca} - \frac{f_1}{2}. \quad (3.22)$$

### §3.3.3 Оценка полученных соотношений для описания поврежденных интерфейсов

Для проверки точности полученных соотношений как для компонент матрицы жесткости, так и для значений скачков перемещений на трещинах произвольных форм необходимо выполнить сравнение с известными результатами. Наиболее близкие результаты были получены в [104, 122] для статики. В [104] был рассмотрен периодический набор круговых трещин с гексагональной расстановкой. Можно выделить два основных отличия с настоящим исследованием: в [104] рассматривалась статическая задача, а для описания поврежденности вместо  $C$  использовались характерные размеры дефекта, т.е. радиус круговой трещины  $a$ , и расстояния между трещинами  $2b$ . Далее проводится сравнительный анализ жесткостей, полученных в [104] и соотношений (3.19) и (3.20). Для полосовых микродефектов отличия будут аналогичны.

Основываясь на методе последовательных приближений для статической задачи, описанном в [103], в работе [104] были найдены нормальная и



тангенциальная пружинные жесткости

$$\begin{aligned}\kappa_{T,\text{Lekesiz}} \cdot b &= \kappa_{T,\text{Lekesiz}}^0 \cdot I_{\text{Lekesiz}}(a/b), \\ \kappa_{N,\text{Lekesiz}} \cdot b &= \kappa_{N,\text{Lekesiz}}^0 \cdot I_{\text{Lekesiz}}(a/b).\end{aligned}\quad (3.23)$$

Здесь зависимость от отношения, описывающего повреждение, определяется функцией

$$I_{\text{Lekesiz}}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi^2 D_L}{8} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \ln \sec \left( \frac{\pi \sqrt{D_L}}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{7}{4}} \right) \right]^{-1},$$

построенной в [104], а  $\kappa_{\text{Lekesiz}}^{\text{static}}$

$$\begin{aligned}\kappa_{N,\text{Lekesiz}}^0 &= \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\beta_D(1 + \alpha_D)}{\pi\epsilon_D(1 + \epsilon_D^2)(1 - \beta_D^2)} \\ \kappa_{T,\text{Lekesiz}}^0 &= \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot \frac{3\pi}{32} \cdot (1 + \alpha_D) \left( \frac{1}{\gamma_D} + \frac{4\beta_D}{\pi\epsilon_D(1 + \epsilon_D^2)(1 - \beta_D^2)} \right)\end{aligned}\quad (3.24)$$

определяются через параметры Дундурса

$$\begin{aligned}\alpha_D &= \frac{\mu_2(h_1 + 1) - \mu_1(h_2 + 1)}{\mu_2(h_1 + 1) + \mu_1(h_2 + 1)}, & \beta_D &= \frac{\mu_2(h_1 - 1) - \mu_1(h_2 - 1)}{\mu_2(h_1 + 1) + \mu_1(h_2 + 1)}, \\ \gamma_D &= \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2(h_1 + 1) + \mu_1(h_2 + 1)}, & \epsilon_D &= \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{1 + \beta_D}{1 - \beta_D} \right)\end{aligned}$$

и константу  $D_L = 0.8673$ . Для одинаковых материалов жесткости значительно упрощаются:

$$\begin{aligned}\kappa_{T,\text{Lekesiz}}^{\text{homogeneous}} \cdot b &= \frac{\mu(3\lambda + 4\mu)}{4(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot I_{\text{Lekesiz}}\left(\frac{a}{b}\right), \\ \kappa_{N,\text{Lekesiz}}^{\text{homogeneous}} \cdot b &= \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot I_{\text{Lekesiz}}\left(\frac{a}{b}\right).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Для большего удобства сопоставление с (3.19) и (3.20) проводится в терминах  $a$  и  $b$ , а не  $C$  и  $a$ . Так как выражения (3.19) были выведены для периодического набора круговых трещин с гексагональной расстановкой с элементарной ячейкой со стороной  $2\sqrt{3}b/3$ , то трещиноватость пересчитывается по формуле

$$C = \frac{\pi a^2}{2\sqrt{3}b^2}.$$

Соответственно, (3.21) и (3.22) без учета слагаемого  $f_s$ , отвечающего за динамику, принимают вид

$$\kappa_T^{\text{homogeneous}} b = \frac{\mu(3\lambda + 4\mu)}{4(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-3},$$

$$\kappa_N^{\text{homogeneous}} b = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-3}.$$

Нетрудно видеть, что первые множители в (3.25), составленные из констант Ляме, совпадают с аналогичными множителями в (3.22) и (3.21). Второй множитель в формулах различен и зависит только от  $a/b$ , а значения жесткостей, полученные двумя указанными подходами, различаются, что иллюстрирует рис. 3.4, где приведены жесткости, вычисленные по формулам (3.25), и (3.22–3.21).

