

*На правах рукописи*



**Голуб Михаил Владимирович**

**ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН, ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ  
И РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПОВРЕЖДЁННЫХ  
МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ**

Специальность 01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Краснодар – 2016

Работа выполнена в Институте математики, механики и информатики  
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Кубанский государственный университет»

*Научный консультант:* **Глушков Евгений Викторович**  
доктор физико-математических наук, профессор

*Официальные оппоненты:* **Ерофеев Владимир Иванович**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
директор Института проблем машиностроения РАН –  
филиала федерального государственного бюджетного научного  
учреждения «Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики Российской академии наук»

**Киселев Алексей Прохорович**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ведущий научный сотрудник федерального  
государственного бюджетного учреждения науки  
«Санкт-Петербургское отделение Математического  
института им. В. А. Стеклова Российской академии наук»

**Соловьев Аркадий Николаевич**  
доктор физико-математических наук, доцент,  
заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная  
механика» федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Донской государственный технический университет»

*Ведущая организация:* Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
«Институт проблем машиноведения Российской академии наук»

Защита состоится «22» декабря 2016 г. в 14-00 на заседании диссертационного  
совета Д 212.101.07 при ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»,  
350040, г. Краснодар ул. Ставропольская, 149, ауд. 231.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО  
«Кубанский государственный университет» по адресу: 350040, г. Краснодар ул.  
Ставропольская, 149, <http://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>.

Автореферат разослан «19» сентября 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Зарецкая М.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Многие современные композиционные материалы, применяемые в высокотехнологичных отраслях промышленности, представляют собой слоистые структуры. Такие структуры получаются при изготовлении композитов из слоёв металлов, полимеров, стекло- и углепластиков и прочих материалов, а также при нанесении тонкослойных покрытий. Все бóльшее применение находят также композитные материалы с периодическим изменением свойств в одном или нескольких направлениях. Они обладают рядом уникальных свойств, благодаря которым их относят к акустическим метаматериалам или фононным кристаллам.

В процессе производства и в ходе эксплуатации конструкций из слоистых композитов в них возможно появление и накопление повреждений различных типов, среди которых наиболее распространёнными и опасными являются дефекты типа нарушения сплошности, например, отслоения, непроклеи и трещины. Негативное влияние дефектов на свойства структур, приводящее к значительному ухудшению их прочностных свойств, обуславливает необходимость развития и совершенствования методов неразрушающего контроля и мониторинга состояния конструкций из композитов. Среди актуальных подходов значительное место занимают методики, основанные на применении упругих волн, которые рассеиваются на неоднородностях разных типов и форм, что даёт возможность обнаруживать факт наличия дефекта, а также определять характер и положение повреждения в исследуемой структуре. В качестве устройств, позволяющих возбуждать и регистрировать упругие волны, широко применяются пьезоэлектрические преобразователи, перемещаемые по поверхности, встроенные или приклеенные к поверхности структуры. При этом выход из строя даже одного пьезоэлектрического преобразователя может привести к сбоям в работе системы мониторинга, поэтому задача идентификации повреждений распространяется на актуаторы и датчики.

Для решения задач волнового мониторинга требуется наличие математических моделей, описывающих взаимодействие упругих волн с дефектами разного рода. К настоящему времени имеется ряд методов решения обратных задач по обнаружению и идентификации дефектов на основе улавливаемых волновых полей (*Ватульян А.О., Соловьев А.Н., Rokhlin S.I., Mitra M., Gopalakrishnan S. и др.*). Основой для их применения является решение прямых задач о распространении упругих волн в неповреждённых многослойных структурах и их дифракции на дефектах различной природы. Таким образом, задача разработки новых эффективных теоретических моделей динамического поведения композитов с неоднородностями, позволяющих проводить быструю и надёжную обработку результатов ультразвуковой инспекции с целью обнаружения и оценки характера повреждений, является весьма актуальной.

Для моделирования распространения бегущих волн в многослойных непо-

вреждённых композитах разработан ряд методов: метод матриц переноса, методы на основе построения глобальной матрицы жесткости, полуаналитический метод конечных элементов (SAFE) и др. Для описания взаимодействия с упругими волноводами пьезоэлектрических преобразователей, которые широко применяются в системах мониторинга для возбуждения и измерения волновых полей, можно использовать разновидности метода конечных элементов (*Наседкин А.В., Соловьев А.Н., Liu G.R., Chakraborty A., Gopalakrishnan, S. и др.*) или метода граничных элементов (*Хай М.В., Михаськив В.В., Игумнов Л.А., Sladek J., Zhang Ch. и др.*).

Значительное развитие и распространение получил более эффективный для решения динамических задач, нежели традиционный метода конечных элементов (МКЭ), метод конечных элементов высокого порядка точности (МКЭ ВПТ), или spectral element method (*Patera M., Komatitsch D., Tromp J.*). Помимо прямых численных методов разработаны упрощённые модели, в рамках которых действие пьезоактуатора заменяется тангенциальными поверхностными силами в области контакта актуатора с волноводом (*Chaudry Z., Rogers C.A., Giurgiutiu V.*). Данный подход оказывается достаточно эффективным в низкочастотном диапазоне и при использовании тонких пьезоактуаторов (*Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Еремин А.А., Квача О.В.*).

Для описания упругих колебаний в многослойных волноводах с неоднородностями южнороссийской школой механики развит и традиционно используется интегральный подход, в рамках которого волновые поля представляются через поверхностные интегралы, содержащие фундаментальные решения для рассматриваемых волноводных структур (*Ворович И.И., Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Зинченко Ж.Ф. и др.*). Это позволяет не только быстро и эффективно строить решение задач возбуждения и дифракции, но и проводить углубленный численно-аналитический анализ волновых процессов, опираясь на строгий математический аппарат.

Даже возможности распараллеливания вычислений и использования полуаналитических методов не позволяют эффективно решать ряд задач неразрушающего контроля. В связи с этим возникли гибридные методы, использующие локально-глобальную концепцию, при которой часть рассматриваемой структуры, например, пьезоактуатор или область, содержащая отслоение, описывается прямым численным методом, а остальная (глобальная) часть полуограниченного волновода моделируется с помощью одного из полуаналитических подходов (*Gresil M., Giurgiutiu V., Shen Y., Cesnik C.E.S.*).

Для описания отслоений чаще всего используется модель раскрытой трещины, то есть вводится бесконечно тонкий разрез со свободными от напряжений берегами. Однако нередко бывает необходимо учесть случаи частичного отслоения, наличия связей между берегами, зоны неидеального контакта или области концентрации микродефектов. Математически описать динамическое поведение

повреждённого интерфейса или зоны, содержащей внутренние дефекты, можно введением распределения микротрещин или граничных условий пружинного типа (ГУ ПТ), а также заменой повреждённой зоны тонким вязко-упругим слоем. При этом ГУ ПТ позволяют описывать более широкий класс отслоений, чем раскрытые трещины, включая их как частный случай.

Одним из наиболее эффективных методов решения задач дифракции упругих волн на неоднородностях является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). Необходимо отметить, что к настоящему моменту большинство задач решено для волноводов, представляющих собой односвязную область без внутренних плоско-параллельных границ (пространство, полупространство, однородный слой) и содержащих раскрытые трещины. С использованием ГУ ПТ на сегодняшний день решено относительно небольшое количество задач дифракции, однако в последние годы ГУ ПТ всё чаще применяются для описания динамики отслоений и тонких клеевых интерфейсов, в связи с чем можно отметить работы 2015–2016 гг. по идентификации отслоений и изучению слоистых фононных кристаллов (*Шифрин Е.И., Ishii Y., Biwa S., Leiderman R., Castello D.*). В диссертационной работе обобщены имевшиеся результаты, а также разработаны и развиты варианты МГИУ для систем отслоений в многослойных волноводах с учётом ослабления адгезионных связей на межслойных интерфейсах.

В отдельную категорию можно выделить волновые задачи, связанные с изучением резонансных и блокирующих эффектов, возникающих при взаимодействии упругих волн с неоднородностями различной природы. Значительный интерес к таким задачам, наблюдаемый в последнее время, обусловлен возможностью использования данных явлений для точной идентификации геометрических характеристик отдельных классов дефектов в задачах волнового мониторинга и неразрушающего контроля (*Солодов И.Ю., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Еремин А.А.*) и при создании материалов с уникальными волноводными свойствами (*Baravelli E., Ruzzene M.*). Если для тел конечных размеров спектр является дискретным, то для полуограниченных тел, имеющих хотя бы одну границу бесконечной протяжённости, появляются области сплошного спектра. Для упругих тел с внутренними и поверхностными неоднородностями было доказано существование смешанного спектра [*Ворович И.И. ДАН СССР, 1979*], а для жидкого волновода с неподвижным штампом на дне было аналитически показано существование ловушечных мод [*Индейцев Д.А., Осипова Е.В. ЖТФ, 1996*], что означает наличие дискретного спектра на оси сплошного. Соответствующие режимы колебаний наблюдаются в различных волновых задачах и называются ловушечными модами, резонансами неоднородных волн или собственными решениями, которые соответствуют изолированным вещественным точкам дискретного спектра.

Спектр соответствующих краевых задач были изучены для случаев изотропного упругого пространства с одной и двумя раскрытыми трещинами, а также

круговым отслоением, моделируемым ГУ ПТ, для которых система интегральных уравнений расщепляется на две независимые (Капцов А.В., Шифрин Е.И., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Eriksson A.S., Alves C.J.S.). Вопрос влияния формы трещин на распределение резонансных полюсов в комплексной плоскости частоты был подробно изучен в работе [Глушков Е.В., Глушкова Н.В. ПММ, 1998], где были определены точки спектра для различных форм, включая прямоугольные и L-образные трещины, а также отмечено близкое расположение комплекснозначных резонансных частот для круговых и квадратных трещин с одинаковой площадью.

Указанные выше исследования резонансного рассеяния проводились для трещин, расположенных в безграничном упругом пространстве, то есть без учёта влияния волн, отраженных от границ среды. В то же время для трещин и отслоений, расположенных в упругих волноводах (полупространство, слой, пакет слоев), наличие отражения от границ существенно меняет картину распределения комплексных резонансных частот рассеяния. В частности, возможен их выход на вещественную ось в случае локализации волновой энергии в окрестности препятствия, когда её отток на бесконечность блокируется энергетическими вихрями, перекрывающими поперечное сечение волновода. Кроме того, представляет интерес изучение дифракции не объёмных, а бегущих волн, распространяющихся вдоль поверхностей волноводов. Первые результаты по резонансному блокированию трещинами, расположенными в упругом однородном полупространстве и слое, были получены в работах [Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Шапарь Е.М. ДАН, 2004; Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. АЖ, 2006].

Выполненные и представленные в данной диссертационной работе исследования были в том числе направлены на изучение влияния размеров, расположения и формы препятствий на спектральные свойства соответствующих краевых задач математической физики. Были рассмотрены распределения резонансных частот и проведены экспериментальные исследования, подтверждающие результаты, полученные с помощью реализованных в виде комплексов программ математических моделей.

