

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»

На правах рукописи



Шпак Алиса Николаевна

**ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ
ПЬЕЗОАКТУАТОРОВ С УПРУГИМ ВОЛНОВОДОМ
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,

Голуб М.В.

Краснодар

2016

Оглавление

Введение	4
1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	18
§1.1. Уравнения движения	18
§1.2. Начальные и граничные условия	21
§1.3. Тензоры констант пьезоматериала	24
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПЬЕЗОАКТУАТОРА	29
§2.1. Постановка задачи	30
§2.2. Метод конечных элементов высокого порядка точности	32
§2.3. Интерполяционные многочлены на основе полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева	37
§2.4. Метод конечных элементов для моделирования полосовых пьезоактуаторов	42
§2.5. Оценка эффективности методов	54
§2.6. Резонансные явления	61
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЬЕЗОАКТУАТОРА С УПРУГИМ СЛОИСТЫМ ВОЛНОВОДОМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА	66
§3.1. Постановка задачи	66

§3.2. Построение матрицы Грина упругого слоя. Интегральный подход	69
§3.3. Упрощенные модели	72
§3.4. Гибридная математическая модель на основе интегрального подхода и метода конечных элементов	75
§3.5. Оценка эффективности методов	80
§3.6. Энергия упругих волн, возбуждаемых полосовыми пьезоактуаторами, и резонансные явления	92
4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АКТУАТОРОВ С УПРУГИМ ВОЛНОВОДОМ	98
§4.1. Схема проведения эксперимента	98
§4.2. Идеальный контакт актуатора с подложкой	104
§4.3. Частичное отслоение актуатора от подложки	108
§4.4. Вейвлет-анализ регистрируемых ультразвуковых сигналов, возбуждаемых отклеившимся пьезоактуатором	111
§4.4.1 Прямоугольный протяженный пьезоактуатор	112
§4.4.2 Круговой неосесимметричный пьезоактуатор	114
Заключение	120

ВВЕДЕНИЕ

Сложность внутренней структуры компонентов и объектов, используемых в промышленности и технике, растёт с каждым днём, и технологии проверки целостности приобретают всю большую важность, поскольку они позволяют своевременно обнаружить дефекты и предотвратить выход из строя всей системы. Одной из заметных тенденций при проектировании современных инженерных конструкций является интеграция в них систем сенсоров и актуаторов различных типов, позволяющих при минимальном влиянии человеческого фактора обнаруживать наличие различного рода повреждений в объекте в процессе его эксплуатации [1]. Данная область исследований, тесно связанная с неразрушающим контролем, получила название мониторинга состояния конструкций (МСК) или Structural Health Monitoring (SHM) [2].

Значительное количество методов МСК основаны на использовании бегущих волн [3–6], которые способны распространяться на значительные расстояния без сильного затухания и рассеиваться на неоднородностях различного типа [7]. Последнее свойство позволяет использовать бегущие волны для обнаружения дефектов и, после соответствующей обработки, определять положение повреждения в исследуемой структуре [8–10]. Распространение упругих волн в протяженных структурах хорошо изучено, и в настоящее время есть большое количество публикаций, посвященных изучению этого вопроса для изотропных [11–15] и анизотропных [16–18] материалов.

Для возбуждения и последующего измерения упругих колебаний используется набор встроенных [19, 20] или приклеенных к поверхности [13, 21] пьезоэлектрических преобразователей, возбуждающих бегущие волны в структуре. Выход из строя нескольких преобразователей может привести

к серьезным сбоям в работе всей системы мониторинга. Нередки ситуации частичных отслоений или сколов в области контакта пьезоэлемента с протяжённой структурой, причем преобразователь, как правило, сохраняет способность генерировать и регистрировать сигналы, но такие измерения могут давать недостоверные результаты. Таким образом, задача мониторинга распространяется не только на исследуемую структуру, но также на сами актуаторы и датчики [22]. Необходимость мониторинга работоспособности сенсоров обосновывалась авторами в работе [23]. В работе [24] было показано, что различные повреждения сенсоров влияют на их электрическую проводимость, а в работе [25] было проведено исследование влияния разрушения клеевого слоя на возбуждаемые актуатором волновые поля.

Экспериментальные исследования [26] показывают, что частично отслоившийся и идеально приклеенный пьезоактуаторы могут генерировать в протяженной структуре сигналы, очень похожие по виду и амплитуде. Кроме того, при частичном отслоении актуатора от волновода могут возникать различные эффекты, связанные, к примеру, с изменением резонансных свойств системы или со стоячими волнами, когда сигнал локализован в окрестности актуатора, как в случае с трещиной [27]. Таким образом, изучение динамического взаимодействия пьезоактуаторов с упругим волноводом при различных условиях контакта представляется актуальной задачей, которая требует математического и компьютерного моделирования.

Изучению процесса возбуждения пьезоактуатором бегущих волн в настоящее время посвящается много исследований [20, 21, 28, 29]. Для решения этой задачи в случае изотропного материала подложки разработано несколько эффективных подходов. Например, в работах [14, 30] для моделирования воздействия пьезоактуатора строятся упрощенные модели, в которых действие актуатора заменяется сосредоточенными силами, действующими по касательной к области контакта актуатора с волноводом.

Данный подход оказывается достаточно эффективным в низкочастотном диапазоне и при использовании тонких пьезоактуаторов [31–33]. В низкочастотном диапазоне может быть также использована модель «сдвиговой задержки» (shear-lag solution approach) [21], в которой учитывается динамика пьезоэлемента и влияние клеевой прослойки между актуатором и подложкой в предположении линейного распределения деформаций фундаментальных симметричной и антисимметричной волн Лэмба по толщине и учета только сдвиговых колебаний клея. Данная модель обобщается на случай высокочастотных колебаний и высших нормальных мод [34].

Для обнаружения дефектов, размеры которых сопоставимы с толщиной исследуемой протяженной структуры, необходимо уменьшать длину волны, что достигается увеличением частоты возбуждаемых колебаний. В то же время на более высоких частотах волновые поля, генерируемые актуатором в волноводе, принимают все более сложный вид [35]. Кроме того, современные пьезоактуаторы отличаются сложной геометрией электродов (загнутые электроды, частичное электродирование) [32], что обусловлено особенностями их использования. Эти факторы ограничивают возможность применения упрощенных моделей и, следовательно, возникает необходимость разработки эффективной математической модели, основанной на решении связанных задачи и учитывающих весь механизм взаимодействия пьезоактуаторов с протяженной структурой.

Для эффективного математического моделирования динамического поведения упругих и пьезоэлектрических тел необходимы тензоры константы материалов, определение которых сопряжено с некоторыми трудностями, особенно в случае анизотропных композитов. Задаче восстановления свойств упругих [33, 36–38] и пьезоупругих [39–43] композитных материалов к настоящему времени посвящено множество работ, тем не менее, при постоянном появлении новых композитов необходимо развитие более эф-

фективных методов определения упругих свойств материалов.

Для моделирования взаимодействия пьезоактуатора с упругим волноводом необходимо решение соответствующих связанных контактных задач динамической теории упругости, которые сводятся к интегральным уравнениям относительно неизвестных контактных напряжений. Имеется ряд публикаций, где исследовано взаимодействие тонкого пьезоактуатора и подложки в виде однородного упругого полупространства и многослойного пакета [44–47]. В работах [46, 47] для моделирования влияния пьезоактуатора использовалась пленочная модель, а возбуждаемые им волновые поля описывались на основе интегрального подхода [12, 48].

Для решения нестационарной связанной задачи как в плоской, так и в трехмерной постановках возможно использование метода конечных элементов (МКЭ) [49–51], метода граничных элементов [52, 53] или модификации метода конечных разностей LISA (Local-Interaction Simulation Approach) [54]. МКЭ достаточно часто применяется для решения различных статических [55, 56] и динамических [20, 57] задач теории пьезоупругости. Среди последних можно выделить задачи определения эффективных характеристик пористой пьезокерамики [58], моделирование пьезоэлектрического генератора [55, 59], моделирование и анализ возбуждения ультразвуковых волн пьезоэлектрическим излучателем [60, 61].

Традиционный МКЭ является эффективным методом, но для соответствия диспергирующим свойствам, учет которых необходим в задачах МСК, требует большого количества элементов (в некоторых случаях до сотен элементов на длину волны) [56]. В связи с этим получил распространение метод спектральных конечных элементов или конечных элементов высокого порядка точности [18, 62], который предполагает использование полиномов высоких степеней в качестве базисных функций и имеет лучшую сходимость по пространству в сравнении с МКЭ-методами для

p -адаптивных сеток. Этот метод применяется для моделирования бегущих волн в упругих волноводах [20, 63, 64], динамики пьезоэлектрических тел [65], в задачах геофизики [62], а также решения связанных задач [66], в отечественных публикациях эта разновидность МКЭ используется значительно реже [67], а для моделирования динамики пьезоэлектрических тел до настоящего времени практически не применялась, см. обзор в монографии [56].

Важно также отметить, что для расчета колебаний в неограниченных по горизонтальной координате волноводах в последние годы активно развиваются гибридные подходы, сочетающие полуаналитические и численные методы [68, 69]. Так, в цитируемых работах сначала решалась контактная задача для ограниченного размера волновода, и рассчитывались значения контактных напряжений, которые впоследствии использовались для определения амплитуд бегущих волн, возбуждаемых пьезоактуатором.

Таким образом, даже в задаче о взаимодействии актуатора сложной формы с упругим волноводом остается достаточно много открытых вопросов. Проблема моделирования возбуждения упругих колебаний отклеенными пьезоактуаторами исследована в меньшей степени и преимущественно экспериментально. Тем не менее, опубликовано несколько работ, в которых проводилось исследование влияния отслоившегося пьезоактуатора на генерируемые им волновые поля в композитном материале на основе метода конечных элементов [70, 71].

Актуальность диссертационного исследования определяется необходимостью построения и развития механико-математических моделей для описания динамического взаимодействия пьезоактуатора с упругим волноводом при различных условиях контакта. Создание таких моделей необходимо для развития методов идентификации поврежденных пьезоэлектрических сенсоров, используемых в системах мониторинга элементов кон-

струкций и неразрушающего контроля.

Целью диссертационной работы является математическое моделирование, экспериментальное исследование и анализ волновых процессов в упругом волноводе при возбуждении волн Лэмба поверхностными пьезоэлектрическими актуаторами в случае различной степени контакта с упругой слоистой подложкой.

В **задачи** диссертационного исследования входит следующее:

- 1) формулировка и решение задачи о колебаниях пьезоэлектрического тела методом конечных элементов высокого порядка точности с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева;
- 2) разработка математической и компьютерной модели на основе метода конечных элементов высокого порядка точности и интегрального подхода для описания динамического взаимодействия пьезоактуатора с упругим волноводом при разной степени контакта;
- 3) разработка схемы эксперимента с подходящими для целей исследования пьезоэлектрическими сенсорами, подготовка экспериментальных образцов и проведение эксперимента;
- 4) экспериментальная верификация разработанных моделей;
- 5) анализ волновых явлений на основе экспериментальных данных и результатов, рассчитанных на основе построенной модели.

Методы исследования. Для описания волновых полей в упругом волноводе используется интегральный подход, основанный на применении интегральных преобразований; для описания динамики пьезоэлектрического актуатора – метод конечных элементов высокого порядка точности.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых краевых задач,

применением строгих математических методов, а также экспериментальной верификацией результатов и сравнением с данными, полученными иными методами.

Научную новизну работы составляют следующие результаты:

- 1) модификация метода конечных элементов высокого порядка точности для описания динамического поведения пьезоэлектрических тел с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева;
- 2) результаты анализа динамического поведения пьезоактуатора и соответствующих резонансных эффектов в случае задания различных граничных условий;
- 3) результаты экспериментальных исследований волновых явлений, сопровождающих возбуждение упругих волн прямоугольными и круговыми пьезоэлектрическими актуаторами с разной степенью контакта с упругой подложкой;
- 4) гибридный подход на основе метода конечных элементов высокого порядка точности и интегрального подхода для решения связанной задачи о динамическом взаимодействии пьезоактуатора с упругим волноводом при различной степени контакта и экспериментальная верификация модели;
- 5) результаты анализа динамического взаимодействия пьезоэлектрических актуаторов с упругим волноводом при различных условиях контакта.

Теоретическая ценность и практическая значимость полученных результатов определяются возможностью их применения в неразрушающем ультразвуковом контроле, а также для постоянного мониторинга элементов конструкций.

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-33011 «Теоретико-экспериментальное решение обратных задач по восстановлению упругих свойств слоистых композитов и идентификации в них неоднородностей с применением упругих волн Лэмба», 14-08-00370 «Волновой мониторинг состояния композитных материалов и тонкостенных конструкций с использованием активных пьезосенсоров», 13-01-96516 «Возбуждение пьезоактивными элементами упругих волн в изотропных и анизотропных композитных волноводах и их дифракция на локальных неоднородностях»), Министерства образования и науки Российской Федерации (1.189.2014К «Математическое и компьютерное моделирование волновых процессов в приложении к проблемам развития инфокоммуникационных технологий и волнового мониторинга композитных материалов», 11.9216.2014 «Анализ волн Лэмба, возбуждаемых отклеенными круглыми пьезоэлектрическими сенсорами»), Германской службы академических обменов (A1373948 «Analysis of Lamb wave excitation by partially debonded circular piezoelectric wafer active sensors»), а также в рамках выполнения ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (14.740.11.0578 «Моделирование динамического поведения композитных материалов с повреждениями, неоднородностями и зонами неидеального контакта: приложения в неразрушающем контроле»).

На защиту выносятся

- 1) математическая модель, описывающая динамическое поведение пьезоэлектрических тел, с помощью модификации метода конечных элементов высокого порядка точности с использованием различных интерполяционных полиномов;
- 2) математическая модель на основе метода конечных элементов и ин-

тегрального подхода для решения связанной задачи о динамическом взаимодействии пьезоактуатора с упругим волноводом при различной степени контакта и экспериментальная верификация модели;

- 3) результаты экспериментальных исследований волновых явлений, сопровождающих возбуждение упругих волн прямоугольными и круговыми пьезоэлектрическими актуаторами с разной степенью контакта с упругой подложкой;
- 4) результаты исследования динамического взаимодействия пьезоэлектрических актуаторов с упругим волноводом при различных условиях контакта, включающее резонансные эффекты и вейвлет-анализ.

Диссертационная работа общим объемом 136 страниц имеет следующую структуру: введение, четыре главы основной части, заключение и список литературы, включающий 106 источников. Работа содержит 71 рисунок и 2 таблицы.

В **первой главе** изложены теоретические основы динамической теории пьезоупругости, необходимые при дальнейшем изложении материала. В *разделе 1.1* приводятся формулировки уравнений движения линейной теории пьезоупругости, рассматривается вариационная постановка, используемая для реализации метода конечных элементов. *Раздел 1.2* содержит описание возможных начальных механических и электрических граничных условий для корректной постановки краевой задачи динамической теории пьезоупругости. *Раздел 1.3* посвящен вопросам записи тензоров констант пьезоматериала, здесь также представлены формулы для перехода к матрицам констант, используемых при решении задачи в плоской постановке, в зависимости от плоского деформированного или плоского напряженного состояний пьезоупругого тела.

Во **второй главе** рассматриваются задачи динамического поведения

пьезоактуатора при задании различных граничных условий; описываются принципы применения метода конечных элементов высокого порядка точности и обсуждается численная сходимость представленного метода. В *разделе 2.1* приводятся плоские постановки некоторых задач о динамическом поведении полосового пьезоактуатора. В *разделе 2.2* приводится общая схема применения метода конечных элементов высокого порядка точности, а в *разделе 2.3* излагаются основные свойства интерполяционных полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева, используемых далее в качестве аппроксимирующих функций. *Раздел 2.4* посвящен описанию метода конечных элементов высокого порядка точности применительно к моделированию динамического поведения полосового пьезоактуатора. В этом разделе приводится процедура дискретизации и формирования системы линейных алгебраических уравнений для решения поставленной задачи. В *разделе 2.5* обсуждается численная сходимость разработанного метода, приводятся графики перемещений, напряжений и электрического потенциала, рассчитанные на основе метода конечных элементов высокого порядка точности с использованием интерполяционных полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева. В этом разделе также приводится сравнение полученных результатов с аналогичными данными, рассчитанными в системе COMSOL. Анализ резонансных колебаний пьезоактуатора проводится в *разделе 2.6*, где представлены волновые поля пьезоактуатора на резонансных частотах, а также графики зависимости резонансных частот от размеров сенсора.

Третья глава посвящена моделированию взаимодействия пьезоактуатора с упругим слоем при различных условиях контакта. В *разделе 3.1* дается постановка связанной задачи, задаются граничные условия в случае идеального и неидеального контактов, а также при частичном отслоении пьезоактуатора от волновода. В *разделе 3.2* излагается общая схема применения интегрального подхода для моделирования упругих колеба-

ний, возбуждаемых поверхностной нагрузкой в упругом волноводе. Строятся представления для Фурье-символа матрицы Грина свободного слоя в плоском случае. *Раздел 3.3* посвящен упрощенным моделям сдвиговой задержки и точечных сил, которые могут быть использованы для описания волновых полей, генерируемых пьезоэлектрическим актуатором, на невысоких частотах и в случае тонкого актуатора. В *разделе 3.4* приводится описание гибридного подхода, заключающегося в использовании метода конечных элементов высокого порядка точности для моделирования динамического поведения пьезоактуатора и интегрального подхода для описания возбуждаемых актуатором волновых полей в слое. Решается связанная задача об определении контактных напряжений, приводится схема формирования системы линейных алгебраических уравнений при использовании интерполяционных полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева. *Раздел 3.5* посвящен численному анализу сходимости перемещений и напряжений при различных условиях контакта. Производится сопоставление расчетов с применением различных интерполяционных полиномов с результатами, полученными в системе COMSOL и на основе упрощенной модели точечных сил. В *разделе 3.6* рассматривается влияние контакта между актуатором и подложкой на энергию, поступающую при действии полосовых пьезоактуаторов. Изучаются резонансные явления и влияние на резонансные частоты размеров актуатора и условий контакта.

Четвертая глава посвящена экспериментальному исследованию волновых полей, возбуждаемых идеально приклеенным и частично отклеенным пьезоактуатором. В *разделе 4.1* излагается схема проведения экспериментов и описываются экспериментальные образцы. Приводятся зависимости экспериментально измеренных скоростей перемещений поверхности алюминиевой пластины при возбуждении в ней актуатором бегущих волн Лэмба. Сопоставление результатов моделирования с данными, полу-

ченными в ходе эксперимента при идеальном контакте между актуатором и пластиной, производится в *разделе 4.2*. Для верификации построенной математической модели, учитывающей отслоение пьезоактуатора от волновода, в *разделе 4.3* строятся графики сравнения моделируемых и экспериментальных скоростей перемещений пластины. Вейвлет-анализ сигналов, возбуждаемых круговыми и прямоугольными пьезоактуаторами, производится в *разделе 4.4*. Используя вейвлет-преобразования записанных ультразвуковых сигналов, находятся несущие частоты сигналов, определяется их сдвиг относительно центральных частот. Также демонстрируется зависимость сдвига несущих частот от формы отслоения актуатора, что указывает на потенциальную возможность использования этих характеристик для определения наличия, формы и местоположения отслоений.

В заключении дана краткая сводка основных полученных в данной работе результатов.

Публикации. Основное содержание и результаты диссертационных исследований отражены в 17 работах, в том числе 2 публикациях, вышедших в изданиях из перечня, утвержденного ВАК РФ. При компьютерной реализации разработанных алгоритмов было получено 2 свидетельства об официальной регистрации программы.

Результаты диссертационной работы докладывались на XIII объединенной научной конференции студентов и аспирантов факультета компьютерных технологий и прикладной математики (г. Краснодар, 2013 г.), XVIII Зимней школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2013 г.), Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2013 г.), International Conference DAYS ON DIFFRACTION 2013 (Санкт-Петербург, 2013 г.), 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference YIC 2013 (Франция, г. Бордо, 2013 г.), Акустическом симпозиуме «КОНСОНАНС-2013» (Украина, г. Ки-

ев, 2013 г.), IX Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2014 г.), V Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат-2014» (г. Геленджик, 2014 г.), The 11th European Conference on Non-Destructive Testing ECNDT 2014 (Чешская республика, г. Прага, 2014 г.), Seminar for 2014/2015 Lomonosov and Kant Scholars (г. Бонн, 2014 г.), Научном семинаре стипендиатов программ «Михаил Ломоносов III» и «Иммануил Кант III» (г. Москва, 2015 г.), X Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2015 г.), XVI Всероссийской школе-конференции молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования», (пос. Абрау-Дюрсо, 2015 г.), а также на семинарах Института математики, механики и информатики КубГУ.

Основное содержание и результаты диссертационных исследований отражены в статьях [26, 72–81]. В указанных публикациях идеи постановок задач и методы исследования разрабатывались совместно с научным руководителем М.В. Голубом. Лично соискателем была построена математическая модель, описывающая динамическое поведение пьезоэлектрического тела при различных граничных условиях; получены оценки сходимости численного решения, рассчитываемого на основе разработанной модели; проведен анализ резонансных частот пьезоэлектрического образца.

В совместных работах с М.В. Голубом [26, 74–76, 78] соискателем рассчитаны вейвлет-преобразования экспериментальных сигналов; найдены несущие и мгновенные частоты сигналов, проанализирован сдвиг несущей частоты. В работе [77] произведены экспериментальные исследования волновых полей, генерируемых пьезоактуаторами с различной степенью контакта. В работах [73, 79] построена математическая модель пьезоактуатора на основе метода конечных элементов высокого порядка точности; произве-

дено сопоставление результатов моделирования с аналогичными данными, рассчитанными в системе COMSOL; разработан алгоритм «сшивки» конечноэлементной модели актуатора с полуаналитической моделью слоя. В работе [81] лично соискателем разработана общая схема решения краевой задачи методом конечных элементов высокого порядка точности, получены решения уравнений Гельмгольца в одномерном и двумерном случаях; произведены оценки сходимости метода; создана компьютерная программа для реализации метода конечных элементов высокого порядка точности.

Автор выражает благодарность за помощь и поддержку в работе научному руководителю М.В. Голубу, профессорам Е.В. Глушкову и Н.В. Глушковой, а также сотрудникам Института математики, механики и информатики А.А. Еремину и О.В. Дорошенко за ценные советы и обсуждение полученных результатов. Также автор выражает благодарность сотрудникам университета г. Зиген, Германия: аспиранту института механики и мехатроники И. Бюте за расчеты в системе COMSOL и за помощь в проведении экспериментов; Г. Дитриху за подготовку экспериментальных образцов и профессору К.-П. Фритцену за консультативную поддержку.

ГЛАВА 1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§1.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения пьезоупругой анизотропной среды, занимающей объем V и ограниченной поверхностью S , с учётом сопряженных электрических полей, обусловленных пьезоэффектом, включают в себя линейные уравнения состояния, уравнения движения в напряжениях, уравнения Максвелла и соотношения Коши [17].

В декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , для обозначения которой также используется переменные (x, y, z) , уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}^E s_{kl} - e_{ijk}^\theta E_k, \\ D_i &= e_{ikl}^\theta s_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь σ_{ij} – тензор напряжений, s_{ij} – тензор деформаций, E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля, D_i – компоненты вектора электрической индукции, C_{ijkl} – тензор упругих постоянных, e_{kij} – тензор констант пьезоэлектрических напряжений материала, ε_{ij} – тензор констант диэлектрической проницаемости. По повторяющимся индексам проводится суммирование, $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Верхние индексы E , θ и S указывают, что соответствующие постоянные измерены при постоянном электрическом и температурном поле и при постоянных деформациях, в дальнейшем индексы опущены.

Тензоры деформаций и перемещений связаны соотношениями Коши:

$$s_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

При формулировке уравнений движения в линейной теории пьезоупругой среды, как правило, обоснованно не учитываются объемные силы взаимодействия индуцированных токов и поляризации материала с электрическими и магнитными полями [82]. Таким образом уравнения движения

имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ – перемещения точек среды, t – время, ρ – плотность материала, F_i – объемные силы.

При описании процессов деформирования пьезоэлектрической среды для электрического поля используется квазистатическое приближение, отражающее малость скорости распространения волн деформаций по сравнению со скоростью распространения электромагнитных волн [83]. При этом компоненты вектора напряженности электрического поля E_k выражаются через электрический потенциал $\phi(x_1, x_2, x_3, t)$:

$$E_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k}.$$

Следствием уравнений Максвелла в квазистатическом приближении является уравнение вынужденной электростатики

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = -p_e = 0,$$

где p_e – плотность объемных свободных зарядов.

Таким образом можно записать систему уравнений в частных производных второго порядка с использованием переменных u_i и ϕ :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} + F_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ e_{ikl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_i} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) предполагают их выполнение в любой точке тела (сильная постановка). Для записи вариационной формулировки уравнений движения необходимо ввести пространства тестовых или пробных функций W , выбор которых кроме прочего обуславливают граничные условия. Принцип выбора тестовых функций излагается в главе 2. Необходимо отметить, что

пробные функции свои для каждого из уравнений в (1.3), тогда $\forall \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in W_v$ и $\psi(\mathbf{x}) \in W_\psi$ можно записать:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} v_i^s(\mathbf{x}) dV &= \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial t^2} v_i^s(\mathbf{x}) dV, \\ \int_V \frac{\partial D_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}) dV &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где тестовые функции $\mathbf{v}^s = \{v_1^s, v_2^s, v_3^s\}$, $s = 1, 2, 3$ линейно независимы. Применяя формулу интегрирования по частям, уравнения (1.4) нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \oint_S \sigma_{ij}(\mathbf{x}) v_i^s(\mathbf{x}) \nu_j dS - \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_j} dV &= \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial t^2} v_i^s(\mathbf{x}) dV, \\ \oint_S D_i(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \nu_i dS - \int_V D_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} dV &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

здесь $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ – вектор нормали к поверхности.

Переписав (1.5) в развернутой форме, можно получить один из вариантов так называемой слабой постановки уравнений движения для пьезоупругой среды в трехмерном случае:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \oint_S v_i^s(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^3 e_{kij} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \nu_j dS - \\ - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_V \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^3 e_{kij} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] dV = \\ = \sum_{i=1}^3 \int_V v_i^s(\mathbf{x}) \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial t^2} dV, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \oint_S \psi(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 e_{ikl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \nu_i dS - \\ - \sum_{i=1}^3 \int_V \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 e_{ikl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

§1.2. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для постановки задачи в замкнутой форме уравнения (1.3) необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Граничные условия на поверхности тела состоят из механических условий и электрических условий.

Начальные условия для всего объема, занимаемого телом, полностью определяются заданием перемещений и скоростей его точек в начальный момент времени t_0 [17], как правило, для удобства $t_0 = 0$:

$$u_i(\mathbf{x}, t_0) = u_i^*(\mathbf{x}, t_0), \quad \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t_0)}{\partial t} = v_i^*(\mathbf{x}, t_0). \quad (1.8)$$

Начальные условия для электрического потенциала не записываются, так как в уравнениях (1.3) отсутствуют производные по времени от электрического потенциала, поскольку для определения перемещений используют уравнения динамической теории упругости, а для определения электрического поля – квазистатическое приближение уравнений Максвелла, что при акустических частотах оправдано [84]. Это соответствует модели, в которой изменения перемещений распространяются с конечной скоростью, а электрическое поле может мгновенно измениться по всему объему тела, т.е. речь идет о бесконечном значении скорости распространения электромагнитных возмущений. Поэтому в выражение для электрического поля время входит как параметр, и начальное состояние полностью определяется условиями (1.8).

Важным частным случаем движения точек упругого тела являются установившиеся гармонические колебания относительно положения равновесия, при которых зависимость от времени t компонент смещения u_i в комплексной форме записи имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}],$$

в которой $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega)$ – комплексная амплитуда перемещений \mathbf{u} , ω – круговая частота колебаний. В дальнейшем, там где это не приводит к путанице, для комплексной амплитуды будет использоваться то же обозначение, что и для самого вектора смещений: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}]$.

Следует отметить, что преобразование Фурье-Лапласа по t переводит нестационарную задачу (1.3) относительно вещественнозначного вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ с нулевыми начальными условиями в краевую задачу относительно комплексной амплитуды $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.10)$$

Тем самым решение гармонической задачи можно рассматривать как необходимый этап построения решения соответствующей нестационарной задачи. Представление (1.10) отражает принцип суперпозиции для линейных систем, в соответствии с которым произвольные нестационарные колебания в системе можно представить в виде суперпозиции её гармонических колебаний $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ (частотного спектра).

Механические граничные условия могут задаваться как в перемещениях

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^0, \quad \mathbf{x} \in S,$$

так и в напряжениях

$$\sigma_{ij} n_j = q_i, \quad \mathbf{x} \in S,$$

где $\mathbf{n} = \{n_j\}$ – нормаль к поверхности S . Далее при необходимости нормальные и касательные напряжения, возникающие на некоторой элементарной площадке с нормалью \mathbf{n} , собираются в вектор $\boldsymbol{\tau}_n = \{\tau_{n1}, \tau_{n2}, \tau_{n3}\}$ ($\tau_{ni} = \sigma_{ij} n_j$). Кроме того, можно задавать смешанные граничные условия

на границе $S = S_u \cup S_\sigma$: на одной части поверхности S_u задаются перемещения \mathbf{u}^0 , на другой S_σ – напряжения \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_i^0, & \mathbf{x} &\in S_u, \\ \boldsymbol{\tau}_n &= \mathbf{q}_i, & \mathbf{x} &\in S_\sigma. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Форма электрических граничных условий связана со способом подвода электрической энергии к пьезоэлектрику. Если поверхность покрыта тонким металлическим слоем (так называемая проводящая электродированная поверхность) и возбуждается генератором напряжения, то на границе задается электрический потенциал:

$$\phi = \phi_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S.$$

Если при возбуждении колебаний генератором тока значение ϕ неизвестно, то задается электрический ток в цепи:

$$\frac{d}{dt} \iint_S D_i n_i dS = -I(t), \quad \mathbf{x} \in S.$$

Если на границе пьезоэлектрического тела с внешней средой отсутствуют свободные электрические заряды (электрически свободная непроводящая поверхность), то в случае контакта пьезоэлектрика с вакуумом или разреженным газом, т.е. со средой, имеющей очень малую диэлектрическую проницаемость ε_0 по сравнению с константами ε_{ij} большинства пьезоэлектриков, приближенное граничное условие формируется как равенство нулю нормальной составляющей вектора электрической индукции [17]:

$$D_i n_i = 0, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Более общая форма записи этого условия:

$$D_i n_i = -\rho_d(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S,$$

где $\rho_d(\mathbf{x}, t)$ – заданная плотность свободных зарядов на поверхности среды. Также могут задаваться смешанные электрические граничные условия, если на одной части поверхности тела S_ϕ , покрытой электродами, определен потенциал, а на другой S_D – нормальная компонента вектора электрической индукции ($S = S_\phi \cup S_D$).

§1.3. ТЕНЗОРЫ КОНСТАНТ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА

Существует два способа задания уравнений состояния, соответственно в них используются разные константы материалов, которые при переходе от одной нотации к другой необходимо преобразовывать. Один из способов предполагает следующую запись уравнений состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{sT} + \mathbf{d}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{dT} + \epsilon^t \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.12)$$

здесь \mathbf{S} – вектор, содержащий элементы тензора деформаций; \mathbf{T} – вектор, содержащий элементы тензора напряжений; \mathbf{D} – вектор электрической индукции; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; \mathbf{s} – тензор коэффициентов податливости; \mathbf{d}^T – тензор пьезоэлектрических постоянных; ϵ^t – тензор диэлектрической проницаемости при постоянных напряжениях. Второй способ задания уравнений состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{CS} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{eS} + \epsilon^s \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь \mathbf{C} – тензор упругих постоянных; \mathbf{e} – тензор констант пьезоэлектрических напряжений материала; ϵ^s – тензор диэлектрической проницаемости при постоянных деформациях.

В силу симметрии тензора упругих постоянных по двум первым и двум последним индексам ($C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{jikl}$) можно записать:

$$C_{ijkl} = C_{\alpha\beta}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6).$$

Другими словами, коэффициенты $C_{\alpha\beta}$ образуют квадратную матрицу 6×6 . Аналогичным образом формируется и матрица коэффициентов податливости $s_{\alpha\beta}$. Таким же образом, ввиду симметрии тензора констант пьезоэлектрических напряжений e_{kij} по паре последних индексов ($e_{kij} = e_{kji}$), получается матрица констант пьезоэлектрических напряжений размерностью 3×6 :

$$e_{kij} = e_{k\alpha}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, \dots, 6).$$

То же самое касается и матрицы пьезоэлектрических модулей с компонентами $d_{k\alpha}$.

Переход от записи констант $C_{\alpha\beta}$ и $e_{k\alpha}$ к записи C_{ijkl} и e_{kij} и обратно возможен по следующему правилу [82]:

$$C_{ijkl} = C_{\alpha\beta}, \quad i, j, k, l = \overline{1, 3}, \quad (i, j) \rightarrow \alpha, \quad (kl) \rightarrow \beta, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 6},$$

$$(1, 1) \rightarrow 1, (2, 2) \rightarrow 2, (3, 3) \rightarrow 3, (2, 3) \rightarrow 4, (1, 3) \rightarrow 5, (1, 2) \rightarrow 6.$$

Связь между этими матрицами можно также записать с помощью матрицы перехода:

$$Tr = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

и следующего правила:

$$C_{ijkl} = C_{Tr(1,\alpha)Tr(2,\alpha)Tr(1,\beta)Tr(2,\beta)} = C_{\alpha\beta}$$

$$e_{kij} = e_{Tr(1,\alpha)Tr(2,\alpha)} = e_{k\alpha}$$

Необходимо учитывать разные нотации при переходе от записи C_{ij} и e_{ij} к записи C_{ijkl} и e_{kij} . Так, в другой записи матрица перехода Tr может выглядеть следующим образом:

$$Tr = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Эти нотации также нужно учитывать при переходе от трехмерной задачи к двумерной. В формулах ниже используется матрица перехода (1.14).

Можно записать следующие формулы для перехода от констант материала, используемых в (1.12) к константам, используемым в (1.13):

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= (\mathbf{s})^{-1} \\ \mathbf{e} &= (\mathbf{s})^{-1} \mathbf{d}^T = \mathbf{C} \mathbf{d}^T = \mathbf{d} \mathbf{C} \\ \boldsymbol{\epsilon}^s &= \epsilon_{vac} \boldsymbol{\epsilon}^t - \mathbf{d} (\mathbf{s})^{-1} \mathbf{d}^T = \epsilon_{vac} \boldsymbol{\epsilon}^t - \mathbf{e} \mathbf{d}^T\end{aligned}\quad (1.16)$$

где $\epsilon_{vac} = 8.854187817 \cdot 10^{-12}$.

Симметрия тензоров C_{ilkj} и e_{kij} следует из самого вида уравнений состояния (1.13). Дальнейшее сокращение числа их независимых компонент происходит при учете принадлежности пьезоматериала к определенному классу симметрии. В данной работе рассматриваются материалы, принадлежащие к классу симметрии $6mm$. Пусть заданы матрицы $\mathbf{s}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\epsilon}^t$. Тогда матрицы $\mathbf{C}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\epsilon}^s$ для класса симметрии $6mm$ можно записать как:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{e} &= \mathbf{d} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} C_{44} & 0 & 0 \\ A & B & C & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\epsilon}^s &= \boldsymbol{\epsilon}^t - \mathbf{e} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^t - d_{15} C_{55} d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^t - d_{14} C_{44} d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^t - D \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A &= d_{13}C_{11} + d_{23}C_{12} + d_{33}C_{13}, \\
B &= d_{13}C_{12} + d_{23}C_{22} + d_{33}C_{23}, \\
C &= d_{13}C_{13} + d_{23}C_{23} + d_{33}C_{33}, \\
D &= Ad_{13} + Bd_{23} + Cd_{33}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Далее, при переходе от трехмерной задачи к двумерной в плоскости Oxz , необходимо принять, что в плоскости Oy либо отсутствуют нормальные и касательные деформации (плоское деформированное состояние), либо отсутствуют нормальные и касательные напряжения (плоское напряженное состояние). Константы материалов для двумерной задачи изменяются в зависимости от того, какое принимается условие.

Рассматривается сначала условие отсутствия нормальных и касательных деформаций. Тогда константы материалов \mathbf{C} , \mathbf{e} , $\boldsymbol{\epsilon}^s$ в двумерном случае можно записать как:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{2D} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{e}^{2D} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ A & C & 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\epsilon}^{s2D} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^s & 0 \\ 0 & \epsilon_{33}^s \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Пусть теперь задано условие отсутствия нормальных и касательных напряжений. Тогда константы материалов \mathbf{C} , \mathbf{e} , $\boldsymbol{\epsilon}^s$ в двумерном случае выражаются по формулам (1.16). При этом из матриц \mathbf{s} , \mathbf{d} , $\boldsymbol{\epsilon}^t$ вычеркиваются строки, соответствующие координате y до подстановки этих матриц в формулы (1.16). Таким образом, константы материалов \mathbf{C} , \mathbf{e} , $\boldsymbol{\epsilon}^s$ в двумерном случае при условии отсутствия нормальных и касательных напряжений в

плоскости Oy примут вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^{2D} &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{13} & 0 \\ s_{13} & s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & s_{55} \end{pmatrix}^{-1}, \\
 \mathbf{e}^{2D} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{15}C_{55}^{2D} \\ A' & C' & 0 \end{pmatrix}, \\
 \boldsymbol{\epsilon}^{s2D} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^t - d_{15}C_{55}^{2D}d_{15} & 0 \\ 0 & \epsilon_{33}^t - D' \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A' &= d_{13}C_{11}^{2D} + d_{33}C_{13}^{2D}, \\
 C' &= d_{13}C_{13}^{2D} + d_{33}C_{33}^{2D}, \\
 D' &= A'd_{13} + C'd_{33}.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПЬЕЗОАКТУАТОРА

Одной из основных задач настоящего исследования является моделирование динамики отслоившегося пьезоэлектрического преобразователя на упругом слое. Для этого необходимо в первую очередь разработать эффективную модель для описания колебаний пьезоактуатора и затем обеспечить ее сопряжение с моделью, описывающей волновую динамику упругого слоя. В данной главе представлено решение задачи об описании пьезоупругого ограниченного тела на основе модификации МКЭ – метода конечных элементов высокого порядка точности (МКЭ ВПТ), который в зарубежной литературе часто называют методом спектральных элементов [18, 62, 85].

Постановка задачи для пьезоактуатора без подложки была выбрана таким образом, чтобы разработанную конечноэлементную модель пьезоактуатора можно было использовать для построения связанной математической модели (актуатор на упругом слое). Кроме того, поскольку сопоставление модели на основе МКЭ ВПТ будет производиться с результатами, полученными в среде COMSOL, необходимо рассмотреть такую краевую задачу, решение которой можно в ней построить. Поэтому в данной главе рассмотрены две задачи (задача А и задача Б), отличающиеся граничными условиями. Задача А описывает динамику актуатора, свободного от напряжений по всем границам, а задача Б — динамику актуатора, с заданными на нижней поверхности напряжениями, который закреплён по всей левой боковой границе (в рамках пакета COMSOL невозможно рассчитать задачу, когда на образец подается нагрузка, но он никак не закреплён). В данной главе также рассматриваются некоторые аспекты применения МКЭ ВПТ с различными интерполяционными полиномами.

§2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается полосовой пьезоэлектрический актуатор, занимающий область $\Omega = [0, w] \times \mathbb{R} \times [0, h]$ с границей $\partial\Omega$, см. рис. 2.1. Для демонстрации используемого подхода к моделированию пьезоэлектрических тел, а также для проведения сравнения с результатами моделирования в среде COMSOL решаются две задачи (задача А и задача Б), отличающиеся граничными условиями.