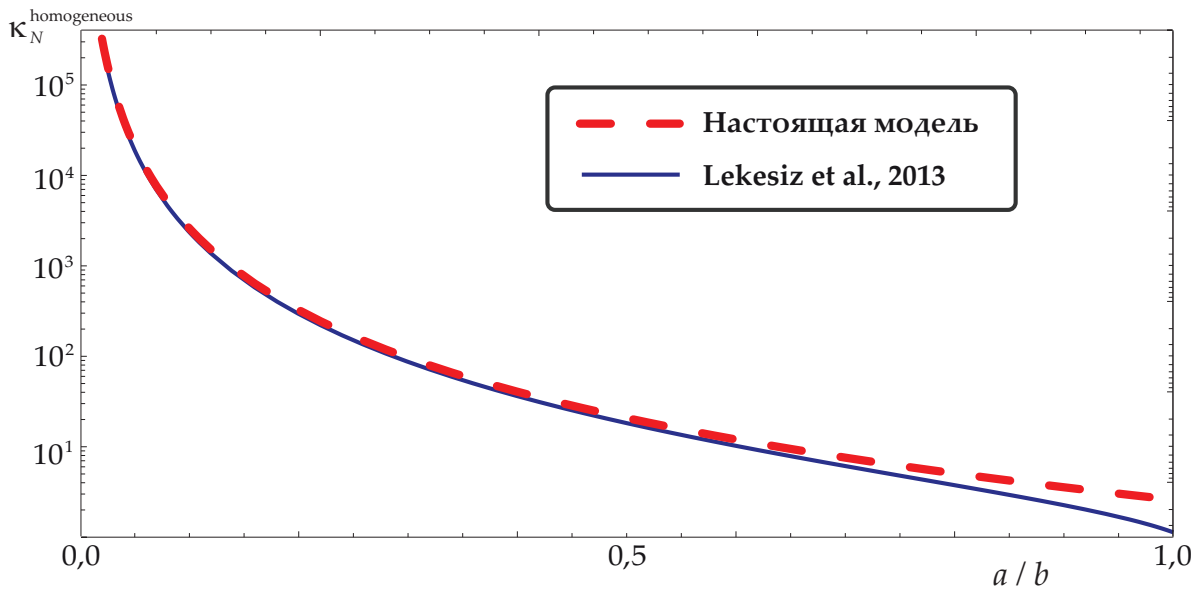


Рис. 3.4: Жесткости  $\kappa_T^{\text{homogeneous}}$ ,  $\kappa_N^{\text{homogeneous}}$ , полученные в настоящей работе, и значения  $\kappa_{T,\text{Lekesiz}}^{\text{homogeneous}}$ ,  $\kappa_{N,\text{Lekesiz}}^{\text{homogeneous}}$  из [104] для любых одинаковых материалов

Для более подробного рассмотрения различий между оценками достаточно рассмотреть зависимости отношения пружинных жесткостей от  $a/b$ , соответствующий график приведен на рис. 3.5. Это отношение для контакта одинаковых материалов не зависит от упругих модулей и в точности

соответствует отношению функций  $I_{\text{Lekesiz}}(a/b)$  и  $2\sqrt{3}(a/b)^{-3}/\pi$ . Можно видеть разницу между жесткостями, составляющую около 10% при  $a/b < 0,5$  и увеличивающуюся примерно до 230% при  $a/b = 1$ .

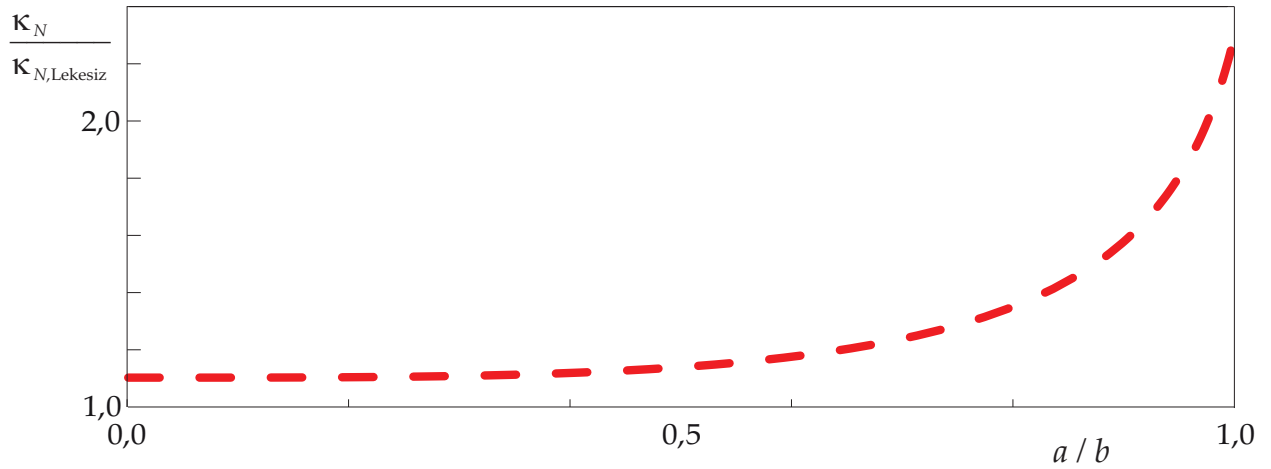


Рис. 3.5: Сравнение жесткости  $\kappa_N^{\text{homogeneous}}$ , полученной в настоящей работе, и значения  $\kappa_{N,\text{Lekesiz}}^{\text{homogeneous}}$  из [104]: справедливо для любых пар материалов с точностью до 0,002%

Для интерфейсного повреждения зависимость отношения жесткостей (3.25) от  $a/b$ , и (3.22–3.21) сохраняет свой характер и может интерпретироваться на основании рис. 3.5. Поэтому для оценки различия в полученных оценках достаточно вычислить значения  $\kappa_T^{\text{static}}/\kappa_{T,\text{Lekesiz}}^{\text{static}}$  и  $\kappa_N^{\text{static}}/\kappa_{N,\text{Lekesiz}}^{\text{static}}$ , которые для некоторых пар материалов приведены в Таблице 3.1. Нетрудно видеть, что для всех пар материалов, зависимость жесткости от упругих модулей для обеих моделей практически одинакова ( $|1 - \kappa_i^{\text{static}}/\kappa_{i,\text{Lekesiz}}^{\text{static}}| < 0,002$ ).

Таким образом, установлено отличие в статических членах в

$$\lim_{a/b \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{3}(a/b)^{-3}}{\pi I_{\text{Lekesiz}}(a/b)} = 1,10266$$

раз между полученной оценкой жесткости и результатами [104]. Такое расхождение объясняется тем, что сделаны различные предположения о распределении круговых микротрещин: в настоящей работе – стохастическое,

Материалы	$\kappa_T^{\text{static}} / \kappa_{T,\text{Lekesiz}}^0$	$\kappa_N^{\text{static}} / \kappa_{N,\text{Lekesiz}}^0$
алюминий / алюминий	1,0	1,0
стекло / свинец	1,00002	1,00003
стекло / эпоксид	1,00062	1,00102
алюминий / оксид алюминия	1,00084	1,00147
цирконий / оксид алюминия	1,00015	1,00026
сталь /эпоксид	1,00086	1,00143

Таблица 3.1: Упругие свойства и плотности материалов

а в работе [104] – периодический набор трещин с гексагональной расстановкой. Аналогичное различие между стохастическим и периодическим набором трещин в 10% было продемонстрировано в [58].

### §3.4. Распространение волн Лэмба в многослойном пакете с поврежденным интерфейсом

В заключение приводится пример, важный для возможного практического приложения полученных результатов и соотношений для обнаружения частично отслоившихся участков многослойных пластин с помощью волн Лэмба. Волнами Лэмба называют упругие возмущения, распространяющиеся в упругой пластине или слое [3]. Здесь рассматриваются волны Лэмба, распространяющиеся в волноводе, составленном из одинаковых слоев толщины  $h$ . Границы слоев перпендикулярны оси  $Oz$ , а на границе раздела двух слоев задаются граничные условия пружинного типа, указывающие на неидеальный контакт. Геометрия задачи приведена рис. 3.6.