**Актуальность** диссертационного исследования определяется необходимостью построения и развития математических моделей для описания волновых процессов в композитных материалах при наличии в них отслоений различных типов, а также при неидеальном контакте и ослаблении адгезионных связей на интерфейсах. Создание таких моделей необходимо для идентификации отслоений в многослойных структурах средствами ультразвукового неразрушающего контроля.

Основной **целью** диссертационной работы является теоретическое и экспериментальное исследование дифракционных, резонансных и локализационных явлений в многослойных упругих волноводах с отслоениями различного типа, а также разработка соответствующих механико-математических моделей, их реализация в виде комплексов компьютерных программ и экспериментальная верификация.

**В задачи** диссертационного исследования входят:

- 1) разработка подходов и методов, позволяющих описывать и анализировать дифракцию упругих волн на одиночных, множественных, стохастически и периодически распределённых отслоениях различных форм в многослойных упругих волноводах;
- 2) разработка эффективных математических и компьютерных моделей, описывающих распространение упругих волн в многослойных структурах с учётом неидеального контакта между слоями;
- 3) экспериментальная верификация разработанных моделей;
- 4) исследование дифракционных явлений, возникающих при рассеянии упругих волн на отслоениях, в особенности резонансных эффектов, а также связанных с ними явлений локализации и захвата энергии.

**Методы исследования.** Для описания волновых полей в многослойных структурах, возбуждаемых нагрузками, и полей, рассеянных неоднородностями, используется интегральный подход, основанный на применении интегральных преобразований и интегральных представлений волновых полей с помощью матриц Грина. Распространение плоских волн в слоистых волноводах описывается с помощью матриц переноса. Действие пьезоактуаторов моделируется МКЭ ВПТ или с применением упрощённой модели pin-force. Для определения рассеиваемых на отслоениях полей применяется метод граничных интегральных уравнений и метод Бубнова-Галёркина. В случае бесконечного набора препятствий для периодически расположенных отслоений используется теория Флоке, а для стохастически распределённого набора отслоений применяется техника усреднения по ансамблю.

**Достоверность и обоснованность** результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых краевых задач, применением строгих математических методов, сравнением результатов с данными, полученными экспериментально или иными методами, а также сопоставлением с известными результатами других авторов.

**Научную новизну** работы составляют следующие результаты:

- 1) на основе интегрального подхода и метода матриц переноса развиты методы решения краевых задач о распространении упругих волн в многослойных структурах с неидеальным контактом между слоями или при ослаблении адгезионных связей межслойного соединения;
- 2) исследовано резонансное взаимодействие пьезоэлектрических преобразователей с многослойными волноводами при наличии отслоений в области контакта;

- 3) модифицирован метод граничных интегральных уравнений и на его основе разработаны алгоритмы и компьютерные программы, реализующие численное решение задач дифракции упругих волн на системе отслоений в многослойных структурах с учётом неидеальности контакта между слоями;
- 4) разработаны подходы к моделированию повреждённых интерфейсов, предложены методы решения задач рассеяния упругих волн на периодически и стохастически распределённых системах отслоений в многослойных структурах, а также выполнена их компьютерная реализация;
- 5) определены соотношения, связывающие два подхода для описания динамического поведения интерфейса с ослабленными адгезионными связями: на основе использования граничных условий пружинного типа и стохастически распределённого набора трещин;
- 6) исследованы резонансные явления в фоновых кристаллах с системой отслоений и продемонстрирована возможность фокусировки волновой энергии, изучены закономерности формирования запрещённых зон в случае дифракции на периодическом наборе трещин;
- 7) получено экспериментальное подтверждение эффекта захвата и локализации энергии в волноводе с трещиной на частотах, теоретически предсказанных в рамках развитой модели;
- 8) исследованы спектральные свойства задач дифракции на одиночных, множественных и распределённых отслоениях различной формы в многослойных волноводах;
- 9) исследовано формирование запрещённых и разрешённых зон путём периодической расстановки неоднородностей.

**Теоретическая ценность и практическая значимость** полученных результатов определяются возможностью их применения в неразрушающем ультразвуковом контроле и мониторинге структур и конструкций.

Части диссертационной работы были выполнены при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проекты 2.1.1/1231, 2.2.2.3.16084, 2.2.2.3/9070, 2.1.1/10643, 1.189.2014К, 11.9157.2014 и 9.743.2016), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-96607, 07-01-00307, 11-01-90400, 11-01-96508, 12-01-00320, 12-01-90819, 12-01-31001, 12-01-33011, 13-01-96516, 13-01-96520, 14-08-00370, 16-51-53043, 16-41-230352), Совета по грантам Президента Российской Федерации (СП-248.2012.5 и СП-114.2015.5), Германской службы академических обменов DAAD (A/07/72548, A/09/72520, A1374048, 91547153) а также в рамках выполнения ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проекты 14.740.11.0578 и 14.В37.21.0387).



## На защиту выносятся:

- 1) результаты анализа свойств спектра и резонансных явлений для задач о взаимодействии протяжённых пьезоэлектрических преобразователей со слоистыми структурами при наличии отслоений в области контакта;
- 2) механико-математические модели, описывающие упругие колебания многослойного волновода с системами отслоений различных форм и типов с учётом ослабления адгезионных связей межслойных соединений или неидеальности контакта;
- 3) механико-математические модели, описывающие упругие колебания многослойного волновода со стохастическим и периодическим распределением полосовых и трёхмерных планарных отслоений;
- 4) соотношения, связывающие степень повреждённости интерфейса со значениями компонент матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, описывающими неидеальный контакт в случае стохастического распределения микродефектов различной формы;
- 5) результаты исследования резонансных колебаний систем отслоений различного типа в многослойных волноводах;
- 6) результаты численного расчёта и анализа резонансных и локализационных явлений в фоновых кристаллах с системой отслоений;
- 7) результаты экспериментальной верификации теоретически предсказанного эффекта локализации и захвата волновой энергии в слоистом волноводе с отслоением.

**Публикации.** Основное содержание и результаты диссертационных исследований отражены в 22 статьях, опубликованных в ведущих рецензируемых журналах, из них 16 в журналах, включенных в базы данных Scopus и Web of Science, и 6 в изданиях из перечня, утверждённого ВАК РФ. По итогам создания комплексов программ, реализующих механико-математические модели, было получено 13 свидетельств о государственной регистрации программы ЭВМ.

Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертации, докладывались в период с 2007 г. по 2016 г. более чем на 50 международных и всероссийских конференциях. В их числе: 79th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (г. Бремен, ФРГ, 2008 г.), 7th Solid Mechanics Conference EUROMECH (г. Лиссабон, Португалия, 2009 г.), Первая всероссийская конференция “Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой” (г. Нижний Новгород, 2009 г.), International Conference Days on

Diffraction (г. Санкт-Петербург, 2010, 2012–2014 и 2016 гг.), XII–XVII Международные конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (г. Ростов-на-Дону, 2008–2014 гг.), 5th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (г. Саарбрюкен, ФРГ, 2011 г.), X Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (г. Нижний Новгород, 2011 г.), Акустический симпозиум “КОНСОНАНС” (г. Киев, Украина, 2011 и 2013 гг.), 3rd International conference on metamaterials, photonic crystals and plasmonics “МЕТА-2012” (г. Париж, Франция, 2012 г.), 14th International Conference on Mathematical methods in electromagnetic theory (г. Харьков, Украина, 2012 г.), IX международная научная конференция по гидроавиации “Гидроавиасалон-2012” (г. Геленджик, 2012 г.), 2nd International Conference on Phononic Crystals, Metamaterials, Phonon Transport and Optomechanics (Шарм-эль-Шейх, Египет, 2013 г.), Девятая Всероссийская научная конференция с международным участием “Математическое моделирование и краевые задачи” (г. Самара, 2013 г.), Second China-Russia Conference on Numerical Algebra with Applications (г. Ростов-на-Дону, 2013 г.), VII Всероссийская конференция по механике деформируемого твёрдого тела (г. Ростов-на-Дону, 2013 г.), VIII Российская научно-техническая конференция “Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций” (г. Екатеринбург, 2014 г.), Всероссийская школа-семинар “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете” (пос. Дивноморское, 2011–2016 г.), VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твёрдого тела (г. Чебоксары, 2014 г.), The 11th European Conference on Non-Destructive Testing ECNDT 2014 (г. Прага, Чешская Республика, 2014 г.), International Conference on Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications PHENMA-2015 (г. Азов, 2015 г.), 3rd International Conference on Phononic Crystals, Metamaterials, Phonon Transport and Phonon Coupling (г. Париж, Франция, 2015 г.), XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 2015 г.), 8th European Workshop On Structural Health Monitoring EWSHM (г. Бильбао, Испания, 2016 г.).

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа общим объёмом 240 страниц имеет следующую структуру: введение, шесть глав, заключение, приложение и список литературы, включающий 213 источников. Работа содержит 128 рисунков и 6 таблиц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** даётся обзор достижений в изучаемой области, обсуждается актуальность диссертационной работы, формулируются цель и основные задачи научного исследования, указывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В **первой главе** приводится общая постановка краевых задач для многослойных упругих волноводов с отслоениями. В диссертационном исследовании изучаются волновые процессы в структурах, в состав которых входят электроупругие

материалы, поэтому в §1.1 приводится общий вид уравнений движения и состояния для трёхмерного пьезоэлектрического тела.

В декартовой системе координат  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$  рассматривается составное тело, занимающее объём  $V$ , с приложенной на поверхности  $S = \partial V$  нагрузкой  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ , под действием которой точки  $\mathbf{x} \in V$  отклоняются от положения, заданного в начальный момент времени  $t = 0$ . Положение точек описывается вектором перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , являющегося функцией пространственных координат  $\mathbf{x}$  и времени  $t$ . Для описания динамики пьезоэлектрического тела в рамках линейной теории упругости необходимо в каждой точке  $\mathbf{x}$  задать тензор упругих постоянных  $C_{ijkl}(\mathbf{x})$ , тензор констант пьезоэлектрических напряжений  $e_{kij}(\mathbf{x})$ , тензор диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$  и плотность  $\rho(\mathbf{x})$ . Для удобства используются правила тензорной записи, производные записываются в виде  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$  и  $\dot{u}_i = \partial u_i / \partial t$ , полужирным шрифтом обозначаются вектор-столбцы, а прямым жирным шрифтом — матрицы. Кроме того, далее опускается указание на зависимость от некоторых переменных в тех случаях, где это не вызывает неоднозначности. Динамическое поведение электроупругих тел описывается уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

уравнениями состояния

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl}(\mathbf{x})s_{kl}(\mathbf{x}, t) - e_{ijk}(\mathbf{x})E_k(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

$$D_i(\mathbf{x}, t) = e_{ikl}(\mathbf{x})s_{kl}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})E_j(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

и уравнениями электростатики

$$D_{i,i}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений,  $s_{ij}$  — тензор деформаций, связанный соотношениями Коши  $s_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$  с вектором перемещений,  $E_k = -\phi_{,k}$  — компоненты вектора напряжённости электрического поля,  $D_i$  — компоненты вектора электрической индукции, а  $\phi$  — электрический потенциал.