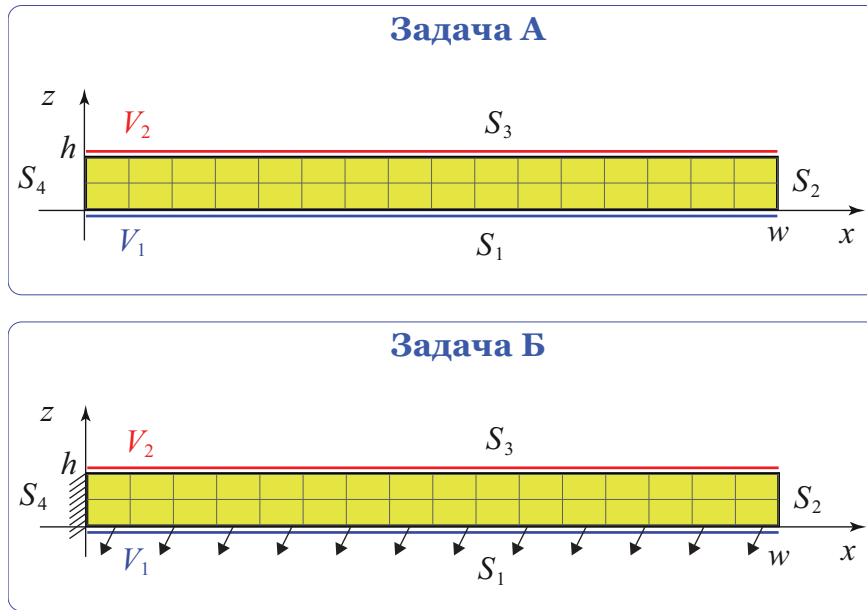


Рис. 2.1: Геометрия задачи для полосового пьезоэлектрического актуатора

Для рассматриваемого полосового пьезоактуатора, который не ограничен по оси y , вектор перемещений $\mathbf{u} = \{u_x, 0, u_z\}$ имеет две ненулевые компоненты, поэтому задачи А и Б можно сформулировать в плоской постановке, см. рис. 2.1. В такой постановке для упрощения выкладок используется двумерный вектор перемещений $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\} = \{u_x, u_z\}$ в декартовой системе координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\} = \{x, z\}$, а граница актуатора разбивается на четыре части $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, на каждой из которых задаются свои граничные условия. Общими для задач А и Б являются следующие условия:

- отсутствие нормальных и касательных напряжений на двух границах и приложение нагрузки $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ к нижней границе (во всех приведенных в этой главе примерах для задачи А полагается $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = 0$):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in S_2 \cup S_3, \\ \sigma_{iz}(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}_i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S_1;\end{aligned}\tag{2.1}$$

- отсутствие электрического поля на боковых границах:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_4;\tag{2.2}$$

- наличие электрического потенциала на нижней и верхней границах:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= V_1, & \mathbf{x} \in S_1, \\ \phi(\mathbf{x}) &= V_2, & \mathbf{x} \in S_3.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Задачи А и Б различаются условиями на границе S_4 :

- задача А – граница S_4 предполагается свободной от напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_4,\tag{2.4}$$

- задача Б – актуатор заземлен по всей границе S_4 :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_4.\tag{2.5}$$

Для решения задачи уравнения движения (1.6)–(1.7) упрощаются с учётом плоской постановки:

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \nu_j dS - \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] d\Omega = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial t^2} d\Omega\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \oint_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 e_{ikl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^2 \epsilon_{ik} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \nu_i dS - \\
& - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 e_{ikl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^2 \epsilon_{ik} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь и далее при переходе к плоской постановке используется условие отсутствия нормальных и касательных деформаций в плоскости Oy , а под тензорами C_{ijkl} , e_{kij} , ϵ_{ij}^s понимаются C_{ijkl}^{2D} , e_{kij}^{s2D} , ϵ_{ij}^{2D} , задаваемые уравнениями (1.19). Помимо этого, рассматриваются установившиеся гармонические колебания $u_k(x_1, x_2, t) = u_k(x_1, x_2) \exp(i\omega t)$ с круговой частотой ω .

§2.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Пусть стоит задача определения в некоторой области Ω неизвестной функции $u(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, которая переводится линейным дифференциальным оператором второго порядка \mathcal{A} в функцию $f(\mathbf{x}) \in C(\bar{\Omega})$ [86]:

$$\mathcal{A}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{2.8}$$

Здесь $C^n(\Omega)$ – множество функций, имеющих непрерывные частные производные до порядка n в области Ω , а $\bar{\Omega}$ – замыкание Ω . При этом уравнения (2.8) для однозначной разрешимости должны быть дополнены в зависимости от физической и математической постановки задачи некоторыми граничными условиями. Например, записанная в виде (2.8) задача с граничными условиями

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

требует удовлетворения дифференциальным уравнениям $\forall \mathbf{x} \in \Omega$.

На практике аналитическое решение задачи вида (2.8) можно построить для относительно небольшого класса задач и простой геометрии области Ω , поэтому, как правило, решение исходной задачи отыскивается чис-

ленно. Решение краевых задач для уравнений в частных производных с помощью МКЭ ВПТ основано на спектральном методе. Для этого необходимо перейти к вариационной постановке и найти

$$u \in U, \quad U = \{u(\mathbf{x}) | u \in H^2(\Omega), u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \text{ на } \partial\Omega\},$$

такую что

$$(\mathcal{A}u - f, w) = 0, \quad w \in W, \quad (2.9)$$

где

$$W = \{w | w \in L^2(\Omega), w = 0 \text{ на } \partial\Omega\} \quad (2.10)$$

где $L^2(\Omega)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом, $H^2(\Omega)$ – пространство функций Соболева. Тогда (2.9) переписывается в виде

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}u - f) w dV = 0, \quad w \in W \quad (2.11)$$

Следующий шаг дискретизации состоит в том, что вводится конечномерное подпространство $U^N \in U$ с базисом u_k , $k = 1, \dots, N$. Тогда приближенное решение $u^N(\mathbf{x}) \in U^N$ можно записать в виде:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N a_k u_k(\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.8) получается:

$$\mathcal{A}u^N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}),$$

где $r(\mathbf{x})$ – невязка уравнения (2.8). Коэффициенты a_k , входящие в (2.12), являются неизвестными величинами и могут быть найдены из условия равенства нулю нормы невязки, введенной в пространстве L^2 , то есть

$$(r(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})) = 0, \quad w(\mathbf{x}) \in W.$$

Поскольку приближенное решение $u^N(x)$ и невязка $r^N(x)$ являются элементами конечномерного подпространства U^N , то размерность пространства тестовых функций W может быть уменьшена до конечномерного пространства $W^N \in W$, которое полностью определяется базисом w_k , $k =$

$1, \dots, N$. В итоге для определения коэффициентов a_k можно записать систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^N A_{lk} c_k = f_l, \quad l = \overline{1, N}, \quad (2.13)$$

$$A_{lk} = (\mathcal{A}u_k(\mathbf{x}), w_l(\mathbf{x}))_{L_2(\Omega)}, \quad f_l = (f(\mathbf{x}), w_l(\mathbf{x}))_{L_2(\Omega)}$$

Этот подход называется методом Петрова–Галёркина, методом взвешенных невязок или нередко просто методом Галёркина.

В основе рассматриваемой разновидности метода конечных элементов высокого порядка точности лежат те же идеи, что и у спектрального метода и метода конечных элементов. Спектральный метод использует приближенное решение в той же форме, что и традиционные методы взвешенных невязок. Как и в традиционном методе Галеркина, аппроксимирующие и весовые функции отличны от нуля во всей вычислительной области [85]. Спектральный метод часто применяется для численного решения уравнений в частных производных в задачах о распространении и дифракции волн в различных средах. В спектральных методах решение отыскивается с помощью разложения в ряд Фурье или с использованием специальных аппроксимационных полиномов, обычно это ортогональные полиномы Чебышева или полиномы Лобатто высокой степени [18]. Такой подход позволяет уменьшать ошибку решения экспоненциально с увеличением степени n интерполяционных полиномов. Но несмотря на очевидные преимущества, спектральный метод требует значительных вычислительных ресурсов и трудно применим в задачах со сложной геометрией области.

Метод конечных элементов используется для решения уравнений в частных производных и интегральных уравнений в задачах механики сплошных сред, гидро- и термодинамики, термо-электро-статики и динамики и многих других. Основной идеей МКЭ является разбиение искомой области на подобласти, называемые конечными элементами, на которых решение

строится с помощью интерполяционных полиномов первого или второго, реже третьего порядков, поскольку осцилляция у границ конечного элемента возрастает при использовании полиномов бóльшей степени [87]. Преимущества МКЭ заключаются в универсальности метода и возможности его использования в задачах со сложной геометрией.

Метод конечных элементов высокого порядка точности или метод спектральных элементов, являясь комбинацией метода конечных элементов и спектрального метода, основывается на использовании интерполяционных полиномов высоких степеней, как в спектральном методе и на дискретизации искомой области, как в методе конечных элементов.

Для решения задачи методом конечных элементов высокого порядка точности необходимо выполнить следующие действия:

1. *Дискретизация рассматриваемой области.* Заключается в замене континуальной среды совокупностью конечных элементов, соединённых между собой в узлах конечным числом связей.
2. *Выбор вариационного принципа.* Записывается вариационная и слабая постановки на основе дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс.
3. *Выбор аппроксимирующих функций.* Аппроксимирующие функции и узловые точки выбираются в зависимости от специфики задачи. В рассматриваемом варианте метода конечных элементов высокого порядка точности в качестве таких функций используются, например, полиномы Гаусса–Лежандра–Лобатто, Чебышева или Лаггера.
4. *Реализация вариационного принципа.*
5. *Учёт граничных условий.* Без учета граничных условий матрицы в левой части системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) мо-

гут быть вырожденными, поскольку в соответствии с уравнениями равновесия системы часть уравнений взаимно зависимы. Изменение этой матрицы при учёте граничных условий приводит к невырожденной СЛАУ, решение которой удовлетворяет граничным условиям в узлах.

6. *Решение СЛАУ.*

7. *Вычисление необходимых величин на основе найденных значений вектора состояния.* Например, при решении задачи механики сплошных сред, в качестве неизвестных могут быть выбраны функции перемещений, тогда после применения МКЭ ВПТ остается необходимость вычислить значения функций напряжений на основе полученных значений перемещений в узловых точках.

Для непрерывности решения необходимо, чтобы, во-первых, два любых граничных элемента были геометрически конформны, т.е. правая грань элемента должна совпадать с левой гранью соседнего элемента, и наоборот. И, во-вторых, степень полиномиальной аппроксимации должна совпадать на всех конечных элементах. Непрерывность решения означает, что коэффициенты полиномиального базиса, относящиеся к одной и той же граничной точке, должны совпадать.

Поскольку аппроксимирующие функции, как правило, заданы на единичном кубе, то необходимо осуществлять замену координат, переводящую область интегрирования в единичный куб. При этом в каждой из локальных систем координат ξ^{l_i} , связанных с конкретным элементом l_i , делается стандартная замена переменных $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ для перехода из глобальной системы координат \mathbf{x} . Применяя её при работе с криволинейными элементами, необходимо при интегрировании функций, заданных в глобальной системе, разбивать интеграл по области Ω на интегралы по подобластям

и использовать формулы перехода. Для производных нетрудно записать соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^K \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i},$$

в котором $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$ определяются путём обращения матрицы Якоби $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$.

В методе конечных элементов высокого порядка точности используются такие интерполяционные полиномы, как полиномы Лобатто, Чебышева и Лаггера [18]. Вместе с полиномами используется сетка специальным образом подобранных узловых точек, которые задаются как нули определенных полиномов и распределяются по искомому интервалу неравномерно. Распределение этих точек предполагает их сгущение у краев интервала, что позволяет избежать больших осцилляций на границах искомой области при использовании полиномов высокой степени. Ниже более подробно описывается использование полиномов Лобатто и Чебышева в качестве интерполяционных полиномов и тестовых функций.

§ 2.3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ГАУССА–ЛЕЖАНДРА–ЛОБАТТО И ЧЕБЫШЕВА

Полиномами Лобатто $L_N(x)$ степени N называются ортогональные полиномы, которые являются производной полиномов Лежандра $P_N(x)$ степени $N + 1$ и выражаются по формуле:

$$L_N(x) = \frac{d}{dx} P_{N+1}(x), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

где $P_N(x)$ – полиномы Лежандра:

$$P_N(x) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Полиномы Лобатто ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - x^2)$ [18]:

$$\int_{-1}^1 L_i(x) L_j(x) (1 - x^2) dx = \frac{2(i+1)(i+2)}{2i+3} \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

В качестве базисных функций в методе конечных элементов высокого порядка точности используются многочлены C_{N+1}^i , получившие название интерполяционных полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто [85]. Для каждого N строится $N + 1$ многочлен на отрезке $[-1, 1]$, определяющийся по некоторому набору узлов λ_i :

$$C_{N+1}^i(x) = \frac{-1}{N(N+1)P_N(\lambda_i)} \frac{(1-x^2)P_N'(x)}{x-\lambda_i}, \quad i = \overline{1, N+1} \quad (2.17)$$

здесь λ_i – точки Гаусса–Лежандра–Лобатто, которые определяются как множество нулей полинома Лобатто степени $N - 1$ с добавлением концов интервала $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, & \lambda_{N+1} &= 1, \\ \lambda_j &: L_N(\lambda_j) = 0, & j &= \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для удобства формулу (2.17) можно переписать в виде:

$$C_{N+1}^i(x) = \gamma_i \prod_{j=1, j \neq i}^{N+1} (x - \lambda_j), \quad (2.19)$$

где нормирующие множители

$$\gamma_i = \frac{(2N)!}{2^N \cdot N!N!(N+1)P_N(\lambda_i)}$$

при многочленах получаются из (2.15).

Определённые таким образом полиномы Гаусса–Лежандра–Лобатто $C_{N+1}^i(x)$ порядка $N + 1$ получают полезные свойства, а именно, значения интерполяционных многочленов в узловых точках, т.е. в точках Гаусса–Лежандра–Лобатто λ_k , равны нулю, если номер узла не совпадает с номером многочлена ($j \neq i$), и равны единице при $j = i$:

$$C_{N+1}^i(\lambda_j) = \delta_{ij}. \quad (2.20)$$

Графики полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто степени 4 (сверху) и 8 (снизу) представлены на рис. 2.2.

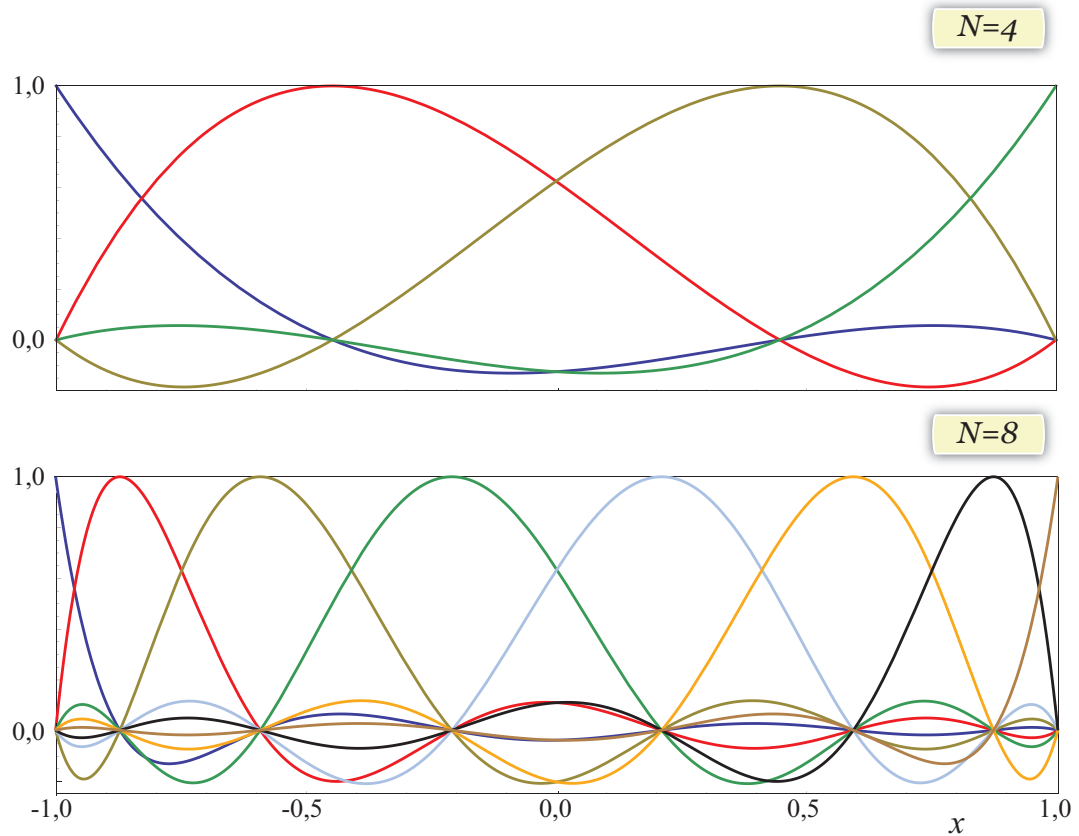


Рис. 2.2: Семейства полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто при $N = 4$ и $N = 8$

При численной реализации требуются значения производных полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто

$$\frac{dC_{N+1}^i(x)}{dx} = C_{N+1,x}^i(x)$$

в нулях самих интерполяционных полиномов, для которых можно получить простые соотношения:

$$\frac{dC_{N+1}^i(\lambda_k)}{dx} = D_{ki} = \begin{cases} -\frac{N(N+1)}{4}, & i = k = 1 \\ \frac{N(N+1)}{4}, & i = k = N+1 \\ 0, & 1 < i = k < N+1 \\ \frac{P_N(\lambda_k)}{P_N(\lambda_i)(\lambda_k - \lambda_i)}, & 1 < i \neq k < N+1 \end{cases} \quad (2.21)$$

При использовании вариационных постановок возникает необходимость численного интегрирования функций. Для вычисления интегралов от труд-

новычислимых или сложных функций используется квадратурная формула, которая записывается в виде суммы значений функции в узлах x_k с весовыми коэффициентами или весами w_k . Для многочлена $f(x)$ степени не выше $2N - 1$ справедливо [88]:

$$(f(x), 1) = \sum_{k=1}^N w_k f(x_k).$$

Это соотношение является квадратурной формулой, конкретный вид которой зависит от системы ортогональных полиномов, выбранных в качестве базиса при поиске решения. Для конечных элементов высокой степени точности, основанных на использовании полиномов Лобатто, применяется соответствующая квадратурная формула, называемая квадратурой Лобатто [18]. В квадратуре Лобатто в качестве узлов выбираются точки Гаусса–Лежандра–Лобатто λ_k :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{N+1} w_k f(\lambda_k) + E, \quad (2.22)$$

$$E = \frac{(N+1)N^3 2^{2N+1} ((N-1)!)^4}{(2N+1)(2N!)^3} f^{(2N)}(\zeta), \quad \zeta \in [-1, 1],$$

где весовые коэффициенты w_k определяются по формуле [67]:

$$w_k = \frac{2}{N(N+1)(P_N(\lambda_k))^2}. \quad (2.23)$$

Помимо полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто могут конструироваться и другие интерполяционные многочлены, к примеру, на основе ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода $T_n(x)$, которые определяются рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), & n &= 2, 3, 4 \dots \end{aligned}$$

Тогда на основе полиномов Чебышева строятся интерполяционные полиномы $\varphi_N^i(x)$ [89], которые определены на интервале $[-1, 1]$, и равны нулю

за пределами этого интервала:

$$\varphi_N^i(x) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N \frac{1}{c_i c_{k+1}} T_k(x_i) T_k(x) = \sum_{k=0}^N \beta_{ki} T_k(x), \quad (2.24)$$

где $T_k(x)$ – полиномы Чебышева первого рода степени k , $\beta_{ki} = \frac{2}{N c_i c_{k+1}} T_k(x_i)$, N – максимальная степень интерполяционных полиномов, $i = \overline{1, N+1}$, коэффициенты c_i задаются формулой:

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 1, N+1 \\ 1 & i \neq 1, N+1 \end{cases}$$

а x_i – узловые точки, определяемые по формуле [18]:

$$x_i = -\cos\left(\frac{\pi(i-1)}{N}\right) \quad i = \overline{1, N+1}, \quad (2.25)$$

причем узловые точки x_i , $i = \overline{2, N}$ определяются как корни полиномов

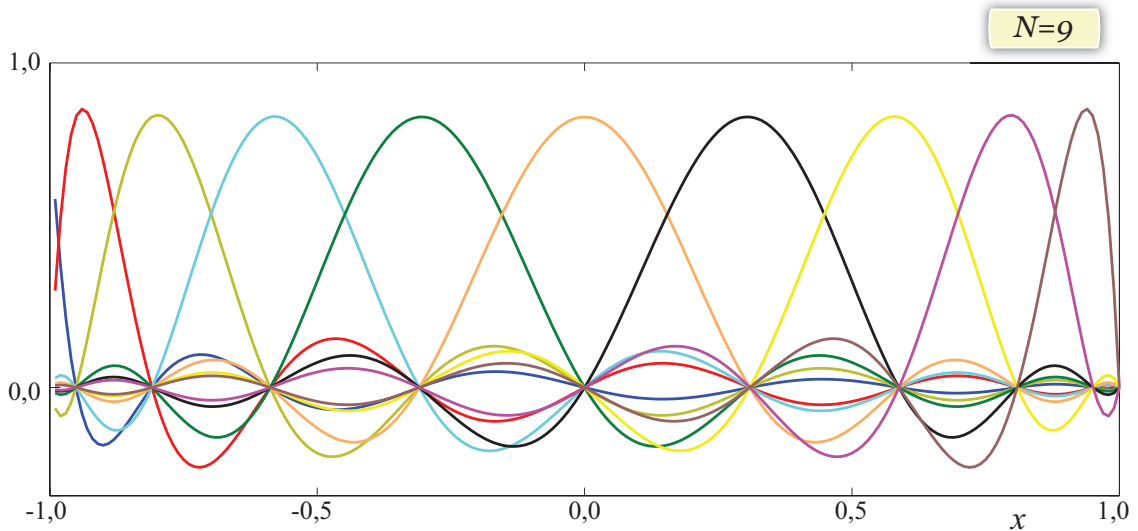


Рис. 2.3: Интерполяционные полиномы на основе многочленов Чебышева

Чебышева второго рода $U_{N-1}(x)$ степени $N-1$, а в качестве x_1, x_{N+1} добавляются крайние точки интервала $[-1, 1]$. Графики семейства полиномов φ_N^i при $N=9$ представлены на рис. (2.3), где можно наблюдать наглядную иллюстрацию следующего свойства полиномов $\varphi_N^i(x)$ [89]:

$$\varphi_N^i(x_j) = \delta_{ij},$$

аналогичное свойству (2.20) для полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто.

§2.4. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛОСОВЫХ ПЬЕЗОАКТУАТОРОВ

Для нахождения решения уравнений (2.6)-(2.7) искомую область необходимо разбить на конечные элементы, на каждом из которых находится численное решение, после чего происходит его сопряжение на границах конечных элементов. Таким образом область Ω разбивается на M_i элементов по оси Ox_i :

$$[0, w] \times [0, h] = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} [x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1}] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} [x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1}]. \quad (2.26)$$

При использовании интерполяционных многочленов на основе полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто (2.19) или Чебышева (2.24), которые ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, необходимо их масштабирование для каждого элемента. Соответственно, вводится следующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} \xi_i^{l_i} &= \frac{2x_i - x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}, & x_i &= \frac{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}{2} \xi_i^{l_i} + \frac{x_i^{l_i+1} + x_i^{l_i}}{2}, \\ \frac{d}{dx_i} &= S_i^{l_i} \frac{d}{d\xi_i^{l_i}}, & S_i^{l_i} &= \frac{2}{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}, \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.27)$$

связывающее глобальные переменные x_i и локальные переменные $\xi_i^{l_i}$ на элементе l_i , где $l_i = \overline{1, M_i}$ – номер элемента по оси Ox_i .

Решение системы интегральных уравнений (2.6-2.7) находится в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \left\{ \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) \right\}, & k &= \overline{1, 2}, \\ \phi(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \phi^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Кроме того, вводятся тестовые функции

$$\begin{aligned} v_i^s(\mathbf{x}) &= \delta_{is} C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}), \quad \mathbf{v}^s(\mathbf{x}) \in W_v, \\ \psi(\mathbf{x}) &= C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}), \quad \psi(\mathbf{x}) \in W_\psi, \\ t_1 &= \overline{1, M_1}, \quad t_2 = \overline{1, M_2}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где функции C^i определяются формулой (2.19), здесь и далее нижний индекс $N + 1$ при обозначении функций C^i опущен. Пространства тестовых функций W_v и W_ψ определяются в соответствии с граничными условиями (2.1)–(2.5) [56, 62]. Так, ввиду граничных условий (2.3), функция напряжений ϕ равна V_1 и V_2 на границах S_1 и S_3 , и соответственно пространство тестовых функций W_ψ выбирается таким образом, что $\forall \psi(\mathbf{x}) \in W_\psi$, $\psi(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in S_1 \cup S_3$. Затем при формировании матрицы СЛАУ происходит учет граничных условий (2.3). Аналогично в случае задачи Б для удовлетворения граничным условиям (2.5) на тестовые функции \mathbf{v}^s из пространства W_v накладывается дополнительное условие $\mathbf{v}^s = 0$ при $\mathbf{x} \in S_4$. Ниже подробнее рассматривается преобразование интегралов.

При подстановке (2.28)–(2.29) в (2.6)–(2.7) происходит умножение локально-заданных функций (отличных от нуля только на элементе). Соответственно произведения обращаются в нуль, если функции заданы на разных элементах, т.е.

$$C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) \cdot C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}) = 0, \quad l_1 \neq t_1 \vee l_2 \neq t_2. \quad (2.30)$$

Для демонстрации схемы далее рассматривается первое слагаемое второго интеграла из (2.6):

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} d\Omega = \\ & = - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[C_{i1k1} \int_0^w \int_0^h \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_1} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C_{i_1k_2} \int_0^w \int_0^h \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_1} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + C_{i_2k_1} \int_0^w \int_0^h \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_2} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \\
& \left. +C_{i_2k_2} \int_0^w \int_0^h \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_2} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \right]. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

После подстановки формулы (2.28), (2.29) в уравнение (2.31) $\forall s = 1, 2$ последнее принимает вид:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \delta_{is} \left[C_{i_1k_1} \int_0^w \int_0^h \frac{\partial}{\partial x_1} \left(C^{p_1}(x_1) C^{p_2}(x_2) \right) \times \right. \\
& \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(x_1) C^{i_2}(x_2) \right) dx_1 dx_2 + \\
& + C_{i_1k_2} \int_0^w \int_0^h \frac{\partial}{\partial x_1} \left(C^{p_1}(x_1) C^{p_2}(x_2) \right) \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(x_1) C^{i_2}(x_2) \right) dx_1 dx_2 + \\
& + C_{i_2k_1} \int_0^w \int_0^h \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^{p_1}(x_1) C^{p_2}(x_2) \right) \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(x_1) C^{i_2}(x_2) \right) dx_1 dx_2 + \\
& + C_{i_2k_2} \int_0^w \int_0^h \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^{p_1}(x_1) C^{p_2}(x_2) \right) \times \\
& \left. \times \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(x_1) C^{i_2}(x_2) \right) dx_1 dx_2 \right]. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Последующее преобразование уравнения (2.32):

$$- \sum_{k=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[C_{i_1k_1} \int_{x_1^1}^{x_1^{l_1+1}} \frac{\partial C^{p_1}(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial C^{i_1}(x_1)}{\partial x_1} dx_1 \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{x_2^{l_2}}^{x_2^{l_2+1}} C^{p_2}(x_2) C^{i_2}(x_2) dx_2 + \\
& + C_{i_1 k_2} \int_{x_1^{l_1}}^{x_1^{l_1+1}} \frac{\partial C^{p_1}(x_1)}{\partial x_1} C^{i_1}(x_1) dx_1 \int_{x_2^{l_2}}^{x_2^{l_2+1}} C^{p_2}(x_2) \frac{\partial C^{i_2}(x_2)}{\partial x_2} dx_2 + \\
& + C_{i_2 k_1} \int_{x_1^{l_1}}^{x_1^{l_1+1}} C^{p_1}(x_1) \frac{\partial C^{i_1}(x_1)}{\partial x_1} dx_1 \int_{x_2^{l_2}}^{x_2^{l_2+1}} \frac{\partial C^{p_2}(x_2)}{\partial x_2} C^{i_2}(x_2) dx_2 + \\
& + C_{i_2 k_2} \int_{x_1^{l_1}}^{x_1^{l_1+1}} C^{p_1}(x_1) C^{i_1}(x_1) dx_1 \int_{x_2^{l_2}}^{x_2^{l_2+1}} \frac{\partial C^{p_2}(x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial C^{i_2}(x_2)}{\partial x_2} dx_2 \Big]. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

После замены координат (2.27) уравнение (2.33) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[C_{i_1 k_1} \int_{-1}^1 S_1^{l_1} \frac{\partial C^{p_1}(\xi_1^{l_1})}{\partial \xi_1^{l_1}} S_1^{l_1} \frac{\partial C^{i_1}(\xi_1^{l_1})}{\partial \xi_1^{l_1}} \frac{d\xi_1^{l_1}}{S_1^{l_1}} \times \right. \\
& \quad \times \int_{-1}^1 C^{p_2}(\xi_2^{l_2}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) \frac{d\xi_2^{l_2}}{S_2^{l_2}} + \\
& \quad + C_{i_1 k_2} \int_{-1}^1 S_1^{l_1} \frac{\partial C^{p_1}(\xi_1^{l_1})}{\partial \xi_1^{l_1}} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) \frac{d\xi_1^{l_1}}{S_1^{l_1}} \int_{-1}^1 C^{p_2}(\xi_2^{l_2}) S_2^{l_2} \frac{\partial C^{i_2}(\xi_2^{l_2})}{\partial \xi_2^{l_2}} \frac{d\xi_2^{l_2}}{S_2^{l_2}} + \\
& \quad + C_{i_2 k_1} \int_{-1}^1 C^{p_1}(\xi_1^{l_1}) S_1^{l_1} \frac{\partial C^{i_1}(\xi_1^{l_1})}{\partial \xi_1^{l_1}} \frac{d\xi_1^{l_1}}{S_1^{l_1}} \int_{-1}^1 S_2^{l_2} \frac{\partial C^{p_2}(\xi_2^{l_2})}{\partial \xi_2^{l_2}} C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) \frac{d\xi_2^{l_2}}{S_2^{l_2}} + \\
& \quad \left. + C_{i_2 k_2} \int_{-1}^1 C^{p_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) \frac{d\xi_1^{l_1}}{S_1^{l_1}} \int_{-1}^1 S_2^{l_2} \frac{\partial C^{p_2}(\xi_2^{l_2})}{\partial \xi_2^{l_2}} S_2^{l_2} \frac{\partial C^{i_2}(\xi_2^{l_2})}{\partial \xi_2^{l_2}} \frac{d\xi_2^{l_2}}{S_2^{l_2}} \right]. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

С учётом (2.20)–(2.23), выражение (2.34) можно преобразовать к

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^2 \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{i_1 i_2} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} C_{i_1 k_1} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1}) \cdot w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} + \right. \\
& \quad \left. + C_{i_1 k_2} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1 p_1} \delta_{k_1 i_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} \delta_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{i2k1} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} \delta_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} \delta_{k_2 i_2} + \\
& \left. + \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} C_{i2k2} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \cdot \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2} \right]
\end{aligned}$$

или в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^2 \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{i_1 i_2} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} C_{i1k1} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1}) \cdot w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} + \right. \\
& \quad + C_{i1k2} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} + C_{i2k1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} + \\
& \quad \left. + \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} C_{i2k2} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \cdot \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2} \right]. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Остальные слагаемые уравнения (2.6) преобразуются аналогично. Интеграл по контуру из уравнения (2.6):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial\Omega} v_i^s \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right] \nu_j dS - \\
& = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[C_{ijkl} \oint_{\partial\Omega} v_i^s \sigma_{ij} \nu_j dS \right] \tag{2.36}
\end{aligned}$$

необходимо преобразовать с учётом граничных условий. В силу отношений (2.1), этот интеграл равен нулю на всех границах, кроме границы S_1 (для задачи А), где $\sigma_{iz}(\mathbf{x}) = q_i(\mathbf{x})$. В задаче Б этот этот интеграл также равен нулю на границах $S_2 \cup S_3$ в силу граничных условий (2.1). На границе S_4 задаются условия (2.5) на перемещения, и интеграл (2.36) равен нулю в силу выбора пространства тестовых функций W_v : $\forall \mathbf{v}^s(\mathbf{x}) \in W_v$, $\mathbf{v}^s(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in S_4$. Поскольку нормаль на границе S_1 равна $\boldsymbol{\nu} = \{0, -1\}$, то интеграл (2.36) можно переписать как

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^2 \int_{S_1} v_i^s(\mathbf{x}) q_i(\mathbf{x}) dS_1 = - \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \int_0^w C^{p_1}(x_1) C^{p_2}(x_2) q_i(\mathbf{x}) dx_1 |_{x_2=0} = \\
& = - \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \delta_{p_2 1} \delta_{t_2 1} \delta_{t_1 l_1} \int_{-1}^1 C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) q_i \left(\frac{x_1^{t_1+1} - x_1^{t_1}}{2} \xi_1^{t_1} + \frac{x_1^{t_1+1} + x_1^{t_1}}{2}, 0 \right) \frac{d\xi_1^{t_1}}{S_1^{t_1}},
\end{aligned}$$

что после применения квадратурных формул приводится к виду:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \delta_{p_2 1} \delta_{t_2 1} \delta_{t_1 l_1} \frac{1}{S_1^{t_1}} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} \delta_{k_1 p_1} q_i \left(\frac{x_1^{t_1+1} - x_1^{t_1}}{2} \lambda_{k_1} + \frac{x_1^{t_1+1} + x_1^{t_1}}{2}, \lambda_1 \right) = \\
& = - \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \delta_{p_2 1} \delta_{t_2 1} \delta_{t_1 l_1} \frac{1}{S_1^{t_1}} w_{p_1} q_i \left(\frac{x_1^{t_1+1} - x_1^{t_1}}{2} \lambda_{p_1} + \frac{x_1^{t_1+1} + x_1^{t_1}}{2}, \lambda_1 \right).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Здесь множитель $\delta_{t_1 l_1}$ возникает в силу свойства (2.30).

Поскольку рассматриваются установившиеся гармонические колебания $u_k(x_1, x_2, t) = u_k(x_1, x_2) e^{i\omega t}$ с круговой частотой ω , то для правой части уравнения (2.6) справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(\mathbf{x}) d\Omega = - \sum_{i=1}^2 \rho \omega^2 \int_{\Omega} v_i^s u_i(\mathbf{x}) d\Omega = \\
& - \sum_{i=1}^2 \rho \omega^2 \delta_{is} \int_0^w \int_0^h C^{p_1}(x_1) C^{p_2}(x_2) \times \\
& \times \left[\sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(x_1) C^{i_2}(x_2) \right] dx_1 dx_2 = \\
& - \sum_{i=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \delta_{is} \rho \omega^2 \times \\
& \times \int_{-1}^1 C^{p_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) \frac{d\xi_1^{l_1}}{S_1^{l_1}} \int_{-1}^1 C^{p_2}(\xi_2^{l_2}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) \frac{d\xi_2^{l_2}}{S_2^{l_2}} = \\
& = - \sum_{i=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \delta_{is} \rho \omega^2 \frac{1}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и второе уравнение слабой постановки (2.7). Здесь второй интеграл преобразуется аналогично выкладкам (2.31)–(2.35), а интеграл по контуру вычисляется с учётом граничных условий (2.2)–(2.3). Ввиду граничных условий (2.2) электрическое поле отсутствует на боковых границах $S_2 \cup S_4$, тогда получается следующий ин-

теграл по контуру границы области Ω :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \oint_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \epsilon_{ikl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^2 \epsilon_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \right] \nu_i dS = \\ = \sum_{i=1}^2 \oint_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x}) D_i(\mathbf{x}) \nu_i dS = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_4. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ввиду граничных условий (2.3) производится соответствующий выбор пространства тестовых функций W_ψ , а строки матрицы системы, относящиеся к значениям функции $\phi(\mathbf{x})$ в узловых точках на границах $S_1 \cup S_3$, заполняются нулями за исключением диагональных элементов, которые приравниваются единице. Соответствующие компоненты вектора правой части приравниваются значениям V_1 и V_2 в зависимости от границы S_1 и S_3 . Таким образом, обеспечивается выполнение граничных условий, так как значения $\phi^{l_1 l_1 i_1 1}$ и $\phi^{l_1 M_1 i_1 (N+1)}$ оказываются равными V_1 и V_2 на границах S_1 и S_3 , поэтому интеграл по контуру (2.39) на этих границах можно не учитывать.

Таким образом, после подстановки (2.28)–(2.29) в (2.6)–(2.7) и необходимых преобразований получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с вектором неизвестных, состоящим из значений вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и функции электрического потенциала $\phi(\mathbf{x})$ в узловых точках λ_k (2.18). Окончательный вид СЛАУ для реализации МКЭ ВПТ $\forall s = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \left\{ (\delta_{k1} + \delta_{k2}) \left(\sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} C_{i1k1} \times \right. \right. \right. \\ \times \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} - C_{i1k2} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} - C_{i2k1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} - \\ \left. \left. - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} C_{i2k2} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \cdot \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2} \right] + \frac{1}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} \rho \omega^2 \delta_{ks} w_{i_1} \delta_{p_1 i_1} w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta_{k3} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} e_{1i1} \sum_{k_1=1}^{N+1} (w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1}) \cdot w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} - \right. \\
& \quad -e_{2i1} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} - e_{1i2} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} - \\
& \quad \left. -\frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} e_{2i2} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \cdot \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2} \right] \Bigg\} = \\
& = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{S_1^{t_1}} \delta_{is} \delta_{p_2 1} \delta_{l_2 1} \delta_{t_1 l_1} w_{p_1} q_i \left(\frac{x_1^{t_1+1} - x_1^{t_1}}{2} \lambda_{p_1} + \frac{x_1^{t_1+1} + x_1^{t_1}}{2}, \lambda_1 \right). \quad (2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \left\{ (\delta_{k1} + \delta_{k2}) \left(-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} e_{1k1} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1} \times \right. \right. \\
& \quad \times w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} - e_{1k2} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} - e_{2k1} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} - \\
& \quad \left. \left. -\frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} e_{2k2} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \cdot \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2} \right) + \right. \\
& \quad +\delta_{k3} \left(\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} \epsilon_{11} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1 p_1} D_{k_1 i_1} \cdot w_{i_2} \delta_{p_2 i_2} + \epsilon_{12} w_{i_1} D_{i_1 p_1} w_{p_2} D_{p_2 i_2} + \right. \\
& \quad \left. +\epsilon_{21} w_{p_1} D_{p_1 i_1} w_{i_2} D_{i_2 p_2} + \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} \epsilon_{22} w_{i_1} \delta_{i_1 p_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2 p_2} D_{k_2 i_2} \right) \Bigg\} = 0. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Для сопряжения решения на гранях элементов удобно ввести специальным образом составленный индекс:

$$I = (s-1)G + (p_1-1)(M_2N+1) + (M_2N+1)N(l_1-1) + N(l_2-1) + p_2 \quad (2.42)$$

где $G = (M_1N+1)(M_2N+1)$. Матрица коэффициентов для решения системы уравнений заполняется с использованием этого индекса.

Схема применения метода конечных элементов высокого порядка точности с использованием полиномов Чебышева аналогична схеме, описанной выше. Производится разбиение искомой области Ω на элементы (2.26) и используется замена координат вида (2.27).

Решение уравнений (2.6)–(2.7) отыскивается в виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left\{ \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \varphi^{i_1}(\xi_1^{l_1}) \varphi^{i_2}(\xi_2^{l_2}) \right\}, \quad k = \overline{1, 2},$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \phi^{l_1 l_2 i_1 i_2} \varphi^{i_1}(\xi_1^{l_1}) \varphi^{i_2}(\xi_2^{l_2}),$$
(2.43)

а тестовые функции определяются следующим образом:

$$v_i^s(\mathbf{x}) = \delta_{is} \varphi^{p_1}(\xi_1^{t_1}) \varphi^{p_2}(\xi_2^{t_2}), \quad \mathbf{v}^s(\mathbf{x}) \in W_v,$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \varphi^{p_1}(\xi_1^{t_1}) \varphi^{p_2}(\xi_2^{t_2}), \quad \psi(\mathbf{x}) \in W_\psi,$$

$$t_1 = \overline{1, M_1}, \quad t_2 = \overline{1, M_2}.$$
(2.44)

Функции φ^i определяются формулой (2.24), здесь и далее нижний индекс $N + 1$ при обозначении функций φ^i опущен.