Для целей настоящего исследования достаточно рассмотреть двухслойный волновод  $2h$ , составленный из двух разнородных упругих слоев толщиной  $h$  с плотностью  $\rho$  и константами Ламе  $\mu$ ,  $\lambda$ . Предполагается, что поврежденный интерфейс располагается между пластинами, состоящими

из одинаковых материалов, на глубине  $h$ . Поврежденная пластина моделируется граничными условиями следующим образом: верхняя и нижняя поверхности предполагаются свободными от напряжений

$$\boldsymbol{\tau}(0) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}(-2h) = \mathbf{0},$$

а в месте соединения слоев предполагаются непрерывными напряжения

$$\boldsymbol{\tau}(-h+0) = \boldsymbol{\tau}(-h-0),$$

а поврежденность описывается граничными условиями пружинного типа

$$\boldsymbol{\tau}(-h-0) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}(-h+0) - \mathbf{u}(-h-0)).$$

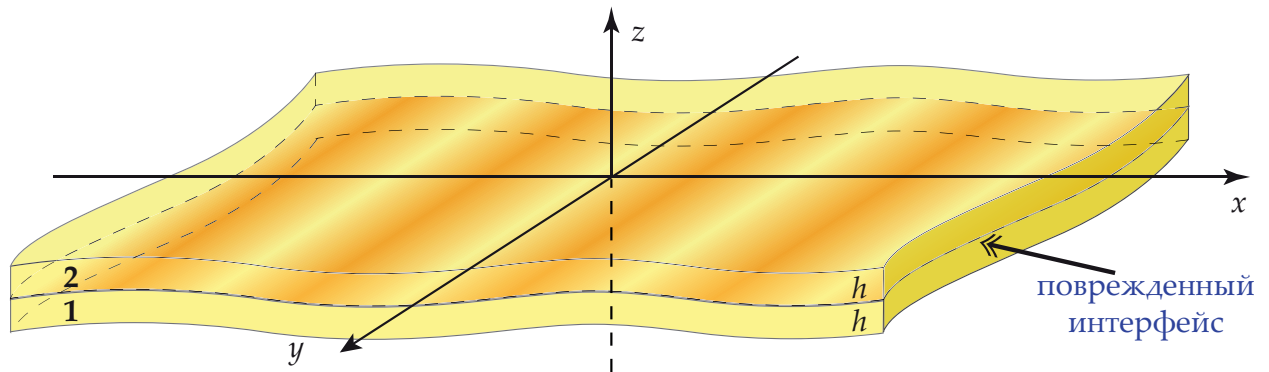


Рис. 3.6: Двухслойная поврежденная изотропная пластина

Волны Лэмба представляют собой один из типов нормальных волн в упругом слоистом волноводе, второй тип нормальных волн – поперечные ( $SH$ ) нормальные волны, в которых движение происходит перпендикулярно направлению распространения и параллельно границам пластинки. Слой относится к волноводам с дисперсией, где на каждой частоте колебаний  $\omega$  возбуждается конечное число незатухающих и счетное количество затухающих нормальных мод, с волновыми числами  $\zeta_k$  [3]. Соответственно, колебания упругого многослойного пакета могут быть представлены в виде суперпозиции нормальных волн Лэмба. Связь между  $\omega$  и  $\zeta_k$  слоев задается дисперсионным уравнением. Можно выделить две группы волн Лэмба,

которые распространяются в пластине независимо друг от друга. Первая группа описывает симметричные волны Лэмба, в которых движение происходит симметрично относительно оси  $z = 0$ , т. е. в верхней и нижней половинах пластины смещение по оси  $Ox$  имеет одинаковые знаки, а по оси  $Oz$  – противоположные. Вторая группа описывает антисимметричные волны Лэмба, в которых движение происходит антисимметрично относительно оси  $z = 0$ , т. е. в верхней и нижней половинах пластины смещение по оси  $Ox$  имеет противоположные знаки, а по оси  $Oz$  – одинаковые.

В неповрежденной пластине толщины  $H = 2h$  при частоте колебаний  $\omega$  может существовать определенное конечное число незатухающих симметричных и антисимметричных волн Лэмба, отличающихся одна от другой фазовыми и групповыми скоростями и распределением смещений и напряжений по всей толщине пластины. Число симметричных волн определяется количеством вещественных корней характеристического уравнения

$$(\zeta_k^2 + d^2)^2 \operatorname{ch} qH \operatorname{sh} dH - 4\zeta_k^2 qd \operatorname{sh} qH \operatorname{ch} dH = 0,$$

а число антисимметричных – уравнения

$$(\zeta_k^2 + d^2)^2 \operatorname{sh} qH \operatorname{ch} dH - 4\zeta_k^2 qd \operatorname{ch} qH \operatorname{sh} dH = 0,$$

где  $\zeta_k$  – волновые числа волн Лэмба,  $q = \sqrt{\zeta_k^2 - k_1^2}$ ,  $d = \sqrt{\zeta_k^2 - k_2^2}$ , а  $k_i$  – волновые числа для объемных волн. Дисперсионное уравнение для свободного слоя имеет несколько корней для одной и той же частоты, поэтому говорят о ветвях дисперсионных кривых, каждая из которых соответствует различным волнам.

Помимо конечного числа вещественных корней  $\zeta_k$  данные уравнения имеют бесконечное множество чисто мнимых корней, соответствующих синфазным экспоненциально затухающим или нарастающим смещениям в пластине по оси  $Ox$ . При  $\omega h \rightarrow 0$  уравнения имеют только по одному корню, называемыми нулевой симметричной нормальной волной  $s_0$  и нулевой

антисимметричной нормальной волной  $a_0$ . При увеличении  $\omega h$  появляются новые вещественные корни, соответствующие первой, второй и прочим симметричным и антисимметричным волнам Лэмба. Значения  $\omega h$ , при которых возникают новые корни называют критическими частотами (частотами отсечки).