Постановка задачи дополняется граничными условиями, выполняющимися в любой момент времени  $t \geq 0$ . На поверхности тела  $S$  в каждый момент времени  $t$  должны задаваться перемещения

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x})p(t), \quad \mathbf{x} \in S \quad (5)$$

или напряжения

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j(\mathbf{x}) = q_i(\mathbf{x})p(t), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (6)$$

либо формулироваться смешанные граничные условия. В качестве  $p(t)$  используется 5 циклов косинуса, сглаженных окном Ханна, с центральной частотой  $f_0$ .

При рассмотрении композитных материалов область  $V$  разбивается на под-области  $V_i$  ( $V = \bigcup V_i$ ), в каждой из которых упругие свойства постоянны. При этом необходимо задать граничные условия для описания различных типов взаимодействий между компонентами композита. Наиболее частым условием является идеальный контакт, или жёсткое сцепление сред. При идеальном контакте двух областей,  $V_1$  и  $V_2$ , имеющих общую границу  $S_1 = \partial V_1 \cap \partial V_2$ , граничные условия на  $S_1$  определяются условиями непрерывности перемещений

$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S_1,$$

а также нормальных и касательных напряжений на границе с нормалью  $\mathbf{n}$

$$[\sigma_{ij}](\mathbf{x})n_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1.$$

Здесь и далее квадратные скобки используются для обозначения скачка величины, заключённой между ними.

В случаях, когда необходимо описывать неидеальный контакт или учитывать влияние тонкого упругого соединения, можно использовать ГУ ПТ [Baik J.M., Thompson R.B. *JNDE*, 1984; Rokhlin S.I., Wang Y.J. *JASA*, 1991]:

$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = \mathbf{B}^s(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}_n^2(\mathbf{x}), \quad [\boldsymbol{\tau}_n](\mathbf{x}) = \mathbf{B}^u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1. \quad (7)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{B}^s, \mathbf{B}^u$  характеризуют тип соединения, а вектор нормальных и касательных напряжений на элементарной площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$  обозначаются как  $\boldsymbol{\tau}_n = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$  ( $\tau_{ni} = \sigma_{ij}n_j$ ). Существование и единственность решений краевых задач с условиями (7) была показана путём сведения к уравнениям Фредгольма 2-го рода [Martin P.A. *JNDE*, 1992].

Если рассматривается электродированная поверхность, то на ней задаётся электрический потенциал  $\phi(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in S$ . При контакте пьезоэлектрика со средой, имеющей очень малую диэлектрическую проницаемость, формулируется приближённое граничное условие  $D_i(\mathbf{x})n_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in S_1$ .

Система уравнений движения в частных производных второго порядка (1)–(4) записывается относительно  $u_i$  и  $\phi$  в следующем виде:

$$C_{ijkl}u_{k,lj} + e_{kij}\phi_{,kj} = \ddot{u}_i, \quad (8)$$

$$e_{ikl}u_{k,li} - \varepsilon_{ik}\phi_{,ki} = 0 \quad (9)$$

и дополняется соответствующими начально-граничными условиями. В частном случае упругой изотропии и в отсутствии пьезоэффекта упругие модули  $C_{ijkl}$  выражаются через упругие константы Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ . Для однородной изотропной среды уравнение электростатики (4) отсутствует, а уравнения движения (1) сводятся к уравнениям Ламе относительно перемещений  $\mathbf{u}$ .

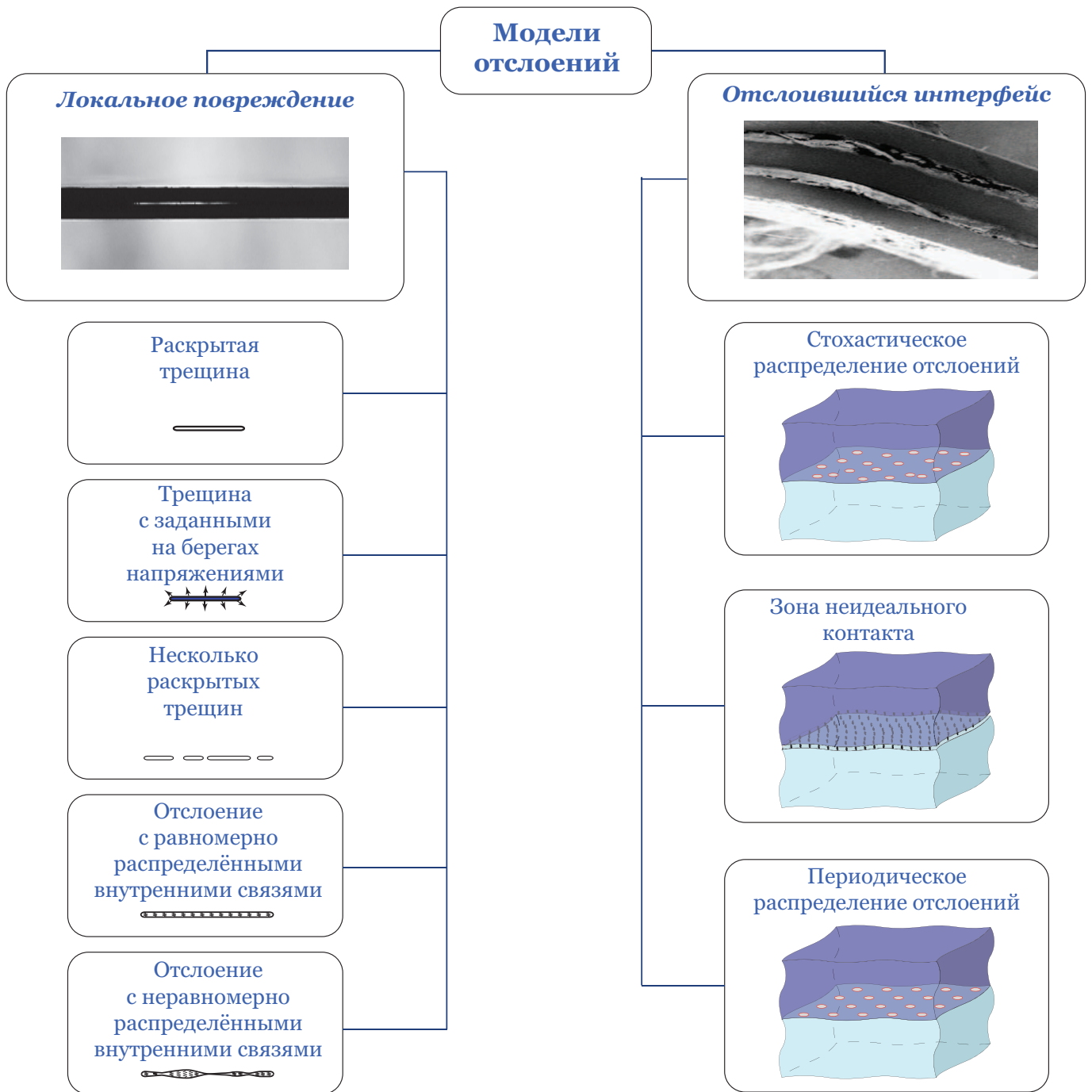


Рисунок 1 – Классификация основных моделей, используемых для описания отслоений

Если упругое тело  $V$  содержит неоднородность, занимающую область  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ , то в зависимости от её типа необходимо задание соответствующих граничных условий. Возможная классификация моделей, используемых при описании отслоений, приведена на рисунке 1. Среди моделей локальных повреждений чаще всего используется модель раскрытой трещины с неконтактирующими берегами. Так, для раскрытой трещины, расположенной на границе раздела двух сред ( $V_1$  и  $V_2$ ), граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^2(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\tau}_n^1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_n^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_{12}/\partial\Omega, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\tau}_n^1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_n^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (11)$$

Если на поверхности трещины заданы напряжения (например, она заполнена жидкостью), то (11) преобразуется в  $\boldsymbol{\tau}_n^1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_n^2(\mathbf{x}) = -\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

В тех случаях, когда отслоение не содержит включений, возможно использование ГУ ПТ путём преобразования граничных условий (7) к виду:

$$\boldsymbol{\tau}_n^1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_n^2(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (12)$$

где  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$  – матрица жесткостей  $3 \times 3$ . В свою очередь при  $\kappa_{ij}(\mathbf{x}) \equiv 0$  ГУ ПТ вида (12) переходят в условия (11) для раскрытой трещины. При этом следует различать равномерно отслоившиеся зоны, где  $\kappa_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \text{const}$  и неравномерные отслоения, для которых в общем случае  $\kappa_{ij}(\mathbf{x}) \neq \text{const}$ . Такие отслоения также называют трещинами с внутренними связями, которые могут присутствовать как в серединной, так и в концевой области [Перельмутер М.Н., 2015].

Отдельно необходимо выделить те ситуации, когда область  $\Omega$  представляет объединение множества односвязных непересекающихся областей  $\Omega_m$  ( $m > 1$ ), каждая из которых предполагается отслоением. В этом случае говорят о множественном наборе отслоений и в каждой области  $\Omega_m$  задаётся одно из граничных условий (11), (12).

Наряду с перечисленными выше условиями вектор перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  должен удовлетворять начальным условиям

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (13)$$

задающим первоначальное отклонение  $\mathbf{u}_0$  точек тела от положения равновесия и их мгновенную скорость  $\mathbf{v}_0$  в начальный момент времени  $t = 0$ , до которого все точки тела предполагаются находящимися в покое:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t \leq 0) \equiv \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t \leq 0) \equiv \mathbf{0}. \quad (14)$$

Начальные условия относительно электрического потенциала  $\phi$  при рассмотрении упругих и акустических волн не записываются, так как в уравнениях (4) используется квазистатическое приближение уравнений Максвелла.

В §1.2 даётся постановка задач для двух рассматриваемых классов повреждённых многослойных структур. Первый тип структур – многослойные волны конечной толщины (см. рисунок 2). Каждый из  $N_L$  слоёв  $V_l = \{|x_1|, |x_2| < \infty, z_{l-1} \leq x_3 \leq z_l\}$  с границами  $S_{l-1} = \{x_3 = z_{l-1}\}$  и  $S_l = \{x_3 = z_l\}$  предполагается упругим с заданными постоянными константами Ламе  $\lambda_l$  и  $\mu_l$  и плотностью материала  $\rho_l$ . Толщины всего многослойного пакета  $V = \bigcup V_l$  и отдельных слоёв  $V_l$  обозначаются  $H$  и  $h_l$  соответственно. Вместо  $\lambda_l$  и  $\mu_l$  в некоторых случаях задаются скорости продольных ( $v_{1l}$ ) и поперечных ( $v_{2l}$ ) волн.