При умножении локально-заданных функций (отличных от нуля только на элементе) выполняется то же свойство, что и для полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто (2.30):

$$\varphi^{i_1}(\xi_1^{l_1}) \varphi^{i_2}(\xi_2^{l_2}) \cdot \varphi^{p_1}(\xi_1^{t_1}) \varphi^{p_2}(\xi_2^{t_2}) = 0, \quad l_1 \neq t_1 \vee l_2 \neq t_2$$
(2.45)

Принцип выбора пространств тестовых функций в зависимости от граничных условий был уже описан. Разница заключается в том, что при использовании полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто для расчета определенных интегралов используются квадратурные формулы Гаусса, а в случае полиномов Чебышева интегралы вычисляются аналитически. Для дальнейших преобразований удобно ввести следующие обозначения:

$$\int_{-1}^1 \varphi^i(x) \varphi^j(x) dx = \sum_{m=0}^N \sum_{r=0}^N \beta_{mi} \beta_{rj} \int_{-1}^1 T_m(x) T_r(x) dx = R_{ij}^I$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi^i(x)}{\partial x} \varphi^j(x) dx = \sum_{m=0}^N \sum_{r=0}^N \beta_{mi} \beta_{rj} \int_{-1}^1 \frac{\partial T_m(x)}{\partial x} T_r(x) dx = R_{ij}^{ID}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi^i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi^j(x)}{\partial x} dx = \sum_{m=0}^N \sum_{r=0}^N \beta_{mi} \beta_{rj} \int_{-1}^1 \frac{\partial T_m(x)}{\partial x} \frac{\partial T_r(x)}{\partial x} dx = R_{ij}^D$$
(2.46)

Все интегралы в уравнениях (2.6)–(2.7) при подстановке в них (2.43)–(2.44) рассматриваются следуя той же схеме, что и при использовании полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто, за исключением интеграла по контуру первого уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \nu_j dS = \\ = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \nu_j dS \end{aligned} \quad (2.47)$$

С учетом граничных условий (2.1) и (2.5), этот интеграл равен нулю на границах $S_2 \cup S_3 \cup S_4$ в обеих задачах А и Б. На границе S_1 этот интеграл рассматривается в соответствии с граничными (2.4). Нормаль к этой границе равна $\boldsymbol{\nu} = \{0, -1\}$. Все коэффициенты, относящиеся только к границе S_1 имеют дополнительный множитель $\delta_{t_2 1}$. Тогда с учетом преобразования координат (2.27) можно записать:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^2 \int_{S_1} v_i^s(\mathbf{x}) q_i(\mathbf{x}) dS_1 = - \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \delta_{t_2 1} \int_{-1}^1 \varphi^{p_1}(\xi_1^{t_1}) \varphi^{p_2}(\xi_2^{t_2}) \cdot \\ \cdot q_i \left(\frac{x_1^{t_1+1} - x_1^{t_1}}{2} \xi_1^{t_1} + \frac{x_1^{t_1+1} + x_1^{t_1}}{2}, 0 \right) \frac{1}{S_1^{t_1}} d\xi_1^{t_1} \Big|_{\xi_2^{t_2} = -1} = \\ = - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{S_1^{t_1}} \delta_{is} \delta_{p_2 1} \delta_{t_2 1} \sum_{m=0}^N \beta_{mp_1} \hat{q}_i^{mt_1}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{q}_i^{mt_1} = \int_{-1}^1 T_m(\xi_1^{t_1}) q_i \left(\frac{x_1^{t_1+1} - x_1^{t_1}}{2} \xi_1^{t_1} + \frac{x_1^{t_1+1} + x_1^{t_1}}{2}, 0 \right) d\xi_1^{t_1}. \quad (2.48)$$

При заданных значениях m , i и t_1 интеграл в (2.48) можно посчитать аналитически.

Учитывая (§2.4.) и (2.48), итоговая СЛАУ принимает вид:

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \delta_{l_1 t_1} \delta_{l_2 t_2} \left\{ (\delta_{k1} + \delta_{k2}) \left(\sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[- \frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} C_{i1k1} R_{p_1 i_1}^D R_{p_2 i_2}^I - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. -C_{i_1 k_2} R_{p_1 i_1}^{ID} R_{i_2 p_2}^{ID} - C_{i_2 k_1} R_{i_1 p_1}^{ID} R_{p_2 i_2}^{ID} - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} C_{i_2 k_2} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^D \right] + \\
& \left. + \frac{1}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} \rho \omega^2 \delta_{ks} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^I \right) + \delta_{k3} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} e_{1i1} R_{p_1 i_1}^D R_{p_2 i_2}^I - \right. \\
& \left. - e_{2i1} R_{p_1 i_1}^{ID} R_{i_2 p_2}^{ID} - e_{1i2} R_{i_1 p_1}^{ID} R_{p_2 i_2}^{ID} - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} e_{2i2} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^D \right] \Big\} = \\
& = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{S_1^{t_1}} \delta_{is} \delta_{p_2,1} \delta_{t_2,1} \sum_{m=0}^N \beta_{mp_1} \hat{q}_i^{mt_1}. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \delta_{l_1 t_1} \delta_{l_2 t_2} \left\{ (\delta_{k1} + \delta_{k2}) \left(-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} e_{1k1} R_{p_1 i_1}^D R_{p_2 i_2}^I - \right. \right. \\
& \left. \left. - e_{1k2} R_{p_1 i_1}^{ID} R_{i_2 p_2}^{ID} - e_{2k1} R_{i_1 p_1}^{ID} R_{p_2 i_2}^{ID} - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} e_{2k2} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^D \right) + \right. \\
& \left. + \delta_{k3} \left(\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} \epsilon_{11} R_{p_1 i_1}^D R_{p_2 i_2}^I + \epsilon_{12} R_{p_1 i_1}^{ID} R_{i_2 p_2}^{ID} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \epsilon_{21} R_{i_1 p_1}^{ID} R_{p_2 i_2}^{ID} + \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} \epsilon_{22} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^D \right) \right\} = 0. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Структура СЛАУ, полученная в каждом из вариантов МКЭ ВПТ, одинакова: схематически вид СЛАУ представлен на рис. 2.4. Строкам матрицы можно сопоставить узловые точки, определяемые при разбиении области Ω на элементы (2.27), так индексы p_1, p_2, t_1, t_2, s однозначно определяют номер строки. По горизонтали расположены блоки, которые соответствуют неизвестным значениям перемещений и электрического потенциала, что определяет структуру вектора неизвестных, состоящего из трех блоков, каждый из которых имеет размерность $(M_1 N + 1)(M_2 N + 1)$ и соответствует одной из трех искомым функций. В столбцах матрицы стоят коэффициенты при значениях искомым функций в узловых точках. Вертикальные блоки матрицы соответствуют тестовым функциям $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ и ψ , а индексы i_1, i_2, l_1, l_2, k однозначно определяют номер столбца.

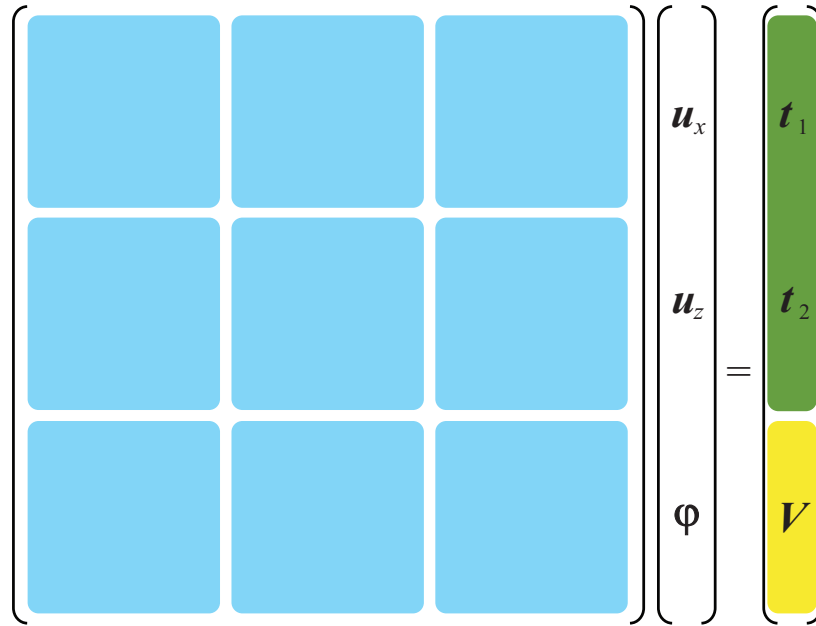


Рис. 2.4: Схема СЛАУ при моделировании пьезоактуатора МКЭ ВПТ

Для учета граничных условий необходима соответствующая процедура формирования СЛАУ. Компоненты вектора правой части, для которых коэффициенты p_2 , t_2 и s принимают значения $p_2 = 1$, $t_2 = 1$, $s = 1, 2$, содержат спектральные коэффициенты разложения нагрузок q_s по выбранному базису. Таким образом, коэффициенты с поверхностной нагрузкой q_s присутствуют только в строках, сопоставимых узловым точкам на границе S_1 . Для задачи Б строки матрицы, соответствующие границе, где пьезоактуатор жестко зашумлен, заполняются нулями, за исключением диагонального элемента, равного единице. Аналогично при $s = 3$ компоненты вектора правой части равны значениям напряжений V_1 на нижней ($p_2 = 1$, $t_2 = 1$) или V_2 на верхней ($p_2 = N+1$, $t_2 = M_2$) границах актуатора, а соответствующие строки заполняются нулями, за исключением диагонального элемента, равного единице. Таким образом задается выполнение граничных условий (2.3) и (2.5). Для удобства компьютерной реализации и контроля правильности сопряжения решения на гранях конечных элементов следует использовать индекс, например, как в (2.42).

Системы линейных алгебраических уравнений, полученные каждым из вариантов МКЭ ВПТ, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{y} &= \mathbf{t}, \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{y} &= \mathbf{V}, \end{aligned} \tag{2.51}$$

где для удобства введен обобщенный вектор $\mathbf{y}^T = \{\mathbf{u}_x^T, \mathbf{u}_z^T, \phi^T\}$, составленный из значений компонент вектора перемещений $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_z$ и электрического потенциала ϕ в узловых точках. В правой части находятся составленный из интеграла по контуру вектор \mathbf{t} , и вектор, получающийся при учете граничных условий на электрический потенциал \mathbf{V} .

§2.5. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ

Во всех приведенных ниже примерах для обеспечения последующей экспериментальной верификации рассматривается пьезоактуатор из материала PIC 155 производства PI Ceramic GmbH со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} \rho &= 7800 \text{ кг/м}^3, \\ s_{11} = s_{22} &= 1,59 \cdot 10^{-11} [\text{Па}^{-1}], \quad s_{33} = 2,097 \cdot 10^{-11} [\text{Па}^{-1}], \\ s_{13} = s_{23} &= -7,27 \cdot 10^{-12} [\text{Па}^{-1}], \quad s_{12} = -5,69 \cdot 10^{-12} [\text{Па}^{-1}], \\ s_{44} = s_{55} &= 4,492 \cdot 10^{-11} [\text{Па}^{-1}], \quad s_{66} = 4,319 \cdot 10^{-11} [\text{Па}^{-1}], \\ d_{31} = d_{32} &= -1,74 \cdot 10^{-10} [\text{Кл/Н}], \quad d_{33} = 3,94 \cdot 10^{-11} [\text{Кл/Н}], \\ d_{15} = d_{24} &= 5,35 \cdot 10^{-10} [\text{Кл/Н}], \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1750. \end{aligned}$$

Для дополнительной верификации модели применялся также коммерческий пакет COMSOL Multiphysics 4.4 с использованием модуля Structural Mechanics Module. Далее приводятся некоторые результаты сравнения, полученные при $V_1 = 50 \text{ В}$, $V_2 = 0 \text{ В}$ и нагрузке $q_1(x) = 5 \text{ Па}$, $q_2(x) = 10 \text{ Па}$ для пьезоактуатора размерами $6 \text{ мм} \times 0.2 \text{ мм}$.

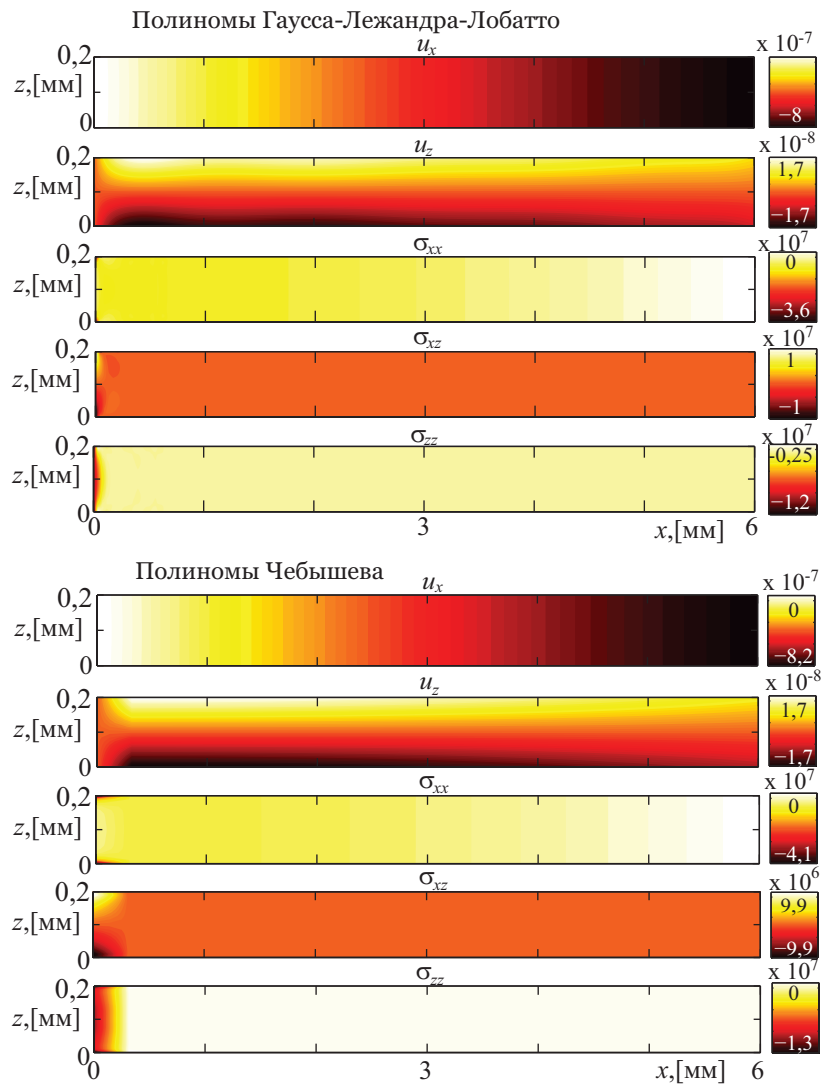


Рис. 2.5: Перемещения и напряжения на частоте 100 кГц с использованием интерполяционных полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева, задача Б

На рис. 2.5 показаны графики перемещений и напряжений для пьезоактуатора, рассчитанные МКЭ ВПТ для частоты 100 кГц с использованием полиномов Чебышева и Гаусса–Лежандра–Лобатто для задачи Б. На этом рисунке, а также на некоторых последующих рисунках, значения величин отображаются цветом, причем более темные области соответствуют минимальным значениям, а светлые – максимальным. Можно видеть, что оба вида интерполяционных полиномов дают очень близкие значения перемещений и напряжений. Исключение составляют значения касательных напряжений σ_{xz} в окрестности границы S_4 . Из рис. 2.5 видно, что гранич-

ные условия (2.1), (2.3), (2.5) удовлетворяются с небольшой погрешностью, а поведение перемещений близко к линейному (исключение составляют резонансные частоты), что подтверждается расчетами с помощью пакета COMSOL. Для сопоставления результатов численных расчетов с расчетами, полученными в COMSOL, можно сравнить максимальные и минимальные значения вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на разных частотах, эти значения приведены в Табл. 2.1. На низких частотах имеет место хорошее совпадение между результатами, полученными с помощью МКЭ ВПТ и COMSOL, однако с ростом частоты можно видеть некоторое расхождение, говорящее о необходимости использования большего количества элементов.

Таблица 2.1: Минимальные и максимальные значения перемещений на разных частотах в задаче А, [м].

Частота		1 кГц	60 кГц	100 кГц	180 кГц	500 кГц	1000 кГц
max u_x	МКЭ ВПТ	1,77e-7	1,86e-7	2,04e-7	3,25e-7	5,75e-8	2,95e-8
	COMSOL	1,77e-7	1,86e-7	2,04e-7	3,25e-7	5,75e-8	2,91e-8
min u_x	МКЭ ВПТ	-1,77e-7	-1,84e-7	-2,04e-7	-3,25e-7	-5,75e-8	-2,95e-8
	COMSOL	-1,77e-7	-1,86e-7	-2,04e-7	-3,25e-7	-5,75e-8	-2,91e-8
max u_z	МКЭ ВПТ	7,86e-9	8,17e-9	8,82e-9	1,32e-8	7,89e-9	8,50e-9
	COMSOL	7,86e-9	8,17e-9	8,82e-9	1,32e-8	7,90e-9	8,02e-9
min u_z	МКЭ ВПТ	-7,86e-9	-8,17e-9	-8,82e-9	-1,32e-8	-7,89e-9	-8,50e-9
	COMSOL	-7,86e-9	-8,17e-9	-8,82e-9	-1,32e-8	-7,90e-9	-8,02e-9

Более полный анализ предполагает исследование численной сходимости и оценки выполнения граничных условий для разных базисных функций (полиномов Чебышева и Гаусса–Лежандра–Лобатто). Графики, иллюстрирующие сходимость при разном числе элементов и фиксированной степени интерполяционных полиномов на примере перемещений представлены на рис. 2.6 для частоты 100 кГц. На рис. 2.7 приведены аналогичные графики, но полученные на основе интерполяционных полиномов разных

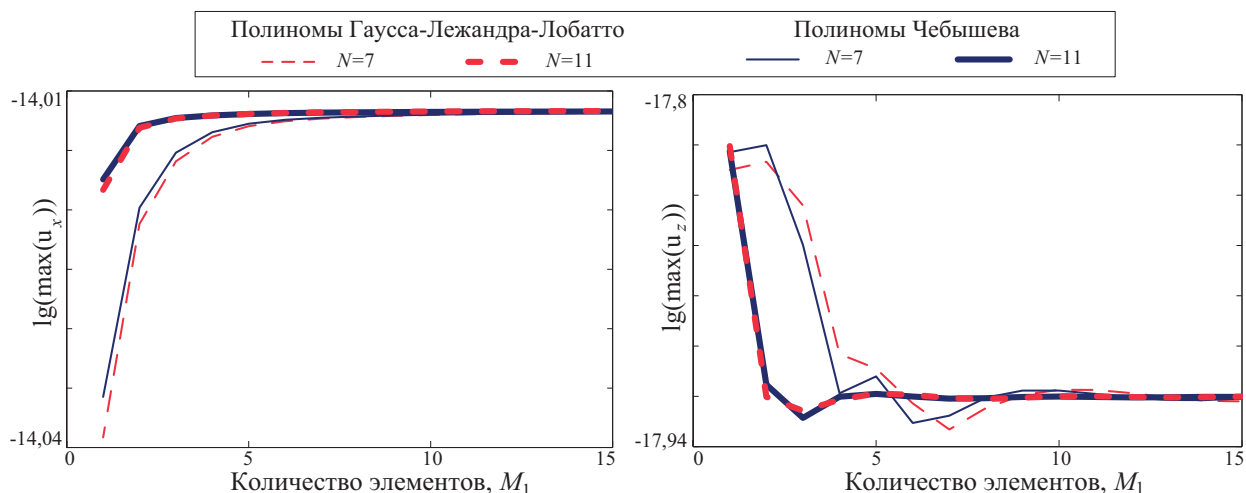


Рис. 2.6: Оценка сходимости в перемещениях при использовании разного числа элементов. Задача Б

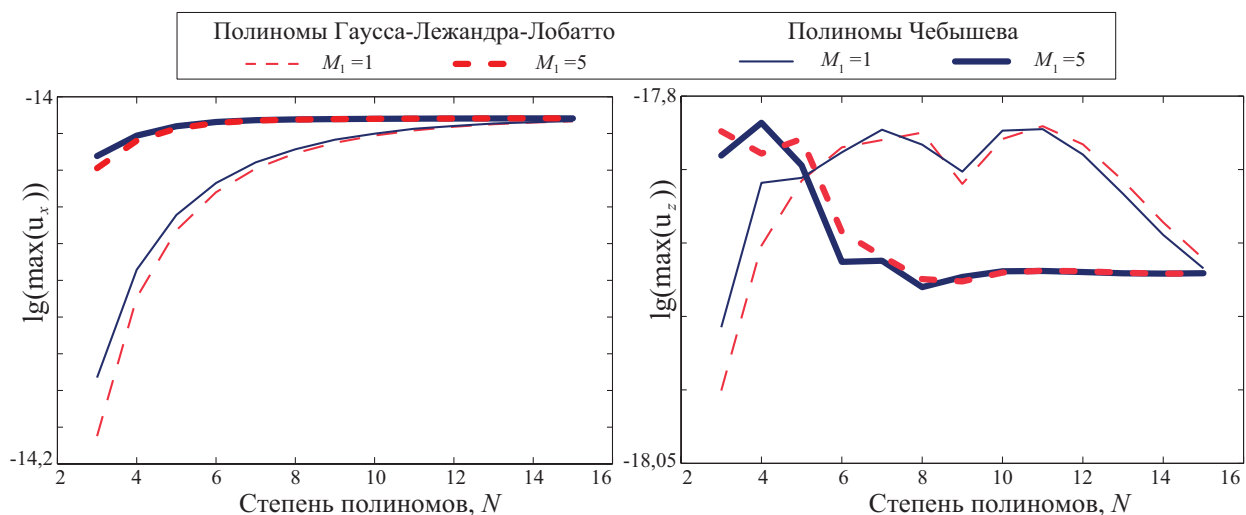


Рис. 2.7: Оценка сходимости в перемещениях при использовании полиномов разной степени. Задача Б

степеней с использованием одного или пяти элементов. Эти графики демонстрируют, что достаточно хорошая точность достигается уже при использовании $M_1 = 3$ элементов и степени интерполяционных полиномов $N = 11$. Если использовать полиномы степени $N = 7$, то следует разбивать искомую область примерно на 8 конечных элементов. Исследуя сходимость, можно заключить, что для получения точного решения необходимо сначала повышать степень N интерполяционных полиномов, а затем увеличивать количество элементов $M_1 M_2$. Аналогичные оценки были получены

для уравнения Лапласа [85] и для анизотропных упругих материалов [18].

Также была исследована сходимость перемещений и напряжений на границах к значениям, определяемым граничными условиями. Относительные значения перемещений на границе S_4 (здесь согласно граничным условиям перемещения равны нулю) представлены на рис. 2.8. Использование полиномов Чебышева дает несколько более точную аппроксимацию перемещений на границе нежели полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто, которые также обеспечивают хорошую точность.

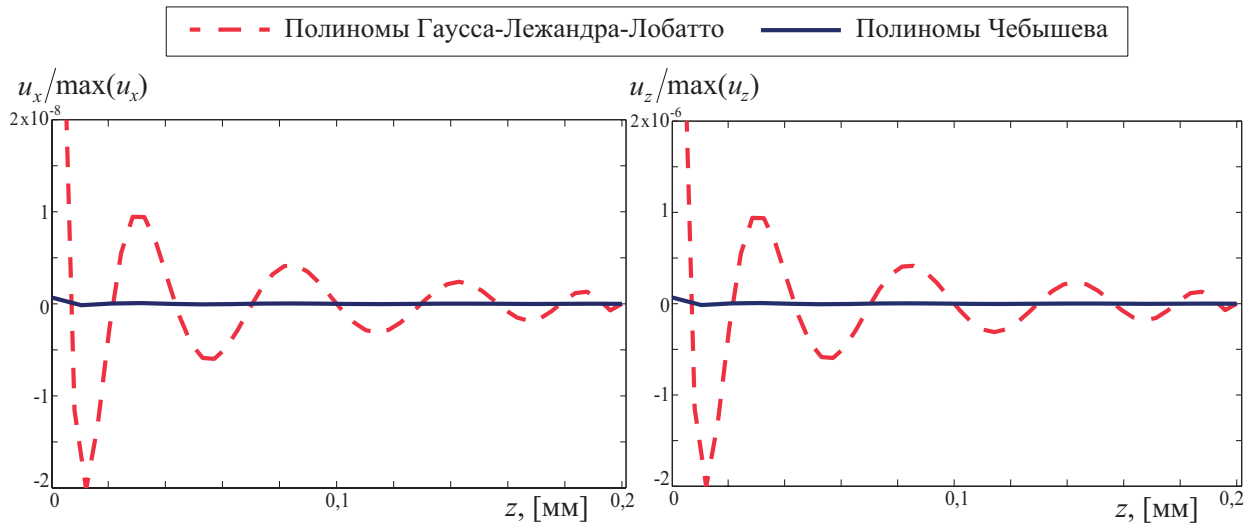


Рис. 2.8: Относительные значения перемещений u_x (слева) и u_z (справа) на границе S_4 , рассчитанные с использованием полиномов степени $N = 10$ и $M_1 = 10$ элементов. Задача Б

Согласно граничным условиям (2.1), напряжения σ_{xx} и σ_{xz} должны быть равны нулю на границе S_2 . На графиках, приведенных на рис. 2.9, можно видеть, что точность выполнения граничных условий выше при использовании $M_1 = 10$ элементов по сравнению с разбиением на $M_1 = 5$ элементов.

На границе S_1 напряжения σ_{xz} и σ_{zz} должны быть равны заданным поверхностным нагрузкам q_1 и q_2 соответственно. Причем на границе S_4 эти величины принимают довольно высокие значения, поскольку на ней не заданы никакие условия на напряжения. Из-за этого при переходе от

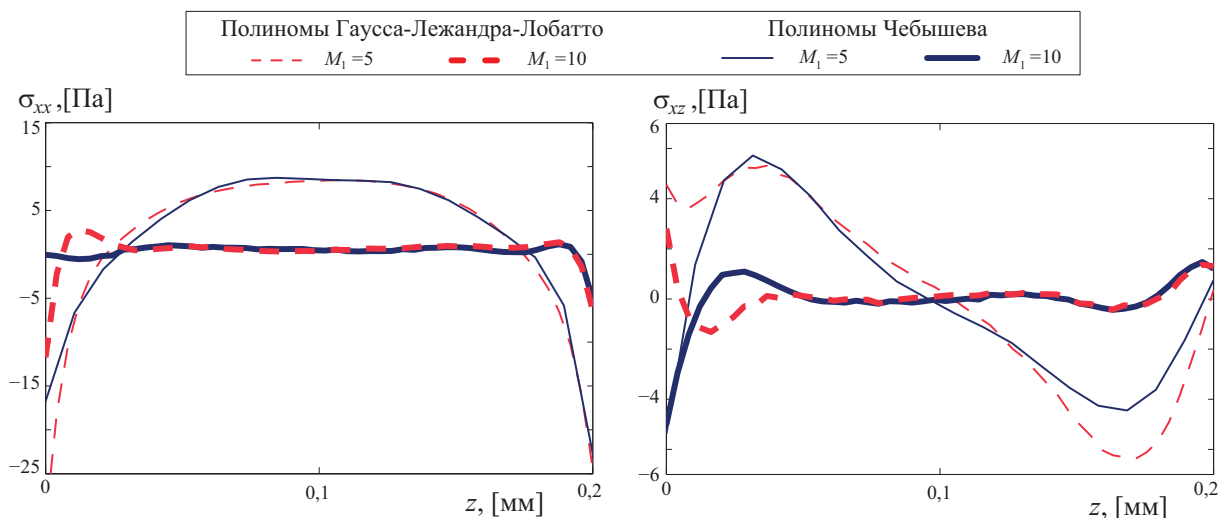


Рис. 2.9: Напряжения σ_{xx} (слева) и σ_{xz} (справа) на границе S_2 , рассчитанные с использованием полиномов степени $N = 10$. Задача Б

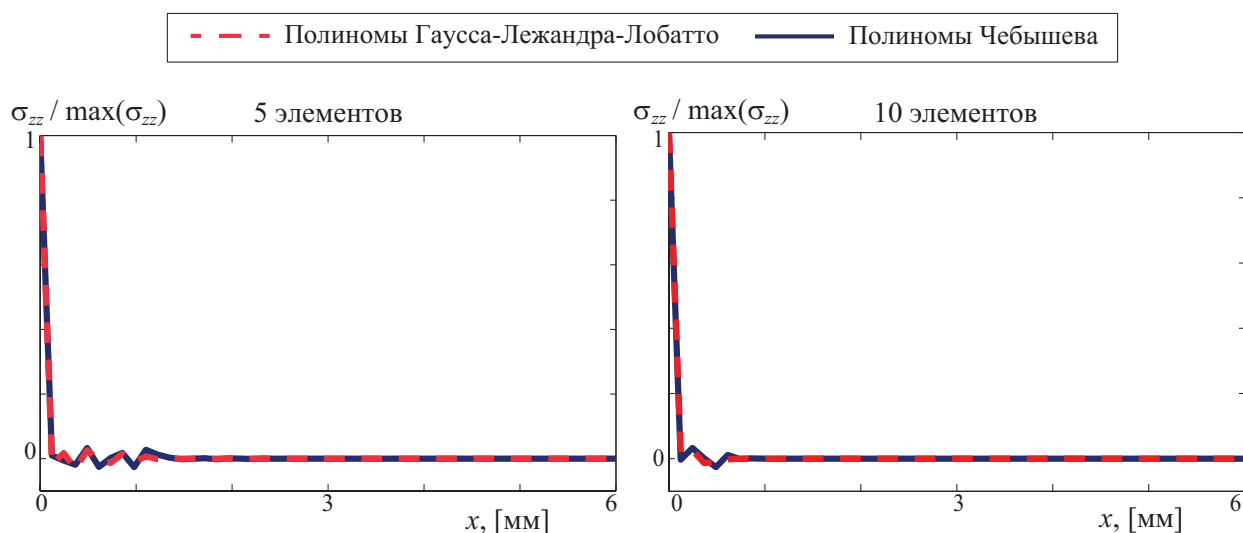


Рис. 2.10: Относительные значения напряжений σ_{zz} на границе S_1 , рассчитанные с использованием 5 (слева) и 10 (справа) элементов и интерполяционных полиномов степени $N = 10$. Задача Б

S_4 к S_1 возникает относительно высокая ошибка в окрестности нижнего левого угла. Для устранения этой погрешности и получения адекватных значений напряжений на границе S_1 необходимо использовать достаточно большое количество элементов (для целей настоящей работы было взято $M_1 = 10$ элементов). На рис. 2.10 представлены графики относительных значений напряжений σ_{zz} , рассчитанных с использованием 5 (слева) и 10 (справа) элементов. Анализируя графики на рис. 2.5–2.10, можно заклю-

чить, что решение примерно одинаковой точности может быть получено при использовании как полиномов Чебышева, так и полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто.

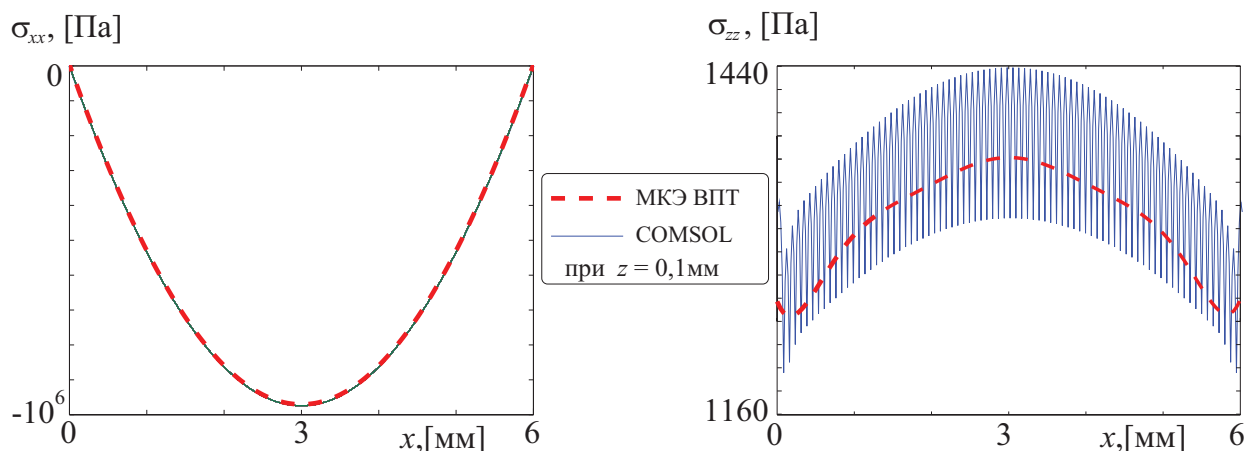


Рис. 2.11: Напряжения при частоте 100 кГц, рассчитанные МКЭ ВПТ и с использованием COMSOL. Задача А

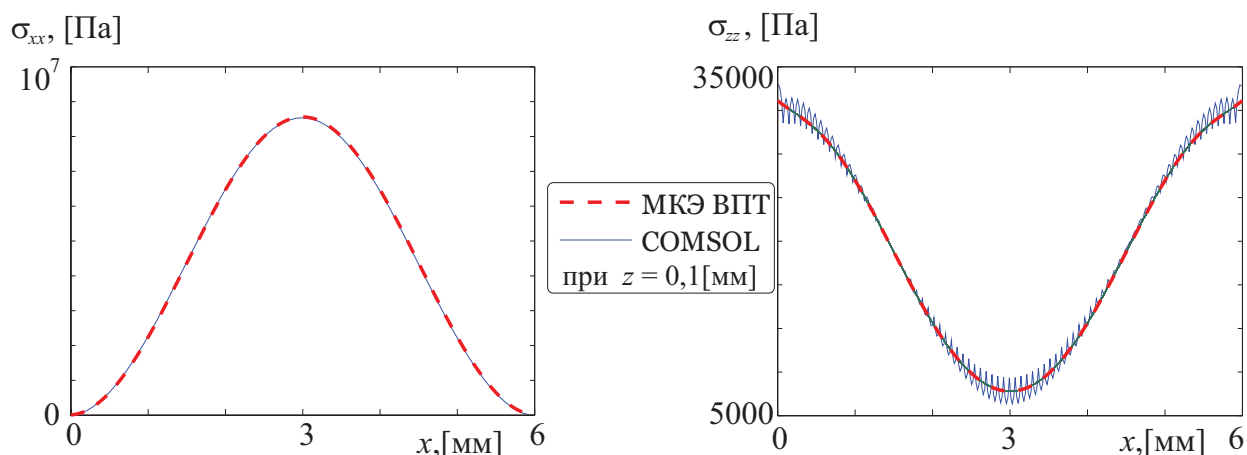


Рис. 2.12: Напряжения при частоте 500 кГц, рассчитанные МКЭ ВПТ с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и с использованием COMSOL. Задача А

Рис. 2.11–2.12 иллюстрируют распределение напряжений вдоль срединного среза при $z = 0,1$ мм, рассчитанных с использованием МКЭ ВПТ и пакета COMSOL, на частотах 100 и 500 кГц. Нетрудно видеть, что МКЭ ВПТ дает более гладкую аппроксимацию тензора напряжений, что объясняется более точным вычислением значений производных. Аналогичное сравнение было выполнено также для задачи Б.

§2.6. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Описываемый в данной главе метод позволяет исследовать резонансные свойства актуатора. Автором для контроля использовалось два подхода к нахождению резонансных частот актуатора f_n . Для одного конечного элемента резонансные частоты можно определить из условия равенства нулю определителя матрицы СЛАУ (2.40)–(2.41) или (2.49)–(2.50). В общем случае при использовании произвольного количества конечных элементов резонансные частоты вычислялись как локальный максимум суммы квадратов модулей коэффициентов разложения $u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2}$ для вектора решения. В табл. 2.2 представлены резонансные частоты актуатора размером 6 мм×0.2 мм, рассчитанные с помощью МКЭ ВПТ с использованием интерполяционных полиномов Чебышева и Гаусса–Лежандра–Лобатто, а также пакета COMSOL. Можно заключить, что при использовании небольшого числа элементов, значения резонансных частот оказываются немного завышены. Табл. 2.2 демонстрирует, что выбор интерполяционных полиномов практически не влияет на рассчитываемое значение резонансной частоты, чего нельзя сказать о выборе количества конечных элементов.

Таблица 2.2: Резонансные частоты актуатора, кГц

Номер частоты f	Полиномы Чебышева		Полиномы Лобатто		COMSOL	
	1 элемент	10 элементов	1 элемент	10 элементов	80×6=480 элементов	17×3=51 элемент
	1-я	3,263	3,253	3,264	3,253	3,260
2-я	20,324	20,268	20,331	20,268	20,312	20,270
3-я	56,365	56,220	56,386	56,221	56,377	56,226
4-я	109,042	108,718	109,075	108,719	109,131	108,728
5-я	127,322	127,027	127,358	127,025	127,226	127,295
6-я	177,816	176,779	175,578	176,783	177,720	176,795

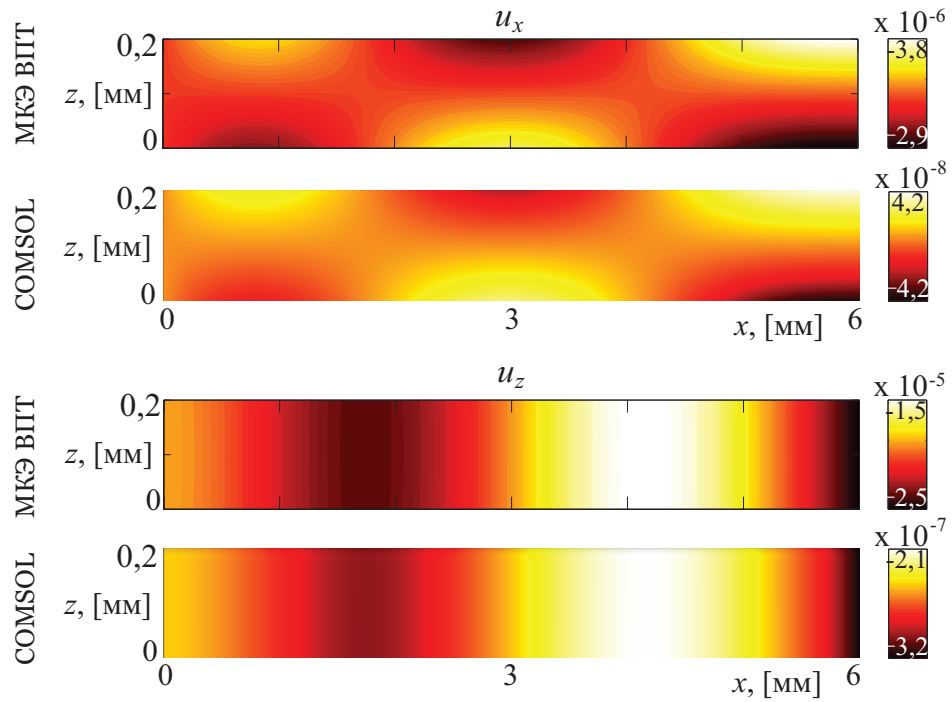


Рис. 2.13: Задача Б: перемещения на 3-й резонансной частоте $f = 56,386$ кГц (МКЭ ВПТ с полиномами Гаусса-Лежандра-Лобатто) и $f = 56,226$ кГц (COMSOL). Задача Б

Кроме того, произведено сравнение полей перемещений на резонансной частоте, рассчитанных МКЭ ВПТ и системой COMSOL. Для иллюстрации того факта, что оба метода позволяют устанавливать резонансную частоту, соответствующую одному и тому же режиму колебаний, приведен рис. 2.13 — поля перемещений на 3-й резонансной частоте для задачи Б. При том, что значения 3-й резонансной частоты f расходятся на несколько десятков герц, картины качественно совпадают. Кроме того, резонансные частоты находятся из условий равенства нулю определителя матрицы системы ($\det \mathbf{A} = 0$), поэтому при численных расчетах в некоторых ситуациях собственные формы колебаний совпадают с точностью до знака.

Для более детального анализа резонансных частот были рассмотрены собственные формы колебаний (поля перемещений) на частотах, близких к 3-й резонансной частоте (выделена в табл. 2.2 и на рис. 2.14). На рис. 2.14 ожидаемо видно значительное изменение в поведении пьезоактуатора при непосредственной близости к резонансной частоте и возрастание ампли-

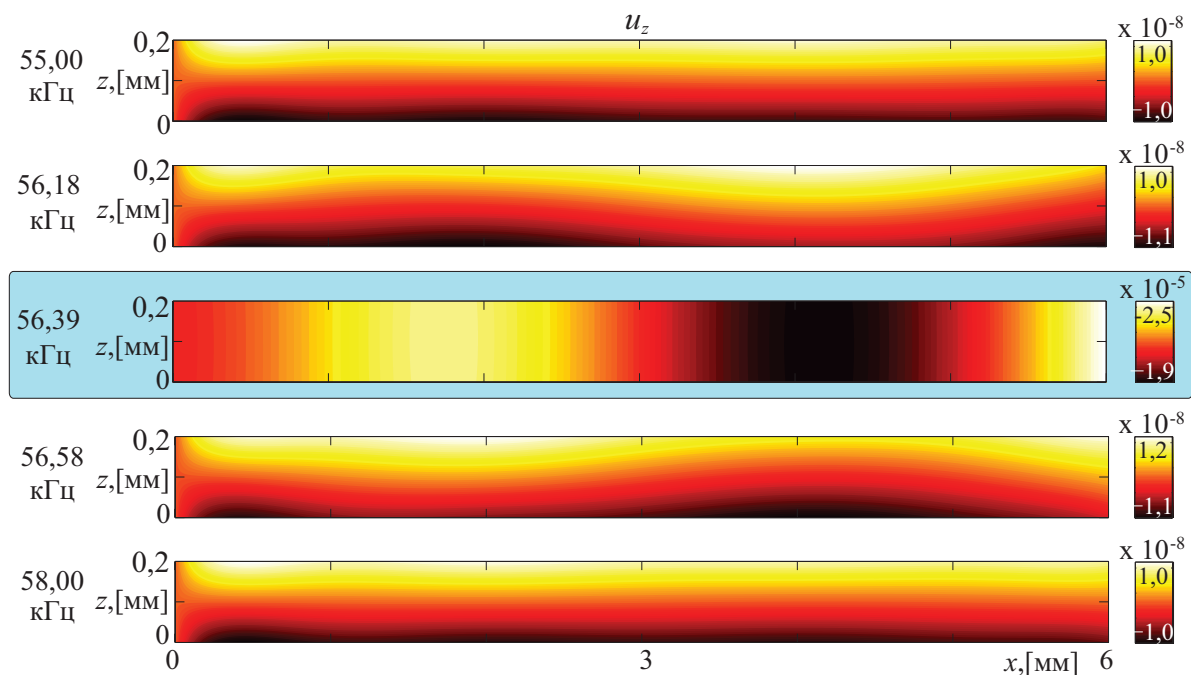


Рис. 2.14: Вертикальные перемещения для частот в окрестности 3-ей резонансной частоты (МКЭ ВПТ с полиномами Гаусса–Лежандра–Лобатто). Задача Б

туды колебаний на несколько порядков. Для прочих резонансных частот также наблюдается рост амплитуд и существенное изменение характера перемещений, как это видно по рис. 2.15, где представлены поля перемещений u_x и u_z на первых резонансных частотах, исключая f_3 . Данный анализ может быть полезен при идентификации поврежденных актуаторов путем их «прозванивания» на различных частотах и обнаружения резонансных частот, зависящих от характера повреждения.