Для характеристики волн в среде с дисперсией, используются понятия фазовой  $v_{ph}$  и групповой скоростей  $v_{gr}$  волн. Фазовая скорость волны описывает скорость перемещения гребня гармонической волны, тогда как групповая скорость описывает скорость перемещения волнового пакета

$$v_{ph} = \omega / \zeta_k, \quad v_{gr} = d\omega / d\zeta_k.$$

Связь между ними задается формулой Рэлея

$$v_{gr} = v_{ph} + \zeta_k \frac{dv_{ph}}{d\zeta_k}.$$

Дисперсия в однородном волноводе качественно зависит лишь от коэффициента Пуассона  $\nu$ . Однако вне зависимости от  $\nu$  в упругом свободном слое существуют нормальные моды двух типов: симметричные  $s_i$  и антисимметричные  $a_i$ . Моды  $s_0$  и  $a_0$  являются вещественными при любых значениях  $\omega$  и  $H$ .

Дисперсионное уравнение  $\Delta(\zeta_k, \omega) = 0$  соотносит волновые числа  $\zeta_k$  с частотой  $\omega$  и могут быть численно решены в Фурье-пространстве (более подробно см. [102]). Одинаковые тонкие сплошные линии изображаются на обоих рисунках для сравнения поврежденной и неповрежденной пластины. Они соответствуют пластине без повреждений, которая моделируется частным случаем  $\kappa_{ii} = \infty$ . Противоположная ситуация, соответствующая значению  $\kappa_{ii} = 0$ , описывает другой крайний случай – расслоившуюся пластину или две свободные от напряжений пластины. Наиболее интересны на практике ситуации, где значения пружинной жесткости достаточно боль-

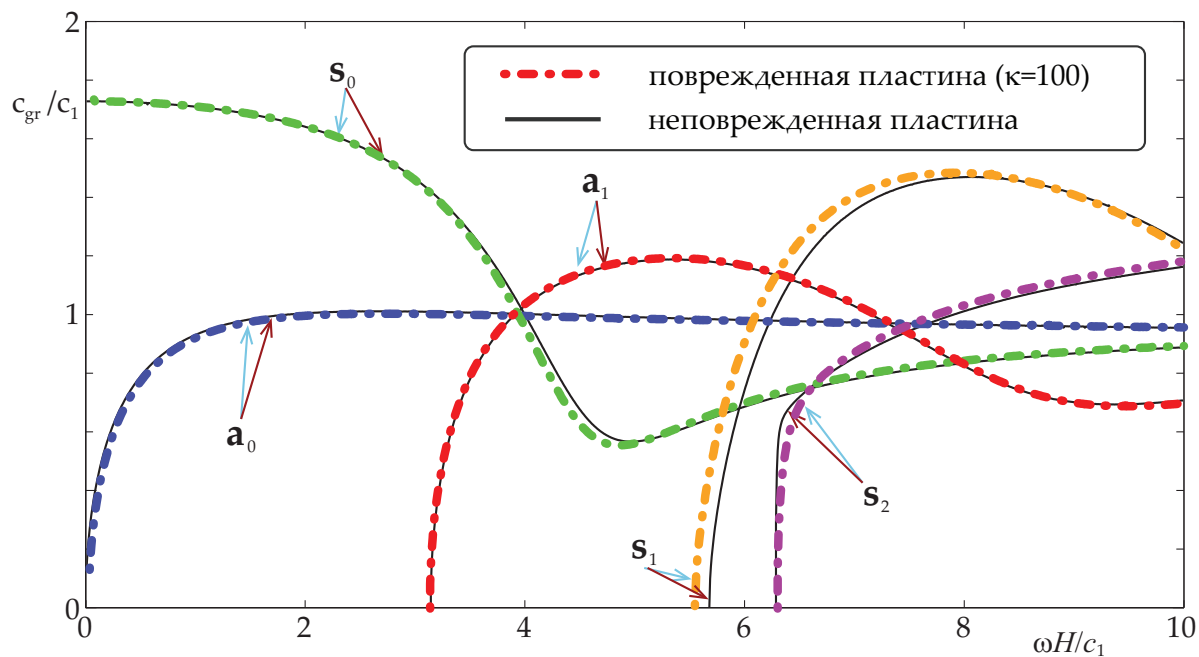


Рис. 3.7: Групповые скорости волн Лэмба в поврежденной при  $\kappa = 100$  (пунктирные линии) и неповрежденной алюминиевых пластинах (сплошные линии)

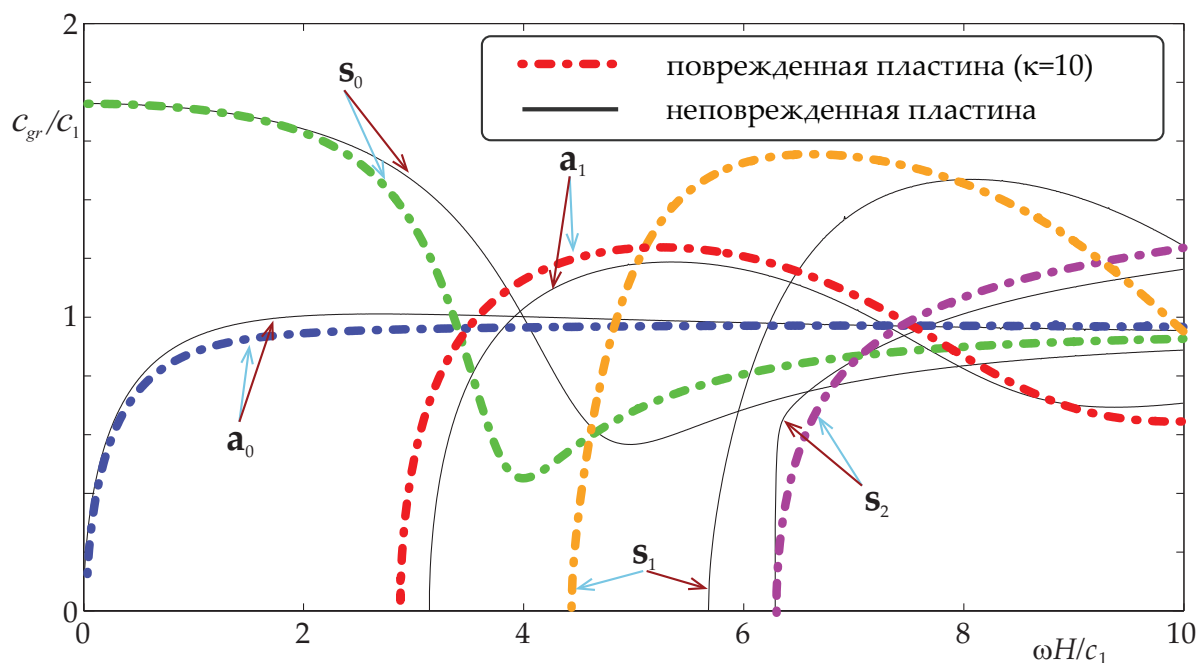


Рис. 3.8: Групповые скорости волн Лэмба в поврежденной при  $\kappa = 10$  (пунктирные линии) и неповрежденной алюминиевых пластинах (сплошные линии)

шие. В приведенных примерах рассматриваются следующие нормированные значения пружинных жесткостей:  $\kappa_{ii}/\mu_1 = 100$  (рис. 3.7) и  $\kappa_{ii}/\mu_1 = 10$



(рис. 3.8).