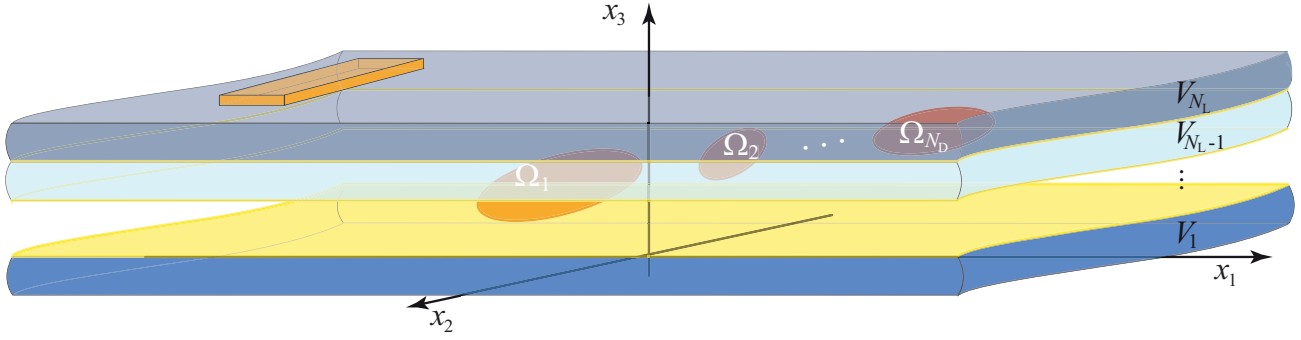


Рисунок 2 – Геометрия задачи: многослойный волновод с отслоениями

Ко второму типу структур относятся слоистые фоновые кристаллы, то есть многослойные пакеты с периодически изменяющимися свойствами. Для фоновых кристаллов естественной является постановка, в которой они располагаются между двумя упругими полупространствами  $V_1$  ( $z_0 = -\infty$ ) и  $V_{N_L}$  ( $z_{N_L} = \infty$ ). Фоновый кристалл состоит из  $N_U$  одинаковых ячеек, каждая из которых в свою очередь скомпонована из  $N_C$  слоев, поэтому общее количество слоев в фоновом кристалле  $N_C \cdot N_U$ ; при этом общее количество слоев  $N_L = N_C \cdot N_U + 2$  (см. рисунок 3).

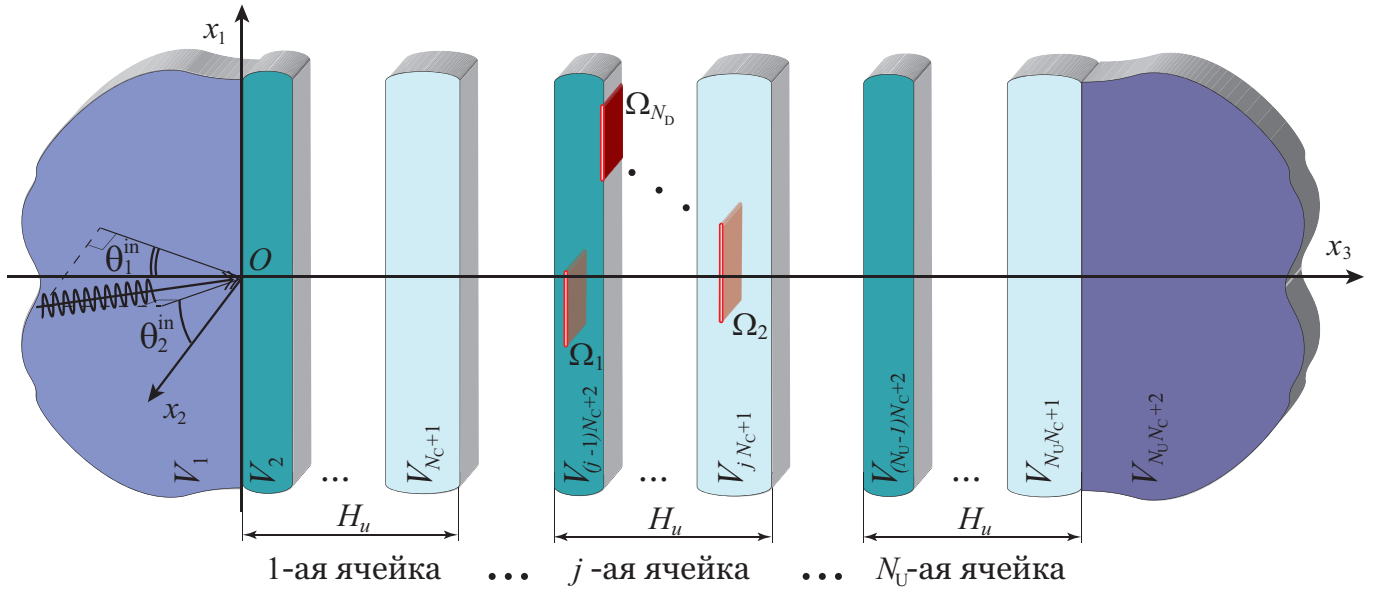


Рисунок 3 – Геометрия задачи: фоновый кристалл с отслоениями

Рассматриваются многослойные структуры при наличии  $N_D$  планарных отслоений  $\Omega_j$  различной формы, лежащих в плоскостях  $x_3 = d_j$ ,  $j = \overline{1, N_D}$ . Для моделирования неограниченных плоскостей с повреждениями используются периодические и стохастические массивы отслоений ( $N_D = \infty$ ). Для описания отслоений вводятся ГУ ПТ на каждом из  $N_D$  дефектов  $\Omega_j$ :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa}_j(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{u}](\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j. \quad (15)$$

Моделировать неидеальный контакт на интерфейсе можно также путём использования ГУ ПТ, описывающих взаимодействие слоев, поэтому с учётом попадания

дефектов на межслойные границы с ослабленными связями задаются следующие условия:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}] &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varsigma}_l \cdot \boldsymbol{\tau} &= [\mathbf{u}] \end{aligned}, \quad \mathbf{x} \in S_l \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{N_D} \Omega_j \right). \quad (16)$$

Форма записи, отличная от (15), выбрана в связи с тем, что небольшой отклейке соответствуют большие значения  $\boldsymbol{\kappa}_l = \boldsymbol{\varsigma}_l^{-1}$ , а при значениях жёсткости равных  $\boldsymbol{\kappa}_{l;ii} = 0$  получалось бы два независимых волновода (при  $\boldsymbol{\varsigma}_l = 0$  имеет место непрерывность перемещений, что означает идеальный контакт между слоями  $V_l$  и  $V_{l-1}$ ).

В качестве источников колебаний рассматриваются нагрузки, заданные в областях  $\Omega_{\pm}$  на внешних поверхностях многослойной структуры  $S_0$  и  $S_{N_L}$  (знаки  $+$  и  $-$  соответствуют нагрузкам на верхней и нижней границах)

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^{\pm}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\pm}, \quad (17)$$

а также отдельно возбуждаемые такими нагрузками бегущие и плоские упругие волны.

В §1.3 описывается общая схема, используемая для решения задач о колебаниях многослойных структур с отслоениями. Для решения нестационарных задач линейной теории упругости используется преобразование Лапласа  $\mathcal{L}$  по временной переменной  $t$  с параметром  $-i\omega$ , где  $\omega$  имеет смысл круговой частоты. Это позволяет свести решение нестационарной задачи относительно  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  к решению гармонической задачи относительно комплексной амплитуды  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ , зависящей от  $\omega$ . Кроме того, линейность задачи позволяет представлять поле перемещений  $\mathbf{u}$  в волноводе с отслоением в виде суперпозиции падающего волнового поля  $\mathbf{u}^{\text{in}}$  и отражённого дефектами волнового поля  $\mathbf{u}^{\text{sc}}$ :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{in}} + \mathbf{u}^{\text{sc}}$ . Это даёт возможность сначала строить  $\mathbf{u}^{\text{in}}$ , а затем определять рассеянное поле таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Решение исходной нестационарной задачи с граничными условиями вида (5) или (6), в которых присутствует временная зависимость, задающаяся множителем  $p(t)$ , представляется как обратное преобразование Лапласа гармонического решения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)P(\omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)P(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (18)$$

Здесь  $P(\omega) = \mathcal{L}\{p(t)\}$ , а контур интегрирования  $\Gamma_{\omega}$  в комплексной плоскости частоты  $\omega$  для многослойных структур можно почти всюду совместить с вещественной осью.

В случае полуограниченных тел, когда объём  $V$  включает бесконечно удалённые точки (полупространство или пакет слоёв конечной толщины), предположение



об установившемся характере колебаний всего объёма приводит к неоднозначности, поэтому единственность для полуограниченных тел обеспечивается дополнительными условиями, сужающими класс допустимых решений. В настоящей работе используется принцип предельного поглощения. Задача о гармонических колебаниях  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ , описываемых уравнениями (1) упругого тела, неограниченного вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$ , путём применения двукратного преобразования Фурье сводится к определению Фурье-образа  $\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega)$ . Как функция своих аргументов  $\alpha_1, \alpha_2$  Фурье-образ  $\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega)$  имеет счётное количество полюсов для каждой частоты  $\omega$ . Эти полюса соответствуют волновым числам бегущих мод, распространяющихся в волноводе.

Полюса  $\omega_n = \operatorname{Re} \omega_n + i \operatorname{Im} \omega_n$  и  $\tilde{\omega}_n = -\operatorname{Re} \omega_n + i \operatorname{Im} \omega_n$  функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ , расположенные в нижней полуплоскости  $\operatorname{Im} \omega \leq 0$  симметрично относительно  $\operatorname{Re} \omega = 0$  принадлежат дискретному спектру задачи. Чем ближе спектральная точка  $\omega_n$  в плоскости комплексной частоты  $\omega$  к вещественной оси  $\operatorname{Im} \omega = 0$ , тем более выраженным её будет вклад вследствие меньшего затухания. Как правило, такие решения указывают на локализацию колебаний, связанную с неоднородностью волновода. Спектр динамической задачи о колебаниях полуограниченных тел со свободной границей без неоднородностей является сплошным (непрерывным) и заполняет всю вещественную ось  $\operatorname{Im} \omega = 0$ . Спектр динамических задач для полуограниченных тел с внутренними неоднородностями имеет смешанную структуру. Он включает в себя полупрямую сплошного спектра (как и в отсутствие неоднородностей), а также счётное количество точек дискретного спектра. Точки дискретного спектра связаны с собственными колебаниями всей системы, то есть волновода с неоднородностями, и отвечают за изолированные резонансы системы.

В §1.4 описываются основные характеристики волновых колебаний тел с отслоениями, используемые в последующих главах для анализа дифракционных и резонансных эффектов. В первую очередь определяется вектор плотности потока энергии  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  (вектор Умова-Пойнтинга), так как с помощью него и соответствующих линий тока можно более полно представить информацию о волновых колебаниях [Kiselev A.P. *JMS*, 1982]. Также в этом разделе вводятся коэффициент рассеяния энергии  $\Xi$ , энергетические коэффициенты прохождения  $\kappa^+$  и отражения  $\kappa^-$ , и определяются другие вспомогательные характеристики для анализа колебаний тел с отслоениями. С помощью преобразования Гильберта  $\mathcal{H}\{s\}$  определяется огибающая  $\mathcal{E}\{s\}(t) = \sqrt{s^2(t) + (\mathcal{H}\{s\}(t))^2}$  исходного сигнала  $s(t)$ .