На рис. 2.16–2.17 представлены графики изменения резонансных частот в зависимости от размеров актуатора в диапазоне частот до 150 кГц. При увеличении ширины актуатора резонансные частоты сгущаются и смещаются в сторону более низких частот. А при увеличении высоты сенсора резонансные частоты смещаются в сторону более высоких, что иллюстрирует рис. 2.17. На этих графиках можно видеть два семейства резонансных частот, обозначенных сплошными и пунктирными линиями. Траектории изменения резонансных частот первого семейства не пересекаются между

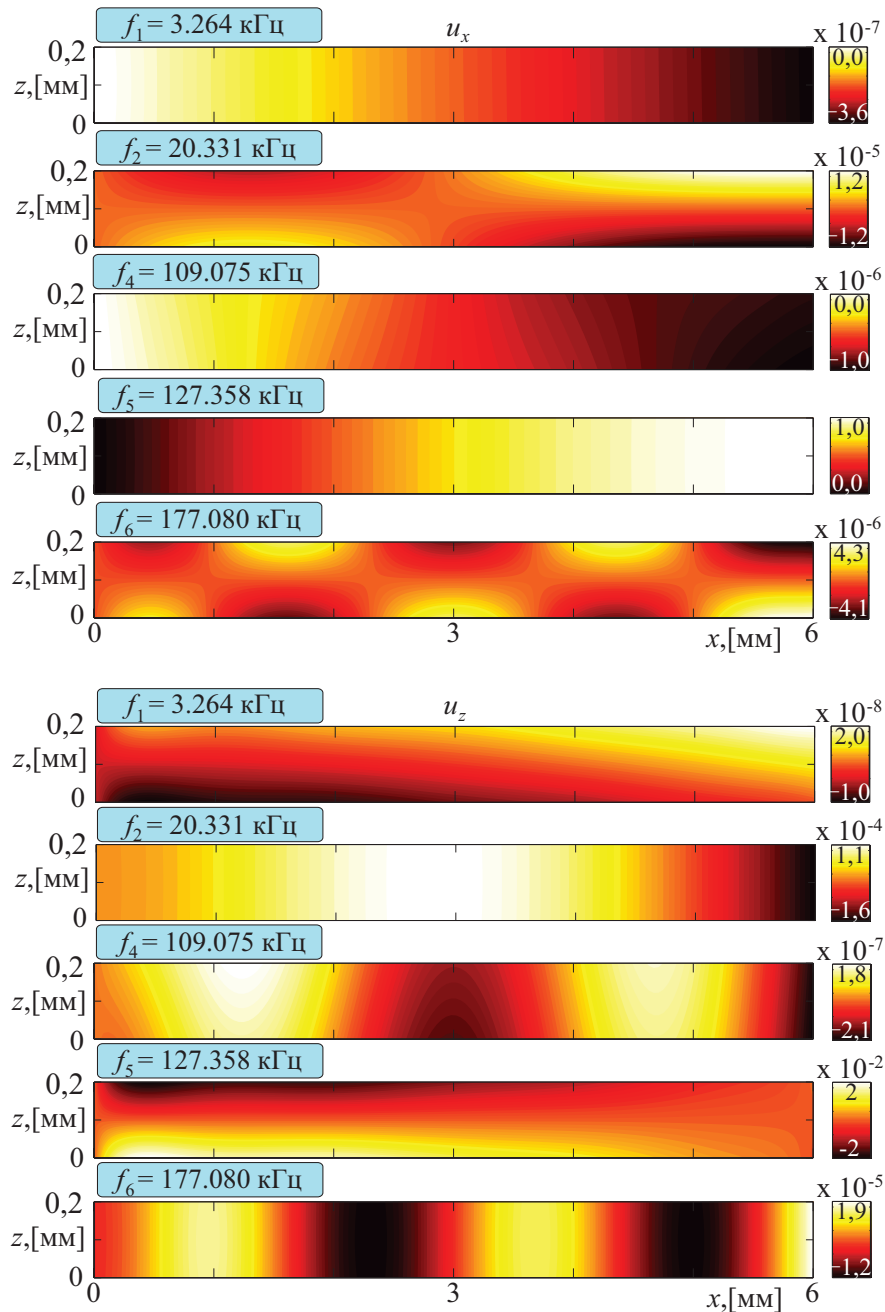


Рис. 2.15: Перемещения для 1,2,4,5,6-ой резонансных частот f_n (МКЭ ВПТ с полиномами Гаусса–Лежандра–Лобатто). Задача Б

собой. Однако они пересекаются траекторией изменения резонансной частоты из второго семейства (обозначается пунктирной линией на рис. 2.16–2.17). Следует также отметить, что на второе семейство резонансных частот мало влияет изменение высоты актуатора. Тем не менее при изменении ширины актуатора все значения резонансных частот f_n сдвигаются в сторону более низких частот. Аналогичный эффект был описан в работе [90],

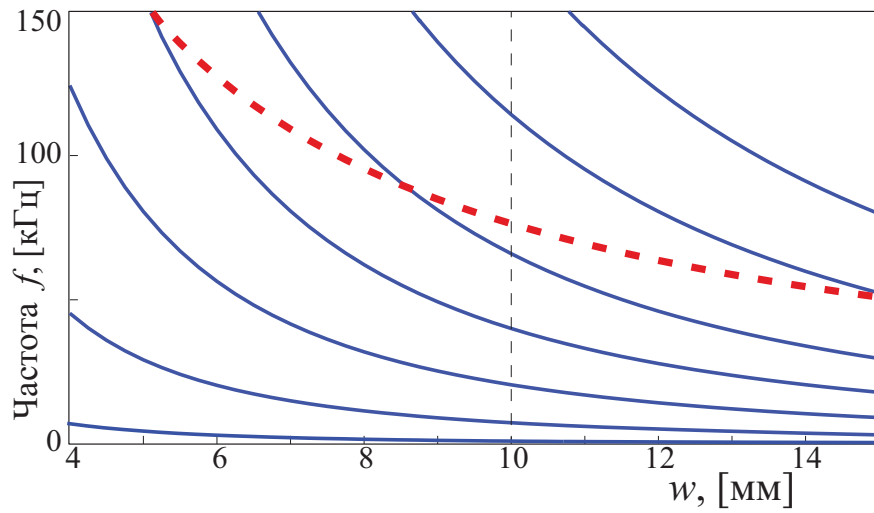


Рис. 2.16: Резонансные частоты f_n актуатора высотой 0,2 мм. МКЭ ВПТ с использованием полиномов Чебышева. Задача Б

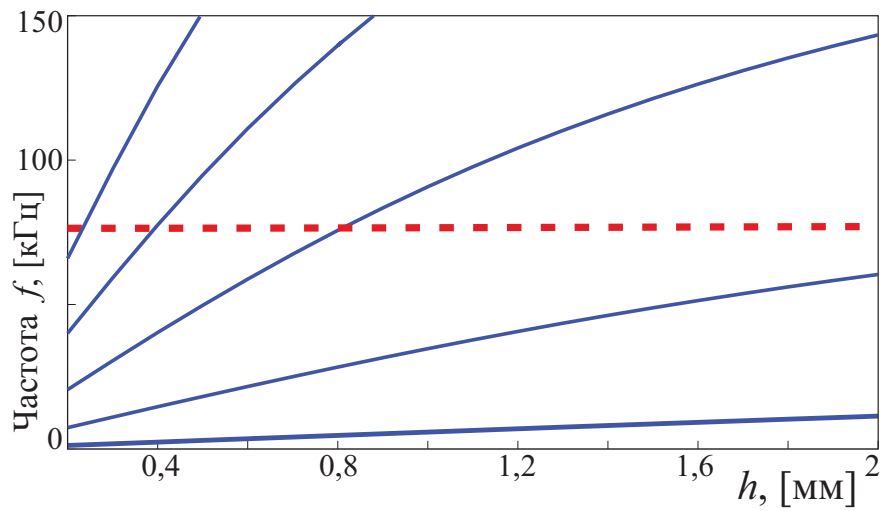


Рис. 2.17: Резонансные частоты f_n актуатора шириной 10 мм. МКЭ ВПТ с использованием полиномов Чебышева. Задача Б

где рассматривалось влияние ширины и глубины залегания полосовой трещины в упругом слое на резонансные свойства всего упругого волновода.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЬЕЗОАКТУАТОРА С УПРУГИМ СЛОИСТЫМ ВОЛНОВОДОМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА

§3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

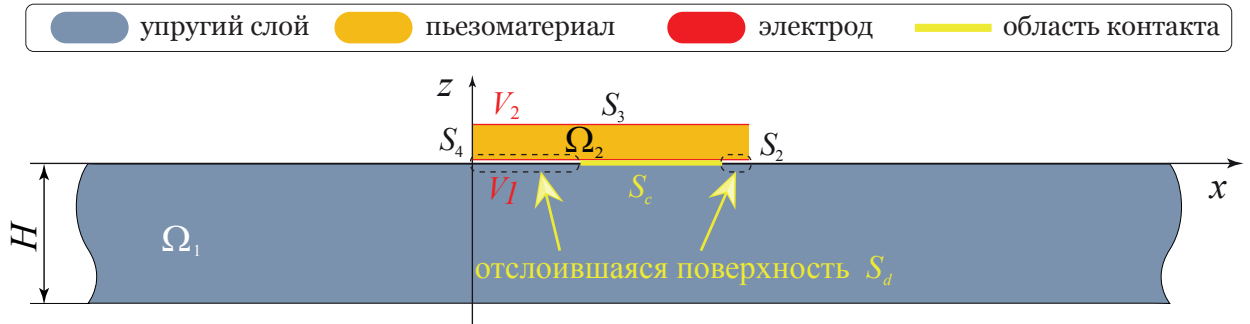


Рис. 3.1: Постановка задачи в случае частичного отслоения актуатора от упругого слоя

В третьей главе рассматривается взаимодействие полосового прямоугольного пьезоэлектрического актуатора с упругим слоистым волноводом, см. рис. 3.1. Предполагается, что на поверхность упругого слоя с константами Ляме λ_1, μ_1 и плотностью ρ_1 , занимающего область $\Omega_1 = \{-\infty < x, y < \infty, -H \leq z \leq 0\}$ приклеен пьезоэлектрический актуатор высотой h и шириной w , занимающий область $\Omega_2 = \{0 \leq x \leq w, |y| < \infty, 0 \leq z \leq h\}$ с границей $\partial S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Здесь $S_1 = \{0 \leq x \leq w, |y| < \infty, z = 0\}$ — общая поверхность для пьезоактуатора и упругого слоя. При моделировании отслоения между актуатором и волноводом область S_1 разбивается на две подобласти: $S_1 = S_c \cup S_d$. На поверхности S_c предполагается контакт между слоем и актуатором, а в то время как на S_d задается условие отсутствия нормальных и касательных напряжений, причем при $S_d = \emptyset$ актуатор и слой контактируют вдоль всей нижней грани актуатора S_1 . Далее все волновые поля, относящиеся к области Ω_1 обозначаются верхним индексом 1, а к области Ω_2 соответственно верхним индексом 2.

Для полосового пьезоактуатора на поверхности слоя (также как и в главе 2) вектор смещений в обеих областях имеет две ненулевые компоненты $\mathbf{u} = \{u_x, 0, u_z\}$. Описание колебаний полосового актуатора можно получить подстановкой $\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t)$ и $\phi(\mathbf{x}, t)$ в уравнения движения (1.3), переписанные с учетом плоской постановки. Перемещения в упругом слое $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t)$ в таком случае описываются уравнениями Ляме:

$$(\lambda_1 + \mu_1)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) + \mu_1\Delta\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) - \rho_1\frac{\partial^2\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Начальные условия вводятся в соответствии с (1.8), иначе говоря, до момента времени $t = 0$, когда на актуатор подается электрический импульс $p(t)$, система находится в покое. На нижней и верхней границах задается электрический потенциал, начиная с момента времени $t = 0$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t < 0) &= 0, & \mathbf{x} \in S_1 \cup S_3, \\ \phi(\mathbf{x}, t \geq 0) &= V_1 \cdot p(t), & \mathbf{x} \in S_1, \\ \phi(\mathbf{x}, t \geq 0) &= V_2 \cdot p(t), & \mathbf{x} \in S_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

На практике электрический импульс подается только на верхнюю границу S_3 пьезоактуатора, а нижняя граница заземляется, т.е. $V_1 = 0$; в качестве входного импульса $p(t)$ используется N_c циклов косинуса, модулированного окном Ханна с некоторой центральной частотой f_0 :

$$p(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi f_0 t}{N_c}\right) \right), \quad 0 < t < \frac{N_c}{f_0}. \quad (3.3)$$

Граничные условия на нижней и верхней границах слоя, за исключением области контакта S_c между слоем и актуатором, предполагают отсутствие нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_{iz}^1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} = \{-\infty < x_1 < \infty, -H \leq x_2 \leq 0\}/S_c. \quad (3.4)$$

Все границы актуатора кроме S_1 также свободны от напряжений:

$$\sigma_{iz}^2(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_3 \cup S_4, \quad (3.5)$$

а на боковых границах актуатора отсутствуют горизонтальные электрические перемещения:

$$D_x(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_4. \quad (3.6)$$

В области отслоения S_d актуатора задаются только условия отсутствия напряжений:

$$\sigma_{iz}^1(x_1, x_2 = 0, t) = \sigma_{iz}^2(x_1, x_2 = 0, t) = 0, \quad x_1 \in S_d. \quad (3.7)$$

В области контакта S_c для описания различной адгезии или степени контакта задаются граничные условия пружинного типа [91, 92]. В настоящем исследовании используется модель Бострёма-Викхема [93], в которой предполагается непрерывность нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_{iz}^1(\mathbf{x}, t) = \sigma_{iz}^2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_c, \quad (3.8)$$

и их связь со скачком перемещений в виде [94]:

$$\sigma_{iz}^1(\mathbf{x}, t) = \kappa (u_i^1(\mathbf{x}, t) - u_i^2(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (3.9)$$

Для удобства в дальнейшем используется диагональная матрица жесткости $\boldsymbol{\kappa} = \text{diag}\{\kappa, \kappa\}$, в плоском случае состоящая только из значений κ . При значении жесткости $\kappa \rightarrow \infty$ условие (3.9) описывает идеальный контакт (идеальные адгезионные свойства клеевого соединения между актуатором и подложкой) и означает непрерывность перемещений между слоем и актуатором:

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (3.10)$$

Решение поставленной нестационарной задачи во временной области можно найти с помощью интегрального преобразования Лапласа:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[\int_0^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) P(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right], \quad (3.11)$$

здесь $P(\omega)$ – преобразование Лапласа от входного электрического импульса $p(t)$, который может задаваться к примеру уравнением (3.3). Соответственно, сначала строится решение в частотной области, т.е. рассматриваются гармонические колебания, а затем вычисляется обратное преобразование Лапласа на основе гармонического решения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$.

§3.2. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ГРИНА УПРУГОГО СЛОЯ. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПОДХОД.

Известно [95], что частное решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}u = f$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, можно построить в виде свёртки f и решения уравнения $\mathcal{L}u_0 = \delta$:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{x} - \zeta) f(\zeta) d\zeta,$$

здесь \mathcal{L} – дифференциальный оператор в \mathbb{R}^n , $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция Дирака. Функция $u_0(\mathbf{x})$ называется фундаментальным решением или функцией Грина уравнения $\mathcal{L}u = f$. Аналогично в теории упругости вводится понятие матрицы Грина $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, столбцами которой являются частные решения уравнения Ляме с правой частью $\delta(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$, где \mathbf{e}_j – единичные орты [96]. Другими словами, элементы матрицы Грина \mathbf{g} представляют собой компоненты вектора перемещений, вызванных сосредоточенными объемными силами. Перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, вызываемые в упругой среде произвольным распределением массовых сил $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, представимы в виде свертки:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x} - \zeta) \mathbf{f}(\zeta) d\zeta.$$

Построение матрицы Грина $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ является важным этапом в получении интегральных представлений решения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ задач динамической теории упругости.

Аналогично, применительно к задаче (3.1)–(3.10) может быть сформулирована подзадача о действии поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(x, t)$, прило-

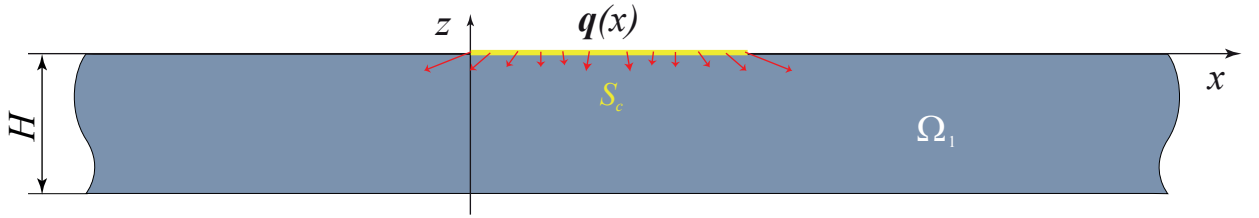


Рис. 3.2: Постановка задачи для нагрузки на поверхности упругого слоя

женной в области S_c на поверхности свободного упругого слоя высотой H , см. рис. 3.2. Решение такой двумерной задачи представимо в виде свёртки матрицы Грина \mathbf{k} с вектор-функцией поверхностной нагрузки \mathbf{q} :

$$\mathbf{u}(x, z) = \iint_{\Omega_1} \mathbf{k}(x - \zeta, z) \mathbf{q}(\zeta) d\zeta, \quad (3.12)$$

где матрица \mathbf{k} называется матрицей Грина упругого слоя с заданной на поверхности слоя $z = 0$ нагрузкой [12, 97]. Столбцами матрицы $\mathbf{k}(x, z)$ являются перемещения \mathbf{u}_l , вызванные сосредоточенными поверхностными нагрузками $\pi_l = \delta(x, z) \mathbf{e}_l$, и удовлетворяющие всем поставленным граничным условиям.

В задачах динамической теории упругости для неограниченных тел нередко используют преобразование Фурье [12]. Интегральные операторы прямого и обратного преобразования в комплексной форме обозначают через \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} соответственно:

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha),$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x).$$

Подробнее свойства преобразования Фурье описаны в [12, 98, 99].

Используя в (3.12) представление для матрицы Грина и нагрузки в виде обратного преобразования Фурье по x с параметром α , можно получить

с учетом правила преобразования свертки:

$$\mathbf{U}(\alpha, z) = \mathbf{K}(\alpha, z)\mathbf{Q}(\alpha), \quad (3.13)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{K} , \mathbf{Q} – преобразования Фурье \mathbf{u} , \mathbf{k} , \mathbf{q} соответственно. Из соотношений (3.12) и (3.13) следует

$$\mathbf{u}^1(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{U}(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3.14)$$

Контур интегрирования Γ проходит по вещественной оси, отклоняясь от неё только при обходе особенностей Фурье-символа матрицы Грина \mathbf{K} в соответствии с принципом предельного поглощения [12]. Фурье-символ матрицы Грина \mathbf{K} имеет счетный набор полюсов ζ_k , которые соответствуют волновым числам для волн Лэмба, распространяющимся в свободном слое.

В итоге гармонические колебания $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \omega)$ упругого слоя, возбуждаемые поверхностной нагрузкой \mathbf{q} , можно представить в виде:

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3.15)$$

Здесь $\mathbf{K}(\alpha, z, \omega)$, $\mathbf{Q}(\alpha, \omega)$ – преобразования Фурье от матрицы Грина слоя и функции напряжений $\mathbf{q}(x)$, заданной на границе S_c , задача определения которой рассматривается далее в §3.4.

Фурье-символ матрицы Грина свободного слоя с константами Ляме μ и λ и плотностью ρ при плоской постановке задачи имеет вид [90]:

$$\begin{aligned} K_{11}(\alpha, z) &= -\sigma_2 \left[\alpha^2 \gamma^2 (\sigma_{12} s_2 + \gamma^2 s_1) - \alpha^2 \gamma^4 c s_{21} + \alpha^4 \sigma_{12} s c_{21} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma^2 \alpha^2 \sigma_{12} c s_{12} + \gamma^6 s c_{12} \right] / \Delta_H, \\ K_{12}(\alpha, z) &= -i\alpha \left[-\sigma_{12} \gamma^2 (\alpha^2 c_1 + \gamma^2 c_2) - \alpha^2 \sigma_{12}^2 s s_{12} + \gamma^4 \sigma_{12} c c_{12} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2 \alpha^2 \sigma_{12} c c_{21} - \gamma^6 s s_{21} \right] / \Delta_H, \\ K_{21}(\alpha, z) &= -i\alpha \left[\sigma_{12} \gamma^2 (\alpha^2 c_2 + \gamma^2 c_1) + \alpha^2 \sigma_{12}^2 s s_{21} - \gamma^4 \sigma_{12} c c_{21} - \right. \end{aligned}$$

$$K_{22}(\alpha, z) = \sigma_1 \left[-\gamma^2 \alpha^2 \sigma_{12} c c_{12} + \gamma^6 s s_{12} \right] / \Delta_H, \quad (3.16)$$

$$- \gamma^2 \alpha^2 \sigma_{12} c c_{12} + \gamma^6 s s_{12} \Big] / \Delta_H,$$

где формулы для

$$\Delta_H = 2\mu \left[-2\alpha^2 \sigma_{12} \gamma^4 - (\gamma^8 + \alpha^4 \sigma_{12}) s s_{12} + 2\alpha^2 \sigma_{12} \gamma^4 c c_{12} \right],$$

$$s_n = \text{sh}(\sigma_n, z), \quad c_n = \text{ch}(\sigma_n, z), \quad n = 1, 2,$$

$$c s_{mn} = \text{ch}(\sigma_m H) \text{sh}(\sigma_n (H + z)), \quad m, n = 1, 2,$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \kappa_2^2 / 2, \quad \sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}, \quad \kappa_n = \omega / v_n, \quad n = 1, 2$$

выражаются через скорости P - и S -волн в слое $v_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $v_2 = \sqrt{\mu/\rho}$. Кроме того, $c s_{mn}$, $s s_{mn}$, $s c_{mn}$ определяются аналогично $c s_{mn}$: c сопоставляется гиперболическому косинусу ch , а s — синусу sh с такими же аргументами. В общем случае вид Фурье-символа матрицы Грина зависит от свойств среды, для их определения разработаны эффективные численные алгоритмы [29, 100].

Таким образом, перемещения в слое будут отыскиваться на основе представления 3.15, а перемещения в пьезоактуаторе на основе МКЭ ВПТ, описанного в главе 2. В таком случае вектор-функция нагрузки $\mathbf{q}(x_1)$ является неизвестной и должна определяться из решения связанной задачи. Далее, в §3.4. описывается построение такого решения на основе МКЭ ВПТ с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева соответственно. Однако есть и упрощенные модели, которые позволяют описать волновые поля, генерируемые пьезоактуатором в волноводе, без решения контактной задачи.

§3.3. УПРОЩЕННЫЕ МОДЕЛИ

Для описания динамического поведения пьезоэлектрического актуатора могут быть использованы shear-lag и pin-force модели, которые обеспе-

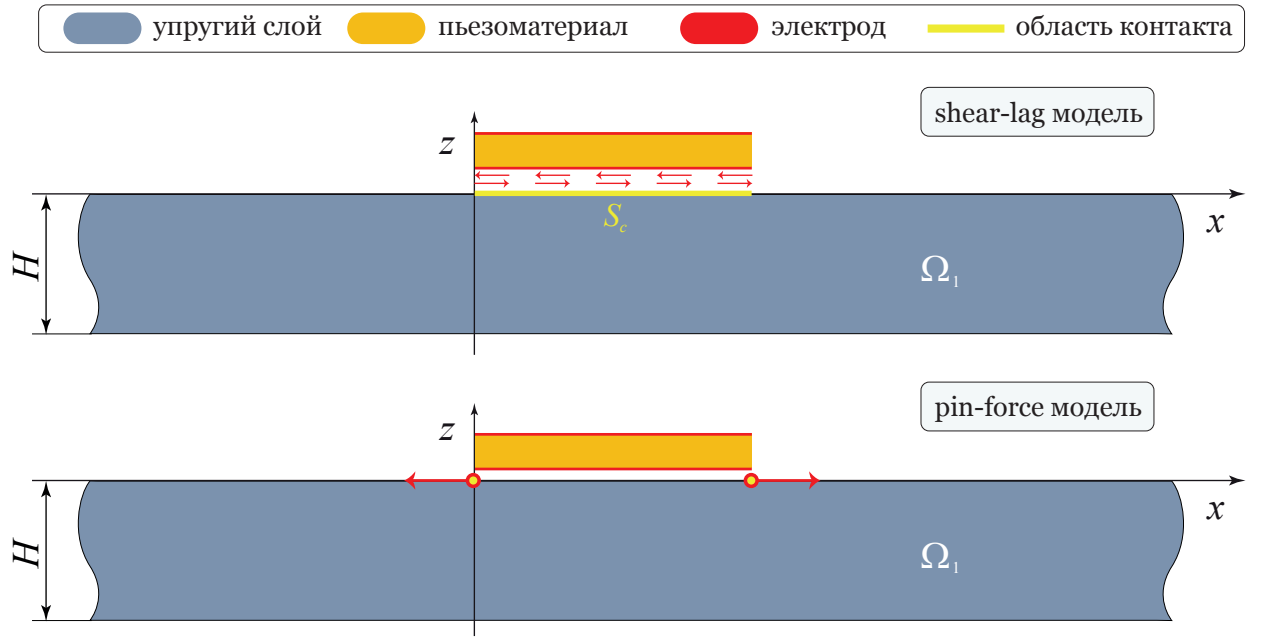


Рис. 3.3: Схематическое описание моделей shear-lag и pin-force

чивают достаточно точное решение на невысоких частотах и в случае тонкого актуатора [21]. Для задачи, геометрия которой приведена на рис. 3.3, с областью $S_d = \emptyset$, при условии наличия клеевой прослойки толщиной h_b с модулем сдвига μ_b , может использоваться модель shear-lag. Передача деформаций от актуатора к слою и обратно осуществляется через соединительный слой толщиной h_b , действующий как сдвиговый слой, в котором механическое воздействие передается как сдвиговое воздействие. При этом в векторе нагрузки отсутствуют нормальные напряжения, а сдвиговая компонента выражается согласно формуле [21, с. 419]:

$$\tau_{xz}(x) = \tau_A \left(\Gamma_A \frac{\sinh \Gamma_A x}{\cosh(\Gamma_A w/2)} \right), \quad 0 \leq x \leq w, \quad (3.17)$$

$$\tau_A = \frac{\psi_A}{\alpha_A + \psi_A} \cdot \frac{E_2 h}{1 - \nu_2^2} \varepsilon_{ISA}. \quad (3.18)$$

Здесь

$$\Gamma_A^2 = \frac{\mu_b}{h_b} \cdot \frac{\alpha_A + \psi_A}{\psi_A} \cdot \frac{1 - \nu_2^2}{E_2 h},$$

выражается через

$$\psi = \frac{E_1 H}{1 - \nu_1^2} \bigg/ \frac{E_2 h}{1 - \nu_2^2},$$

при этом оба параметра зависят от модуля Юнга E_i и коэффициент Пуассона ν_i слоя ($i = 1$) и актуатора ($i = 2$), для расчета которых в пьезоактуаторе можно воспользоваться формулами [101]:

$$E_2 = \frac{1}{s_{11}}, \quad \nu_2 = -\frac{s_{12}}{s_{11}},$$

а также от величины ε_{ISA} , которая связана с деформациями, возникающими в актуаторе при подаче на него электрического импульса $V = V_2$ В, которые можно выразить через элемент тензора пьезоэлектрических постоянных d_{31} и толщину актуатора [21, с. 398]:

$$\varepsilon_{ISA} = -d_{31} \frac{V}{h}, \quad (3.19)$$

В случае, если слой клея очень тонкий, что, как правило, и бывает при контакте, близком к идеальному, то предельным переходом модель shear-lag может быть преобразована в модель pin-force. Так, известно [21], что при $h_b \rightarrow 0$, сдвиговые нагрузки σ_{xz} концентрируются на краях актуатора. В этом случае можно говорить об идеальном контакте и использовать модель точечных сил, в которой нагрузка концентрируется в бесконечно малых областях на концах актуатора [21]:

$$\tau_{xz}(x) = \tau_A [\delta(x - a) - \delta(x + a)]. \quad (3.20)$$

Важно отметить, что коэффициент α_A зависит от функций напряжений, деформаций и перемещений в слое. В задачах статики $\alpha_A = 4$, а в динамических задачах с высокими частотами функции перемещений в слое принимают более сложный вид, поэтому значение коэффициента α_A необходимо пересчитывать [21]. Кроме того, он может зависеть от частоты и свойств волновода.

§3.4. ГИБРИДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОДХОДА И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В соответствии с граничными условиями (3.7) и (3.8) напряжения в слое и в актуаторе на границе S_1 должны быть равны. Для обеспечения этого условия вводится неизвестная функция нагрузки $\mathbf{q}(x)$:

$$\sigma_{iz}^1(x, z) = \sigma_{iz}^2(x, z) = q_i(x), \quad (x, z) \in S_1, \quad (3.21)$$

причем $\mathbf{q}(x) = 0, x \in S_d$.

С помощью МКЭ ВПТ при известных значениях напряжений $\mathbf{q}(x)$ в узловых точках можно получить значения перемещений и напряжений во всем актуаторе. Имея ввиду “сшивку” решений на границе актуатора и слоя S_1 , где нормальные и касательные напряжения задаются функцией $\mathbf{q}(x)$, целесообразно ввести общее обозначение для $N_p = M_1 N + 1$ узловых точек на этой границе:

$$\chi_j = \frac{x_1^{l_1+1} - x_1^{l_1}}{2} \lambda_{i_1} + \frac{x_1^{l_1+1} + x_1^{l_1}}{2}, \quad j = I(l_1, i_1), \quad (3.22)$$

$$I(l_1, i_1) = N(l_1 - 1) + i_1,$$

здесь $I(l_1, i_1)$ – индекс для определения конкретной узловой точки на границе S_1 , $l_1 = \overline{1, M_1}$, $i_1 = \overline{1, N + 1}$, а λ_{i_1} определяются по формуле (2.18) в случае использования полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто или по формуле (2.25) при использовании аппроксимирующих функций на основе полиномов Чебышева. Для моделирования отслоения между актуатором и волноводом множество точек N_p разбивается на два подмножества: $N_p = N_c \cup N_d$, а точки, принадлежащие множествам N_c и N_d , обозначаются χ_j^c и χ_j^d соответственно. В общем случае, когда речь идет о границе S_1 , точки, принадлежащие множеству N_p , будут обозначаться как χ_j .

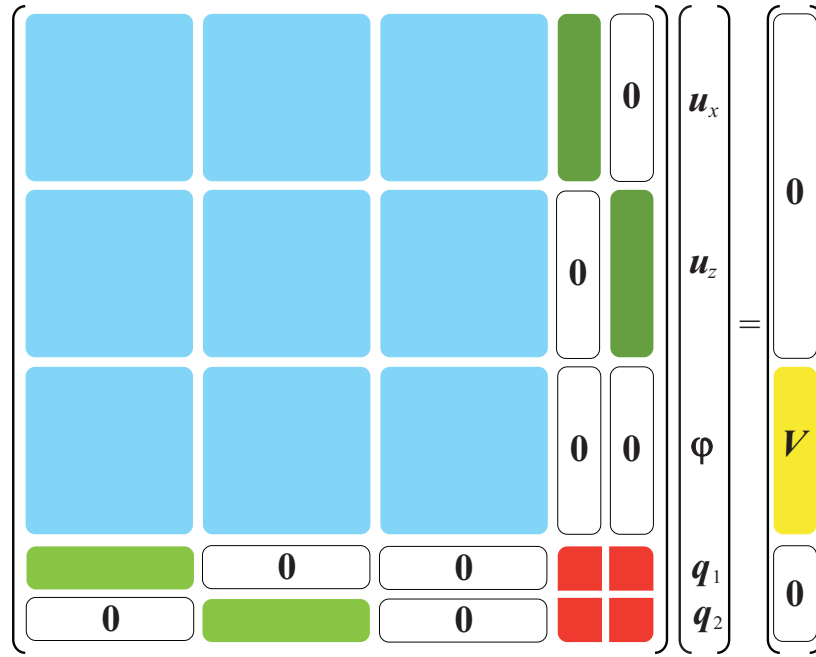


Рис. 3.4: Схема формирования СЛАУ для связанной модели

На рис. 3.4 представлена схема составления СЛАУ для решения связанной задачи с использованием МКЭ ВПТ и интегрального подхода, обшая для интерполяционных полиномов Чебышева и Гаусса-Лежандра-Лобатто. Поскольку для решения краевой задачи (3.1)–(3.9) используется неизвестная функция нагрузки (3.21), то в соответствии со схемой, описанной в главе 2 для МКЭ ВПТ, при составлении СЛАУ должны подставляться значения напряжений в узловых точках, то есть значения функции $\mathbf{q}(x)$ в узловых точках (3.22). В данном случае они записываются в вектор неизвестных, а СЛАУ, получаемая при использовании МКЭ ВПТ для актуатора с заданной нагрузкой (2.51), схематически представленная на рис. 2.4, расширяется путем добавления $2N_p$ уравнений. Верхний правый блок матрицы СЛАУ формируется из коэффициентов, возникающих при преобразовании интеграла по контуру уравнения (2.6) с учетом того, что функция нагрузки (3.21) является неизвестной и раскладывается по соответствующим базисным функциям. Нижний левый блок матрицы заполняется нулями, за исключением строк, сопоставимых узловым точкам

на границе S_1 , диагональные элементы которых равны единице. Нижний правый блок формируется из условий (3.9) на границе слоя и актуатора.

СЛАУ, получаемые при решении связанной задачи можно записать по аналогии с (2.51):

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{y} &= 0, \\ \widehat{\mathbf{A}}_2 \mathbf{y} &= \mathbf{V}, \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{y} &= 0,\end{aligned}\tag{3.23}$$

где обобщенный вектор $\mathbf{y}^T = \{\mathbf{u}_x^T, \mathbf{u}_z^T, \phi^T, \mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T\}$ в сравнении с (2.51) помимо значений компонент вектора перемещений $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_z$ и электрического потенциала ϕ дополняется значениями функций нагрузки \mathbf{q} в узловых точках. Соответственно, блоки $\widehat{\mathbf{A}}_1$ и $\widehat{\mathbf{A}}_2$ матрицы СЛАУ получают добавлением к $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ блоков, формируемых из разложения интеграла по контуру, в который входит вектор нагрузки. В матрицу \mathbf{A}_3 записываются коэффициенты разложения, возникающие из условия, описывающего контакт между актуатором и слоем (3.9). В правой части все элементы являются нулевыми за исключением вектора \mathbf{V} , получающегося как и в СЛАУ (2.51) для актуатора без подложки, при учете граничных условий на электрический потенциал.

Для моделирования динамического поведения отклеенного актуатора используется такая же схема решения, как и при идеальной адгезии актуатора со слоем. Для выполнения граничных условий (3.7) в случае отслоения, строки матрицы \mathbf{A}_3 , определяемой уравнениями (3.23), сопоставимые точкам χ_j^d на границе S_d , заполняются нулями, за исключением диагонального элемента, равного единице.

Для полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто наиболее простой подход заключается в использовании интерполяции $\mathbf{q}(x)$ сплайнами

$$s^+(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad s^-(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}\tag{3.24}$$

по значениям в N_p узловых точках χ_j на границе S_1 , определяемых по формуле (3.22):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x) = & \sum_{j=2}^{N_p-1} \mathbf{q}_j \left[s^+ \left(\frac{x - \chi_j}{\chi_{j+1} - \chi_j} \right) + s^- \left(\frac{x - \chi_j}{\chi_j - \chi_{j-1}} \right) \right] + \\ & + \mathbf{q}_1 s^+ \left(\frac{x - \chi_1}{\chi_2 - \chi_1} \right) + \mathbf{q}_{N_p} s^- \left(\frac{x - \chi_{N_p}}{\chi_{N_p} - \chi_{N_p-1}} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

В этом случае преобразование Фурье функции $\mathbf{q}(x)$ примет вид:

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \sum_{k=1}^{N_p} \mathbf{q}_j S_j(\alpha), \quad (3.26)$$

где $S_j(\alpha)$ вычисляется аналитически, используя формулы преобразования Фурье от функций $s^+(x)$ и $s^-(x)$ с учетом сдвига и масштабирования.

Интегральные представления для поля перемещений в слое после подстановки (3.26) в (3.15) принимают вид

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_p} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z, \omega) \mathbf{q}_j S_j(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Соответственно, для выполнения граничных условий (3.9) еще необходимо, чтобы в узловых точках χ_j^c выполнялось равенство:

$$\kappa \mathbf{u}_{i_1 l_1}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_p} \kappa \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z, \omega) S_j(\alpha) e^{-i\alpha \chi_{I(l_1 i_1)}^c} d\alpha \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{I(l_1 i_1)}. \quad (3.27)$$

В соответствии с этими условиями и формируется СЛАУ.

При использовании полиномов Чебышева в МКЭ ВПТ функция $\mathbf{q}(x)$ интерполируется полиномами $\varphi^i(x)$ (2.24):

$$\mathbf{q}(x) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{i_1=1}^{N+1} \mathbf{q}^{l_1 i_1} \varphi^{l_1 i_1}(x). \quad (3.28)$$

При построении СЛАУ для решения связанной задачи значения этой функции в узловых точках χ_j (3.22) становятся неизвестными, но при этом в матрицу СЛАУ записываются коэффициенты разложения, стоящие при

$\mathbf{q}(x)$, которые находятся из интеграла по контуру уравнения (2.6). Далее рассматривается преобразование этого интеграла:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \nu_j dS = \\ = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial\Omega} v_i^s(\mathbf{x}) \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \nu_j dS. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ввиду граничных условий (3.5) нормальные и касательные напряжения равны нулю на всех границах, кроме границы S_1 , где нормаль равна $\boldsymbol{\nu} = \{0, -1\}$. Поэтому интеграл (3.29) принимает вид:

$$- \sum_{i=1}^2 \oint_{S_1} v_i^s(\mathbf{x}) q_i(x_1) dx_1 \Big|_{x_2=0}. \quad (3.30)$$

Неизвестные функции $q_i(x_1)$ находятся из разложения (3.28). После подстановки этого разложения в (3.30):

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^2 \int_{S_1} v_i^s(\mathbf{x}) \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{i_1=1}^{N+1} q_i^{l_1 i_1} \varphi^{l_1 i_1}(x_1) dS_1 = \\ = - \sum_{i=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{i_1=1}^{N+1} q_i^{l_1 i_1} \delta_{is} \int_{x_1^{l_1}}^{x_1^{l_1+1}} \varphi^{t_1 p_1}(x_1) \varphi^{t_2 p_2}(x_2) \varphi^{l_1 i_1}(x_1) dx_1 \Big|_{x_2=0} = \\ = \left[- \sum_{i=1}^2 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{i_1=1}^{N+1} \frac{1}{S_1^{t_1}} \delta_{is} \delta_{p_2 1} \delta_{t_2 1} \delta_{t_1 l_1} R_{p_1 i_1}^I \right] \cdot q_i^{l_1 i_1}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Коэффициенты, получаемые при преобразовании интеграла по контуру (3.29) с учетом того, что функция нагрузки (3.21) является неизвестной и раскладывается по соответствующим базисным функциям после подстановки в него (3.28), записываются в верхний правый блок в строки, соответствующие узловым точкам на границе контакта (3.22) ($p_2 = 1, t_2 = 1, s = 1, 2$). Нижний правый блок матрицы СЛАУ формируется с использованием интегрального подхода, при котором для нахождения полей перемещений

в слое необходимо вычислять преобразование Фурье от функции (3.28):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\alpha) &= \int_0^w \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{i_1=1}^{N+1} \mathbf{q}^{l_1 i_1} \varphi^{l_1 i_1}(x) e^{i\alpha x} dx = \\ &= \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{i_1=1}^{N+1} \mathbf{q}^{l_1 i_1} e^{i\alpha_1 c^{l_1}} \frac{1}{S_1^{l_1}} \sum_{m=0}^N \beta_{mi_1} \Psi_m^{l_1}(\alpha_1), \end{aligned} \quad (3.32)$$

здесь $S_1^{l_1} = 2/(x_1^{l_1+1} - x_1^{l_1})$ определяется согласно (2.27), а середина элемента $(l_1, 1)$ вдоль оси Ox обозначается через

$$c^{l_1} = \frac{x_1^{l_1+1} + x_1^{l_1}}{2},$$

$\Psi_m^{l_1}(\alpha)$ — преобразование Фурье полиномов Чебышева, масштабированных на элемент с номером $(l_1, 1)$:

$$\Psi_m^{l_1}(\alpha) = \int_{-1}^1 T_m(\xi_1^{l_1}) e^{i\alpha_1 \xi_1^{l_1}/S_1^{l_1}} d\xi_1^{l_1}. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.32) в (3.15), нетрудно получить представление для поля перемещений в слое:

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{i_1=1}^{N+1} \left[\frac{1}{2\pi S_1^{l_1}} \sum_{m=0}^N \beta_{mi_1} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z, \omega) \Psi_m^{l_1}(\alpha) e^{i\alpha(c^{l_1}-x)} d\alpha \right] \cdot \mathbf{q}^{l_1 i_1}. \quad (3.34)$$

Представление (3.34) далее используется для удовлетворения граничным условиям в области контакта актуатора и упругого слоя в узловых точках, рассчитанных для интерполяционных полиномов Чебышева. А равенство

$$\kappa \mathbf{u}_{i_1 l_1 1}^2 = \kappa \mathbf{u}^1(\chi_{I(l_1 i_1)}^c, 0, \omega) - \mathbf{q}_{I(l_1 i_1)}. \quad (3.35)$$

служит для формирования блоков СЛАУ: правый нижний блок заполняется на основе формулы (3.35).