Групповые скорости волн Лэмба, бегущих в поврежденной пластине отличаются от групповых скоростей в неповрежденной в обоих случаях, но можно отметить, что большее расхождение наблюдается для больших повреждений и более высоких частот. Кроме того, критическая частота смещается в область более низких частот, причем этот сдвиг тем больше, чем больше степень повреждения пластины.

## Заключение

В рамках выполнения диссертационной работы получены следующие основные результаты:

1. На основе интегрального подхода разработана математическая и компьютерная модель, описывающая распространение упругих волн в слоистых волноводах, и их дифракцию на круговой трещине малого размера на границе раздела двух упругих сред.
2. Найдено асимптотическое решение задачи о дифракции плоских упругих волн на круговой трещине, расположенной на границе раздела двух полупространств, позволяющее описывать рассеяние ультразвуковых волн на микродефектах.
3. Описан метод моделирования неидеального контакта между разнородными материалами с помощью граничных условий пружинного типа.
4. Произведены оценки пружинной жесткости для описания неидеального контакта между двумя упругими разнородными материалами в случае полосовых микродефектов различных размеров.
5. Получены оценки пружинной жесткости для описания неидеального контакта между двумя упругими разнородными материалами в случае круговых микродефектов одинакового радиуса, результаты сопоставлены с известными результатами для статических задач.

## Литература

1. Giurgiutiu, V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors / V. Giurgiutiu. — Elsevier Academic Press, 2007. — P. 747.
2. Ватульян, А. О. Об определении конфигурации трещины в анизотропной упругой среде / А. О. Ватульян, И. В. Баранов // *Акустический журнал*. — 2005. — Т. 51, № 4. — С. 456–462.
3. Викторов, И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И. А. Викторов. — М.: Наука, 1966. — С. 320.
4. Eremin, A. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser doppler vibrometry / A. Eremin, E. Glushkov, N. Glushkova, R. Lammering // *Composite Structures*. — 2015. — Vol. 125. — P. 449–458.
5. Solodov, I. Thermosonic chladni figures for defect-selective imaging / I. Solodov, D. Derusova, M. Rahammer // *Ultrasonics*. — 2015. — Vol. 60. — P. 1–5.
6. *New Trends in Structural Health Monitoring* / Ed. by W. Ostachowicz, A. Guemes. — Verlag: Springer Vienna, 2013. — Vol. 542 of *CISM International Centre for Mechanical Sciences*. — P. 427.
7. Liu, G. R. A combined finite element/strip element method for analyzing elastic wave scattering by cracks and inclusions in laminates / G. R. Liu // *Computational Mechanics*. — 2002. — Vol. 28. — P. 76–82.

8. Liu, P. The singular edge-based smoothed finite element method for stationary dynamic crack problems in 2d elastic solids / P. Liu, T. Bui, C. Zhang et al. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2012. — Vol. 233-236, no. 0. — P. 68–80.
9. Lei, J. Dynamic interaction between a sub-interface crack and the interface in a bi-material—time domain bem analysis / J. Lei, Y.-S. Wang, D. Gross // Archive of Applied Mechanics. — 2003. — Vol. 73, no. 3-4. — P. 225–240.
10. Mykhas'kiv, V. 3-d dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces / V. Mykhas'kiv, V. Stankevych, I. Zhabadynskyi, C. Zhang // International Journal of Fracture. — 2009. — Vol. 159. — P. 137–149.
11. Mykhas'kiv, V. A frequency-domain biem combining dbies and tbies for 3-d crack-inclusion interaction analysis / V. Mykhas'kiv, I. Butrak, O. Khay et al. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2011. — Vol. 200, no. 47-48. — P. 3270 – 3279.
12. Visscher, W. Theory of scattering of elastic waves from flat cracks of arbitrary shape / W. Visscher // Wave Motion. — 1983. — Vol. 5, no. 1. — P. 15 – 32.
13. Visscher, W. Scattering of elastic waves from planar cracks in isotropic media / W. Visscher // Journal of the Acoustical Society of America. — 1981. — Vol. 69, no. 1. — P. 50–53.
14. Капцов, А. О рассеянии плоской трещиной нормально падающей продольной гармонической волны / А. Капцов, Е. Шифрин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 1986. — Т. 6. — С. 106–112.

15. Suzuki, Y. Simulations of P-SV wave scattering due to cracks by the 2-D finite difference method / Y. Suzuki, T. Shiina, J. Kawahara et al. // Earth Planets and Space. — 2013. — Vol. 65, no. 12. — P. 1425–1439.
16. Nishimura, N. A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems / N. Nishimura, S. Kobayashi // Computational Mechanics. — 1989. — Vol. 4. — P. 319–328.
17. Boström, A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation / A. Boström // Applied Mechanics Reviews. — 2003. — Vol. 56. — P. 383–405.
18. Robertson, I. A. Diffraction of a plane longitudinal wave by a penny-shaped crack / I. A. Robertson // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. — 1967. — Vol. 63. — P. 229–238.
19. Ohyoshi, T. Effect of orthotropy on singular stress produced near a crack tip by incident SH waves / T. Ohyoshi // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1973. — Vol. 53. — P. 409–411.
20. Mal, A. Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack / A. Mal // International Journal of Engineering Science. — 1970. — Vol. 8, no. 5. — P. 381–388.
21. Srivastava, K. N. Interaction of longitudinal wave with a penny-shaped crack at the interface of two bonded dissimilar elastic solids-ii / K. N. Srivastava, R. M. Palaiya, O. P. Gupta // International Journal of Fracture. — 1979. — Vol. 15. — P. 591–599.
22. Бабешко, В. А. Явление высокочастотного резонанса в полуограни-