Во **второй главе** обсуждаются вопросы распространения упругих колебаний в многослойных структурах с учётом неидеального контакта между слоями. В §2.1 описывается применение метода матриц переноса для моделирования прохождения упругих волн через многослойный пакет, составленный из  $N_L - 2$  слоёв  $V_l = \{z_{l-1} \leq x_3 \leq z_l\}$  и расположенный между двумя упругими полупространствами  $V_1 = \{x_3 < 0\}$  и  $V_{N_L} = \{x_3 > z_{N_L}\}$ . Для каждого слоя строится матрица

переноса  $\mathbf{T}_l$ , связывающая значения  $\mathbf{w} = \{\mathbf{u}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top\}^\top$  на границе слоя со значениями внутри:

$$\mathbf{w}(x_3) = \mathbf{T}_l(x_3, z_{l-1}) \cdot \mathbf{w}(z_{l-1}), \quad x_3 \in [z_{l-1}, z_l]. \quad (19)$$

Для всего многослойного пакета может быть составлена матрица переноса

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}_{N_L-1}^w \cdot \prod_{l=N_L-1}^2 \mathbf{T}_l(z_l, z_{l-1}) \cdot \mathbf{B}_{l-1}^w, \quad \mathbf{B}_l^w = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\varsigma}_l \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

связывающая значения  $\mathbf{w}$  на границах  $z_1$  и  $z_{N_L-1}$  и получаемая композицией матриц переноса отдельных слоев  $\mathbf{T}_l(z_l, z_{l-1})$  и матриц  $\mathbf{B}_l^w$ , позволяющих учесть граничные условия (16).

В §2.2 излагается схема модификации метода матриц переноса для описания фоновых кристаллов из  $N_U$  одинаковых ячеек, каждая из которых состоит из  $N_C$  слоёв. В силу периодичности изменения свойств, T-матрица всего фоновых кристалла, состоящего из  $N_U$  ячеек одинаковой толщины  $H_u$ , определяется путём возведения в степень T-матрицы одной ячейки

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{B}_{N_C+1}^w \cdot \prod_{i=N_C}^2 \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{B}_{i-1}^w.$$

В фоновом кристалле с бесконечным количеством ячеек  $N_U = \infty$  могут распространяться волны, волновые числа  $\zeta$  которых удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$|\mathbf{T}_u - \mathbf{I} e^{i\zeta H_u}| = 0. \quad (20)$$

В фоновых кристаллах возможно формирование запрещённых зон, в которых проходящие через периодическую структуру волны экспоненциально затухают, то есть  $\text{Im}\zeta \neq 0$ . В разделе анализируется влияние некоторых параметров неповрежденных фоновых кристаллов на распределение запрещённых зон и волновые поля.

Техника построения интегральных представлений для волновых полей в декартовой системе координат для многослойных волноводов с идеальным контактом между слоями, в основе которой лежит использование интегральных преобразований и построение образов матриц Грина, подробно описана в монографии [Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. М.: Наука, 1989]. В первой части §2.3 в сжатом изложении приводится модификация схемы построения символов матриц Грина в декартовой системы координат при неидеальном контакте между слоями, а именно: рассматривается задача определения перемещений  $\mathbf{u}$  в многослойном упругом волноводе  $V = \bigcup_{l=1}^{N_L} V_l$ , составленном из  $N_L$  слоёв  $V_l$ , при установившихся гармонических колебаниях, вызванных действием нагрузок  $\boldsymbol{\tau}(x_1, x_2, H) = \mathbf{q}^+(x_1, x_2)$  и  $\boldsymbol{\tau}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{q}^-(x_1, x_2)$  на поверхностях многослойной

структуры  $V$  (см. рисунок 4). Граничные условия на  $N_L - 1$  внутренних интерфейсах  $x_3 = z_l$  имеют вид:

$$[\boldsymbol{\tau}](\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varsigma}_l \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}](\mathbf{x}), \quad x_3 = z_l. \quad (21)$$

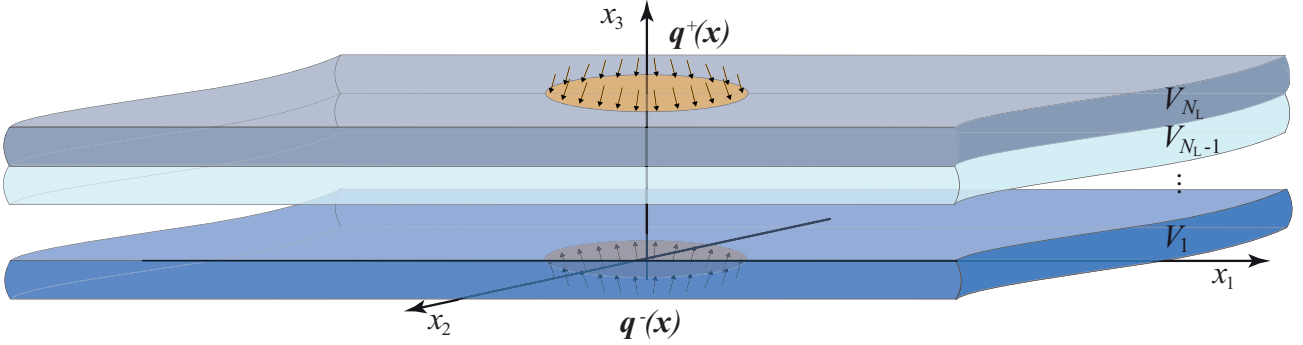


Рисунок 4 – Многослойный упругий волновод с ослабленными адгезионными связями на интерфейсах при заданных поверхностных нагрузках

Геометрия задачи позволяет применить двукратное преобразование Фурье с параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по переменным  $x_1$  и  $x_2$  и представить поле перемещений в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} [\mathbf{K}^+(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \cdot \mathbf{Q}^+(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{K}^-(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \cdot \mathbf{Q}^-(\alpha_1, \alpha_2)] e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (22)$$

Здесь  $\mathbf{K}^\pm(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$  – символы матриц Грина при наличии  $\mathbf{q}^\pm$ , но в отсутствии  $\mathbf{q}^\mp$ , а выбор контуров  $\Gamma_i$  производится в соответствии с принципом предельного поглощения.

Во второй части §2.3 выводятся интегральные представления для волновых полей в случае использования цилиндрической системы координат. Связь между перемещениями в декартовой  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$  и цилиндрической  $\check{\mathbf{u}} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$  системах координат определяется соотношением  $\mathbf{u} = \mathbf{C}_{u\check{u}} \cdot \check{\mathbf{u}}$ . Аналогично для напряжений  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}_{\tau\check{\tau}} \cdot \check{\boldsymbol{\tau}}$  на поверхности заданы условия:

$$\check{\boldsymbol{\tau}}^+(r, \theta, H) = \check{\boldsymbol{q}}^+(r, \theta), \quad \check{\boldsymbol{\tau}}^-(r, \theta, 0) = \check{\boldsymbol{q}}^-(r, \theta). \quad (23)$$

При условии равенства двух тангенциальных компонент  $\boldsymbol{\varsigma}_{l;11} = \boldsymbol{\varsigma}_{l;22}$  диагональной матрицы  $\boldsymbol{\varsigma}_l$  выполняется равенство  $\boldsymbol{\varsigma}_l \cdot \mathbf{C}_{u\check{u}} = \mathbf{C}_{u\check{u}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\varsigma}_l$  и граничные условия (21) записываются в виде:

$$[\check{\boldsymbol{\tau}}]_l = 0, \quad \boldsymbol{\varsigma}_l \cdot \check{\boldsymbol{\tau}}_l = [\check{\mathbf{u}}]_l, \quad z = z_l, \quad l = \overline{1, N_L - 1}.$$

В уравнениях движения производится переход к потенциалам  $\psi_j$ , что приводит к уравнениям Гельмгольца, записанным в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 \psi_{3l} + k_{1l}^2 \psi_{3l} = 0, \quad \nabla^2 \psi_{il} + k_{2l}^2 \psi_{il} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Определение волновых полей основано на разложении в ряд Фурье по  $\theta$ :

$$\check{\mathbf{u}}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \mathbf{\Upsilon}^{1m}(\theta) \cdot \check{\mathbf{u}}^{1m}(r, z) + \mathbf{\Upsilon}^{2m}(\theta) \cdot \check{\mathbf{u}}^{2m}(r, z) \right), \quad (25)$$

$$\mathbf{\Upsilon}^{1m}(\theta) = \text{diag}\{\cos(m\theta), \sin(m\theta), \cos(m\theta)\},$$

$$\mathbf{\Upsilon}^{2m}(\theta) = \text{diag}\{\sin(m\theta), -\cos(m\theta), \sin(m\theta)\}$$

и применении преобразования Ханкеля по радиальной координате  $r$ , что позволяет получить интегральные представления для перемещений

$$\hat{\mathbf{u}}^{nm} = \check{\mathbf{C}} \cdot \check{\mathbf{u}}^{nm} = \{u_r^{nm} + u_\theta^{nm}, u_r^{nm} - u_\theta^{nm}, u_z^{nm}\}, \quad (26)$$

возбуждаемых нагрузкой в круговой области:

$$\hat{\mathbf{u}}^{nm}(r, z) = \int_{\Gamma_+} \mathbf{J}^m(\alpha r) \cdot (\hat{\mathbf{K}}^+(\alpha, z) \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{nm+}(\alpha) + \hat{\mathbf{K}}^-(\alpha, z) \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{nm-}(\alpha)) \alpha d\alpha, \quad (27)$$

$$\mathbf{J}^m(\alpha r) = \begin{pmatrix} J_{m+1}(\alpha r) & 0 & 0 \\ 0 & J_{m-1}(\alpha r) & 0 \\ 0 & 0 & J_m(\alpha r) \end{pmatrix}.$$

Построение символов матриц Грина производится с учётом ослабленных межслойных связей. Вектор-функции поверхностных нагрузок также раскладываются в ряд Фурье вида (25), где для коэффициентов применяется преобразование Ханкеля  $\hat{\mathbf{Q}}^{nm\pm}(\alpha) = \int_0^\infty \mathbf{J}^m(\alpha r) \cdot \hat{\mathbf{q}}^{nm\pm}(r) r dr$ .