§3.5. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ

Для решения задач о взаимодействии пьезоэлектрического сенсора с упругим слоем в настоящее время широко используются конечноэлемент-

ные пакеты инженерных программ, такие как COMSOL Multiphysics или ANSYS. С помощью этих пакетов можно получить гармоническое и нестационарное решение. Модель точечных сил также дает приемлемые результаты, особенно на низких частотах, и часто используется на практике. В настоящем параграфе приводятся графики сравнения расчетов, полученных с помощью разработанной связанной математической модели, с результатами, получаемыми на основе модели точечных сил и с помощью COMSOL. Здесь также приводится численный анализ сходимости перемещений и напряжений при различной адгезии, рассчитанных на основе гибридного подхода. В графиках ниже приводятся результаты расчетов для актуатора размерами $6 \times 0,2$ мм или $10 \times 0,2$ мм, за исключением рисунков 3.18 – 3.22, где приводятся графики зависимости напряжений от размеров сенсора. Константы пьезоматериала аналогичны описанным в §2.5., материал для слоя – алюминий ($E_1 = 69,9$ ГПа, $\nu_1 = 0,33$, $\rho_1 = 2730$ кг/м³).

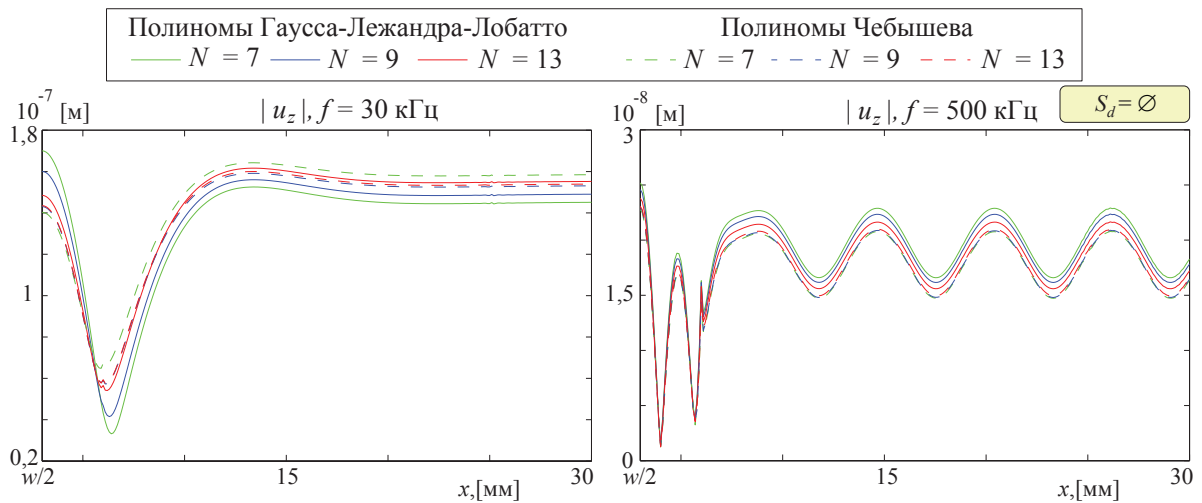


Рис. 3.5: Амплитуды вертикальных перемещений $|u_z(x, 0)|$ для частот $f = 30$ кГц и $f = 500$ кГц при идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $w = 6$ мм, $h = 0,2$ мм

Важным этапом численного анализа является оценка сходимости решения, а также проверка выполнения граничных условий. На рис. 3.5 представлены графики перемещений $|u_z|$ на верхней границе слоя, рассчитанные с помощью связанной модели с использованием интерполяционных

полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева разной степени N при $M_1 = 10$ на частотах 30 кГц и 500 кГц при идеальном контакте ($\kappa = \infty$). Можно видеть, что оба вида интерполяционных полиномов обеспечивают достаточно хорошую сходимость, причем с ростом степени N амплитуды перемещений, вычисленные с помощью полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева, сходятся к одному численному решению, но, как правило, с разных сторон. Поскольку конкретный вид интерполяционных полиномов оказывает незначительное влияние на результаты расчетов, далее в этом параграфе для оценки эффективности используемого метода в случае, когда $S_d = \emptyset$ приводятся расчеты, выполненные с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто.

На рис. 3.6–3.7 представлены графики перемещений $\text{Re}u_x$ и $\text{Re}u_z$ на границе S_1 в актуаторе на частотах 30кГц и 500кГц при разных N . Эти графики демонстрируют, что достаточно точное решение можно получить, используя интерполяционные полиномы степени $N = 11$ и $M_1 = 10$ элементов. Здесь и далее производится разбиение области Ω на элементы только по оси x , по оси z берется $M_2 = 1$. Поскольку высота актуатора меньше ширины как минимум на порядок, такое разбиение искомой области на элементы является приемлемым. Исключение составляют рис. 3.20–3.22, где представлена зависимость напряжений от высоты: если $h \geq H$, то используется разбиение области Ω по оси z на $M_2 = 3$ элемента.

На рис. 3.8 представлены графики перемещений $\text{Re}u_x$ и $\text{Re}u_z$, рассчитанных с помощью связанной модели, модели точечных сил и в системе COMSOL на верхней поверхности слоя $z = 0$ на частоте 30 кГц. Для расчетов на основе модели точечных сил коэффициент α_A в уравнении (3.18) был выбран $\alpha_A = 1$. Несмотря на то, что под актуатором значения перемещений u_z несколько отличаются, в дальней зоне все три модели показывают достаточно хорошее совпадение. Для перемещений u_x наблюдается

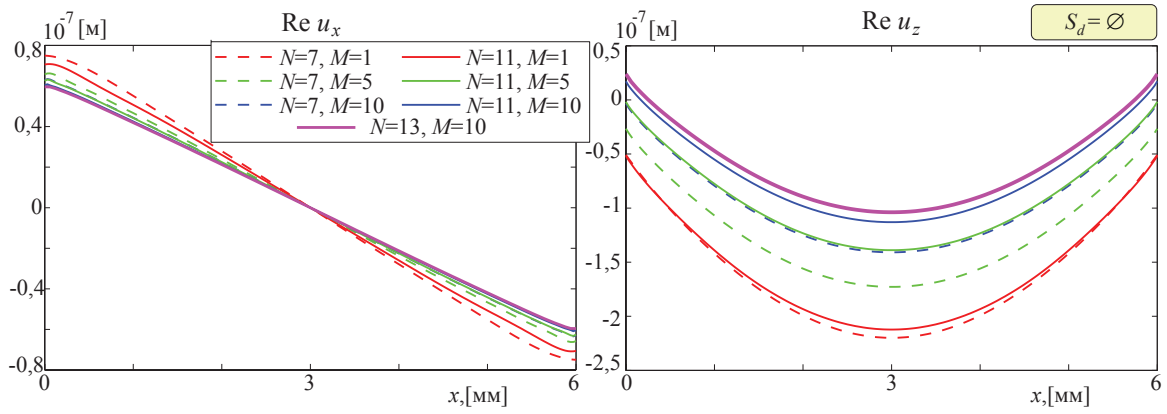


Рис. 3.6: Перемещения $\text{Re } u_x(x, 0)$ и $\text{Re } u_z(x, 0)$ на частоте 30 кГц при идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $w = 6$ мм, $h = 0,2$ мм

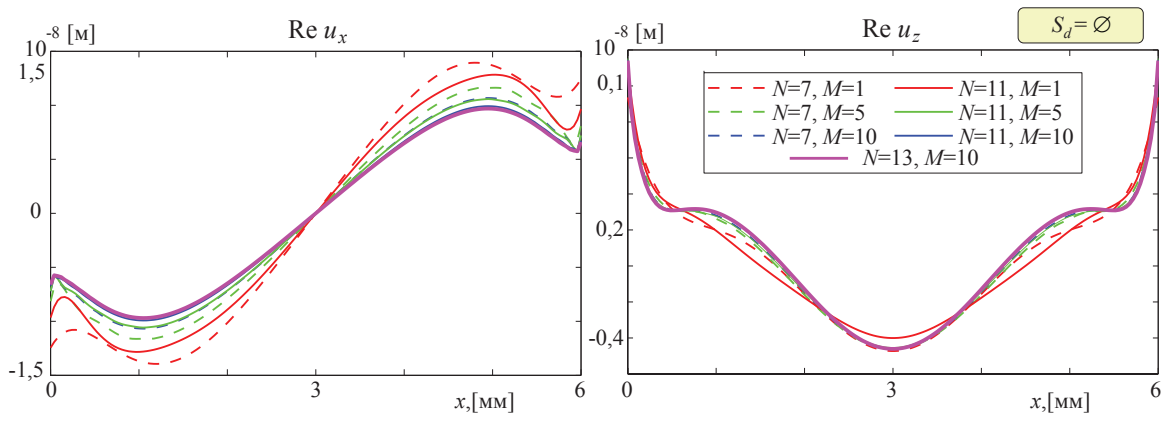


Рис. 3.7: Перемещения $\text{Re } u_x(x, 0)$ и $\text{Re } u_z(x, 0)$ на частоте 500 кГц при идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $w = 6$ мм, $h = 0,2$ мм

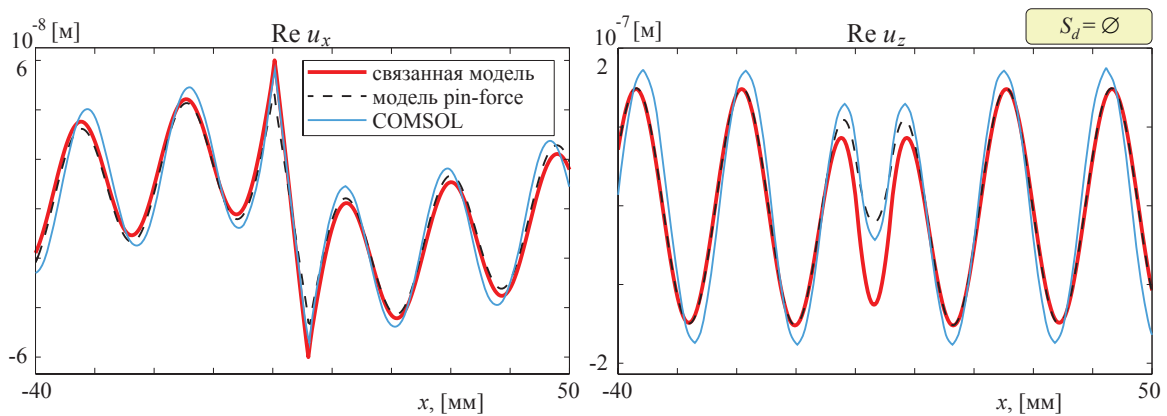


Рис. 3.8: Перемещения $\text{Re } u_x(x, 0)$ и $\text{Re } u_z(x, 0)$ на частоте 30 кГц при идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$), рассчитанные на основе МКЭ ВПТ, модели точечных сил и в системе COMSOL; $w = 6$ мм, $h = 0,2$ мм

аналогичная картина. Небольшое расхождение результатов по сравнению с COMSOL обуславливается тем, что в COMSOL вместо неограниченного по

оси Ox упругого слоя задается волновод прямоугольной формы конечной длины.

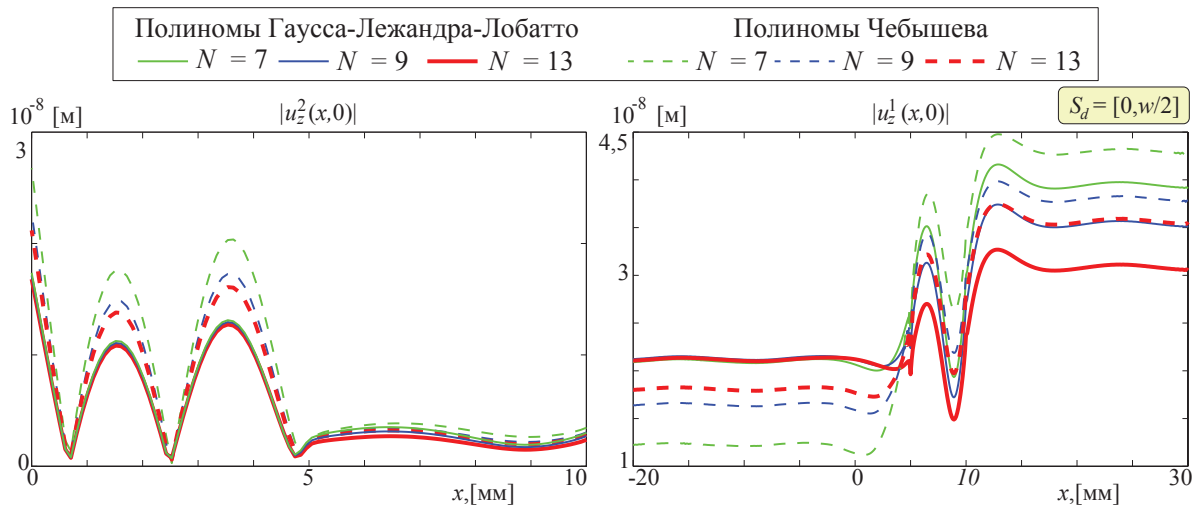


Рис. 3.9: Перемещения $|u_z(x, 0)|$ на нижней грани актуатора (слева) и верхней поверхности слоя (справа) на частоте 80 кГц при отслоении 50% актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$) и идеальном контакте на S_c ($\kappa = \infty$); $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм

На рис. 3.9 представлены графики перемещений $|u_z|$ в слое и актуаторе на границе S_1 в случае отслоения актуатора на 50% слева ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$), рассчитанные с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева при $M_1 = 10$. По этим рисункам видно, что сходимость перемещений, по сравнению с аналогичными графиками при идеальном контакте, несколько хуже, но, тем не менее, при использовании интерполяционных полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто степени $N = 13$ и $M_1 = 10$ элементов сходимость перемещений в актуаторе и в слое при $x < \frac{w}{2}$ достигается. Для получения графического подтверждения сходимости перемещений в слое при $x > \frac{w}{2}$ необходимо использование большего числа элементов и аппроксимирующих функций большей степени.

Поскольку волновые поля в слое строятся на основе функции нагрузки $\mathbf{q}(x)$, которая находится из решения связанной задачи и равна напряжениям на границе S_1 , то для контроля устойчивости модели необходимо провести численный анализ функций напряжений на нижней грани актуатора

S_1 и верхней поверхности слоя $z = 0$.

На рис. 3.10–3.11 представлены графики, иллюстрирующие сходимость расчетных значений напряжений: на графиках изображены $|\sigma_{xz}|$ и $|\sigma_{zz}|$ в логарифмической шкале на границе S_1 в актуаторе на частотах 30 кГц и 500 кГц, рассчитанные с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто. По рисункам видно, что достаточная сходимость достигается уже при использовании полиномов степени $N = 7$ и разбиении области на 10 элементов. Кроме того, можно проследить, что на более низких частотах амплитуды нормальных напряжений σ_{zz} почти на порядок ниже касательных напряжений σ_{xz} , что используется в упрощенных моделях, приведенных в §3.4. Тем не менее, для более высоких частот напряжения σ_{xz} и σ_{zz} одного порядка, и в данном случае для получения достоверных результатов расчетов необходимо разрабатывать связанные математические модели, учитывающие влияние как касательных, так и нормальных напряжений.

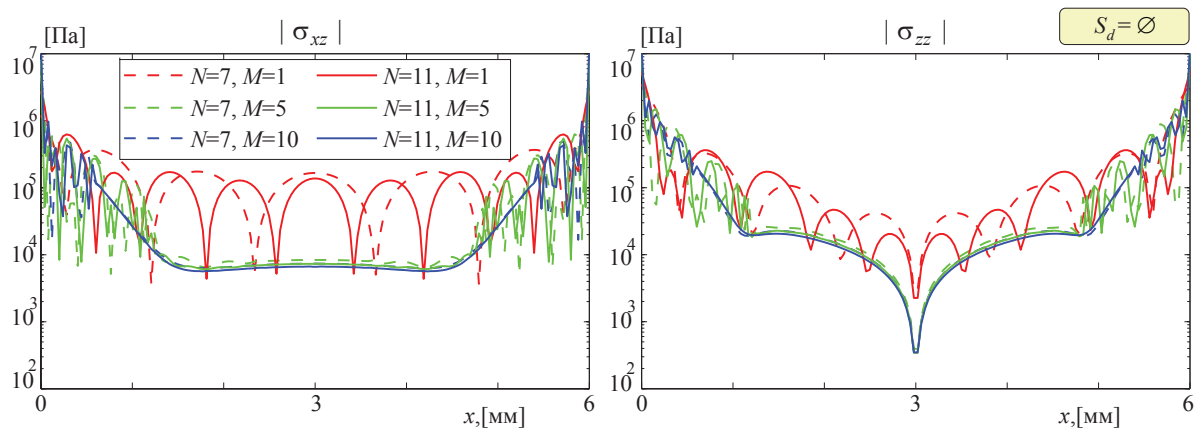


Рис. 3.10: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 30 кГц при идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $w = 6$ мм, $h = 0, 2$ мм

На рис. 3.12–3.13 представлены графики нормальных и касательных напряжений $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на нижней грани актуатора при неидеальном контакте на частотах 30 кГц и 500 кГц. Амплитуды напряжений несколько увеличиваются при уменьшении значения κ (ухудшении контак-

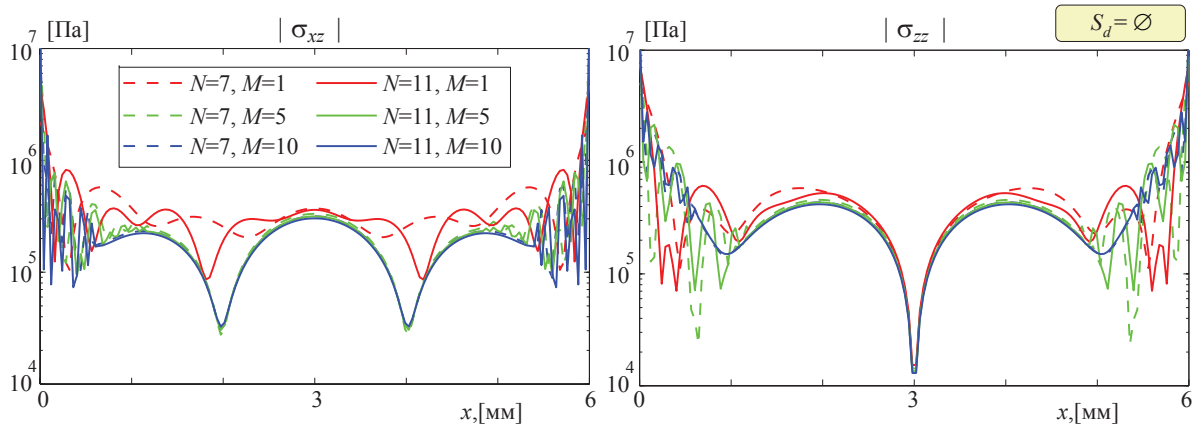


Рис. 3.11: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 500 кГц при идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $w = 6$ мм, $h = 0,2$ мм

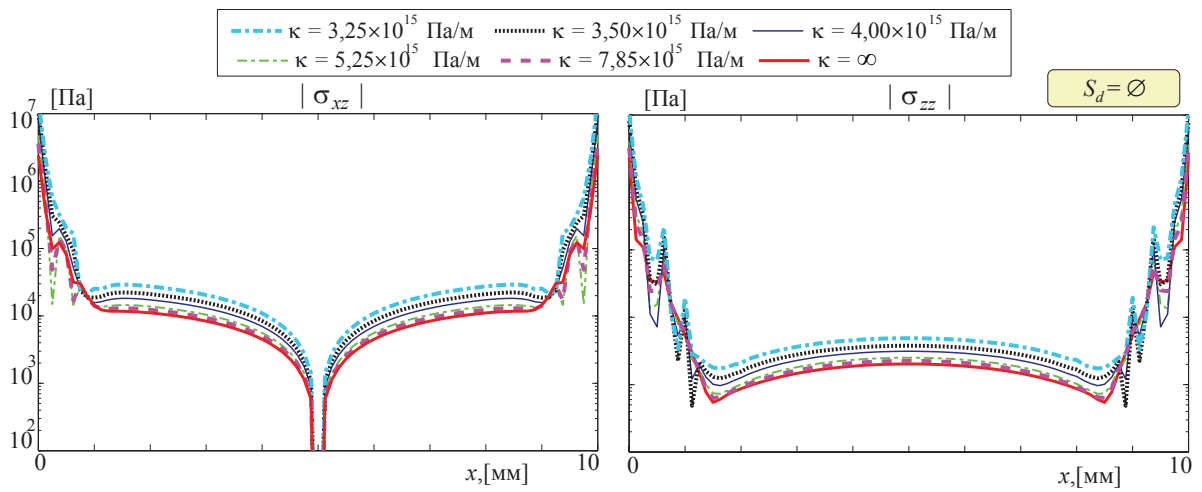


Рис. 3.12: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 30 кГц при неидеальном контакте на $S_c = S_1$; $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм

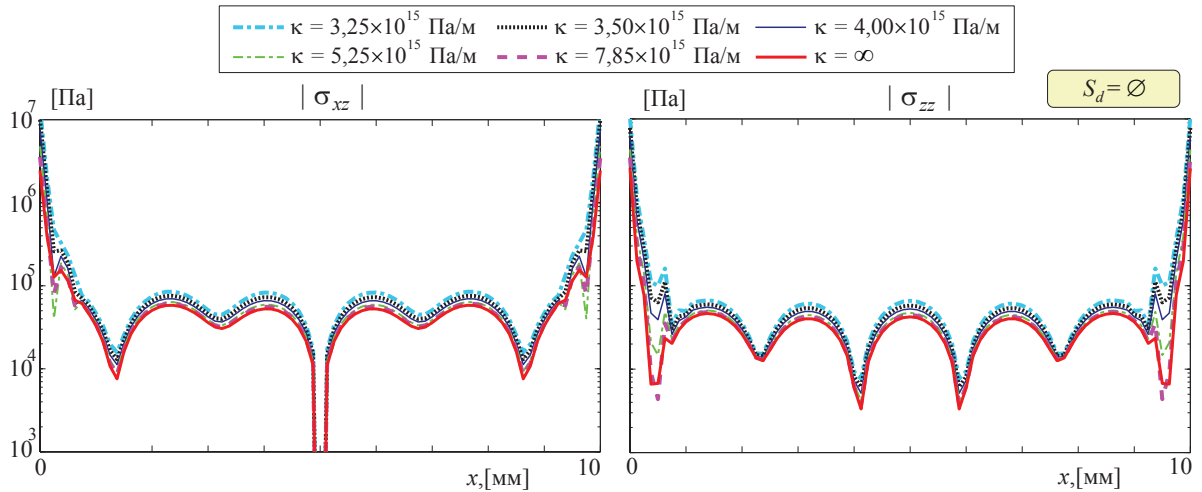


Рис. 3.13: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 500 кГц при неидеальном контакте на $S_c = S_1$; $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм

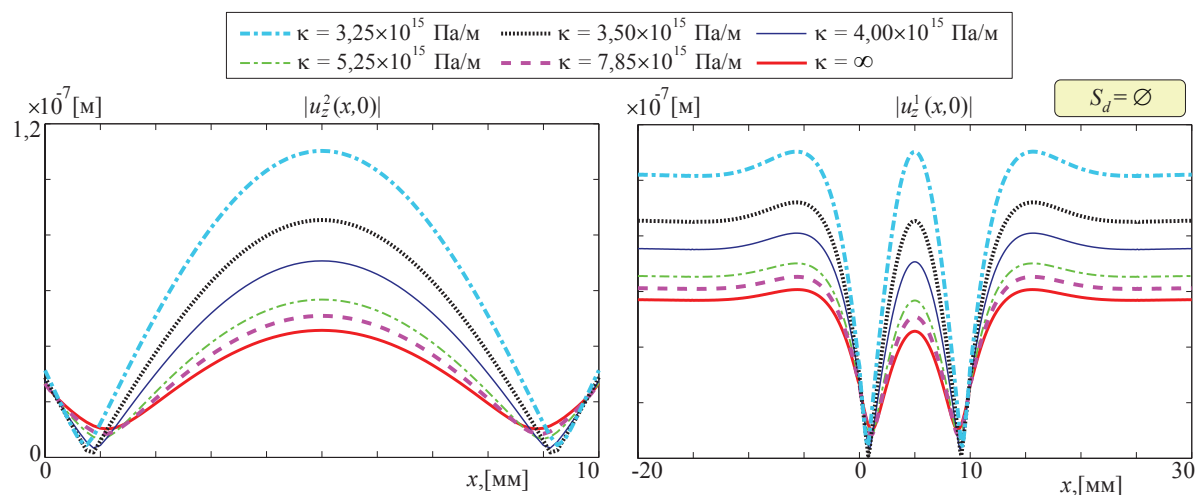


Рис. 3.14: Перемещения $|u_z(x, 0)|$ на нижней грани актуатора (слева) и верхней поверхности слоя (справа) на частоте 30 кГц при неидеальном контакте на S_c ; $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм

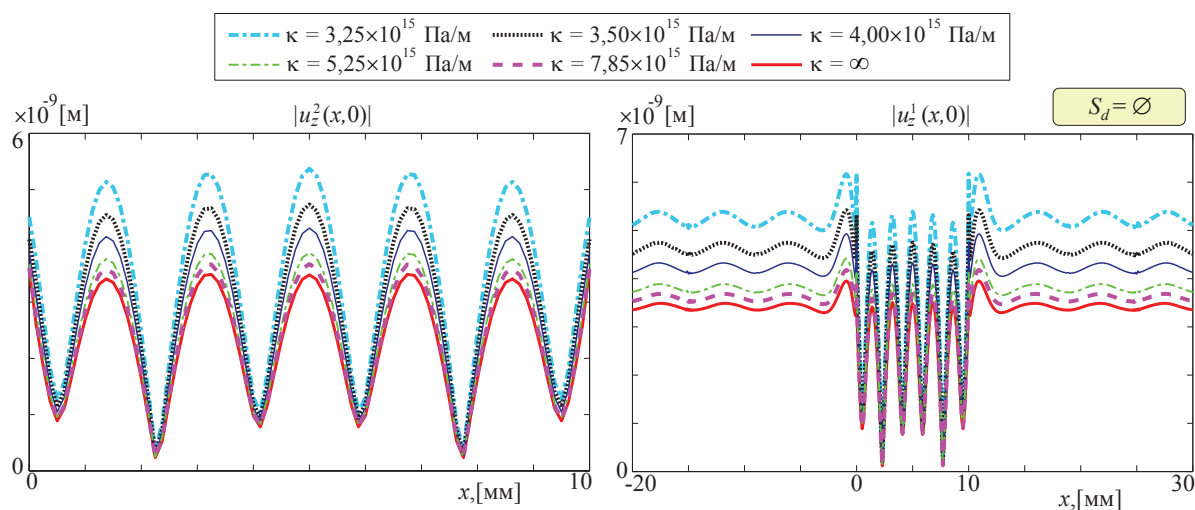


Рис. 3.15: Перемещения $|u_z(x, 0)|$ на нижней грани актуатора (слева) и верхней поверхности слоя (справа) на частоте 500 кГц при неидеальном контакте на S_c ; $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм

та). Аналогичный эффект наблюдается и на рис. 3.14–3.15, где представлены графики амплитуд перемещений $|u_z|$ в слое и в актуаторе на границе S_1 при различных значениях κ .

На рис. 3.16 представлены графики сравнения напряжений на верхней поверхности слоя $z = 0$, рассчитанные на основе связанной модели с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и в системе COMSOL, на частоте 80 кГц. По этому рисунку видно, что поведение напряжений,

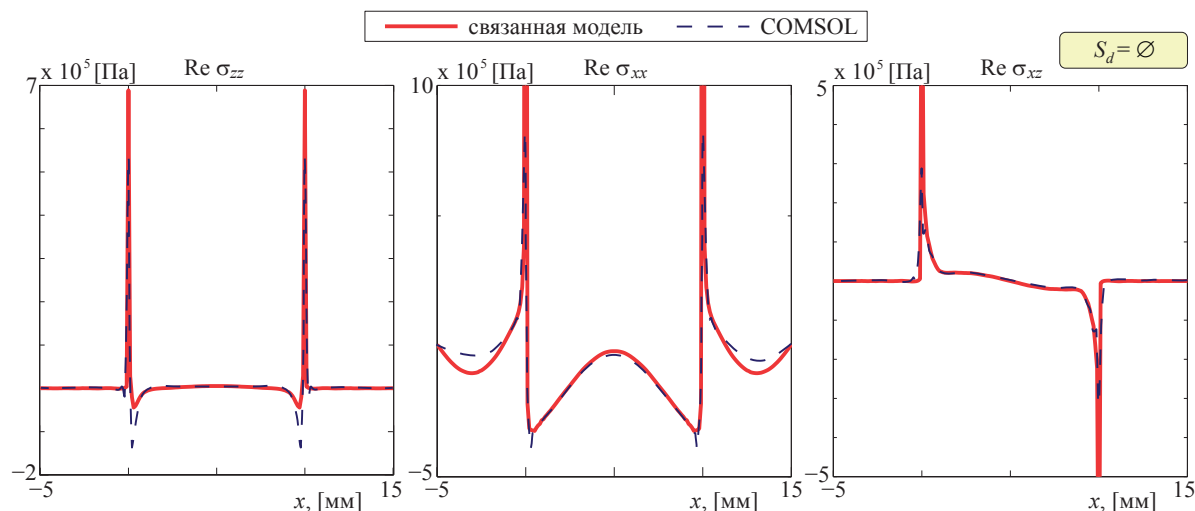


Рис. 3.16: Напряжения $\sigma_{zz}(x, 0)$, $\sigma_{xx}(x, 0)$ и $\sigma_{xz}(x, 0)$ на частоте 80 кГц, рассчитанные с использованием МКЭ ВПТ и в системе COMSOL при идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм

рассчитанных двумя разными методами, совпадает. Относительно значений напряжений, можно отметить, что при идеальном контакте напряжения на границе контакта имеют сингулярность у краев сенсора [21], и результаты расчетов на основе решения связанной задачи, содержащие более высокие значения амплитуд напряжений, являются более точными по сравнению с результатами, полученными в среде COMSOL.

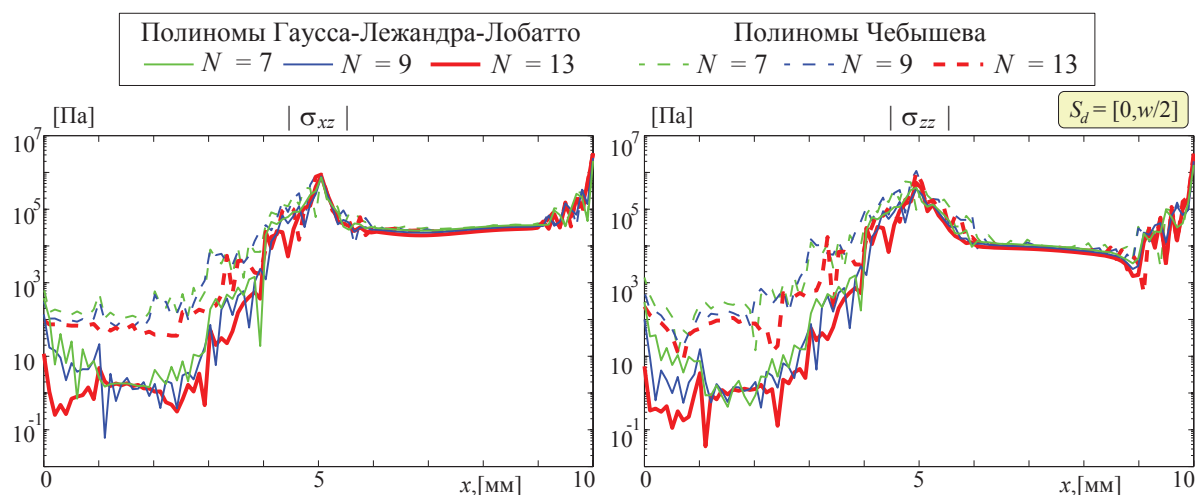


Рис. 3.17: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 80 кГц при отслоении актуатора на 50% ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$) и идеальном контакте на S_c ($\kappa = \infty$); $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм

На рис. 3.17 представлены графики напряжений в логарифмической

шкале, рассчитанные при отслоении актуатора от слоя на 50% ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$). В точке $x = \frac{w}{2}$ происходит переход от граничных условий (3.7) к условиям (3.8), что при численном моделировании сопровождается некоторой погрешностью решения. Тем не менее, при использовании полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто моделируемые значения напряжений быстрее сходятся к граничным условиям в области отслоения, по сравнению с аналогичным решением, полученным при использовании полиномов Чебышева.

Для изучения влияния ширины w и высоты h пьезоактуатора на нормальные и касательные напряжения, возникающие в области S_1 после возбуждения актуатора электрическим импульсом, были построены графики зависимости напряжений σ_{xz} и σ_{zz} на границе S_1 от размеров сенсора. На рис. 3.18–3.19 представлены графики нормальных и касательных напряжений в актуаторе при фиксированной высоте $h = 0,2$ мм, рассчитанные на частотах 30 и 500 кГц. На рис. 3.20–3.21 можно видеть аналогичные графики, но построенные при фиксированной ширине $w = 10$ мм. Рис. 3.18–3.21 иллюстрируют напряжения в логарифмической шкале, рассчитанные для случая идеального контакта. Анализируя эти графики можно заметить, что, во-первых, ширина актуатора оказывает существенно меньшее влияние на напряжения, чем высота. Во-вторых, с ростом высоты актуатора обе функции напряжений σ_{xz} и σ_{zz} принимают более сложный вид; в то же время касательные напряжения σ_{xz} уменьшаются, а нормальные напряжения σ_{zz} остаются величиной того же порядка. Таким образом, можно сделать вывод, что с помощью упрощенной модели точечных сил можно достаточно точно рассчитывать перемещения, при относительно низких частотах и для тонких накладок ($h \lesssim 1$ мм). Сделанные выводы в значительной мере согласуются с результатами, приведенными в работах [6, 21, 32, 35].

На рис. 3.22 представлены графики зависимости напряжений в актуаторе от его высоты в случае отслоения актуатора от волновода, рассчи-

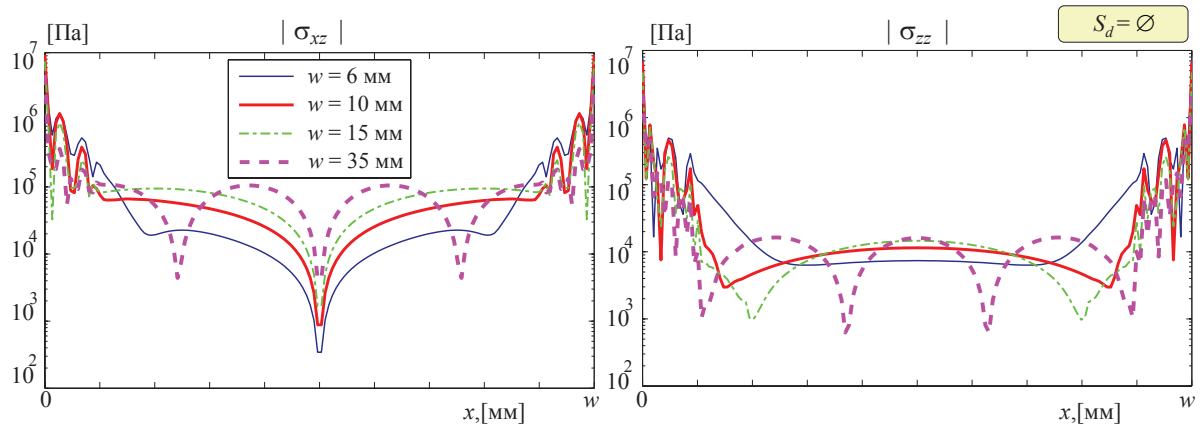


Рис. 3.18: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 30 кГц при различной ширине w актуатора и идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $h = 0,2$ мм

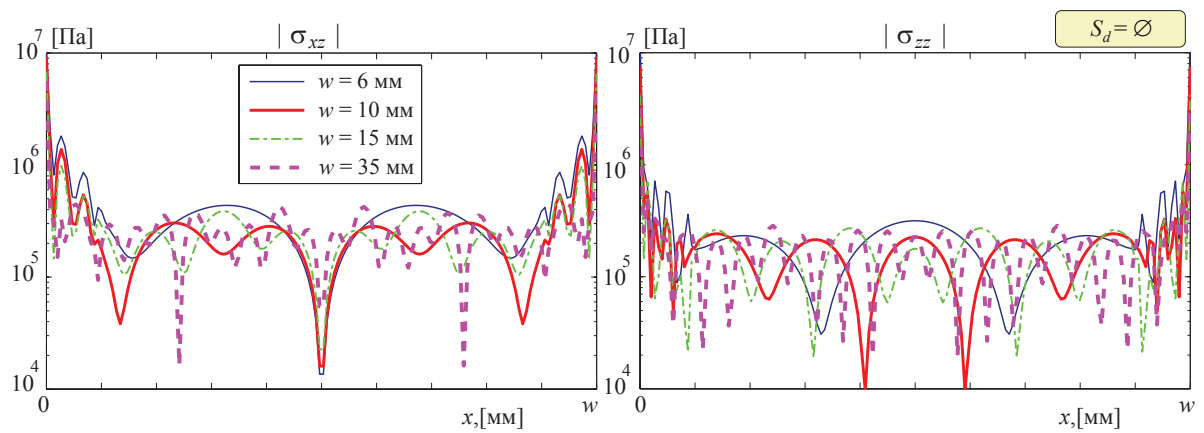


Рис. 3.19: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 500 кГц при различной ширине w актуатора и идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $h = 0,2$ мм

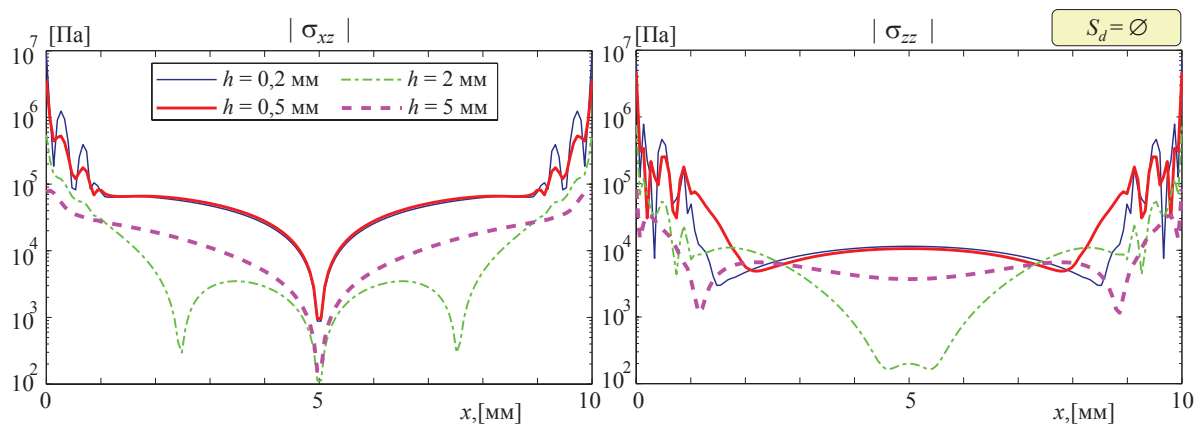


Рис. 3.20: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 30 кГц при различной высоте h актуатора и идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $w = 10$ мм

танные с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто. Можно видеть, что с ростом высоты актуатора ухудшается выполнение гранич-

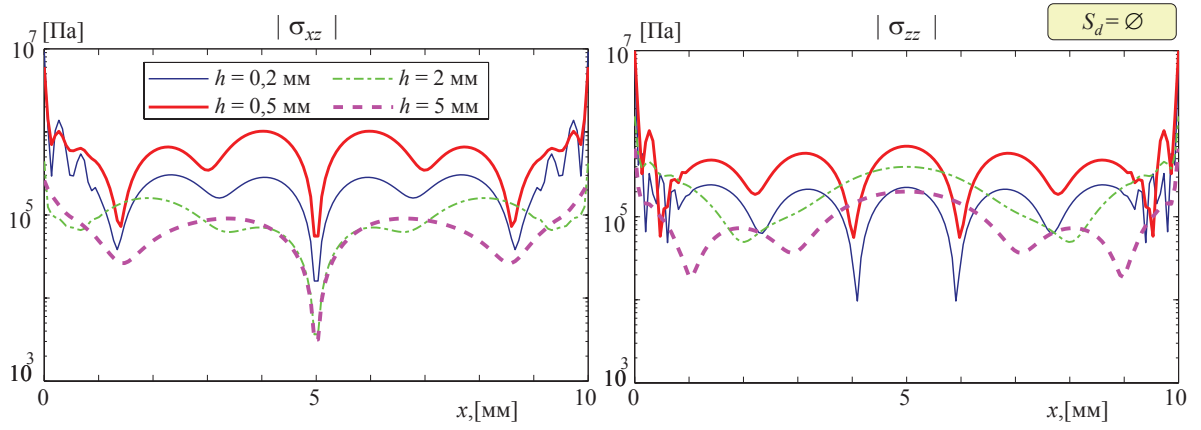


Рис. 3.21: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 500 кГц при различной высоте h актуатора и идеальном контакте на $S_c = S_1$ ($\kappa = \infty$); $w = 10$ мм

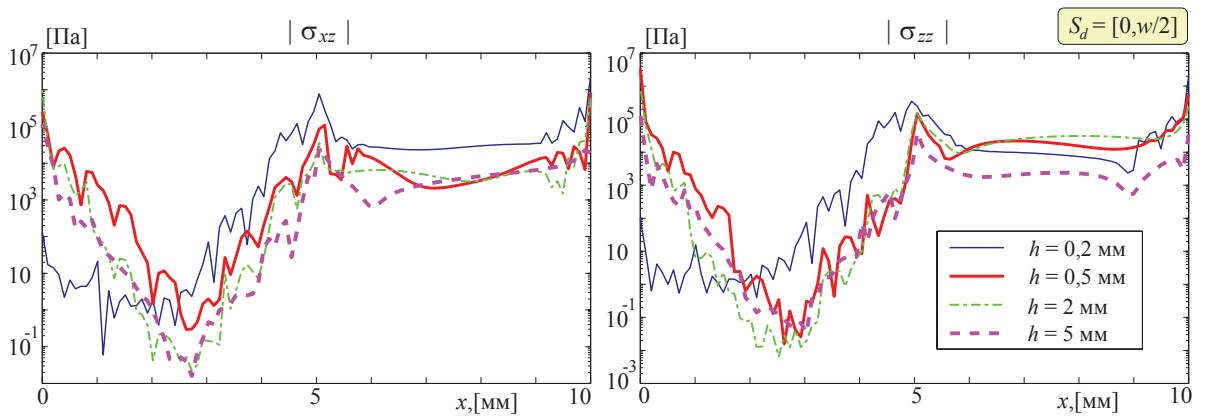


Рис. 3.22: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 80 кГц при различной высоте h актуатора и идеальном контакте на S_c ($\kappa = \infty$); $S_d = [0, \frac{w}{2}]$, $w = 10$ мм

ных условий (3.7), и амплитуды напряжений в точках на концах актуатора сопоставимы между собой.