- ченных телах с неоднородностями / В. А. Бабешко, Г. В. Ткачев // Прикладная математика и механика. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 857–866.
23. Krenk, S. Elastic wave scattering by a circular crack / S. Krenk, H. Schmidt // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1982. — Vol. 308, no. 1502. — P. 167–198.
24. Itou, S. Transient dynamic stresses around a rectangular crack under an impact shear load / S. Itou // Engineering Fracture Mechanics. — 1991. — Vol. 39, no. 3. — P. 487 – 492.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0013794491900615>.
25. Guan, L. Elastic wave scattering by rectangular cracks / L. Guan, A. Norris // International Journal of Solids and Structures. — 1992. — Vol. 29, no. 12. — P. 1549–1565.
26. Roy, A. Diffraction of elastic waves by an elliptic crack-ii / A. Roy // International Journal of Engineering Science. — 1987. — Vol. 25, no. 2. — P. 155 – 169.
27. Shifrin, E. Analytical-numerical solution of elliptical interface crack problem / E. Shifrin, B. Brank, G. Surace // International Journal of Fracture. — 1998. — Vol. 94, no. 3. — Pp. 201–215.
28. Saha, T. K. Scattering from an elliptic crack by an integral equation method: Normal loading / T. K. Saha, A. Roy // Journal of Applied Mechanics. — 2002. — Vol. 69, no. 6. — P. 775–784.
29. Глушков, Е. В. Математическая модель ультразвуковой дефектоскопии пространственных трещин / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова,

- A. В. Ехлаков // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66, № 1. — С. 147–156.
30. Kanaun, S. Fast solution of 3D-elasticity problem of a planar crack of arbitrary shape / S. Kanaun // International Journal of Fracture. — 2007. — Vol. 148, no. 4. — P. 435–442.
31. Kundu, T. Elastic wave scattering by a circular crack in a transversely isotropic solid / T. Kundu, A. Boström // Wave Motion. — 1992. — Vol. 15, no. 3. — P. 285–300.
32. Wünsche, M. Interface crack in anisotropic solids under impact loading / M. Wünsche, C. Zhang, J. Sladek et al. // Key Engineering Materials. — 2007. — Vol. 348-349. — P. 73–76.
33. Jansson, P. Wave scattering from a rectangular crack in an anisotropic cladding / P. Jansson // Journal of Mechanics of Materials and Structures. — 2011. — Vol. 6, no. 9-10. — P. 1267–1282.
34. Chen, W. Fundamental solution for a penny-shaped crack in a piezoelectric medium / W. Chen, T. Shioya // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1999. — Vol. 47. — P. 1459–1475.
35. Rojas-Diaz, R. Analysis of cracked magneto-electroelastic composites under time-harmonic loading / R. Rojas-Diaz, F. Garcia-Sánchez, A. Sáez // International Journal of Solids and Structures. — 2010. — Vol. 47, no. 1. — P. 71 – 80.
36. Sladek, J. Semi-permeable crack analysis in magneto-electroelastic solids / J. Sladek, V. Sladek, C. Zhang, M. Wünsche // Smart Materials and Structures. — 2012. — Vol. 21. — P. 025003.

37. Erdogan, F. Periodic cracking of functionally graded coatings / F. Erdogan, M. Ozturk // International Journal of Mechanical Sciences. — 1995. — Vol. 33, no. 15. — P. 2179–2195.
38. Айзикович, С. Аналитическое решение задачи о дискообразной трещине в функционально-градиентном пространстве / С. Айзикович, В. Александров, И. Трубчик, Л. Кренев // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 424, № 2. — С. 185–189.
39. Zozulya, V. V. Contact interaction of the faces of a rectangular crack under normally incident tension-compression waves / V. V. Zozulya, O. V. Menshykov // International Applied Mechanics. — 2002. — Vol. 38. — P. 302–307.
40. Молотков, Л. А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред / Л. А. Молотков. — СПб.: Наука, 2001. — С. 387.
41. Zhang, C. On wave propagation in elastic solids with cracks / C. Zhang, D. Gross. — Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998. — P. 272.
42. Golub, M. V. SH-wave propagation and scattering in periodically layered composites with a damaged layer / M. V. Golub, C. Zhang, Y.-S. Wang // Journal of Sound and Vibration. — 2012. — Vol. 331, no. 8. — P. 1829–1843.
43. Boström, A. On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks / A. Boström, G. R. Wickham // Journal of Nondestructive Evaluation. — 1991. — Vol. 10. — P. 139–149.
44. Baik, J. M. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static



- model / J. M. Baik, R. B. Thompson // Journal of Nondestructive Evaluation. — 1984. — Vol. 4. — P. 177–196.
45. Rokhlin, S. I. Ultrasonic wave interaction with a thin anisotropic layer between two anisotropic solids: I Exact and asymptotic-boundary-condition methods / S. I. Rokhlin, W. Huang // Journal of the Acoustical Society of America. — 1992. — Vol. 92(3). — P. 1729–1742.
46. Rice, J. R. The part-through surface crack in an elastic plate / J. R. Rice, N. Levy // Journal of Applied Mechanics. — 2003. — Vol. 39, no. 1. — P. 185–194.
47. Ueda, S. On the stiffness of spring model for closed crack / S. Ueda, S. Biwa, K. Watanabe et al. // International Journal of Engineering Science. — 2006. — Vol. 44. — P. 874–888.
48. Angel, Y. C. Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens / Y. C. Angel, J. D. Achenbach // Wave Motion. — 1985. — Vol. 8, no. 3. — P. 375–397.
49. Angel, Y. C. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks / Y. C. Angel, J. D. Achenbach // ASME Journal of Applied Mechanics. — 1985. — Vol. 52, no. 1. — P. 33–41.
50. Angel, Y. C. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks: Oblique incidence / Y. C. Angel, J. D. Achenbach // Wave Motion. — 1985. — Vol. 7, no. 4. — P. 375–397.
51. Achenbach, J. D. Propagation of horizontally polarized transverse waves in a solid with a periodic distribution of cracks / J. D. Achenbach, Z. L. Li // Wave Motion. — 1986. — Vol. 8. — P. 371–379.