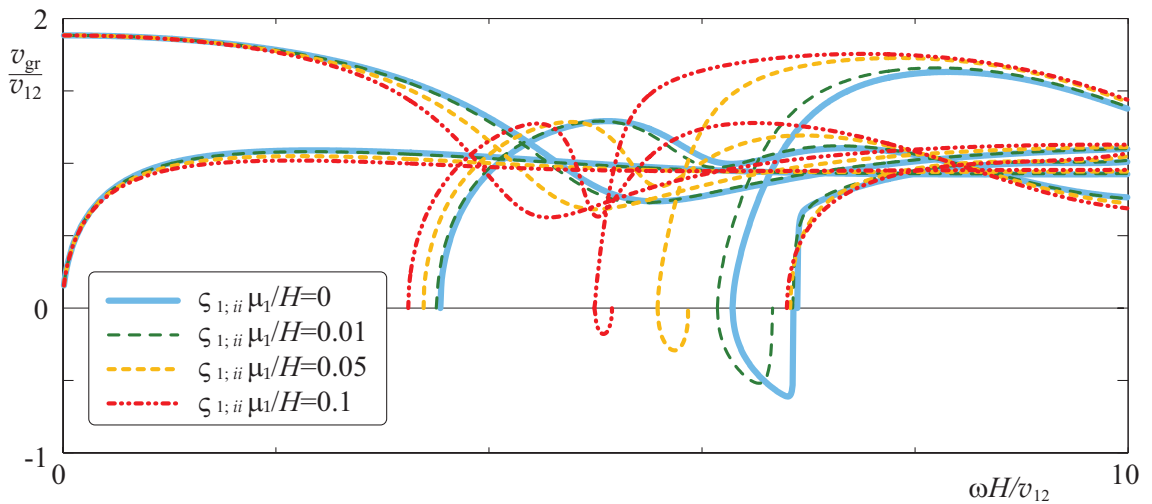


Рисунок 5 – Групповые скорости  $v_{gr}$  волн Лэмба для двухслойного волновода из алюминия и полимера ( $h_2/h_1 = 1$ ) при различных значениях  $\zeta_{i; ii}$

В §2.4 на основе соотношений, полученных в §2.3, изучаются характеристики бегущих волн в многослойных структурах с неидеальным контактом на ин-

терфейсе. В качестве примера на рисунке 5 изображены групповые скорости  $v_{gr}$  симметричных и антисимметричных волн Лэмба для двухслойного волновода из алюминия и полимера с неидеальным контактом слоев (свойства всех материалов, использованных при расчётах, даны в приложении). С ухудшением контакта, то есть с увеличением  $\zeta_{l;ii}$ , частоты отсечки сдвигаются в сторону более низких частот, а скорости обратных волн падают. При этом групповые скорости нормальной моды  $s_0$  на низких частотах и вторая частота отсечки моды  $s_2$  почти не зависят от  $\zeta_{l;ii}$ , если толщины слоёв одинаковы ( $h_2/h_1 = 1$ ).

Волновые поля, излучаемые пьезоэлектрическими преобразователями даже в изотропных волноводах, в силу конструкционных особенностей последних, на практике имеют неосесимметричный вид и зависят от спектра импульса, подаваемого на актуатор. В **третьей главе** описываются методы моделирования взаимодействия пьезоэлектрических преобразователей с многослойными волноводами без внутренних дефектов. В силу линейности задачи эти решения напрямую используются далее при решении задач о дифракции генерируемых полей на отслоениях.

В §3.1 описывается применение МКЭ ВПТ для моделирования динамики пьезоэлектрического преобразователя толщиной  $h_a$  и шириной  $w_a$ , занимающего объём  $V_a = \{0 \leq x_1 \leq w_a, |x_2| < \infty, 0 \leq x_3 \leq h_a\}$  с границей  $\partial V_a = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . На боковых границах  $S_4 = \{x_1 = 0, |x_2| < \infty, 0 \leq x_3 \leq h_a\}$  и  $S_2 = \{x_1 = w_a, |x_2| < \infty, 0 \leq x_3 \leq h_a\}$  отсутствует электрическое поле  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in S_2 \cup S_4$ . На границах  $S_2$ ,  $S_4$  и верхней границе  $S_3 = \{0 \leq x_1 \leq w_a, |x_2| < \infty, x_3 = h_a\}$  отсутствуют также нормальные и касательные напряжения  $\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . На нижней границе  $S_1 = \{0 \leq x_1 \leq w_a, |x_2| < \infty, x_3 = 0\}$  задана поверхностная нагрузка  $\sigma_{ix_3}(\mathbf{x}) = q_i(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in S_1$ , что позволяет в дальнейшем использовать эту постановку для гибридного подхода. Наличие на  $S_1$  и  $S_3$  электродов с заданными потенциалами  $\phi_1$  и  $\phi_2$  учитывается граничными условиями  $\phi(\mathbf{x}) = \phi_1$ ,  $\mathbf{x} \in S_1$ ,  $\phi(\mathbf{x}) = \phi_2$ ,  $\mathbf{x} \in S_3$ . В качестве базисных функций в МКЭ ВПТ используются интерполяционные полиномы Гаусса–Лежандра–Лобатто (ГЛЛ) и так называемые интерполяционные многочлены Гаусса–Чебышева–Лобатто (ГЧЛ).

В §3.2 описываются модели, используемые в дальнейших разделах при рассмотрении дифракции бегущих упругих волн на отслоениях. Для описания взаимодействия пьезоактуаторов с подложкой применяются модели «shear-lag» и «pin-force» [Giurgiutiu V. *New York: Elsevier, 2014*]. Эти модели позволяют достаточно точно описывать генерируемые волновые поля в случае тонких пьезоактуаторов, для низких частот и однородной подложки. В рамках модели «pin-force» действие актуатора сконцентрировано в окрестности его краёв в виде сдвиговых нагрузок.

Гибридная схема решения связанной задачи о взаимодействии пьезоэлектрического преобразователя с многослойной упругой подложкой, основанная на использовании МКЭ ВПТ и интегрального подхода, приводится в §3.3. Колебания в пьезоактуаторе описываются с помощью МКЭ ВПТ, как и в §3.1. Однако функ-

ция нагрузки  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  в данном случае определяется из решения связанной задачи, при формулировке которой граничные условия для актуатора, приведённые в §3.1, дополняются условиями в области  $S_1$ . Гибридный подход позволяет моделировать отслоение актуатора от волновода: для этого область  $S_1$  разбивается на две под-области:  $S_1 = S_c \cup S_d$ . В области  $S_c$  задаётся контакт между слоем и актуатором

$$[\boldsymbol{\tau}](\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varsigma}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} = [\mathbf{u}](\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_c, \quad (28)$$

причём учитывается возможность ослабления адгезионных связей (при  $\boldsymbol{\varsigma}_{0;ij} = 0$  — идеальный контакт). В области  $S_d$  задаётся условие отсутствия нормальных и касательных напряжений  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Приводятся результаты успешного тестового сравнения с расчётами в пакете COMSOL MULTIPHYSICS и с использованием упрощённой модели «pin-force».

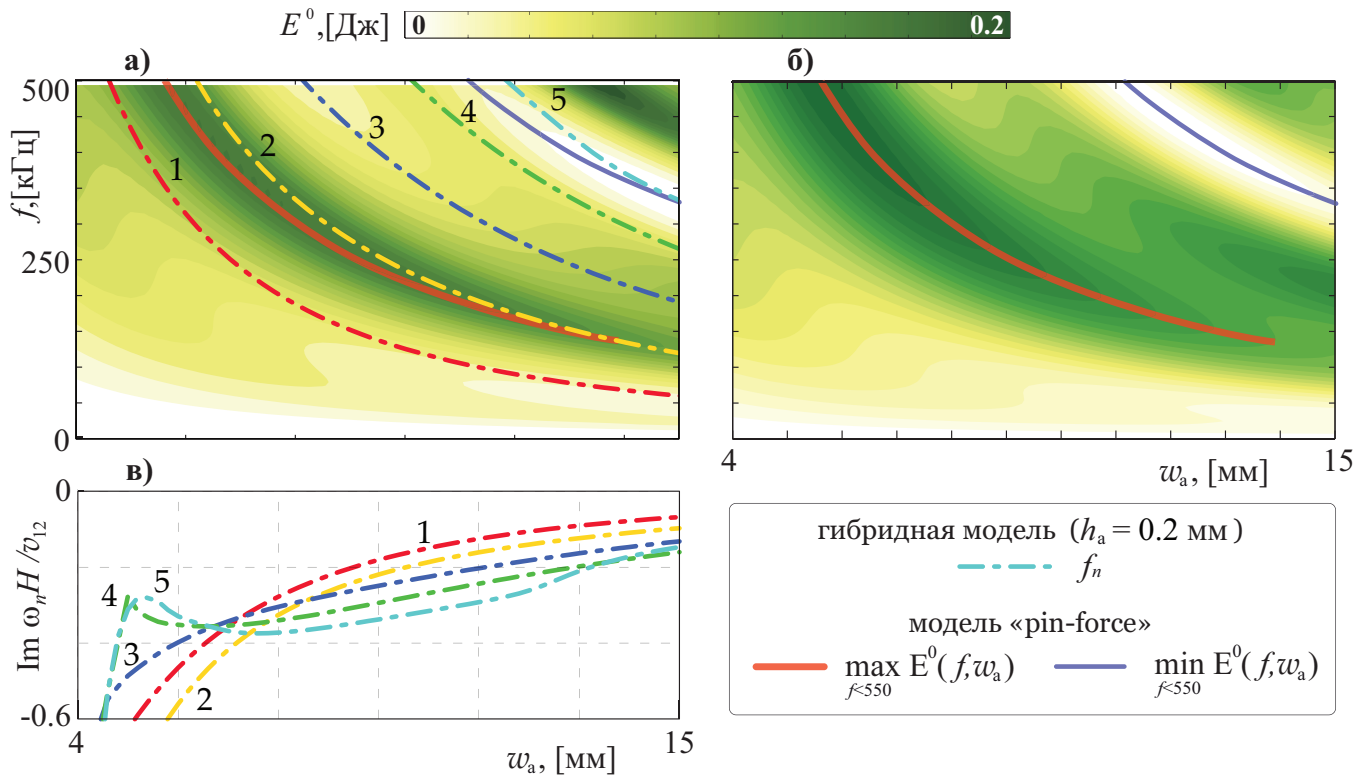


Рисунок 6 – Линии уровня поверхности  $E^0(f, w_a)$ , рассчитанные с помощью гибридной (а) и модели «pin-force» (б), а также вещественные (а) и мнимые (в) части резонансных полюсов  $\omega_n(w_a)$  для приклеенного актуатора толщиной  $h_a = 0.2$  мм; волновод толщиной  $H = 1$  мм из алюминия

Аналізу резонансных свойств системы «актуатор-волновод» посвящён §3.4. Здесь оценивается влияние параметров задачи ( $h_a, w_a, \omega$ ) на взаимодействие между актуатором и подложкой. С этой целью изучается закачиваемая в волновод энергия  $E^0$ . На рисунке 6 приведены линии уровня поверхности  $E^0(f, w_a)$ , рассчитанные с помощью гибридной модели (слева) и модели «pin-force» (справа). На график поверхности наложены две линии, показывающие расположение локального максимума  $\max_{f \leq 550} E^0(f, w_a)$  и минимума  $\min_{f \leq 550} E^0(f, w_a)$ . С использованием

гибридного подхода были также вычислены резонансные частоты, вещественные и мнимые части которых приведены на рисунках ба,в. Можно видеть, что все точки спектра расположены достаточно далеко от вещественной оси, а именно:  $\text{Im } \omega_n(w_a) < -0.1$ . Упрощённая модель «pin-force» тем точнее предсказывает значения максимума  $E^0(f, w_a)$ , чем ниже частоты и меньше  $h_a$ . Можно заключить, что спектральные точки, которые для идеального контакта актуатора с волноводом расположены достаточно далеко от вещественной оси, мало влияют на изменение величины  $E^0(f, w_a)$ , а основным фактором, влияющим на достижение максимума или минимума энергии, оказывается действие краёв актуатора в фазе или противофазе, что согласуется с результатами, полученными на основе плёночной модели [Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kvasha O.V., Seemann W. SMS, 2007].