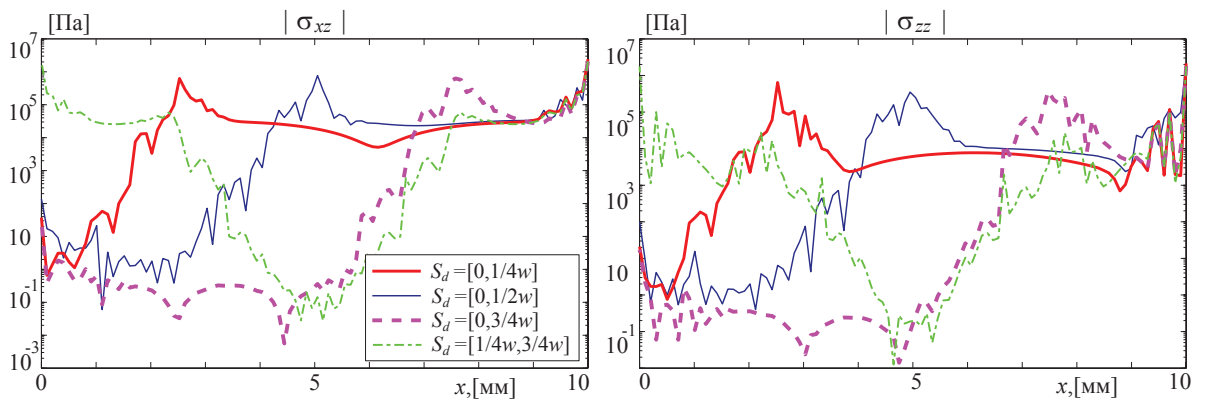


Рис. 3.23: Напряжения $|\sigma_{xz}(x, 0)|$ и $|\sigma_{zz}(x, 0)|$ на частоте 80 кГц при разной области отслоения S_d и идеальном контакте на S_c ($\kappa = \infty$); $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм

На рис. 3.23 представлены графики зависимости напряжений в актуаторе от размера и положения области отслоения, рассчитанные на основе связанной модели с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто. Граничные условия (3.7) выполняются с одинаковой степенью точности при разной области контакта между актуатором и слоем.

Проведенный численный анализ позволяет сделать выводы о достоверности гармонического решения задачи (3.1)–(3.9) с разной областью контакта S_c , рассчитываемого с использованием гибридного подхода. Амплитуды волновых полей, полученные при использовании связанной модели в случае идеального контакта, сравнивались с аналогичными данными, рассчитанными в системе COMSOL и с помощью упрощенной модели точечных сил. Кроме того, для дополнительного контроля использовалось два вида интерполяционных полиномов, которые дали практически одинаковые результаты. Анализ численного решения при разной области контакта также показал хорошую сходимость и удовлетворительное совпадение результатов моделирования при использовании различных интерполяционных полиномов.

Для более полной оценки достоверности настоящей модели проводилось сравнение нестационарного решения, полученного на основе гибридного подхода, с экспериментальными данными. Подробно проведение эксперимента и экспериментальной верификации моделей описывается в главе 4.

§3.6. ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПОЛОСОВЫМИ ПЬЕЗОАКТУАТОРАМИ, И РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

При изучении волновых явлений в упругих телах важным этапом является рассмотрение циркуляции потока волновой энергии [102]. В каждой точке пьезоэлектрического тела вектор плотности потока энергии \mathbf{e} (вектор

Умова-Пойнтинга) при нестационарных колебаниях имеет вид [103]:

$$e_j = -\frac{\partial u_i}{\partial t} \sigma_{ij} + (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_j,$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы комплексной амплитуды электрического и магнитного полей соответственно. При переходе к установившимся гармоническим колебаниям производится осреднение за период колебаний $T = 2\pi/\omega$, и вектор плотности потока энергии определяется формулой

$$e_j = -\frac{\omega}{2} \text{Im} (u_i \sigma_{ij}^* + D_j \phi^*);$$

здесь и далее звёздочка обозначает операцию комплексного сопряжения.

Для потока энергии, переносимого при гармонических колебаниях точек упругой среды через поверхность S в направлении нормали \mathbf{n} , справедливо выражение [12, 104]:

$$E = \iint_S e_n(\mathbf{x}) dS.$$

Средний за период колебаний поток энергии E^0 , поступающей от поверхностного источника (актуатора, описываемого одной из рассмотренных выше моделей) в слоистый волновод, получается, если в качестве поверхности S взять его верхнюю поверхность $z = 0$:

$$E^0 = \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha) \mathbf{Q}^*(\alpha^*) d\alpha. \quad (3.36)$$

При неравномерном отслоении актуатора могут быть введены также энергетические коэффициенты распределения энергии κ^+ и κ^- , что позволяет также обеспечить дополнительный контроль численных расчётов, используя закон сохранения энергии ($\kappa^+ + \kappa^- = 1$). Коэффициенты распределения энергии $\kappa^\pm = E^\pm / E^0$ определяются как отношение усреднённого по времени потока энергии через сечение волновода $x = \pm x_\infty$

$$E^\pm = \int_{-H}^0 e_x(x = \pm x_\infty, z) dz$$

к энергии E^0 . Здесь $x_\infty > w$ — некоторая удаленная от места приложения нагрузки S_1 точка.

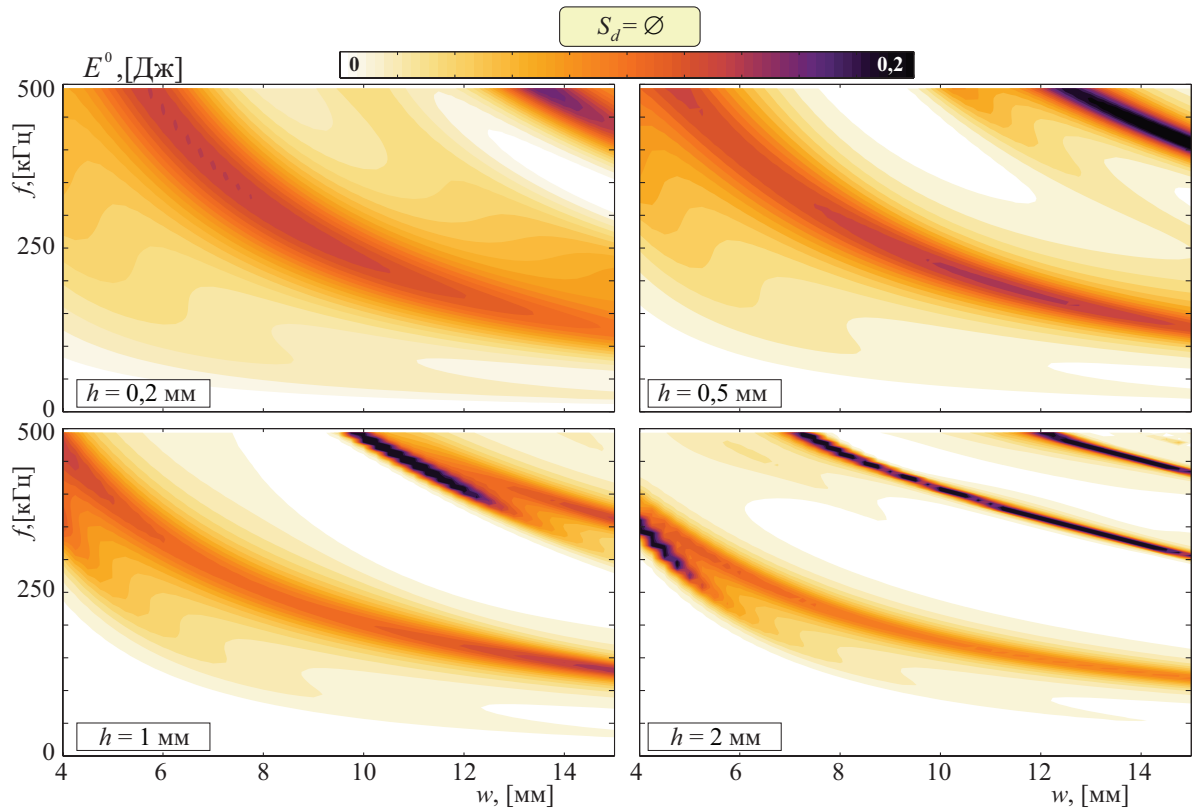


Рис. 3.24: Линии уровня поверхности энергии $E^0(f, w)$ для приклеенного актуатора ($S_d = \emptyset$) при различных h

Для выявления резонансных явлений и изучения взаимодействия между актуатором и подложкой далее рассматривается влияние параметров задачи (h, w, S_d, ω) на закачиваемую в подложку энергию E^0 и коэффициенты распределения энергии κ^\pm . Последние не имеет смысла рассматривать если $S_d = \emptyset$, так как в этом случае $\kappa^+ = \kappa^- = 0,5$. Рис. 3.24 иллюстрирует влияние толщины h и ширины w актуатора на зависимость E^0 от частоты. На рис. 3.24–3.27 приведены линии уровня E^0 , на которых более темные участки соответствуют большим значениям, а светлые – меньшим, для κ^+ используется другая цветовая шкала (от синего к красному). При для построении линий уровня, изображенных на рис. 3.24–3.27, использовалась сетка 50×100 точек.

На всех поверхностях хорошо видны темные полосы различной ширины гиперболического вида, которые соответствуют максимуму закачиваемой в слой энергии. Данные локальные максимумы расположены близко к траекториям комплекснозначных резонансных частот, которые могут быть рассчитаны как нули определителя матрицы СЛАУ, возникающей при решении контактной задачи (3.23). Белые области соответствуют значениям $E^0 < 0,02$ Дж.

При идеальном контакте (рис. 3.24) количество резонансных частот в фиксированном частотном диапазоне растет с увеличением толщины и ширины актуатора. Для большей толщины h на поверхностях проявляются непересекающиеся резонансные траектории, что соответствует результатам, полученным для актуатора без подложки в главе 2.

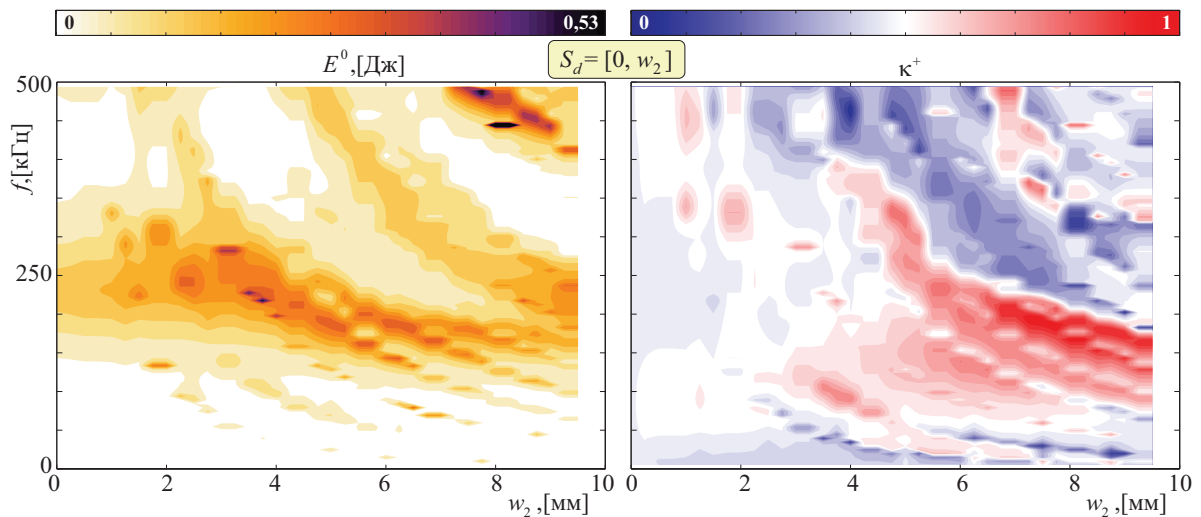


Рис. 3.25: Линии уровня поверхностей энергии $E^0(f, w_2)$ и коэффициент прохождения $\kappa^+(f, w_2)$ для частично отклеенного актуатора ($S_d = [0, w_2]$)

На рис. 3.25–3.27 изображены линии уровня энергии E^0 , а на рис. 3.25 и 3.26 еще и коэффициенты прохождения κ^+ в зависимости от частоты f , а также от параметра, характеризующего отслоившуюся часть (w_1, w_2 и Δw). В первом рассматриваемом случае (рис. 3.25) предполагается полностью отклеенным отрезок $[0, w_2]$, при этом на $[w_2, w]$ – условия идеального

контакта. При увеличении w_2 количество резонансных частот в рассматриваемом диапазоне возрастает, неравномерность распределения энергии (влево и вправо от актуатора) растет. Наиболее неравномерно актуатор излучает энергию в окрестности локальных максимумов E^0 , соответствующих резонансным колебаниям.

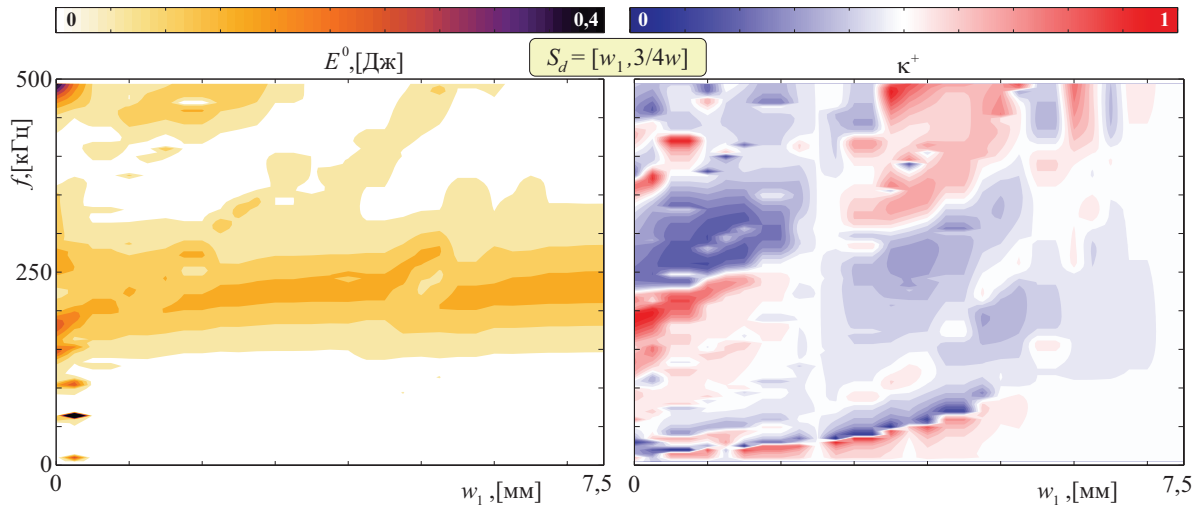


Рис. 3.26: Линии уровня поверхностей энергии $E^0(f, w_1)$ и коэффициент прохождения $\kappa^+(f, w_1)$ для частично отклееного актуатора ($S_d = [w_1, \frac{3w}{4}]$)

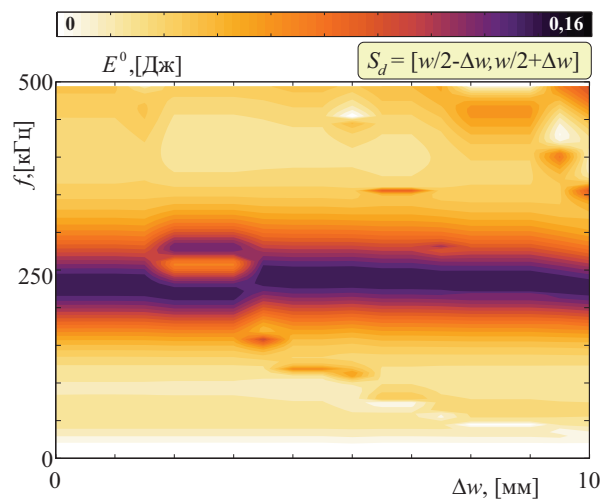


Рис. 3.27: Линии уровня поверхностей энергии $E^0(f, \Delta w)$ для частично отклееного актуатора ($S_d = [\frac{w}{2} - \Delta w, \frac{w}{2} + \Delta w]$)

Во втором случае (рис. 3.26 и 3.27) рассматривается ситуация когда оба края актуатора приклеены, отклеенной оказывается часть интерфейса между актуатором и подложкой, соответственно $S_d = [w_1, 3/4w]$ и

$S_d = [\frac{w}{2} - \Delta w, \frac{w}{2} + \Delta w]$. При этом можно видеть, что влияние ширины зоны отклейки достаточно мало. Исключения составляют несколько резонансных траекторий, разрезающих широкую полосу видную на графиках $E^0(f, \Delta w)$ и $E^0(f, w_1)$ примерно в окрестности 250 кГц. Эта полоса соответствует идеальному контакту актуатора, см. рис. 3.24.

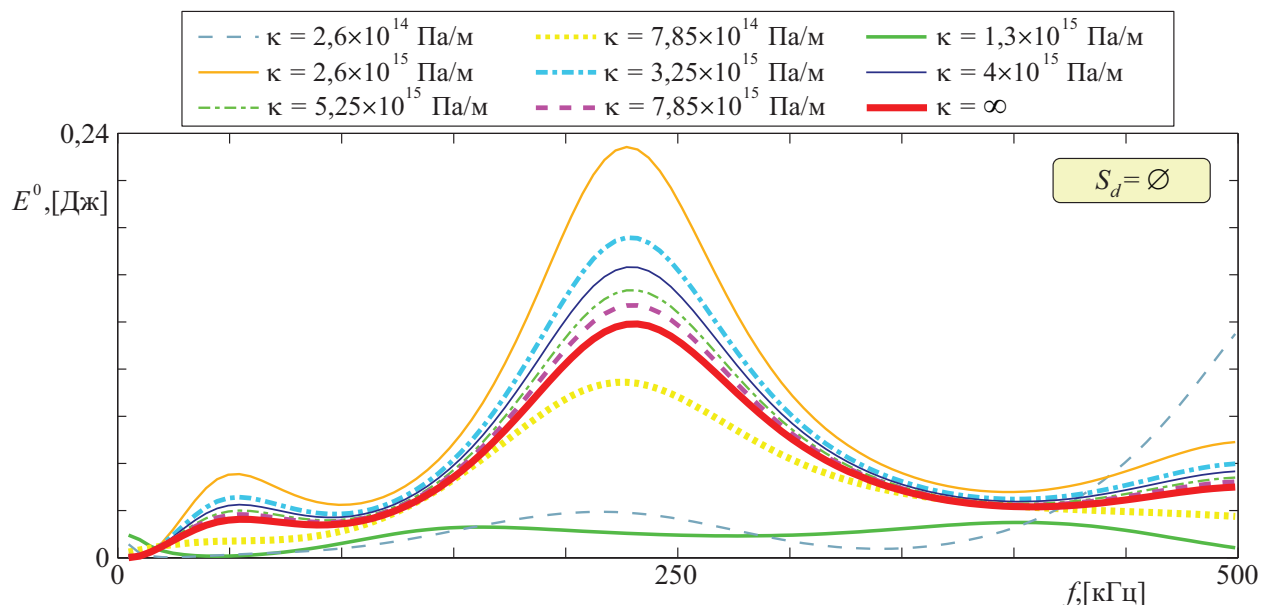


Рис. 3.28: Зависимость $E^0(f)$ для актуатора ($S_d = \emptyset$) при различной адгезии κ

Для качественной иллюстрации влияния адгезии на контакт актуатора с подложкой на рис. 3.28 приведены зависимости E^0 от частоты f для разных значений жесткости в пружинных граничных условиях (3.9). Можно видеть, что с уменьшением жесткости κ значение энергии, закачиваемой в слой увеличивается для всех частот при значениях $\kappa \gtrsim 2 \cdot 10^{15}$ Па. В этом диапазоне изменения κ сохраняется положение локальных максимумов, соответствующих резонансным колебаниям. При $\kappa \lesssim 2 \cdot 10^{15}$ Па поведение $E^0(f)$ может отличаться весьма значительно, включая положение локальных максимумов.

ГЛАВА 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АКТУАТОРОВ С УПРУГИМ ВОЛНОВОДОМ

§4.1. СХЕМА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

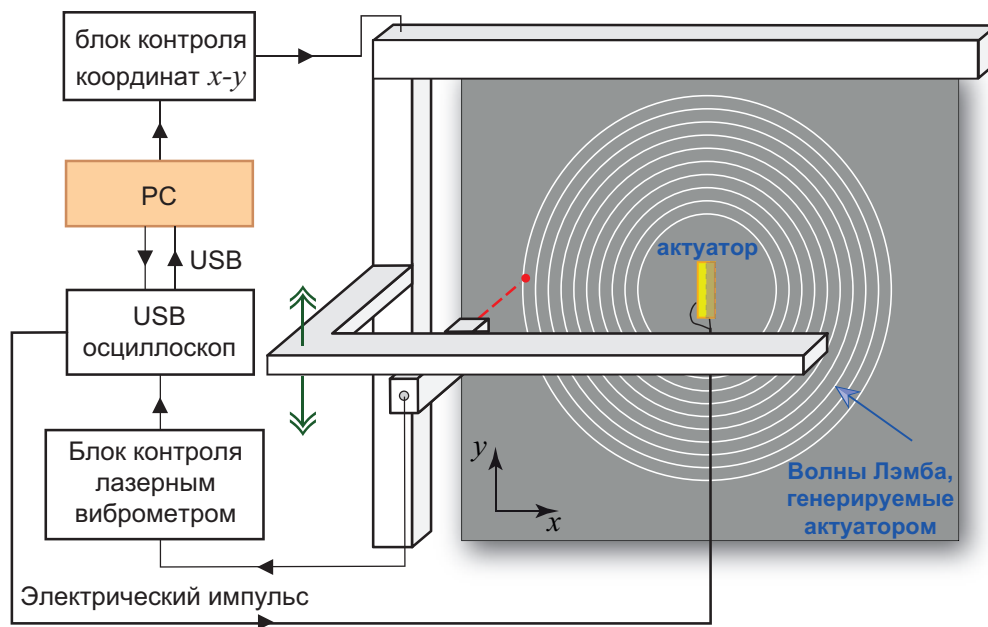


Рис. 4.1: Схема проведения эксперимента

Для изучения волновых явлений и верификации разработанной модели на основе МКЭ ВПТ и интегрального подхода была проведена серия экспериментов для идеально приклеенного и отклеенного пьезоактуаторов. Общая схема проведения эксперимента изображена на рис. 4.1. Для измерения волн Лэмба, генерируемых в пластине пьезоактуатором при подаче на него электрического импульса, использовалась установка с лазерным виброметром, позволяющая измерять вертикальные скорости перемещений $\dot{u}_z(\mathbf{x}, t)$ на поверхностях волновода ($z = 0$ и $z = -H$), см. рис. 4.2.

На алюминиевую пластину размерами 500 мм×500 мм и толщиной 1 мм был специальным образом приклеен прямоугольный пьезоактуатор размерами 70 мм×10 мм×0,2 мм, см. рис. 4.3. На актуатор подается элек-



Рис. 4.2: Установка, используемая для проведения эксперимента (фотография)

трический сигнал $p(t)$ вида (3.3): $N_c = 5$ циклов косинуса, сглаженных окном Ханна с центральной частотой f_0 . Ввиду обратного пьезоэлектрического эффекта электрический импульс вызывает механические перемещения пластины, измеряемые с помощью лазерного виброметра. Для удобства введена декартова система координат в соответствии с предыдущими разделами: оси Ox и Oy соответственно перпендикулярны и параллельны длинной стороне актуатора, а ось Oz перпендикулярна плоскости пластины, на которой закреплен актуатор.

Измерения проводились вдоль середины актуатора $y = 0$ при $-200 \leq x \leq 200$ с обеих сторон пластины $z = \{-H, 0\}$ с шагом 0,5 мм, на центральных частотах $f_0 = 80$ кГц и $f_0 = 180$ кГц. Для каждой точки выполнялось 9 измерений, что позволило затем обеспечить приемлемое отношение сигнал/шум путем их усреднения для всех повторений. При проведении эксперимента невозможно точно определить время подачи электрического импульса, хотя известно, что время начала записи каждого из измерений в ходе одного и того же эксперимента одинаково. Таким образом, при экспериментальной верификации модели, всегда необходимо учитывать возможный сдвиг по времени.

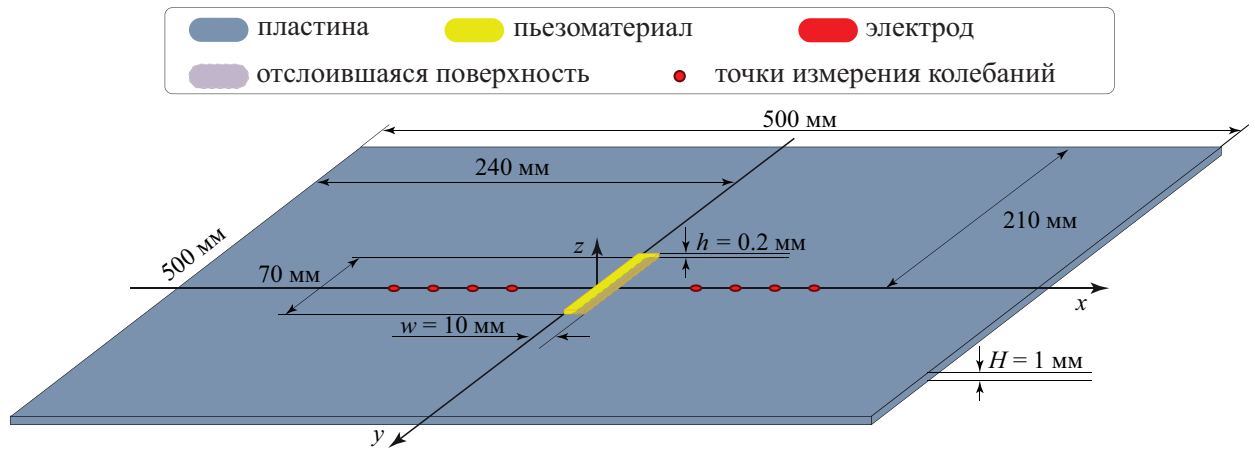


Рис. 4.3: Экспериментальный образец

Для проведения анализа взаимодействия актуатора с упругим волноводом при разной степени контакта пьезоэлемент был приклеен сначала только в области $S_c = [\frac{w}{2}, w]$, и неоклеен в области $S_d = [0, \frac{w}{2}]$. После проведения измерений скоростей перемещений пластины, сгенерированных неоклеенным актуатором, последний был доклеен, и измерения были проведены повторно. Таким образом были получены данные для полностью приклеенного и частично отклеенного актуатора. Для дополнительного контроля, было проведено два независимых эксперимента с одинаковой геометрией: было использовано две алюминиевые пластины одинаковых размеров и два пьезоактуатора одного производства.

Измеренные в ходе эксперимента скорости перемещений пластины, генерируемые полностью приклеенным или неоклеенным актуатором на частотах $f_0 = 80$ кГц и $f_0 = 180$ кГц, представлены на рис. 4.4 и 4.5. Можно заметить, что при отклейке актуатора сигнал приходит позже, а амплитуды скоростей перемещений пластины, генерируемых пьезоактуатором, выше (на частоте 80 кГц). Кроме того, изучая экспериментальные данные, можно отметить, что в случае неоклеенного пьезоактуатора наблюдаются дополнительные перемещения на поверхности пластины после того как был зарегистрирован основной волновой пакет, сгенерированный актуатором.

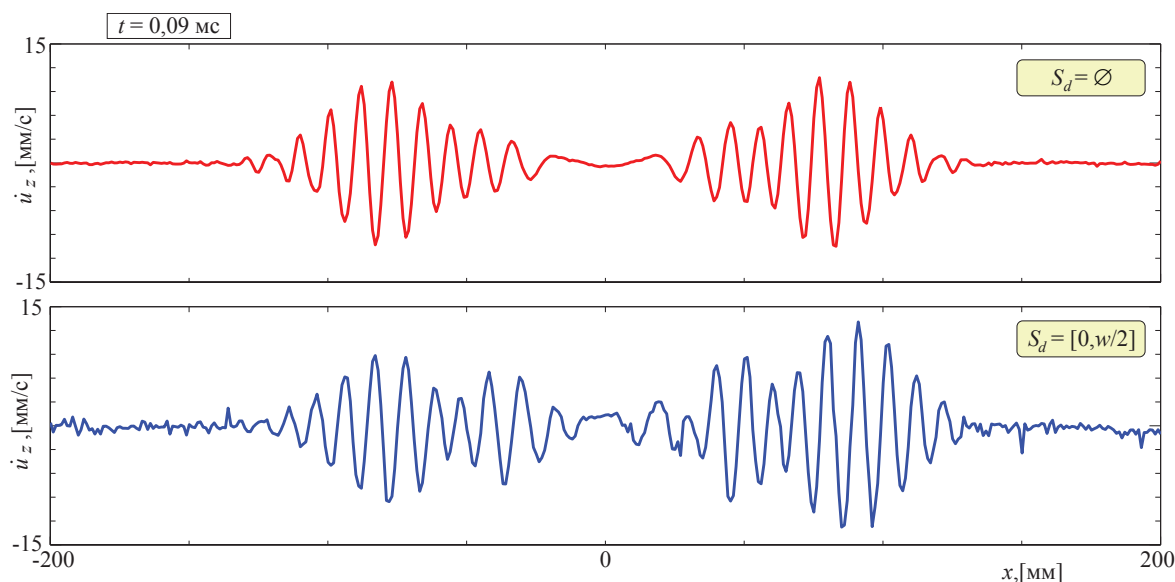


Рис. 4.4: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, 0, t = 0, 09 \text{ мс})$, измеренные при центральной частоте $f_0 = 80 \text{ кГц}$, для приклеенного ($S_d = \emptyset$) и наполовину отклеенного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

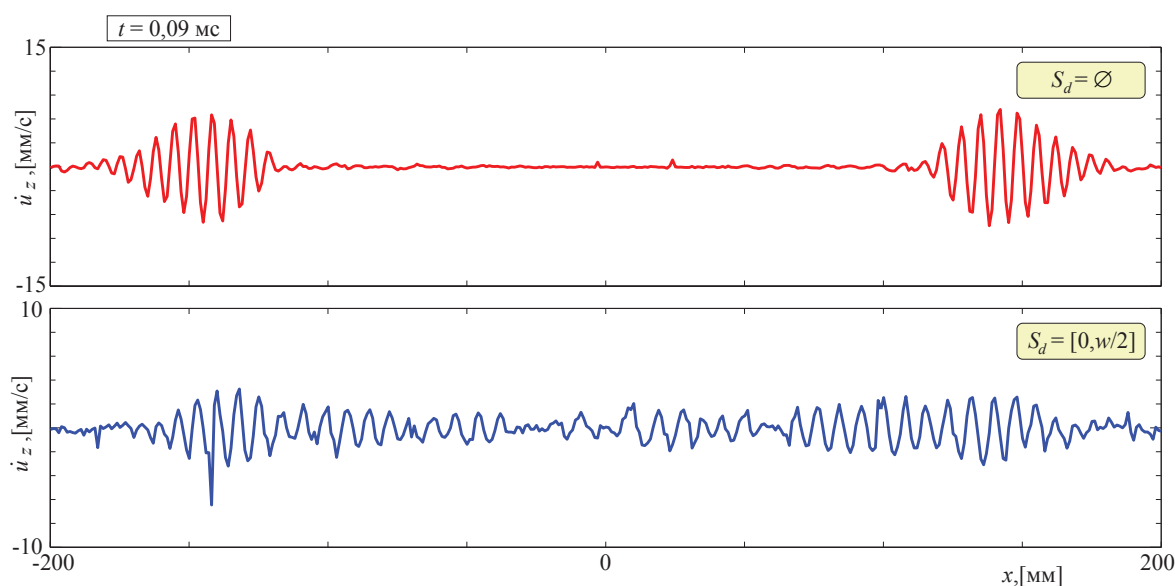


Рис. 4.5: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, 0, t = 0, 09 \text{ мс})$, измеренные при центральной частоте $f_0 = 180 \text{ кГц}$, для приклеенного ($S_d = \emptyset$) и наполовину отклеенного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

На рис. 4.6 представлены скорости перемещений пластины на частоте $f_0 = 80 \text{ кГц}$, зарегистрированные в ходе проведения двух независимых экспериментов. Измеряемые лазерным виброметром скорости перемещений на поверхности пластины оказываются практически идентичными в случае

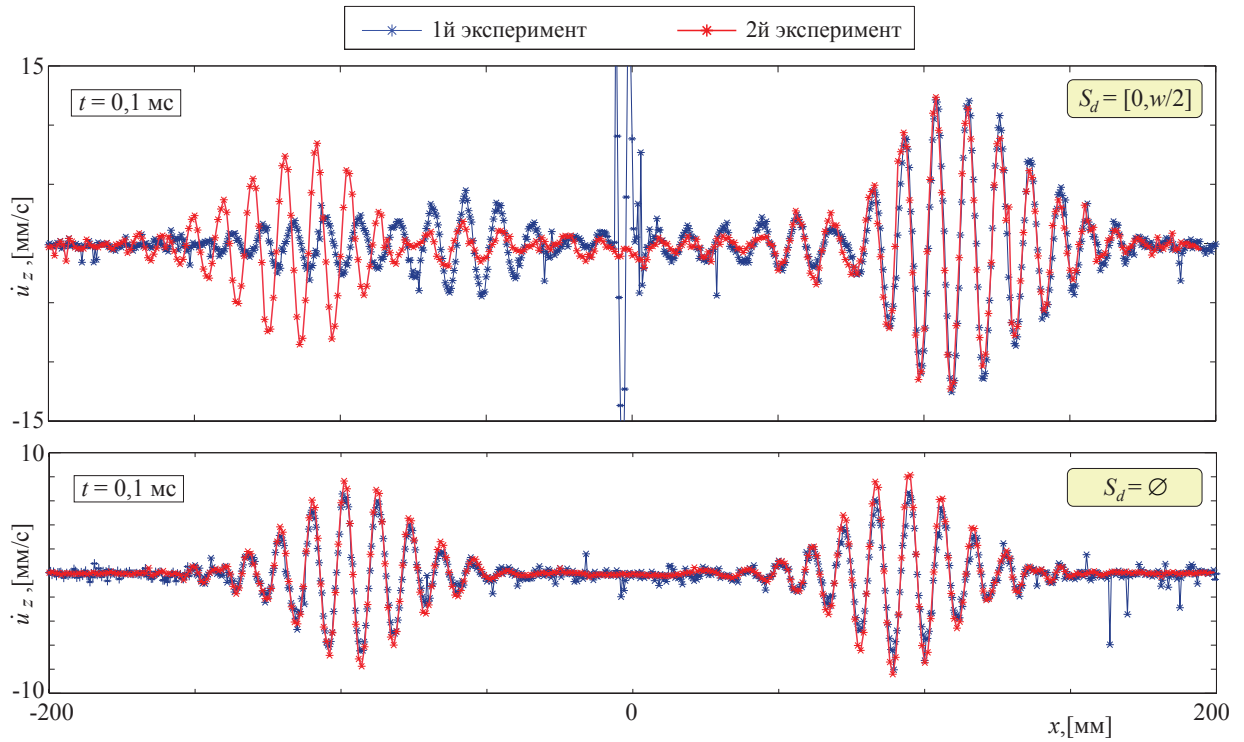


Рис. 4.6: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, 0, t = 0, 1 \text{ мс})$, измеренные при центральной частоте $f_0 = 80 \text{ кГц}$ во ходе проведения двух независимых экспериментов, для приклеенного ($S_d = \emptyset$) и наполовину отклеенного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

идеального контакта между актуатором и пластиной. В то же время, данные, полученные в ходе двух независимых экспериментов при недоклеенном актуаторе, различаются, причем при $x > \frac{w}{2}$ (со стороны приклеенной части актуатора) наблюдается хорошее совпадение результатов измерений, в то время как при $x < \frac{w}{2}$ (со стороны недоклеенной части) экспериментальные данные практически не совпадают. Такие результаты являются следствием того, что при изготовлении экспериментального образца очень сложно приклеить только половину актуатора с линией отклейки, проходящей ровно посередине актуатора.