52. Achenbach, J. D. Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens / J. D. Achenbach, Z. L. Li // Wave Motion. — 1986. — Vol. 8. — P. 225–234.
53. Angel, Y. C. Harmonic waves in an elastic solid containing a doubly periodic array of cracks / Y. C. Angel, J. D. Achenbach // Wave Motion. — 1987. — Vol. 9. — P. 377–385.
54. Mikata, Y. Reflection and transmission by an infinite array of randomly oriented cracks / Y. Mikata, J. D. Achenbach // Journal of the Acoustical Society of America. — 1987. — Vol. 83. — P. 38–45.
55. Achenbach, J. D. Reflection and transmission of plane waves by a layer of compact inhomogeneities / J. D. Achenbach, M. Kitahara, Y. Mikata, D. A. Sotiropoulos // Pure and Applied Geophysics. — 1988. — Vol. 128. — P. 101–118.
56. Budreck, D. Scattering from three-dimensional planar cracks by the boundary integral equation method / D. Budreck, J. D. Achenbach // Journal of Applied Mechanics. — 1988. — Vol. 55, no. 2. — P. 405–412.
57. Mikata, Y. Interaction of harmonic waves with a periodic array of inclined cracks / Y. Mikata, J. D. Achenbach // Wave Motion. — 1988. — Vol. 10. — P. 59–72.
58. Sotiropoulos, D. A. Ultrasonic reflection by a planar distribution of cracks / D. A. Sotiropoulos, J. D. Achenbach // Journal of Nondestructive Evaluation. — 1988. — Vol. 7. — P. 123–129.
59. Achenbach, J. D. Effects of crack geometry and material behavior on scattering by cracks: Tech. rep. / J. D. Achenbach: Center for Quality Engineering and Failure Prevention Northwestern University, 1989.

60. Mikata, Y. SH-waves in a medium containing a disordered periodic array of cracks / Y. Mikata // ASME Journal of Applied Mechanics. — 1995. — Vol. 62. — P. 312–319.
61. Rokhlin, S. I. Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids / S. I. Rokhlin, Y. J. Wang // Journal of the Acoustical Society of America. — 1991. — Vol. 89. — P. 503–515.
62. Leiderman, R. Scattering of ultrasonic waves by defective adhesion interfaces in submerged laminated plates / R. Leiderman, A. M. B. Barbone, P. E. Braga // Journal of the Acoustical Society of America. — 2005. — Vol. 118. — P. 2154–2166.
63. Margetan, F. J. Interfacial spring model for ultrasonic interactions with imperfect interfaces: Theory of oblique incidence and application to diffusion-bonded butt joints / F. J. Margetan, R. B. Thompson, T. A. Gray // Journal of Nondestructive Evaluation. — 1988. — Vol. 7. — P. 131–152.
64. Голуб, М. В. Обобщение пружинных граничных условий для полосовых микротрещин различного размера и для плоских трехмерных трещин / М. В. Голуб, О. В. Дорошенко // Труды акустического симпозиума «КОНСОНАНС-2013» / Киев: Институт гидромеханики НАН Украины. — 2013. — С. 89–94.
65. Голуб, М. В. Обобщение пружинных граничных условий на случай дефектов разных размеров для задач моделирования зон непрочности / М. В. Голуб, О. В. Дорошенко // Труды VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела / Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет. — Т. 1. — 2013. — С. 164–168.

66. Голуб, М. В. Моделирование зон непрочности и концентрации микродоменов на плоскопараллельных интерфейсах / М. В. Голуб, О. В. Дорошенко // Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» / Самара: Самарский государственный университет. — 2013. — С. 86–88.
67. Дорошенко, О. Вывод пружинных граничных условий для неидеального контакта разнородных материалов (трехмерный случай) / О. Дорошенко, М. Голуб // Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» / Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет. — Т. 1. — 2014. — С. 171–175.
68. Golub, M. Spring boundary conditions for imperfect contact simulation in multilayered elastic composites in three-dimensional case / M. Golub, O. Doroshenko // The e-Journal of Nondestructive Testing. — 2014. — Vol. 19, no. 12. — P. 16443, 7 pp.
69. Дорошенко, О. В. Асимптотическое решение задачи о рассеянии плоских упругих волн на круговой интерфейсной трещине / О. В. Дорошенко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2015. — Т. 2. — С. 30–38.
70. Голуб, М. В. Пружинные граничные условия для описания динамического поведения поврежденных планарных интерфейсов / М. В. Голуб, О. В. Дорошенко // Материалы XI Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. — Казань.: 2015.
71. Голуб, М. В. Моделирование прохождения упругих волн через зоны неидеального контакта с помощью граничных условий пружинного

- типа / М. В. Голуб, О. В. Дорошенко // Проблемы прочности и пластичности. — 2015. — Т. 77, № 2. — С. 113–120.
72. Golub, M. V. Effective spring boundary conditions for a damaged interface between dissimilar media in three-dimensional case / M. V. Golub, O. V. Doroshenko, A. Boström // International Journal of Solids and Structures. — 2015.
73. Achenbach, J. D. Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach. — North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1973. — P. 440.
74. Амензаде, Ю. А. Теория упругости / Ю. А. Амензаде. — Киев: Наукова Думка, 1976. — С. 272.
75. Гузь, А. Н. Дифракция упругих волн / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко. — Киев: Наукова Думка, 1978. — С. 307.
76. Гринченко, В. Г. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Г. Гринченко, В. В. Мелешко. — Киев: Наукова Думка, 1981. — С. 284.
77. Martin, P. A. Boundary integral equations for the scattering of elastic waves by elastic inclusions with thin interface layers / P. A. Martin // Journal of Nondestructive Evaluation. — 1992. — Vol. 11, no. 3/4. — Pp. 167–174.
78. Golub, M. V. Propagation of elastic waves in layered composites with microdefect concentration zones and their simulation with spring boundary conditions / M. V. Golub // Acoustical Physics. — 2010. — Vol. 56(6). — P. 848–855.
79. Князев, П. Н. Интегральные преобразования / П. Н. Князев. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — С. 200.

80. Диткин, В. А. Интегральные преобразования / В. А. Диткин, А. П. Прудников // Итоги науки и техники. Серия. Математический анализ. — 1967. — Т. 5. — С. 7–82. <http://mi.mathnet.ru/rus/intm/v4/p7>.
81. Коэн, Л. Время-частотные распределения: Обзор / Л. Коэн // ТИИЭР. — 1989. — Т. 77, № 10. — С. 72–120.
82. Араманович, И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / И. Араманович, Г. Лунц, А. Эльсгольц. — М.: Наука, 1968. — С. 416.
83. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. А. Александров, В. А. Бабешко. — М.: Наука, 1974. — С. 456.
84. Ворович, И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. — М.: Наука, 1979. — С. 320.
85. Бабешко, В. А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. — М.: Наука, 1989. — С. 344.
86. Ворович, И. И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И. И. Ворович, В. А. Бабешко, О. Пряхина. — М.: Научный мир, 1999. — С. 246.
87. Калинчук, В. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полуограниченных тел / В. Калинчук, Т. Белянкова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 240.
88. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 224.