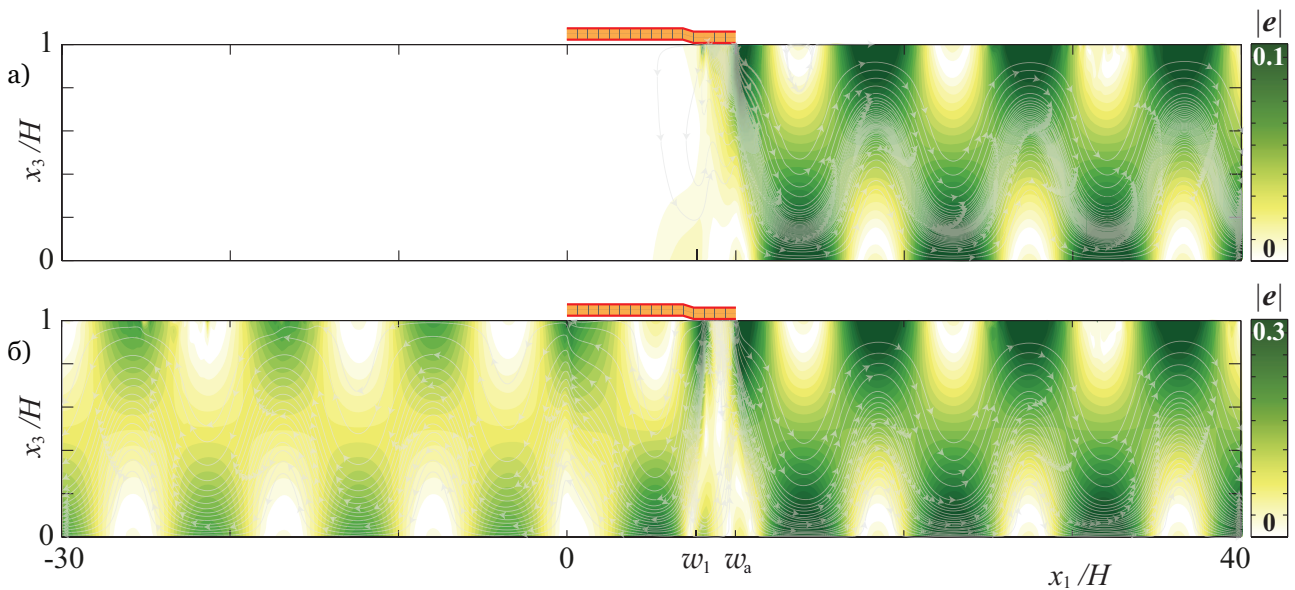


Рисунок 7 – Величина вектора плотности потока энергии  $|e(x_1, x_3)|$  и соответствующие линии тока энергии при колебаниях отслоившегося пьезоактуатора шириной  $w_a = 10$  мм ( $S_d = [0, w_1 = 8]$  мм) на резонансной частоте  $f = 172.8$  кГц (а) и вблизи резонанса на частоте  $f = 182.7$  кГц (б); волновод толщиной  $H = 1$  мм из алюминия

В §3.5 анализируется влияние параметров  $S_d$  и  $\zeta_0$ , описывающих отслоение актуатора от подложки, на резонансные эффекты и взаимодействие между актуатором и подложкой. При увеличении степени отслоения, то есть площади  $S_d$ , количество резонансных частот возрастает, а неравномерность распределения излучаемой энергии растет: увеличивается отклонение  $\kappa^\pm(f)$  от 0.5. Кроме того, рассматривается ситуация, когда оба края актуатора идеально сцеплены с подложкой, а отклеенной оказывается середина области контакта актуатора с подложкой. В этом случае влияние ширины зоны отклейки достаточно мало, однако резонансные ситуации, по-видимому, связанные с собственными колебаниями дефекта, возможны и в этом случае. Волновая картина при значительном отслоении актуатора от волновода при резонансных и регулярных колебаниях показана на рисунках 7а,б. При регулярных колебаниях излучение в разные стороны происходит вблизи двух



краёв в приклеенной области  $[w_1, w_a]$ , а при резонансе левая часть волновода за-  
пирается энергетическим вихрем.

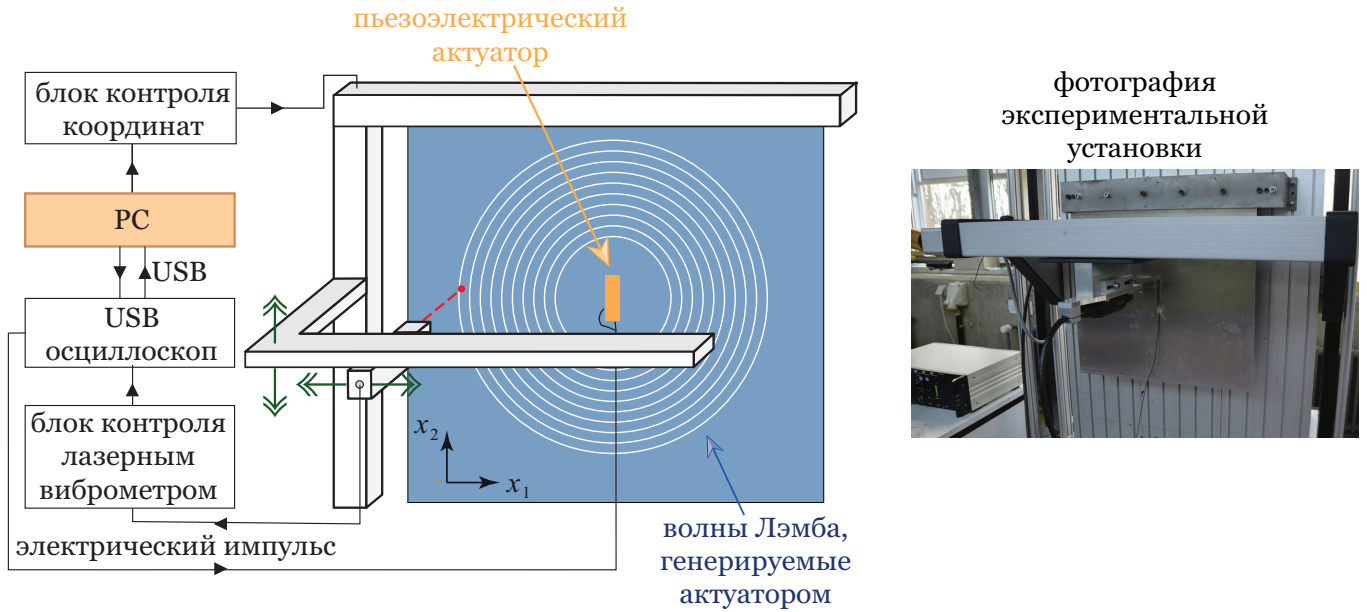


Рисунок 8 – Схема проведения эксперимента

Для изучения волновых явлений и верификации разработанных моделей было проведено несколько экспериментов, описанных в §3.6. На алюминиевую пластину  $500 \text{ мм} \times 500 \text{ мм}$  и толщиной  $1 \text{ мм}$  был приклеен прямоугольный пьезоактуатор размерами  $70 \text{ мм} \times 10 \text{ мм} \times 0.2 \text{ мм}$ . Для регистрации волн Лэмба, генерируемых в пластине пьезоактуатором, использовался экспериментальный стенд, в состав которого входит лазерный виброметр, позволяющий измерять вертикальные скорости перемещений  $\dot{u}_z(\mathbf{x}, t)$  на поверхности образца (см. схему на рисунке 8).

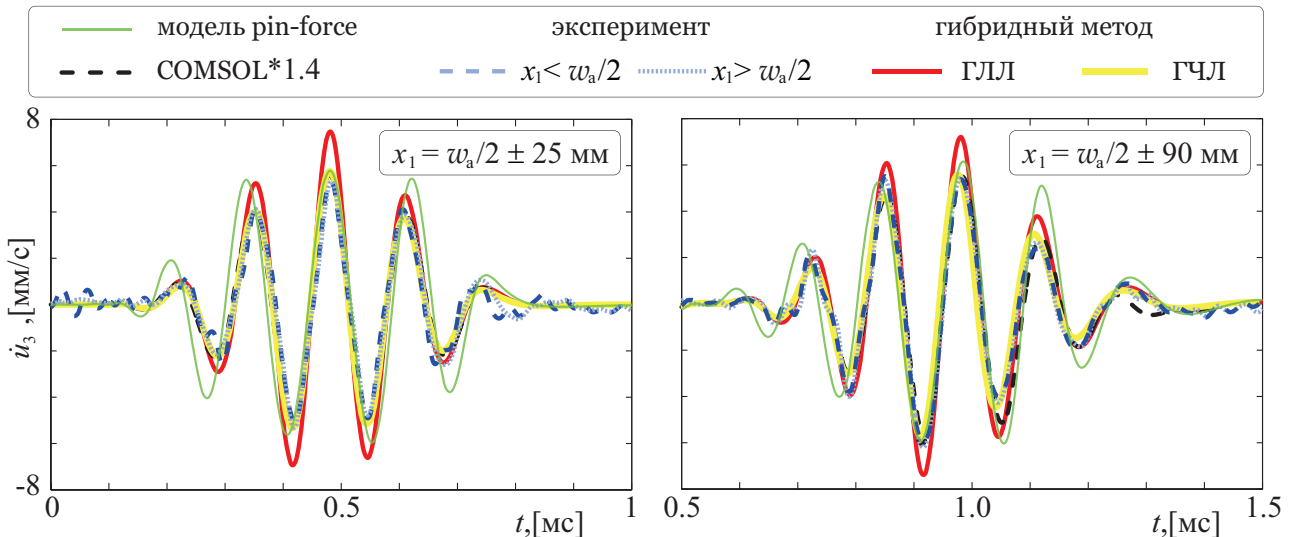


Рисунок 9 – Скорости перемещений на поверхности пластины  $\dot{u}_3(\frac{w_a}{2} \pm 25, 0, 0, t)$  и  $\dot{u}_3(\frac{w_a}{2} \pm 90, 0, 0, t)$ , рассчитанные и измеренные при центральной частоте  $f_0 = 80 \text{ кГц}$ , для идеального контакта актуатора с волноводом ( $\zeta_0; i_i = 0$ )

На рисунке 9 представлены скорости перемещений, измеренные на поверхности пластины  $x_3 = 0$  в точках  $x_1 = \frac{w_a}{2} \pm 25$  и  $x_1 = \frac{w_a}{2} \pm 90$ , а также результаты,



полученные с помощью пакета COMSOL, модели «pin-force» и гибридной модели. Скорости перемещений пластины, рассчитанные на основе связанной модели, лучше всего совпадают со скоростями, зафиксированными лазерным виброметром в ходе эксперимента.

В **четвёртой главе** рассматриваются упругие колебания многослойных волноводов с одиночными отслоениями различной геометрии. В зависимости от формы отслоения рассматриваются различные модификации метода граничных интегральных уравнений (МГИУ), где также используется метод Галёркина.