Наиболее полно и наглядно характеризуют волновую картину, возникающую в ходе проведения экспериментов с центральными частотами $f_0 = 80 \text{ кГц}$ и 180 кГц , рис. 4.7–4.9. На этих рисунках приведены поверхности скоростей перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, -H, t)$ в

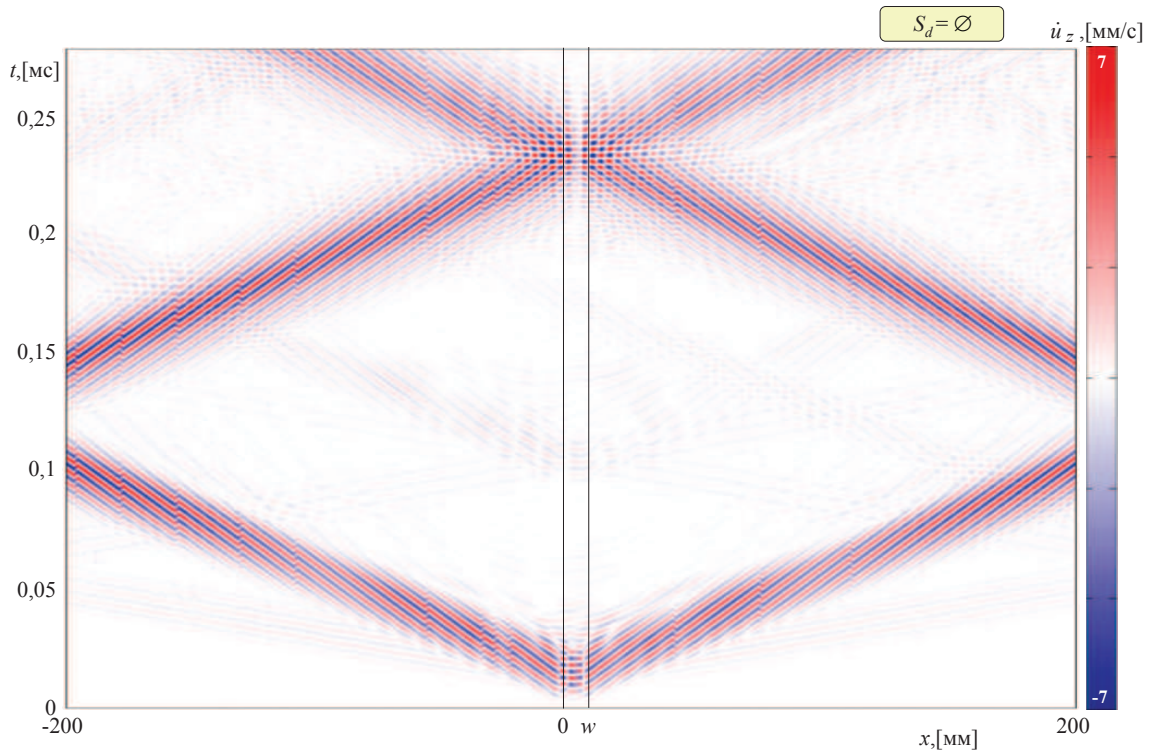


Рис. 4.7: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, -H, t)$, измеренные при $f_0 = 180$ кГц, для приклеенного актуатора ($S_d = \emptyset$)

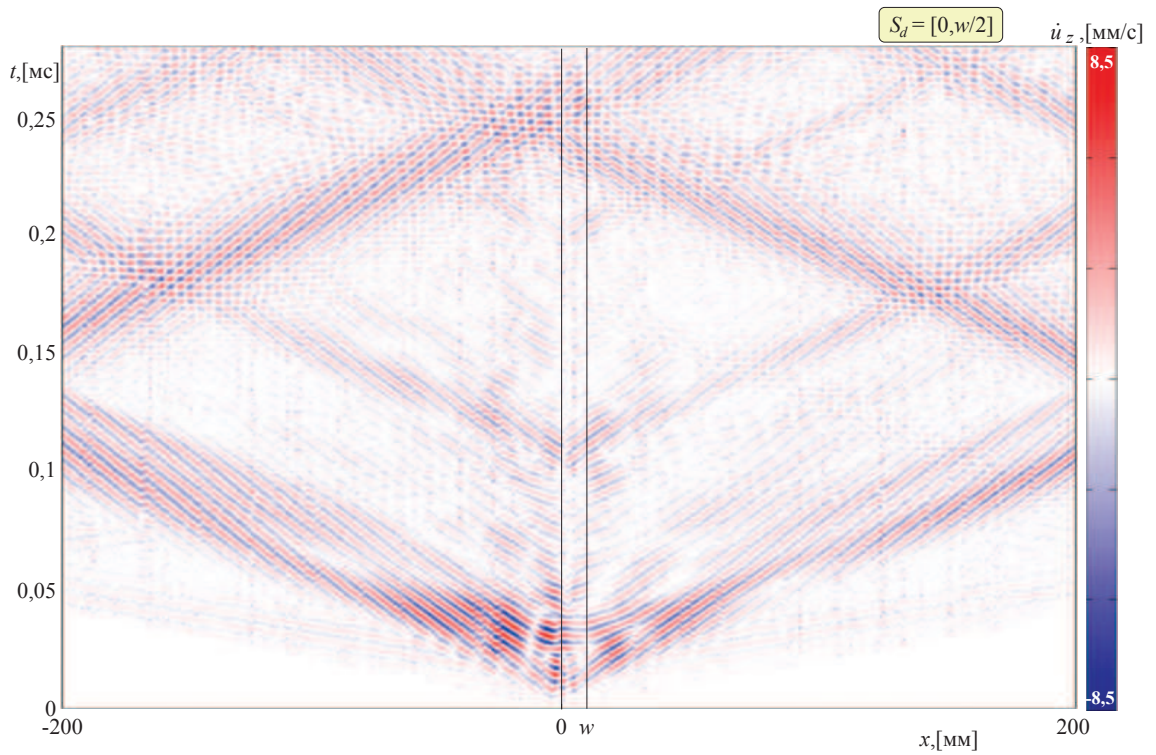


Рис. 4.8: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, -H, t)$, измеренные при $f_0 = 180$ кГц, для наполовину отклееного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

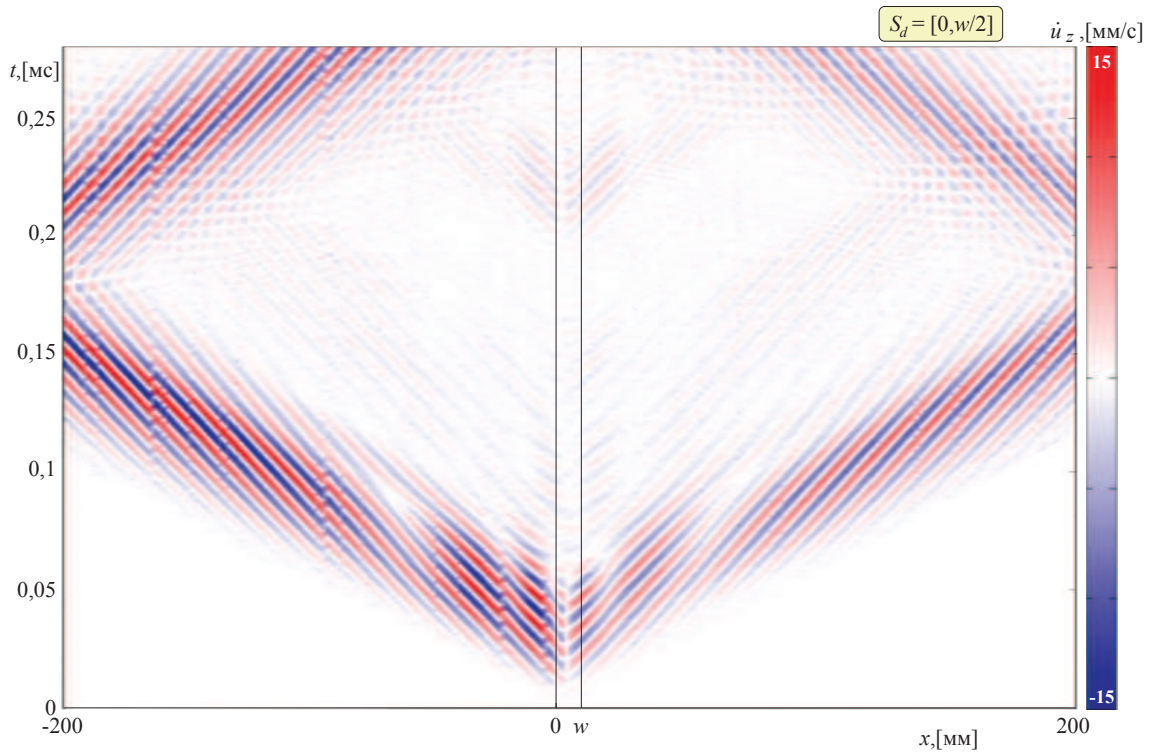


Рис. 4.9: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, -H, t)$, измеренные при $f_0 = 80$ кГц, для наполовину отклеенного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

зависимости от координаты точки x на линии $y = 0, z = -H$ и времени t . На графиках можно видеть распространение двух волновых пакетов, соответствующих двум незатухающим нормальным модам A_0 и S_0 . Так как образец имеет конечные размеры, то волны Лэмба отражаются от границ алюминиевой пластины, что хорошо видно на рис. 4.7–4.9. Эти отраженные от краев пластины волны дополнительно усложняют трактовку и анализ результатов. Используя информацию представленную на рис. 4.8 и 4.9, можно выделить точки на оси Ox , которые являются предпочтительными для дальнейшего анализа процессов возбуждения упругих волн Лэмба отслоившимся пьезоактуатором на основе экспериментальных данных.

§4.2. ИДЕАЛЬНЫЙ КОНТАКТ АКТУАТОРА С ПОДЛОЖКОЙ

Для верификации построенной в главе 3 связанной модели было проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными,

полученными в ходе проведения серии экспериментов, описанных выше (см. рис. 4.3: ширина актуатора $w = 10$ мм, высота $h = 0,2$ мм). В рамках модели нестационарное решение строится путем вычисления обратного преобразования Лапласа решения гармонической задачи в соответствии с соотношением (3.11).

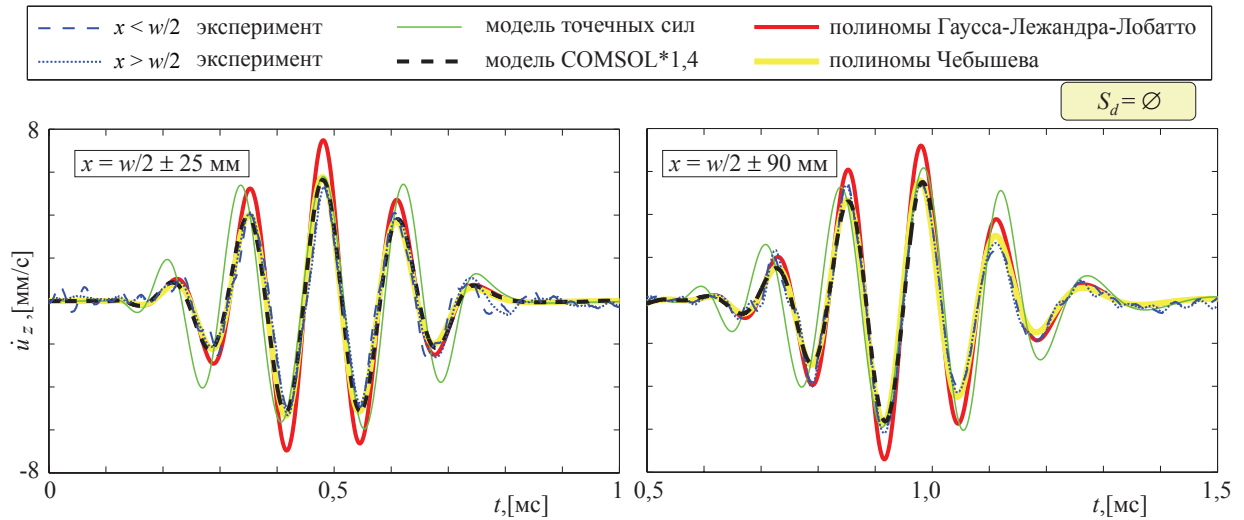


Рис. 4.10: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(\frac{w}{2} \pm 25, 0, 0, t)$ и $\dot{u}_z(\frac{w}{2} \pm 90, 0, 0, t)$, рассчитанные и измеренные при центральной частоте $f_0 = 80$ кГц, для приклеенного актуатора ($S_d = \emptyset$)

На рис. 4.10 представлены скорости перемещений, измеренные на поверхности $z = 0$ в точках $x = \frac{w}{2} \pm 25$ и $x = \frac{w}{2} \pm 90$ для приклеенного актуатора ($S_d = \emptyset$), а также рассчитанные с помощью трех моделей (среда COMSOL, модели на основе интегрального подхода с решением связанной задачи и заменой действия актуатора точечными силами). Во-первых, в случае идеального контакта можно отметить, что модель точечных сил позволяет получить приемлемые результаты, но тем не менее локальные максимумы моделируемого сигнала не всегда совпадают с максимумами экспериментального сигнала. Во-вторых, результаты расчетов в COMSOL содержат заниженные амплитуды скоростей перемещений пластины, но позволяют довольно точно моделировать динамическое поведение пьезоактуатора на упругом слое. Наконец, скорости перемещений пла-

стины, рассчитанные на основе связанной модели, практически совпадают со скоростями, зафиксированными лазерным виброметром в ходе эксперимента. Амплитуды скоростей перемещений пластины, рассчитанных с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто, примерно на 10% выше измеренных экспериментально, в то время как полиномы Чебышева позволяют получить решение, практически полностью совпадающее по амплитудам с экспериментальными данными.

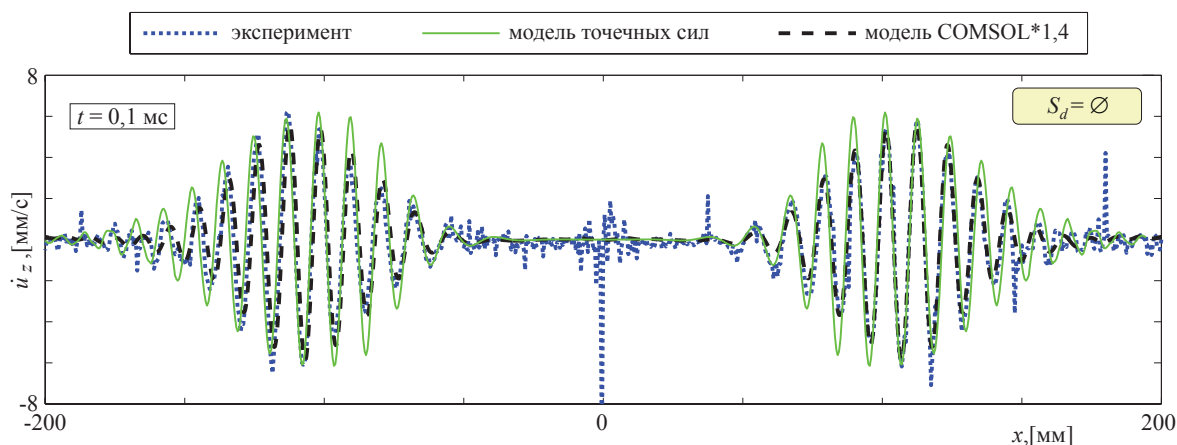


Рис. 4.11: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, 0, t = 0,1 \text{ мс})$, измеренные и рассчитанные с помощью модели точечных сил и в среде COMSOL при центральной частоте $f_0 = 80 \text{ кГц}$, для приклеенного актуатора ($S_d = \emptyset$)

Результаты расчетов \dot{u}_z в системе COMSOL, а также с помощью интегрального подхода и модели точечных сил вместе с экспериментально полученными данными на частоте 80 кГц вдоль линии $z = y = 0$ на отрезке $x \in [-200, 200]$ мм представлены на рис. 4.11. Обе модели дают относительно близкие результаты по сравнению с экспериментом. Однако амплитуды, рассчитанные в COMSOL занижены на примерно на 30%, а упрощенная модель с заменой точечными силами дает амплитуды близкие, но не совпадающие полностью с экспериментально измеренными.

Также производилось сравнение экспериментальных данных и результатов, полученных с помощью разработанной модели при использовании $N = 10$ и $M_1 = 10$ элементов, для частот $f_0 = 80 \text{ кГц}$ и $f_0 = 180 \text{ кГц}$.

Соответствующие графики приведены на рис. 4.12–4.13 и иллюстрируют тот факт, что оба вида интерполяционных полиномов позволяют получить качественно одинаковое решение. Разница состоит в том, что для выбранных значений N и M_1 полиномы Гаусса–Лежандра–Лобатто дают немного завышенные амплитуды, однако использование большего числа элементов дает такие же результаты, как и при использовании полиномов Чебышева.

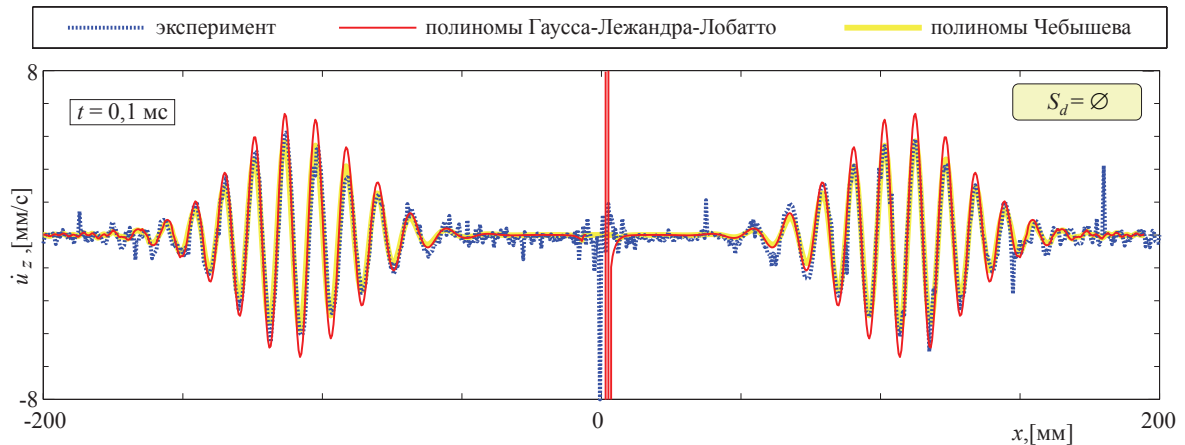


Рис. 4.12: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, 0, t = 0, 1 \text{ мс})$, измеренные и рассчитанные при центральной частоте $f_0 = 80 \text{ кГц}$, для приклеенного актуатора ($S_d = \emptyset$)

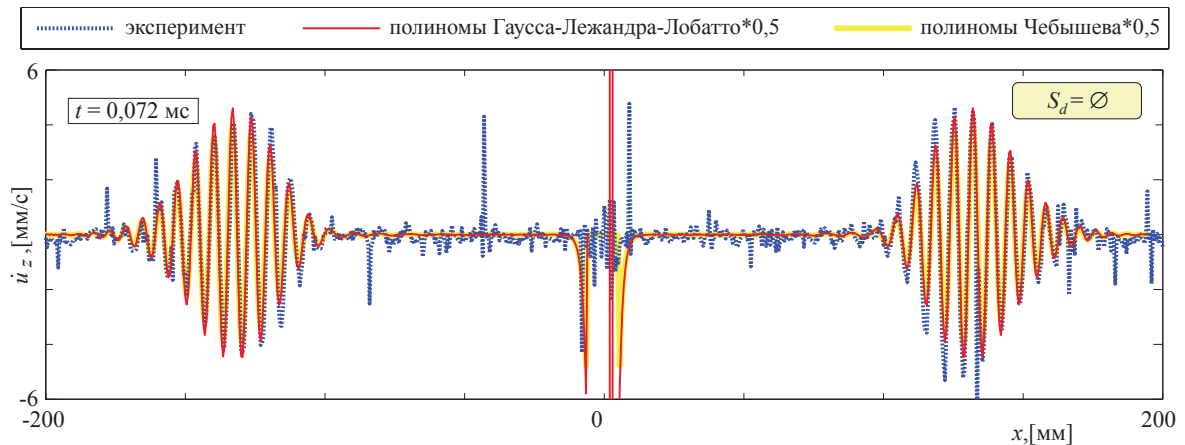


Рис. 4.13: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, 0, t = 0, 1 \text{ мс})$, измеренные и рассчитанные при центральной частоте $f_0 = 180 \text{ кГц}$, для приклеенного актуатора ($S_d = \emptyset$)

Анализируя графики, представленные на рис. 4.12 и 4.13 для $f_0 = 80 \text{ кГц}$ и $f_0 = 180 \text{ кГц}$, можно отметить, что на низких частотах резуль-

таты моделирования очень хорошо совпадают с экспериментальными данными, однако с ростом частоты увеличивается погрешность, что связано в первую очередь с тем, что двумерная модель не может полностью описать более сложную динамику актуатора при его взаимодействии со слоем и все генерируемые волновые поля, имеющие место в волноводе на высоких частотах.

§4.3. ЧАСТИЧНОЕ ОТСЛОЕНИЕ АКТУАТОРА ОТ ПОДЛОЖКИ

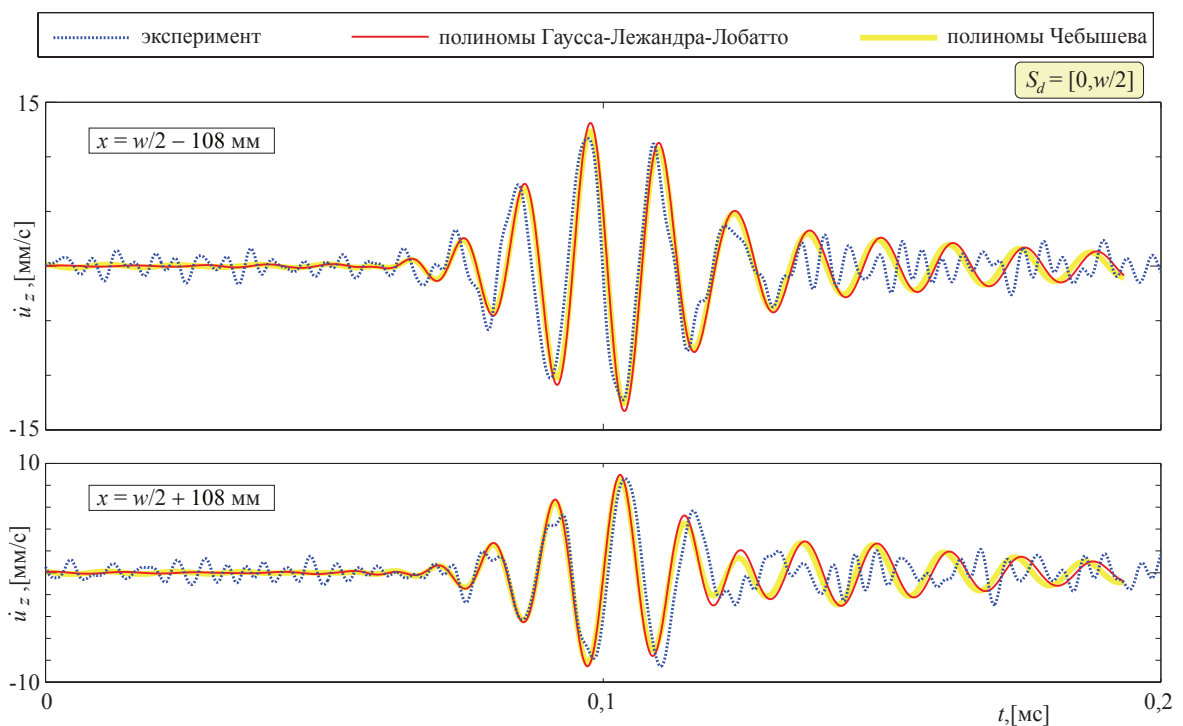


Рис. 4.14: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x = \frac{w}{2} \pm 108, 0, 0, t)$, измеренные и рассчитанные при центральной частоте $f_0 = 80$ кГц, для наполовину отклеенного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

Для верификации разработанной модели в случае, когда $S_d \neq \emptyset$, было проведено сравнение расчетов с экспериментальными данными, полученными в ходе двух независимых экспериментов на частотах $f_0 = 80$ кГц и $f_0 = 180$ кГц. Для моделирования также использовались значения $w = 10$ мм, $h = 0,2$ мм, $H = 1$ мм, $V_2 = 10$ В, область отслоения $S_d = [0, 5]$

и контакта $S_c = [5, 10]$. На рис. 4.14 представлены расчетные и экспериментальные значения скоростей перемещений пластины в двух точках: со стороны приклеенной стороны актуатора $x = \frac{w}{2} + 108$, и со стороны отклеенной $x = \frac{w}{2} - 108$. При сравнении результатов моделирования с экспериментальными данными, представленными на рис. 4.14, где произведен соответствующий сдвиг по времени, можно отметить, что при идеальном совпадении времени прихода сигнала справа (со стороны приклеенной части актуатора), появляется некоторое расхождение во времени прихода сигнала слева (со стороны отклеенной части актуатора). Тем не менее, форма и амплитуда скоростей перемещений в точках $x = \frac{w}{2} \pm 108$ имеют похожий вид.

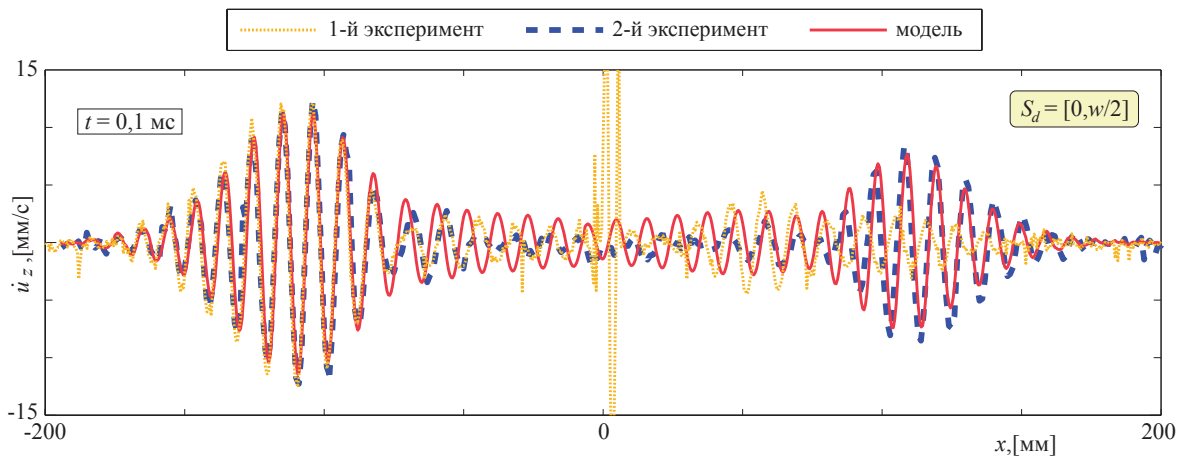


Рис. 4.15: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, -H, t = 0,1 \text{ мс})$, рассчитанные и измеренные в ходе двух независимых экспериментов при центральной частоте $f_0 = 80$ кГц, для наполовину отклеенного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

Аналогичные выводы можно получить, рассмотрев рис. 4.15, где представлены скорости перемещений пластины, полученные в ходе проведения двух экспериментов и расчетов для $f_0 = 80$ кГц. Моделируемые значения полностью совпадают с обоими экспериментами со стороны приклеенного актуатора $x > \frac{w}{2}$; со стороны отслоения $x < \frac{w}{2}$ результаты расчетов совпадают только со вторым экспериментом, что обусловлено трудностями во время подготовки экспериментального образца согласно схеме 4.3.

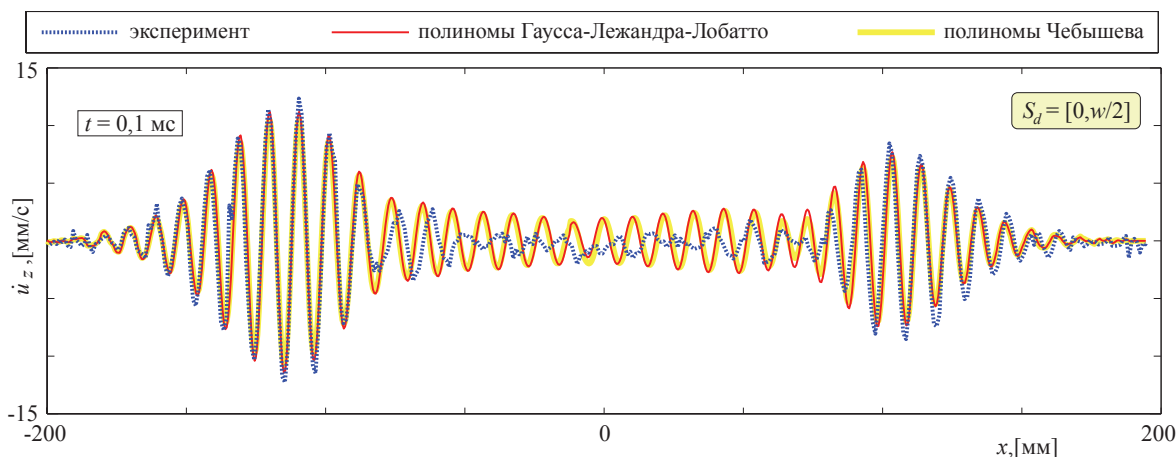


Рис. 4.16: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, -H, t = 0, 1 \text{ мс})$, измеренные и рассчитанные при центральной частоте $f_0 = 80 \text{ кГц}$, для наполовину отклеенного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

На рис. 4.16 представлено сравнение данных 2-го эксперимента, с результатами моделирования на основе интегрального подхода и МКЭ ВПТ, с использованием двух различных интерполяционных полиномов: Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева. Можно видеть, что конкретный вид аппроксимирующих функций практически не влияет на полученное численное решение (изменяется только амплитуда).

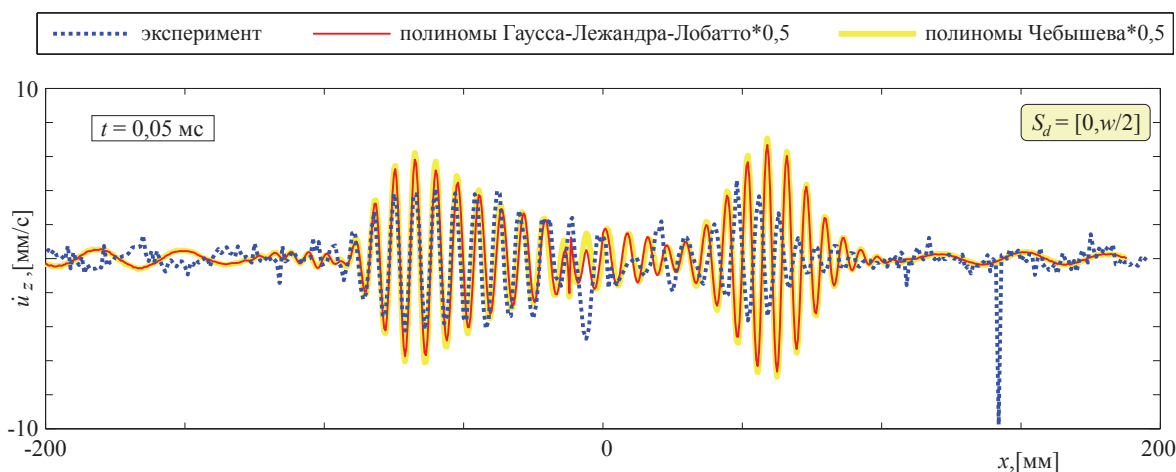


Рис. 4.17: Скорости перемещений на поверхности пластины $\dot{u}_z(x, 0, -H, t = 0, 05 \text{ мс})$, измеренные и рассчитанные при центральной частоте $f_0 = 180 \text{ кГц}$, для наполовину отклеенного актуатора ($S_d = [0, \frac{w}{2}]$)

На более высоких частотах совпадение моделируемых значений с экс-

периментальными данными несколько хуже, что и проиллюстрировано на рис. 4.17, где представлены скорости перемещений пластины на частоте 180 кГц в момент времени $t = 0,05$ мс. По этому рисунку можно сделать вывод, что двумерная постановка недостаточно точно описывает волновые поля, возникающие в пластине после подачи электрического импульса на не полностью приклеенный пьезоактуатор.

По графикам, представленным в данной главе, можно сделать выводы, что разработанная двумерная математическая модель эффективно описывает динамическое взаимодействие пьезоактуатора с упругим волноводом при разной степени контакта на низких частотах. При увеличении частоты появляются дополнительные эффекты, для описания которых необходима трехмерная связанная модель. Кроме того, была проиллюстрирована сложность выполнения эксперимента с частично отклеенным пьезоактуатором: зарегистрированные в ходе проведения двух независимых экспериментов скорости перемещений пластины в зоне отклейки не совпадают.

§4.4. ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ РЕГИСТРИРУЕМЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ СИГНАЛОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ОТКЛЕИВШИМСЯ ПЬЕЗОАКТУАТОРОМ

Функция ψ , удовлетворяющая условиям:

$$\psi \in L^2, \quad \|\psi\| = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

называется вейвлетом [105]. А функция

$$\mathcal{W}[f](a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad a \neq 0 \quad (4.1)$$

называется вейвлет преобразованием временного сигнала $f(t) \in L^2$, здесь, как и до этого, знак $*$ обозначает комплексное сопряжение. Можно записать

вейвлет-преобразование через скалярное произведение в L^2 :

$$\mathcal{W}[f](a, b) = (f, \psi_{a,b}). \quad (4.2)$$

В формулах (4.1)–(4.2) a – масштабирующий параметр, влияющий на сдвиг сигнала $f(t)$ по частоте; b – параметр сдвига (по времени).

К экспериментальному сигналу $u(\xi)$, $\xi \in [t_1, t_2]$, записанному после возбуждения пьезоактуатора входным электрическим импульсом $p(t)$, формула которого задана соотношением (3.3), на центральной частоте f_0 , можно применить вейвлет-преобразование с вейвлетом Габора в виде:

$$\mathcal{W}[u](\omega, t) = \sqrt{\frac{f}{f_0}} \int_{t_1}^{t_2} u(\xi) \psi_G^* \left(\frac{(\xi - t)f}{f_0} \right) d\xi, \quad (4.3)$$

$$\psi_G = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{f_0}{\gamma}} \exp \left[-\frac{1}{2} G \left(\frac{f_0}{\gamma} \right)^2 t^2 + i2\pi f_0 t \right], \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{\ln 2}}. \quad (4.4)$$

В качестве ядра вейвлет-преобразования был выбран вейвлет Габора с $G = 0.5$, т.к. его форма схожа с формой исходного сигнала $p(t)$.

§4.4.1 Прямоугольный протяженный пьезоактуатор

Для подробного анализа изменений спектра зарегистрированного в ходе эксперимента сигнала удобен частотно-временной анализ. Так вейвлет-преобразование позволяет определять несущую частоту сигнала как максимум $|\mathcal{W}(\omega, t)|$ [106]. На рис. 4.18 представлены модули вейвлет-преобразований сигналов $|\mathcal{W}(\omega, t)|$, записанных в ходе эксперимента в точках $x = \frac{w}{2} \pm 113$, $z = -H$. При сопоставлении этих графиков с рис. 4.8, где представлены скорости перемещений пластины видно, что первый локальный максимум вейвлет-преобразования соответствует более быстрой моде S_0 , затем приходит основной пакет, после чего регистрируется отраженная часть сигнала с модой S_0 . Кроме того, наблюдается сдвиг несущей частоты в обеих

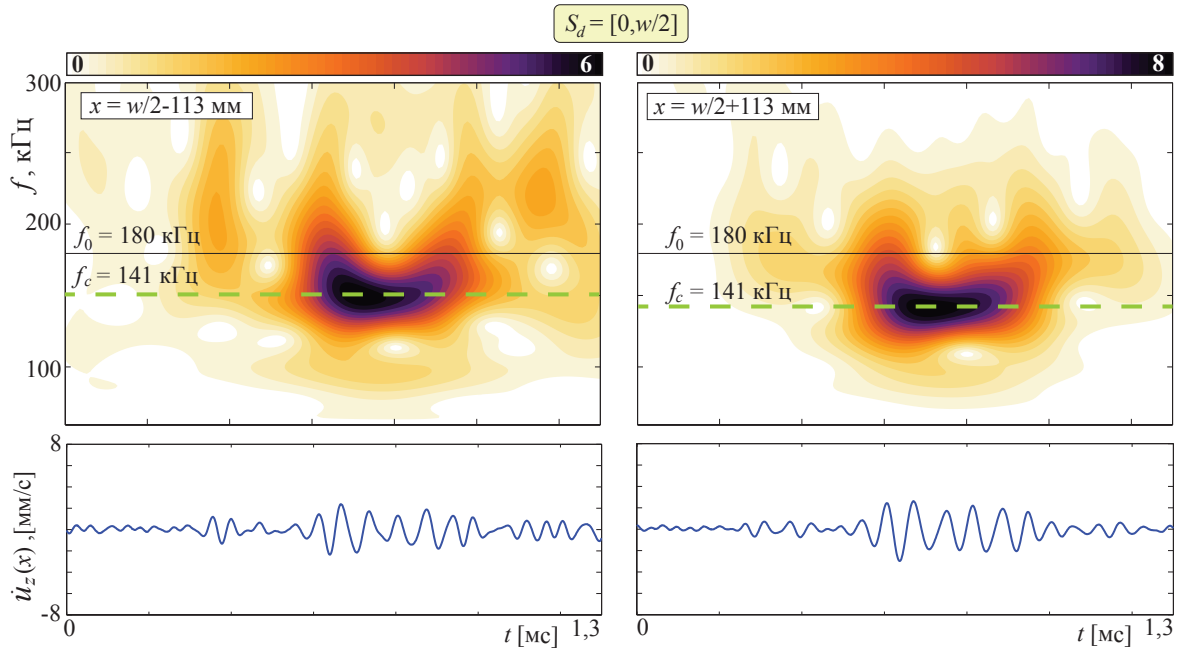


Рис. 4.18: Вейвлет-преобразование экспериментального сигнала в точках $x = \frac{w}{2} \pm 113$, $z = -H$ на центральной частоте $f_0 = 180$ кГц; $S_d = [0, \frac{w}{2}]$

точках $x = \frac{w}{2} \pm 113$; это происходит из-за уменьшения полезной площади контакта, что в свою очередь оказывает воздействие на волновые поля, генерируемые пьезоактуатором в пластине. Причем несущая частота моды S_0 сдвигается в сторону более высоких частот, в то время как несущая частота пакета, соответствующая A_0 — в сторону более низких.

На рис. 4.19 представлены аналогичные графики, но для моделируемого сигнала в точках $x = \frac{w}{2} \pm 113$, $z = -H$. Как видно по этим графикам, несущая частота, рассчитываемая по моделируемым сигналам, также отклоняется от центральной в сторону более низких частот. Несмотря на то, что на графиках вейвлет преобразования практически незаметна мода S_0 , поскольку её амплитуда для моделируемого сигнала намного меньше амплитуд A_0 , на графике самого сигнала можно заметить небольшое увеличение скоростей перемещений пластины до прихода основного пакета. Различие в амплитудах пакетов, соответствующих моде S_0 , можно объяснить тем, что трехмерный прямоугольный актуатор излучает более сложные

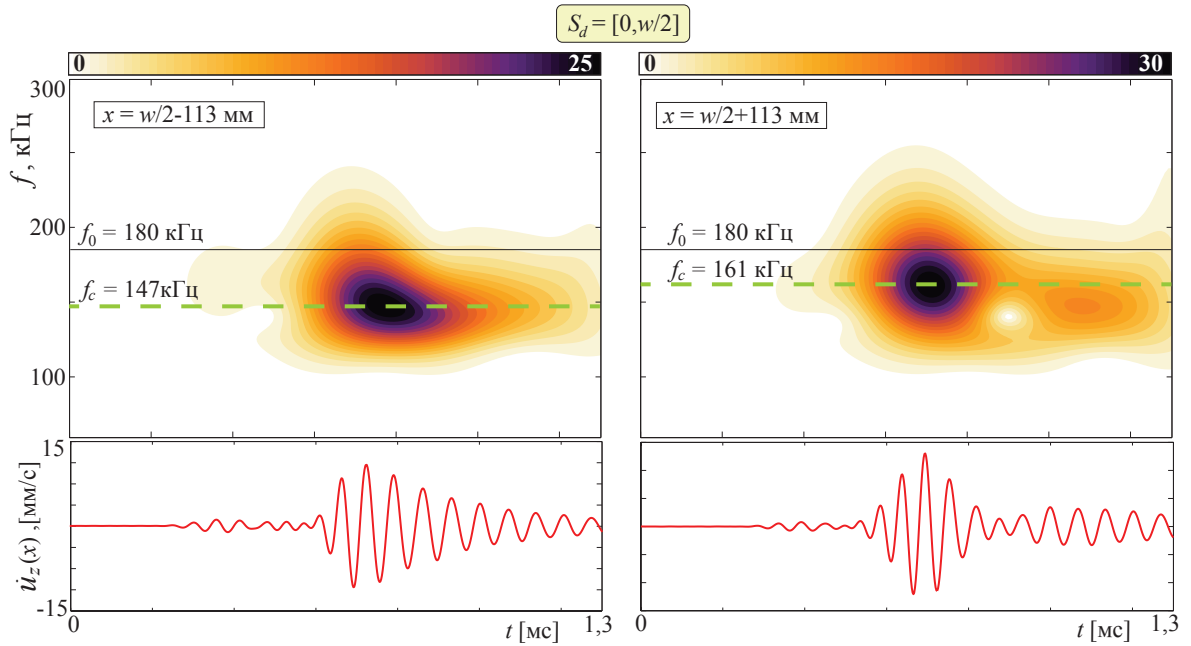


Рис. 4.19: Вейвлет-преобразование моделируемого сигнала в точках $x = \frac{w}{2} \pm 113$, $z = -H$ на центральной частоте $f_0 = 180$ кГц; $S_d = [0, \frac{w}{2}]$

волновые поля, нежели те, которые могут быть описаны плоской моделью. А именно, доля возбуждаемой моды S_0 для прямоугольного пьезоэлемента примерно в два раза больше, чем у полосового.

На рис. 4.20 представлены вейвлет-преобразования экспериментального и моделируемого сигналов в точке $x = \frac{w}{2} + 113$, $z = -H$ в случае идеального контакта ($S_d = \emptyset$). Здесь также можно видеть небольшой локальный максимум, относящийся к более быстрой моде S_0 .

§4.4.2 Круговой неосесимметричный пьезоактуатор

Вейвлет-преобразование вида (4.3) применялось к сигналам, записанным во время эксперимента с частично приклеенными круговыми пьезоэлектрическими сенсорами с загнутыми электродами, схема экспериментального образца представлена на рис. 4.21. Шестнадцать круговых пьезоактуаторов были приклеены на алюминиевую пластину толщиной $H = 2$ мм и размерами 500 мм на 550 мм с разной степенью контакта. Положение актуатора однозначно определяется ориентацией отклеенной области θ .