89. Ватульян, А. О. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел / А. О. Ватульян, А. Соловьев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — С. 176.
90. Брычков, Ю. А. Факторизация интегральных преобразований типа свертки / Ю. А. Брычков, Х.-Ю. Глеске, О. И. Маричев // Итоги науки и техники. Серия. Математический анализ. — 1983. — Т. 21. — С. 3–41. <http://mi.mathnet.ru/rus/intm/v21/p3>.
91. Брычков, Ю. А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю. А. Брычков, А. П. Прудников // Итоги науки и техники. Серия. Математический анализ. — 1982. — Т. 20. — С. 78–115. <http://mi.mathnet.ru/rus/intm/v20/p78>.
92. Глушков, Е. В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. — Краснодар: Кубанский государственный университет, 1990. — С. 72.
93. Poularikas, A. D. The Transforms and Applications Handbook / A. D. Poularikas; Ed. by A. D. Poularikas. — 2nd edition. — CRC Press LLC, 2000. — P. 1336.
94. Исакович, М. Общая акустика / М. Исакович. — М.: Наука, 1973. — С. 496.
95. Голямин, И. Ультразвук. Маленькая энциклопедия / И. Голямин. — М.: Советская энциклопедия, 1979. — С. 400.
96. Бреховских, Л. М. Акустика слоистых сред / Л. М. Бреховских, О. А. Годин. — М.: Наука, 1989. — С. 416.
97. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. — М.: Наука, 1973. — С. 344.

98. Мэзон, У. Физическая акустика: Методы и приборы ультразвуковых исследований / У. Мэзон. — М: Мир, 1966. — Т. Т. 1. — С. 592.
99. Бабешко, В. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства / В. Бабешко, Е. Глушков, Н. Глушкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1987. — Т. 27, № 1. — С. 93–99.
100. Глушкова, Н. В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости / Н. В. Глушкова. диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — Краснодар, КубГУ, 2000. — С. 220.
101. Ехлаков, А. В. Рассеяние упругих волн на интерфейсной трещине произвольной в плане формы / А. В. Ехлаков. диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Краснодар, КубГУ, 2001. — С. 125.
102. Glushkov, E. V. On the efficient implementation of the integral equation method in elastodynamics / E. V. Glushkov, N. V. Glushkova // Journal of Computational Acoustics. — 2001. — Vol. 9(3). — P. 889–898.
103. Kachanov, M. Elastic solids with many cracks and related problems / M. Kachanov // Advances of Applied Mechanics. — 1994. — Vol. 30. — P. 259–445.
104. Lekesiz, H. Effective spring stiffness for a periodic array of interacting coplanar penny-shaped cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials / H. Lekesiz, N. Katsube, S. Rokhlin, R. R. Seghi // International Journal of Solids and Structures. — 2013. — Vol. 50, no. 18. — P. 2817 – 2828.



105. Lekesiz, H. Effective spring stiffness for non-interacting penny-shaped cracks at an interface between two dissimilar, isotropic, linearly elastic materials / H. Lekesiz, N. Katsube, S. I. Rokhlin, R. R. Seghi // *Mathematics and Mechanics of Solids*. — 2011. — Vol. 16, no. 7. — P. 778–790.
106. Zhang, C. Interaction of elastic waves with a periodic array of collinear inplane cracks / C. Zhang, X. Chen, Z. Li // *Acta Mechanica Sinica*. — 1992. — Vol. 8. — P. 328–335.
107. Itou, S. Dynamic stress concentration around a rectangular crack in an infinite elastic medium / S. Itou // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. — 1980. — Vol. 60, no. 8. — P. 317–322.
108. van der Berg, P. Transition matrix in acoustic scattering by a strip / P. van der Berg // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 1981. — Vol. 70. — P. 615–619.
109. Глушков, Е. В. О блокировании рэлеевской волны приповерхностной трещиной / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, Е. М. Шапарь // *Доклады академии наук*. — 2004. — Т. 398, № 6. — С. 764–770.
110. Glushkov, E. V. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack / E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, M. V. Golub, A. Boström // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 2006. — Vol. 119. — P. 3589–3598.
111. Глушков, Е. В. Блокирование и локализация энергии в упругих слоистых волноводах с дефектами / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, М. В. Голуб // *Акустический журнал*. — 2006. — Т. 52, № 3. — С. 314–325.

112. Belytschko, T. Meshless methods: An overview and recent developments / T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ et al. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1996. — Vol. 139, no. 1-4. — P. 3–47.
113. Golub, M. V. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves / M. V. Golub, A. Boström // Wave Motion. — 2011. — Vol. 48(2). — P. 105–115.
114. Айзикович, С. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства / С. Айзикович, А. Васильев // Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 129–137.
115. Boström, A. Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions / A. Boström, M. V. Golub // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 62. — P. 39–52.
116. Ватсон, Г. Теория бесселевых функций / Г. Ватсон. — М.: Иностранная литература, 1949. — С. 799.
117. Kundu, T. Elastic wave scattering by a circular crack in a transversely isotropic solid / T. Kundu, A. Boström // Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME. — 1991. — Vol. 58. — P. 695–702.
118. Achenbach, J. D. Reflection and transmission of ultrasound by a region of damaged material / J. D. Achenbach, C. Zhang // Journal of Nondestructive Evaluation. — 1990. — Vol. 9. — P. 22–32.
119. Rokhlin, S. I. Equivalent boundary conditions for thin orthotropic

- layer between two solids: Reflection, refraction, and interface waves / S. I. Rokhlin, Y. J. Wang // Journal of the Acoustical Society of America. — 1992. — Vol. 91, no. 4. — P. 1875–1887.
120. Martin, P. A. Multiple scattering. Interaction of time-harmonic waves with N obstacles / P. A. Martin. — Cambridge: University Press, 2007. — P. 450.
121. Глушков, Е. В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60, № 2. — С. 282–289.
122. Lekesiz, H. Effective spring stiffness for a planar periodic array of collinear cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials / H. Lekesiz, N. Katsube, S. I. Rokhlin, R. R. Seghi // Mechanics of Materials. — 2011. — Vol. 43, no. 2. — P. 87–98.