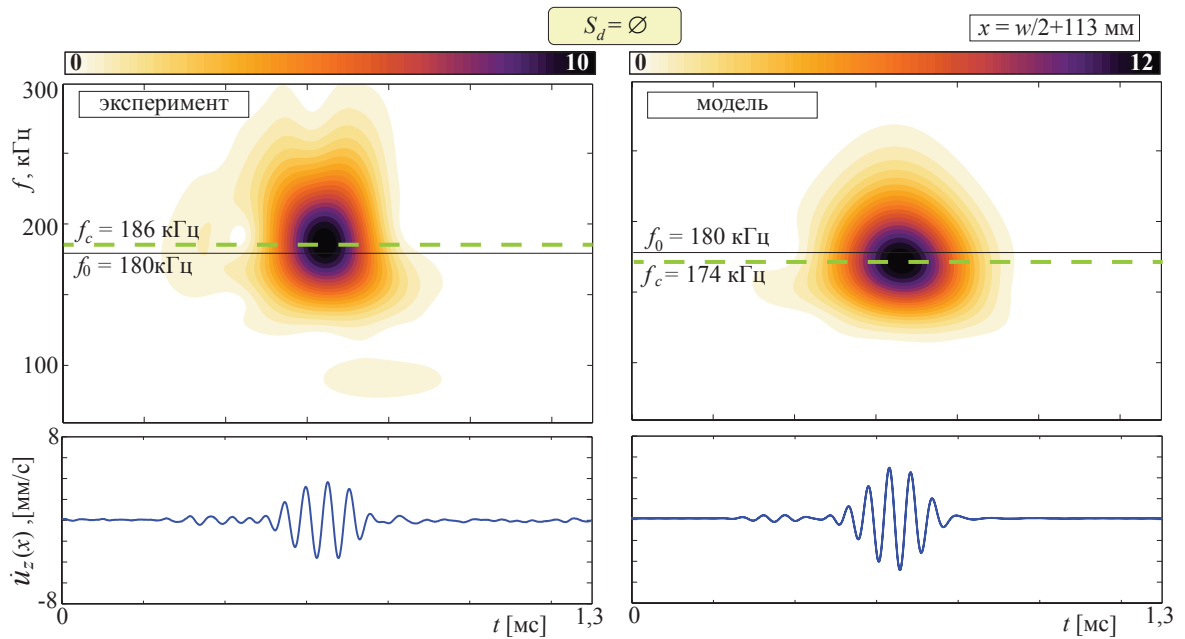


Рис. 4.20: Вейвлет-преобразование экспериментального (слева) и моделируемого (справа) сигналов при идеальном контакте в точках $x = \frac{w}{2} \pm 113$, $z = -H$ на центральной частоте $f_0 = 180$ кГц; $S_d = \emptyset$

Для уменьшения эффекта неосесимметричности волновых полей [32] ориентация точек припоя на всех актуаторах неизменна (всегда 180°). Разнообразие форм и ориентаций области отклеивания представлено на рис. 4.21. Для измерения скоростей перемещений пластины, генерируемых одним из актуаторов на пластине, использовалась установка с лазерным виброметром аналогичная представленной на рис. 4.1. Измерения проводились для каждого актуатора в точках окружности радиуса 20 мм с центром, совпадающим с центром актуатора.

Примеры измеренных лазерным виброметром скоростей перемещений на центральных частотах $f_0 = 60$ кГц и $f_0 = 180$ кГц с различными областями отслоения (S_1, S_2, S_3), а также полностью приклеенного пьезоактуатора, представлены на рис. 4.22. В большинстве случаев амплитуда перемещений, вызванных недоклеенным актуатором, значительно ниже аналогичных перемещений, вызванных полностью приклеенным актуатором, ввиду малости области контакта актуатора с пластиной. Но, как видно

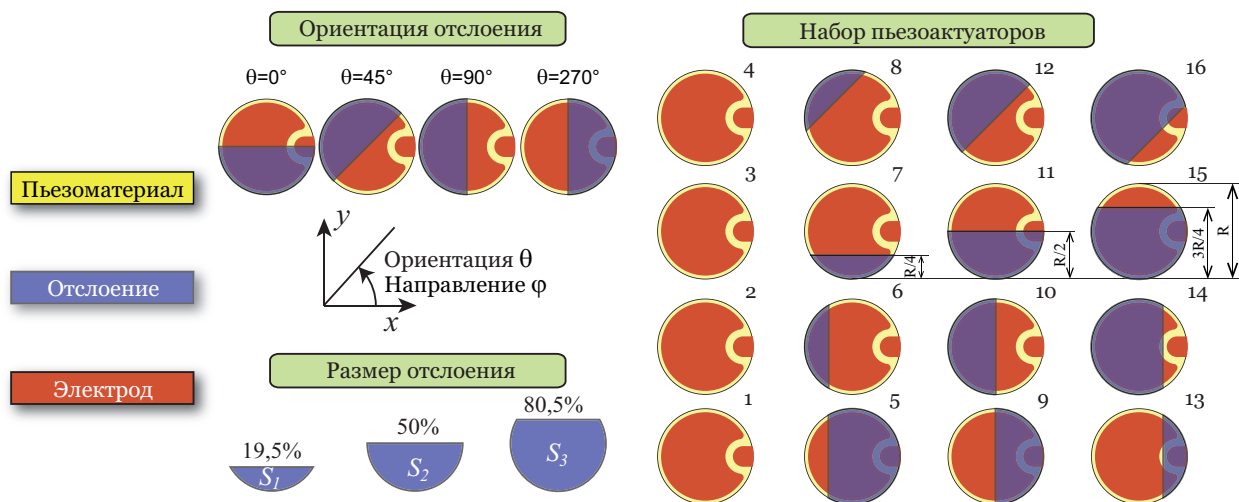


Рис. 4.21: Схема расположения и приклейки актуаторов на экспериментальном образце

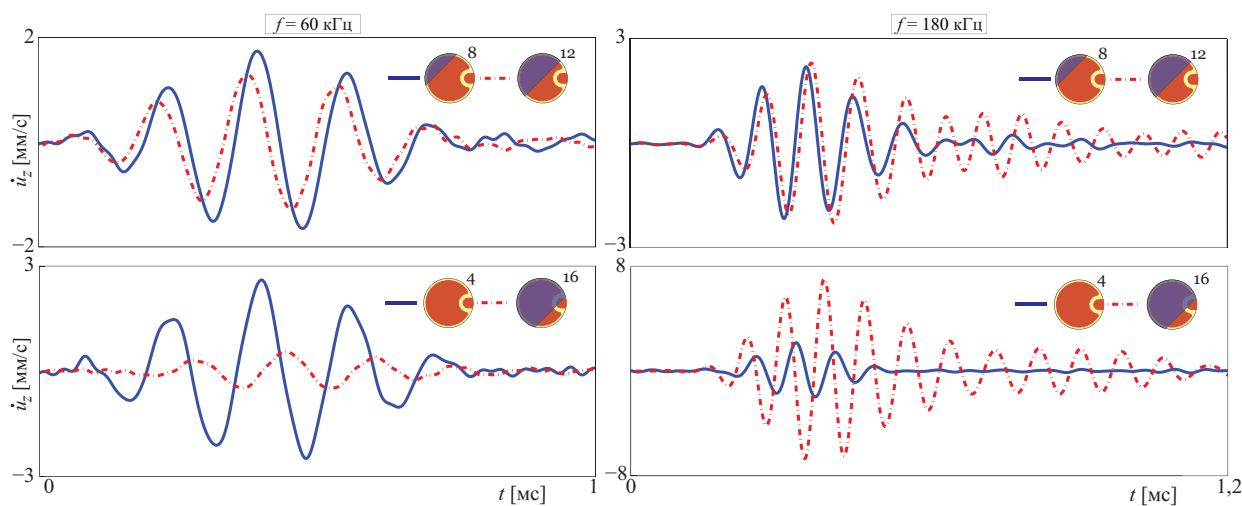


Рис. 4.22: Скорости перемещений $\dot{u}_z(t)$ на центральной частоте $f_0 = 60$ кГц (слева) и $f_0 = 180$ кГц (справа), измеренные для направления $\phi = 130^\circ$

на рис. 4.22, амплитуда скоростей перемещений на центральной частоте $f_0 = 180$ кГц значительно выше для недоклеенного актуатора, по сравнению с полностью работоспособным. По-видимому, это связано с возникновением стоячих волн, если центральная частота близка к резонансным частотам f_n , и сигнал «пойман в ловушку» внутри актуатора.

Для анализа времени прихода и значения несущей частоты сигналов, зарегистрированных с помощью лазерного виброметра, использовалось вейвлет-преобразование. Результаты представлены на рис. 4.23. Наблюдается сдвиг значений несущей частоты и времени её прихода. Рис.

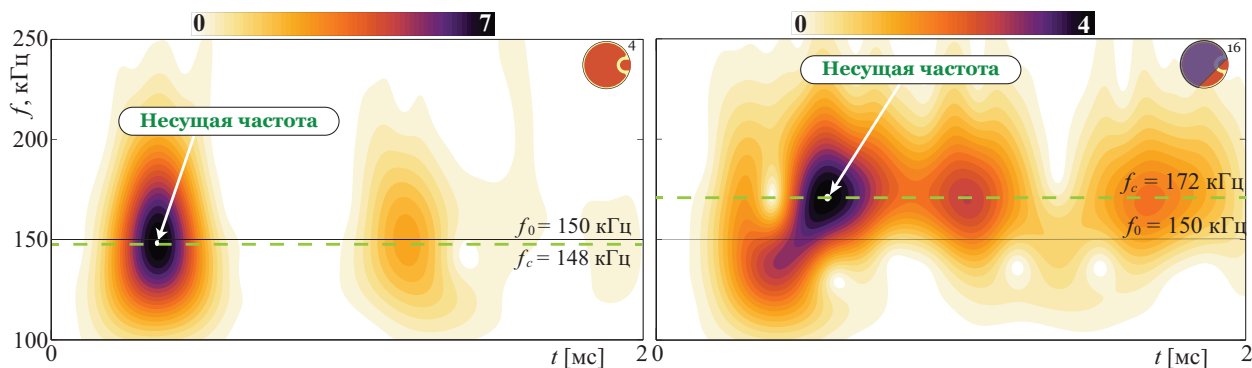


Рис. 4.23: Вейвлет-преобразование для работоспособного актуатора (слева) и сильно непрочлеенного (справа) на центральной частоте 150 кГц и для направления $\phi = 230^\circ$

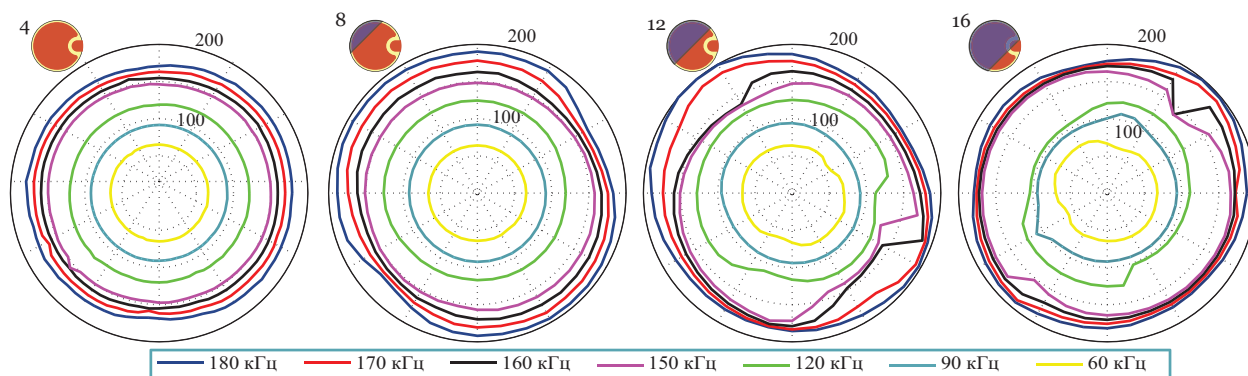


Рис. 4.24: Несущие частоты волновых полей, сгенерированных актуаторами №4, 8, 12 и 16, рассчитанные с помощью вейвлет-преобразования

4.24 показывает значения несущей частоты, рассчитанные для каждого измерения. Наблюдается различие в центральной и несущей частотах для недоклеенных пьезоактуаторов, причем при увеличении области отслоения значение несущей частоты сильнее отличается от центральной, и сдвигается в сторону более высоких частот. Разница между центральной и несущей частотами зависит также от направления распространения волны.

Рис. 4.25 показывает время прихода несущей частоты для каждого измерения в случае недоклеенных актуаторов с разной ориентацией области отслоения S_3 ($\theta = 0^\circ, 45^\circ, 180^\circ$) в сравнении с аналогичными измерениями для полностью работоспособного актуатора. При значительных отслоениях актуатора время прихода несущей частоты увеличивается с ро-

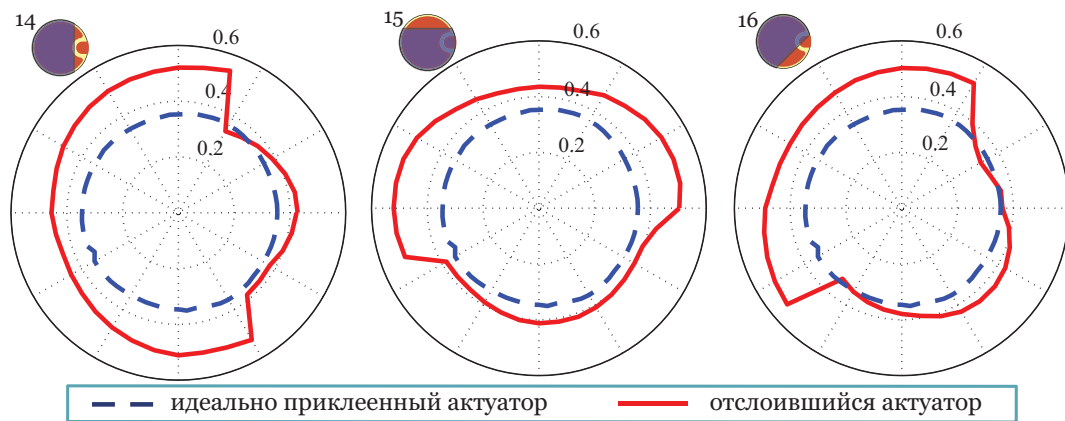


Рис. 4.25: Время прихода несущей частоты в случае непроклеенных актуаторов №14, 15 и 16 с ориентацией области отслоения S_3 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 180^\circ$ в сравнении с полностью приклеенным актуатором №4 на центральной частоте $f_0 = 150$ кГц

стом центральной частоты на некоторых направлениях, в то время как для полностью проклеенного актуатора наблюдается равномерное уменьшение времени прихода несущей частоты при увеличении центральной частоты.

На рис. 4.23–4.25 видно, что и время прихода, и значение несущей частоты зависят от формы отслоения. Теоретически, время прихода и значение несущей частоты, а также резонансные частоты f_n , могут использоваться для определения наличия, формы и местоположения отслоений.

Для более полного анализа для всех шестнадцати актуаторов были проведены измерения импеданса, после чего с помощью линейного частотного сдвига и преобразования данных из временной области в частотную были рассчитаны значения реактивной проводимости B , которая определяется как мнимая часть адмиттанса $Y = G + iB$ (адмиттанс – величина обратная импедансу $Z = 1/Y$). Усредняя результаты измерений по 5 повторениям были получены значения реактивной проводимости B , которые представлены на рис. 4.26. Из анализа графиков на рис. 4.26 можно заключить, что для приклеенных актуаторов №1–4 проявляются резонансные частоты примерно при 720 кГц и 940 кГц. С ростом площади отслоения актуатора проявляется большее количество резонансных частот в рассмат-

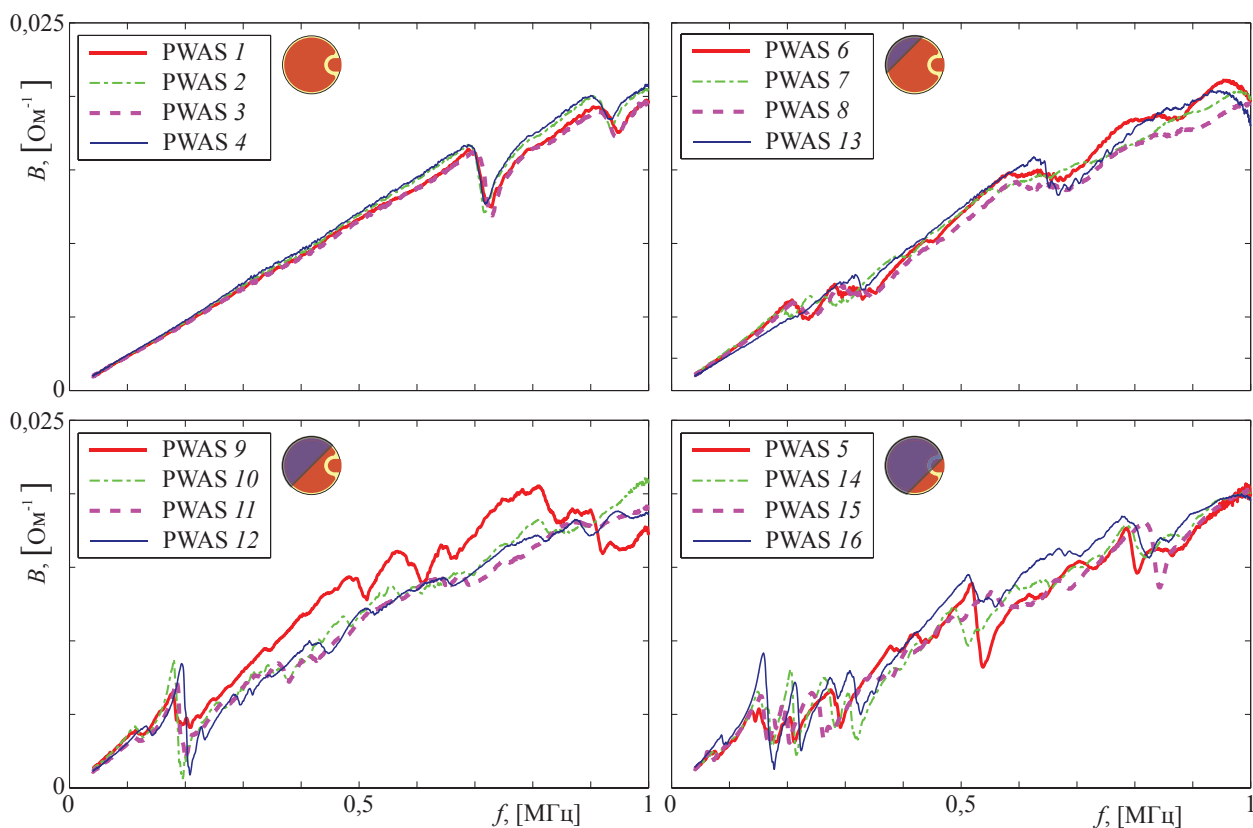


Рис. 4.26: Реактивная проводимость $B(f)$ отслоившихся круговых пьезоактуаторов в диапазоне до 1000 кГц. Для сильно отклеенных актуаторов наблюдается сильный резонанс при частотах из интервала 180–200 кГц, что соответствует сдвигу несущей частоты, который наблюдается на рис. 4.23.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках выполнения диссертационной работы получены следующие основные результаты:

- 1) для описания динамического поведения пьезоэлектрического тела разработана математическая и компьютерная модель на основе метода конечных элементов высокого порядка точности с использованием различных интерполяционных полиномов;
- 2) выполнено сравнение результатов моделирования динамического поведения полосового пьезоэлектрического актуатора с аналогичными данными, полученными в системе COMSOL. Проведен численный анализ резонансных частот пьезоактуатора, их зависимости от размеров образца;
- 3) разработана связанная математическая и компьютерная модель, которая на основе гибридного подхода описывает динамическое взаимодействие пьезоактуатора и упругого волновода с учетом различных условий контакта. Пьезоактуатор описывается методом конечных элементов высокого порядка точности, а генерируемые им волновые поля в упругом слое – полуаналитическим интегральным подходом. Разработанная математическая модель верифицирована путем сравнения результатов с экспериментальными данными;
- 4) проведен анализ численной устойчивости решения, произведено сравнение результатов моделирования с аналогичными данными, рассчитанными на основе других методов. Проанализированы резонансные частоты и энергии упругих волн, возбуждаемых пьезоактуатором с различными условиями контакта;
- 5) проведены экспериментальные исследования волновых явлений, со-

проводящих возбуждение упругих волн полосовыми и круговыми пьезоэлектрическими актуаторами с разной степенью контакта с упругой подложкой;

- б) проанализирован сдвиг времени прихода и значения несущей частоты экспериментального сигнала при частичном отслоении пьезоактуатора от упругого волновода на основе вейвлет-анализа, а также проведен анализ изменений электрического импеданса при различной степени контакта пьезоактуатора с упругой подложкой.

Литература

1. Матвеевко, В. П. Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами / В. П. Матвеевко, Е.П. Клигман, М.А. Юрлов, Н.А. Юрлова // Физическая мезомеханика. — 2012. — Т. 15, № 1. — С. 75–85.
2. Balageas, D. Structural Health Monitoring / D. Balageas, C.-P. Fritzen, A. Guemes. — London, UK: ISTE Ltd, 2006. — P. 496.
3. Worlton, D. Ultrasonic testing with lamb waves / D. Worlton // Nondestructive testing. — 1957. — Vol. 15. — P. 218–222.
4. Викторов, И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэля и Лэмба в технике / И. А. Викторов. — М.: Наука, 1966. — С. 320.
5. Ghosh, T. Efficient use of lamb modes for detecting defects in large plates / T. Ghosh, T. Kundu, P. Karpur // Ultrasonics. — 1998. — Vol. 36. — P. 791–801.
6. Raghavan, A. Review of guided wave structural health monitoring / A. Raghavan, C. E. S. Cesnik // The Shock and Vibration Digest. — 2007. — Vol. 2. — P. 91–114.
7. Chinthalapudi, A. S. Investigation of methods to detect defects in thin layered materials / A. S. Chinthalapudi, H. M. Hassan. Master's Thesis. — Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden, 2005. — P. 61.
8. Alleyne, D. N. The interaction of lamb waves with defects / D. N. Alleyne, P. Cawley // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. — 1992. — Vol. 1. — P. 381–397.

9. Глушков, Е. В. Математическая модель ультразвуковой дефектоскопии пространственных трещин / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, А. В. Ехлаков // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66, № 1. — С. 147–156.
10. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 224.
11. Achenbach, J. D. Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach. — North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1973. — P. 440.
12. Бабешко, В. А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. — М.: Наука, 1989. — С. 344.
13. Salas, K.I. Guided wave excitation by a clover transducer for structural health monitoring: theory and experiments / K.I. Salas, C.E.S. Cesnik // Smart Materials and Structures. — 2009. — Vol. 18, no. 1. — P. 075005.
14. Raghavan, A. Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring / A. Raghavan, C.E.S. Cesnik // Smart Materials and Structures. — 2005. — Vol. 14, no. 6. — P. 1448.
15. von Ende, S. Investigation on piezoelectrically induced lamb wave generation and propagation / S. von Ende, R. Lammering // Smart Materials and Structures. — 2007. — Vol. 16, no. 5. — P. 1802–1809.
16. Nayfeh, Adnan H. The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media / Adnan H. Nayfeh // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1991. — Vol. 89, no. 4. — P. 1521–1531.

17. Ворович, И. И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И. И. Ворович, В. А. Бабешко, О.Д. Пряхина. — М.: Научный мир, 1999. — С. 246.
18. Ostachowicz, W. Guided Waves in Structures for SHM The Time-Domain Spectral Element Method / W. Ostachowicz, P. Kudela, M. Krawczuk, A. Zak. — John Wiley & Sons, Ltd., Publication, 2012. — P. 350.
19. Roeling, M. Reliability and functionality investigation of cfrp embedded ultrasonic transducers supported by fem and efit simulations / M. Roeling, N. Modler, A. Winkler et al. // Proceedings of the 13th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems. — 2013. — P. 8.
20. Ge, L. Accurate modeling of pzt-induced lamb wave propagation in structures by using a novel spectral finite element method / L. Ge, X. Wang, F. Wang // Smart Materials and Structures. — 2014. — Vol. 23, no. 9. — P. 095018.
21. Giurgiutiu, V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors. Second edition / V. Giurgiutiu. — Elsevier Academic Press, 2014. — P. 1012.
22. Yelve, N.P. Higher harmonics induced in lamb wave due to partial debonding of piezoelectric wafer transducers / N.P. Yelve, M. Mitra, P.M. Mujumdar // NDT & E International. — 2014. — Vol. 63. — P. 21–27.
23. Lee, S.J. Time reversal based piezoelectric transducer self-diagnosis under varying temperature / S.J. Lee, H. Sohn, H. Jung-Wuk // Nondestructive Evaluation. — 2010. — Vol. 29 (2). — P. 75–91.

24. Park, G. Performance assessment and validation of piezoelectric active-sensors in structural health monitoring / G. Park, C. R. Farrar, F.L. di Scalea, S. Coccia // *Smart Materials and Structures*. — 2006. — Vol. 15. — P. 1673–1683.
25. Mulligan, K.R. Compensation of piezoceramic bonding layer degradation for structural health monitoring / K.R. Mulligan, N. Quaegebeur, P. Masson et al. // *Structural Health Monitoring*. — 2014. — Vol. 13(1). — P. 68–81.
26. Golub, M. V. Continuous wavelet transform application in diagnostics of piezoelectric wafer active sensors / M. V. Golub, A. Shpak, I. Buethe et al. // *Proceedings of the International conference DAYS on DIFFRACTION 2013*. — Saint-Petersburg: 2013. — P. 59–64.
27. Glushkov, E. Wave energy trapping and localization in a plate with a delamination / E. Glushkov, N. Glushkova, M.V. Golub et al. // *Smart Materials and Structures*. — 2012. — Vol. 21. — P. 125001.
28. Nadella, K. S. Characterization of guided-wave propagation in composite plates / K. S. Nadella, K. I. Salas, C. E. S. Cesnik // *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. — Vol. 7650. — 2010. — P. 76502H.
29. Glushkov, E. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites / E. Glushkov, N. Glushkova, A. Eremin // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 2011. — Vol. 129, no. 5. — P. 2923–2934.
30. Chaudry, Z. The pin-force model revisited / Z. Chaudry, C. A. Rogers // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. — 1994. — Vol. 5. — P. 347–354.

31. Glushkov, E. Frequency dependent directivity of guided waves excited by circular transducers in anisotropic composite plates / E. Glushkov, N. Glushkova, A. Eremin et al. // Journal of Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 132, no. EL119. — P. 148–154.
32. Moll, J. Non-axisymmetric lamb wave excitation by piezoelectric wafer active sensors / J. Moll, M. Golub, E. Glushkov et al. // Sensors and Actuators: A. Physical. — 2012. — Vol. 130. — P. 113–121.
33. Eremin, A.A. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser doppler vibrometry / A.A. Eremin, E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, R. Lammering // Composite Structures. — 2015. — Vol. 125. — P. 449–458.
34. Santoni-Bottai, G. Exact shear-lag solution for guided waves tuning with piezoelectric-wafer active sensors / G. Santoni-Bottai, V. Giurgiutiu // AIAA Journal. — 2012. — Vol. 50(11). — P. 2285–2294.
35. Glushkov, E. Lamb wave excitation and propagation in elastic plates with surface obstacles: proper choice of central frequencies / E. Glushkov, N. Glushkova, R. Lammering et al. // Smart Materials and Structures. — 2011. — Vol. 20, no. 1. — P. 015020.
36. James, B.W. The low-temperature variation of the elastic constants of lithium hydride and lithium deuteride / B.W. James, H. Kheyrandish // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1982. — Vol. 15. — P. 6321.
37. Rogers, W. P. Elastic property measurement using rayleigh-lamb waves / W. P. Rogers // Research in Nondestructive Evaluation. — 1995. — Vol. 6. — P. 185–208.

38. Глушков, Е.В. Неразрушающие методы идентификации эффективных упругих свойств волоконно-армированных композитных материалов с помощью ультразвуковых бегущих волн / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А. А. Еремин // Материалы IV Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов "ТестМат-2014- / Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов. — 2014. — 19-20 июня. — С. 6.
39. Акопян, В.А. Методы и алгоритм определения полного набора совместимых материальных констант пьезокерамических материалов / В.А. Акопян, А.Н. Соловьев, С.Н. Шевцов. — Ростов-на-Дону: Южный Федеральный университет, 2008. — С. 144.
40. Акопян, В.А. Методика определения пьезоэлектрического модуля d_{33} и исследование границ её применения / В.А. Акопян // Дефектоскопия. — 2003. — Т. 6. — С. 29–38.
41. Вернигора, Г.Д. Определение эффективных свойств пьезокомпозитов на основе конечноэлементного моделирования в аselan / Г.Д. Вернигора, А.Н. Соловьев // Вестник Донского Государственного Технического университета. — 2009. — Т. 1(40). — С. 13–21.
42. Ватульян, А.О. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел / А.О. Ватульян, В.В. Дударев // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — Т. 5(3). — С. 259–264.
43. Habib, A. Mechanical characterization of sintered piezo-electric ceramic material using scanning acoustic micriscope / A. Habib, A. Shelke, M. Vogel et al. // Ultrasonics. — 2012. — Vol. 8. — P. 989–995.
44. Wang, X.D. Wave propagation in electromechanical structures: induced by surface-bonded piezoelectric actuators / X.D. Wang, G.L. Huang //

Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2001. — Vol. 12. — P. 105–11.

45. Кочетков, И.Д. Контактное взаимодействие активного пьезоэлектрического элемента и упругого полупространства / И.Д. Кочетков, Н.Н. Рогачева // Прикладная математика и механика. — 2005. — Т. 69 (5). — С. 882–895.
46. Глушков, Е. В. Возбуждение упругих волн в слое пьезокерамическими накладками / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, В. Зеemann, О. В. Кваша // Акустический журнал. — 2006. — Т. 4. — С. 1–10.
47. Glushkov, E. V. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate / E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, O. V. Kvasha, W. Seemann // Smart Materials and Structures. — 2007. — Vol. 16, no. 3. — P. 650.
48. Glushkov, E. V. On the efficient implementation of the integral equation method in elastodynamics / E. V. Glushkov, N. V. Glushkova // Journal of Computational Acoustics. — 2001. — Vol. 9(3). — P. 889–898.
49. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М.: Мир, 1986.
50. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М.: Мир, 1977. — P. 351.
51. Митчелл, Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М.: Мир, 1981. — P. 216.
52. Баженов, В.Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории

- упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. монография. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — Р. 352.
53. Sladek, J. Analysis of the bending of circular piezoelectric plates with functionally graded material properties by a MLPG method / J. Sladek, V. Sladek, P. Stanak et al. // Engineering Structures. — 2013. — Vol. 47, no. 0. — P. 81 – 89.
54. Liu, W. Three-dimensional lamb wave propagation excited by a phased piezoelectric array / W. Liu, G. W. Hong // Smart Materials and Structures. — 2010. — Vol. 19(8). — P. 12.
55. Наседкин, А.В. Конечноэлементное моделирование пористых термоупругих композитов с учетом микроструктуры / А.В. Наседкин, А.А. Наседкина, В.В. Ремизов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7(1). — С. 100–109.
56. Левин, В.А. Нелинейная вычислительная механика прочности / В.А. Левин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — С. 454.
57. Iovane, G. Modal analysis of piezoelectric bodies with voids. ii. finite element simulation / G. Iovane, A.V. Nasedkin // Applied Mathematical Modelling. — 2010. — Vol. 34. — P. 47–59.
58. Вернигора, Г.Д. О поляризации и определении эффективных характеристик пористой пьезокерамики / Г.Д. Вернигора, Т.Г. Лупейко, А.С. Скалиух, А.Н. Соловьев // Вестник Донского Государственного Технического университета. — 2011. — Т. 4, № 55. — С. 462–469.
59. Соловьев, А.Н. Конечно-элементное моделирование пьезоэлектрического устройства накопления энергии на основе кантилевера /

- А.Н. Соловьев, Л.В. Зьюнг // Вестник Донского Государственного Технического университета. — 2014. — Т. 14, № 1(76). — С. 169–179.
60. Домашенкина, Т.В. Конечно-элементный анализ фокусирующего ультразвукового пьезоизлучателя в режиме установившихся колебаний / Т.В. Домашенкина, А.В. Наседкин, А.Н. Рыбьянец // Известия Южного Федерального университета. Технические науки. — 2010. — Т. 6. — С. 174–179.
61. Наседкин, А.В. Моделирование пьезоизлучателей ультразвуковых волн с использованием программного комплекса ansys / А.В. Наседкин // Известия Таганрогского радиотехнического университета. — 1998. — Т. 4. — С. 147–150.
62. Komatitsch, D. The spectral element method for elastic wave equations application to 2-d and 3-d seismic problems / D. Komatitsch, J.-P. Vilotte, R. Vai et al. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 45, no. 9. — P. 1139–1164.
63. Schulte, R. T. Spectral element modelling of wave propagation in isotropic and anisotropic shell-structures including different types of damage / R. T. Schulte, C.-P. Fritzen, J. Moll // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2010. — Vol. 10, no. 1. — P. 012065.
64. Kim, Y. Time-domain spectral element method for built-in piezoelectric-actuator- induced lamb wave propagation analysis / Y. Kim, S. Ha, F.-K. Chang // AIAA Journal. — 2008. — Vol. 46, no. 3. — P. 591–600.
65. Park, I. Dynamic analysis of smart composite beams by using the frequency-domain spectral element method / I. Park, U. Lee // Journal of Mechanical Science and Technology. — 2012. — Vol. 26, no. 8. — P. 2511–2521.

66. Kudela, P. Modelling of wave propagation in composite plates using the time domain spectral element method / P. Kudela, A. Zak, M. Krawczuk, W. Ostachowicz // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — Vol. 302. — P. 728 – 745.
67. Бубенчиков, А.М. Математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов / А.М. Бубенчиков, В.С. Попонин, В.Н. Мельникова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2008. — Т. 3, № 4. — С. 70–76.
68. Collet, M. Generation of lamb waves through surface mounted macro-fiber composite transducers / M. Collet, K.A. Ruzzene, M. and Cunefare // Smart Materials and Structures. — 2011. — Vol. 20, no. 2. — P. 025020.
69. Moulin, E. Modeling of lamb waves generated by integrated transducers in composite plates using a coupled finite element - normal modes expansion method / E. Moulin, J. Assaad, C. Delebarre // Journal of the Acoustical Society of America. — 2000. — Vol. 107(1). — P. 87–94.
70. Venkata Rao, K. Finite element modelling and vibration control study of active plate with debonded piezoelectric actuators / K. Venkata Rao, S. Raja, T. Munikenche Gowda // Acta Mechanica. — 2014. — Vol. 225, no. 10. — P. 2923–2942.
71. Huang, B. Active vibration control of smart composite laminates with partial debonding of actuator / B. Huang, H.S. Kim, B.D. Youn // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. — 2015. — Vol. 16 (4). — P. 831–840.
72. Шпак, А.Н. Моделирование динамики пьезоэлектрического актуатора/сенсора методом конечных элементов с использованием полиномов

- Чебышева / А.Н. Шпак // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2015. — Т. 4. — С. 75–85.
73. Голуб, М. В. Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности / М. В. Голуб, А.Н. Шпак, И. Бюте, К.-П. Фритцен // Вычислительная механика сплошных сред. — 2015. — Т. 8, № 4. — С. 397–407.
74. Голуб, М.В. Мониторинг работоспособности пьезоактуаторов с помощью непрерывного вейвлет-преобразования / М.В. Голуб, А.Н. Шпак // Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» / СамГТУ. — Самара: 2013. — С. 78–81.
75. Golub, M. V. Application of the integral approach and wavelet transform in simulating and analysis of guided waves excitation by axisymmetric partially debonded piezoactuators / M. V. Golub, A. Shpak // 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference YIC 2013. — France, Bordeaux: 2013. — P. 4.
76. Голуб, М.В. Вейвлет-преобразование для изучения механизмов возбуждения волн Лэмба отслоившимися пьезоактуаторами / М.В. Голуб, А.Н. Шпак // Труды акустического симпозиума КОНСОНАНС-2013. — Киев, Украина: 2013. — С. 95–100.
77. Голуб, М.В. Математическое моделирование динамического взаимодействия несимметричного пьезоактивного элемента с упругой многослойной подложкой / М.В. Голуб, А.Н. Шпак // Сборник докладов V Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям

свойств материалов ТестМат-2014 / Всероссийский институт авиационных материалов. — Москва: 2014. — С. 10.

78. Golub, M.V. Analysis of lamb wave excitation by the partly debonded circular piezoelectric wafer active sensors / M.V. Golub, I. Buethe, A.N. Shpak et al. // The e-Journal of Nondestructive Testing. — 2014. — Vol. 19, no. 12. — P. 7.
79. Голуб, М.В. Использование метода конечных элементов и интегрального подхода для моделирования отслоившегося пьезоэлектрического сенсора на упругом слое / М.В. Голуб, А.Н. Шпак // Материалы XVI Всероссийской школы-конференции «Современные проблемы математического моделирования». — пос. Абрау-Дюрсо: 2015. — С. 62–66.
80. Шпак, А.Н. Моделирование и анализ волн Лэмба, возбуждаемых отклеенным пьезоактуатором / А.Н. Шпак // Сборник материалов научного семинара стипендиатов программ «Михаил Ломоносов III» и «Иммануил Кант III» 2014/2015 года. — Москва: 2015. — С. 89–93.
81. Голуб, М. В. Метод конечных элементов высокой степени точности, или метод спектральных элементов, в задачах математической физики / М. В. Голуб, С. И. Фоменко, А. Н. Шпак. — Краснодар: Кубанский государственный университет, 2015. — С. 78.
82. Берлинкур, Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе; Под ред. У. Мэзон. — Физическая акустика, Т. 1, Ч. А., М.: Мир, 1966. — С. 204–326.
83. Партон, В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, В. А. Кудрявцев. — М.: Наука, 1998.

84. Гринченко, В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. — Киев: Наукова Думка, 1989. — С. 279.
85. Попонин, В.С. Метод спектральных элементов на неструктурированной сетке в вычислительной механике / В.С. Попонин. № 46. — Томск.: Издательство Томского государственного университета, 2009. — С. 143.
86. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1976. — С. 387.
87. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — С. 320.
88. Тыртышников, Е.Е. Модификации методов вычисления интегралов Чебышёва–Лагерра и Гаусса–Лежандра / Е.Е. Тыртышников // В мире неразрушающего контроля. — 2004. — Т. 44, № 7. — С. 1185–1194.
89. Priolo, E. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques / E. Priolo, J. M. Carlione, G. Seriani // Journal of the Acoustical Society of America. — 1994. — Vol. 95(2). — P. 681 – 693.
90. Glushkov, E. V. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack / E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, M. V. Golub, A. Boström // Journal of the Acoustical Society of America. — 2006. — Vol. 119. — P. 3589–3598.
91. Tattersall, H. G. The ultrasonic pulse-echo technique as applied to adhesion testing / H. G. Tattersall // Journal of Physics D: Applied Physics. — 1973. — Vol. 6, no. 7. — P. 819–832.

92. Leiderman, R. Scattering of ultrasonic waves by defective adhesion interfaces in submerged laminated plates / R. Leiderman, A. M. B. Barbone, P. E. Braga // Journal of the Acoustical Society of America. — 2005. — Vol. 118. — P. 2154–2166.
93. Boström, A. On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks / A. Boström, G. R. Wickham // Journal of Nondestructive Evaluation. — 1991. — Vol. 10. — P. 139–149.
94. Golub, M. V. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves / M. V. Golub, A. Boström // Wave Motion. — 2011. — Vol. 48(2). — P. 105–115.
95. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — С. 320.
96. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — С. 872.
97. Ворович, И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. — М.: Наука, 1979. — С. 320.
98. Диткин, В. А. Интегральные преобразования / В. А. Диткин, А. П. Прудников // Итоги науки и техники. Серия. Математический анализ. — 1967. — Т. 5. — С. 7–82.
99. Глушков, Е. В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. — Краснодар: Кубанский государственный университет, 1990. — С. 72.
100. Бабешко, В.А. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков,

Н.В. Глушкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1987. — Т. 27, № 1. — С. 93–99.

101. Кваша, О. В. Исследование взаимодействия пьезокерамических элементов с упругими волноводами / О. В. Кваша. диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Краснодар, КубГУ, 2007. — С. 126.
102. Глушкова, Н. В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости / Н. В. Глушкова. диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — Краснодар, КубГУ, 2000. — С. 220.
103. Laude, V. Equality of the energy and group velocities of bulk acoustic waves in piezoelectric media / V. Laude, A. Reinhardt, A. Khelif // IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control. — 2005. — Vol. 52. — P. 1869.
104. Kiselev, A.P. Energy flux of elastic waves / A.P. Kiselev // Journal of Soviet Mathematics. — 1982. — Vol. 19, no. 4. — P. 1372–1375.
105. Блаттер, К. Вейвлет-анализ. Основы теории / К. Блаттер. — М.: ТЕХНОСФЕРА, 2004. — С. 273.
106. Немытова, О.В. Использование оценки мгновенной частоты для классификации эхосигналов от различных отражателей / О.В. Немытова, А.Б. Ринкевич, Д.В. Перов // Дефектоскопия. — 2012. — Т. 11. — С. 46–61.