В §4.1 описывается метод решения краевых задач в случае отслоения произвольной формы. Вариационно-разностный метод, предложенный для описания пространственных трещин в работе [Глушков Е.В., Глушкова Н.В. ПММ, 1998], обобщается для отслоений. В многослойной структуре вектор перемещений  $\mathbf{u}^{\text{sc}}$  волнового поля, рассеянного трёхмерным планарным отслоением  $\Omega_1 \subset \{x_3 = d_1\}$ , может быть определен интегральным представлением

$$\mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_1^+(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \mathbf{Q}_1(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, & x_3 > d_1 \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_1^-(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \mathbf{Q}_1(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, & x_3 < d_1 \end{cases}, \quad (29)$$

где Фурье-символ матриц Грина  $\mathbf{N}_1^+(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$  строится аналогично  $\mathbf{K}_1^-(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$  для волновода  $\{d_1 \geq x_3 \geq H\}$  (см. §2.3), а  $\mathbf{N}_1^-(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$  — аналогично  $\mathbf{K}_1^+(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ , но уже для волновода  $\{z_0 \geq x_3 \geq d_1\}$ ,  $\mathbf{Q}_1(\alpha_1, \alpha_2)$  — Фурье-символ неизвестного вектора напряжений  $\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}$  в  $\Omega_1$ . После этого вводится скачок смещений в области  $\Omega_1$

$$\Delta \mathbf{u}_1(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2, d_1 + 0) - \mathbf{u}(x_1, x_2, d_1 - 0).$$

Используя (29), нетрудно выразить связь между Фурье-символами напряжений  $\mathbf{q}_1(x_1, x_2)$  и скачком  $\Delta \mathbf{u}_1(x_1, x_2)$  в виде соотношения

$$\mathbf{Q}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Delta \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) = (\mathbf{N}_1^+(\alpha_1, \alpha_2, d_1) - \mathbf{N}_1^-(\alpha_1, \alpha_2, d_1))^{-1}.$$

Подстановка этих выражений в (29) и в граничные условия на отслоении приводит к интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{L}_1(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Delta \mathbf{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 - \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) \cdot \Delta \mathbf{u}(x_1, x_2) = (\mathbf{B}_1^{\text{c}} \cdot \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1. \quad (30)$$

Для решения интегрального уравнения (30) методом Бубнова-Галёркина исполь-

зуется аппроксимация решения базисными функциями  $p_k$

$$\Delta \mathbf{u}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{c}_k p_k(x_1, x_2)$$

с неизвестными коэффициентами разложения  $\mathbf{c}_k$ , или в Фурье-символах:

$$\Delta \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{c}_k P_k(\alpha_1, \alpha_2).$$

В качестве  $p_k$  используются осесимметричные функции, обеспечивающие сходимость коэффициентов разложения к значениям в узлах [Глушков Е.В., Глушкова Н.В. ПММ, 1996]. Проецирование невязки (30) на  $p_{k'}$  приводит к СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{A}_{k'k}^L + \mathbf{A}_{k'k}^{\kappa}) \cdot \mathbf{c}_k = \mathbf{f}_{k'}, \quad k' = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

$$\mathbf{A}_{k'k}^L = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{L}(\alpha_1, \alpha_2) P_k(\alpha_1, \alpha_2) P_{k'}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*) d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\mathbf{A}_{k'k}^{\kappa} = - \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) p_k(x_1, x_2) p_{k'}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

$$\mathbf{f}_{k'} = - \int_{\Omega_1} (\mathbf{B}_1^{\zeta} \cdot \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(x_1, x_2, d_1) p_{k'}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Здесь знак \* обозначает комплексное сопряжение.

Для прямоугольных и круговых трещин на границе раздела двух сред лучшая сходимость и точность решения может быть обеспечена спектральным методом, который использует базисные функции, учитывающие форму отслоения. МГИУ в случае прямоугольного отслоения описывается в §4.2. Для прямоугольного отслоения со сторонами  $l_1$  и  $l_2$ , параллельными осям координат ( $\Omega_1 = \{|x_1| \leq l_1, |x_2| \leq l_2, x_3 = d_1\}$ ), в качестве базисных можно использовать произведение функций  $\tilde{p}_i(x) = U_i(x) \sqrt{1-x^2}$ , являющихся полиномами Чебышева 2-го рода  $U_i$  с весом, которые учитывают геометрию трещины и поведение решения в окрестности её краёв:  $p_{k(i_1, i_2)}(x_1, x_2) = \tilde{p}_{i_1}(x_1/l_1) \tilde{p}_{i_2}(x_2/l_2)$ .

На рисунке 10 приведены амплитуды компонент скачка перемещений на квадратной ( $l_1 = l_2$ ) интерфейсной раскрытой трещине ( $\kappa_{1;ii} = 0$ ) при падении  $P$ -волны под углом  $45^\circ$ , рассчитанные МГИУ с помощью вариационно-разностного подхода и спектральных методов, предполагающих разложение по базисным функциям, учитывающим особенности поведения решения. Можно видеть, что оба подхода предсказывают качественно одинаковое поведение.

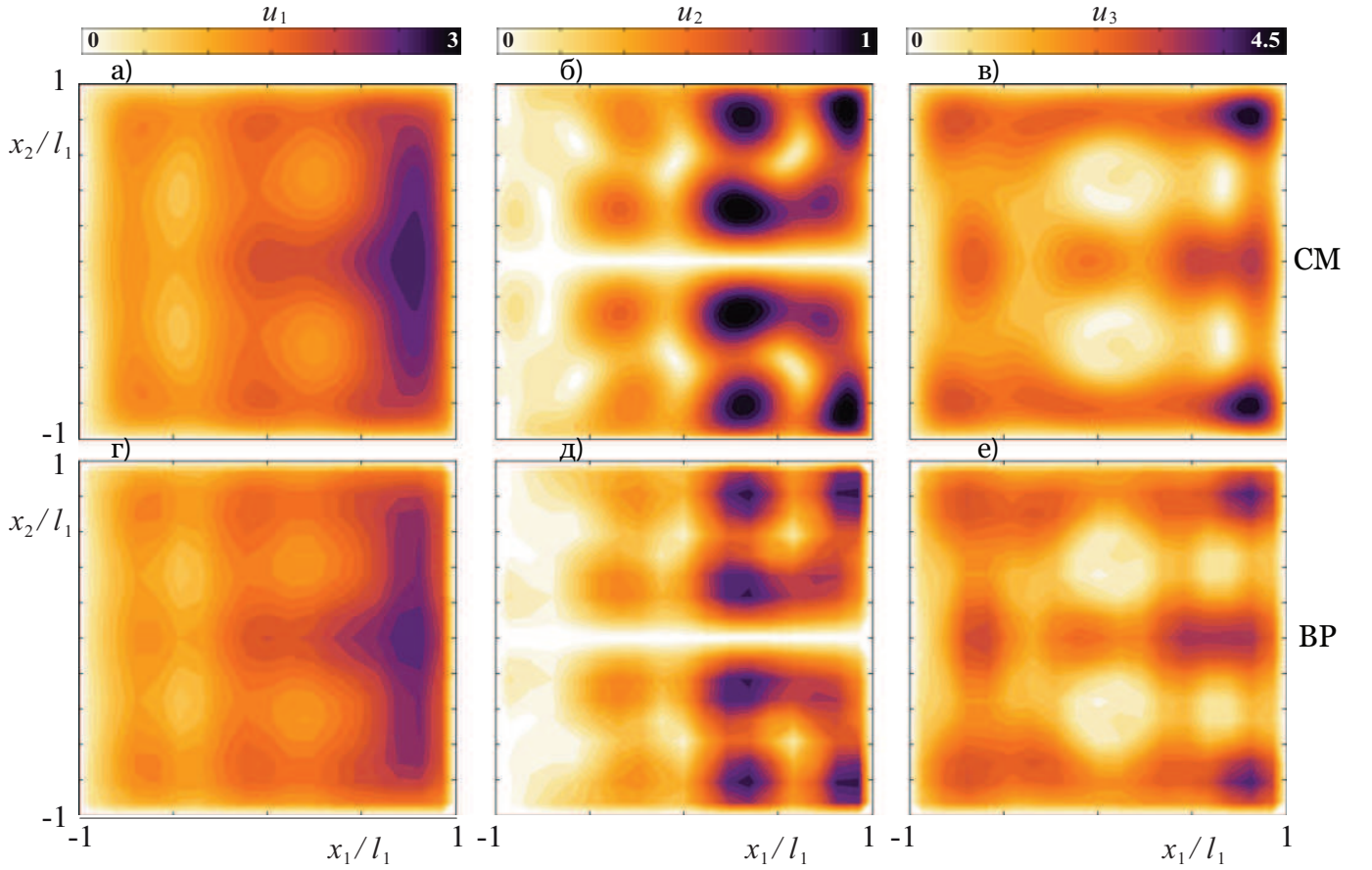


Рисунок 10 – Амплитуды функции раскрытия  $\Delta u_i$  берегов прямоугольной трещины ( $\kappa_{1;ii} = 0$ ) при падении  $P$ -волны под углом  $45^\circ$ , рассчитанные МГИУ с помощью спектрального при  $N_1 = N_2 = 9$  (а-в) и вариационно-разностного при  $\Delta\eta/l_1 = 0.07$  (г-е) методов;  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\nu_1 = 0.2$ ,  $\nu_2 = 0.3333$ ,  $\omega l_1/v_{12} = 4$

В §4.3 даётся описание варианта МГИУ для кругового отслоения. В случае кругового отслоения радиуса  $R_1$ , на его берегах в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  задаются ГУ ПТ

$$\check{\tau}(r, \theta, d_1) = \kappa_1(r) \cdot [\check{\mathbf{u}}](r, \theta, d_1), \quad |r| \leq R_1 \quad (32)$$

с диагональной матрицей жёсткости  $\kappa_1(r)$ . Общая схема вывода и решения интегрального уравнения схожа с описанными в §§4.1–4.2. Метод построения волновых полей при действии круговой неосесимметричной нагрузки, описанный в §3.2, применяется для построения полей, рассеиваемых круговым отслоением. Решение задачи формулируется относительно вектора перемещений  $\check{\mathbf{u}} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ , который в системе координат  $(r, \theta, z)$  определяется в виде ряда Фурье.

Как и в случае прямоугольной трещины, производится верификация с помощью сравнения с вариационно-разностным методом. Спектральный метод с разложением в ряд по присоединённым полиномам Лежандра для круговых и по полиномам Чебышева 2-го рода с весом для прямоугольных отслоений позволяет более точно определять точки непрерывного спектра и исследовать резонансные

явления. В §4.4 даётся краткое изложение МГИУ для полосового отслоения, который во многом совпадает со схемами, изложенными в §§4.1–4.2, но предполагает однократное интегрирование.

Аналізу дифракционных и резонансных свойств отслоений на границе раздела двух различных сред посвящён §4.5. Получены асимптотики в дальней от отслоения зоне, проведено сравнение с известными результатами для однородного пространства с круговой трещиной. Для изучения влияния характера отслоения на рассеянные поля анализировались диаграммы рассеяния при падении плоской волны под углом  $\theta^{\text{in}}$  на дефекты различных форм при различных  $\kappa_{1;ii}$ . С ростом значения  $\kappa_{1;ii}$  уменьшаются амплитуды рассеянного поля, а при  $\kappa_{1;ii}H/\mu_1 > 10$  диаграммы рассеяния начинают изменяться качественно. Даже в случае различных материалов конкретная форма отслоения зачастую мало влияет на вид рассеянного поля, например, диаграммы рассеяния круговыми и квадратными отслоениями различаются в первую очередь количественно.

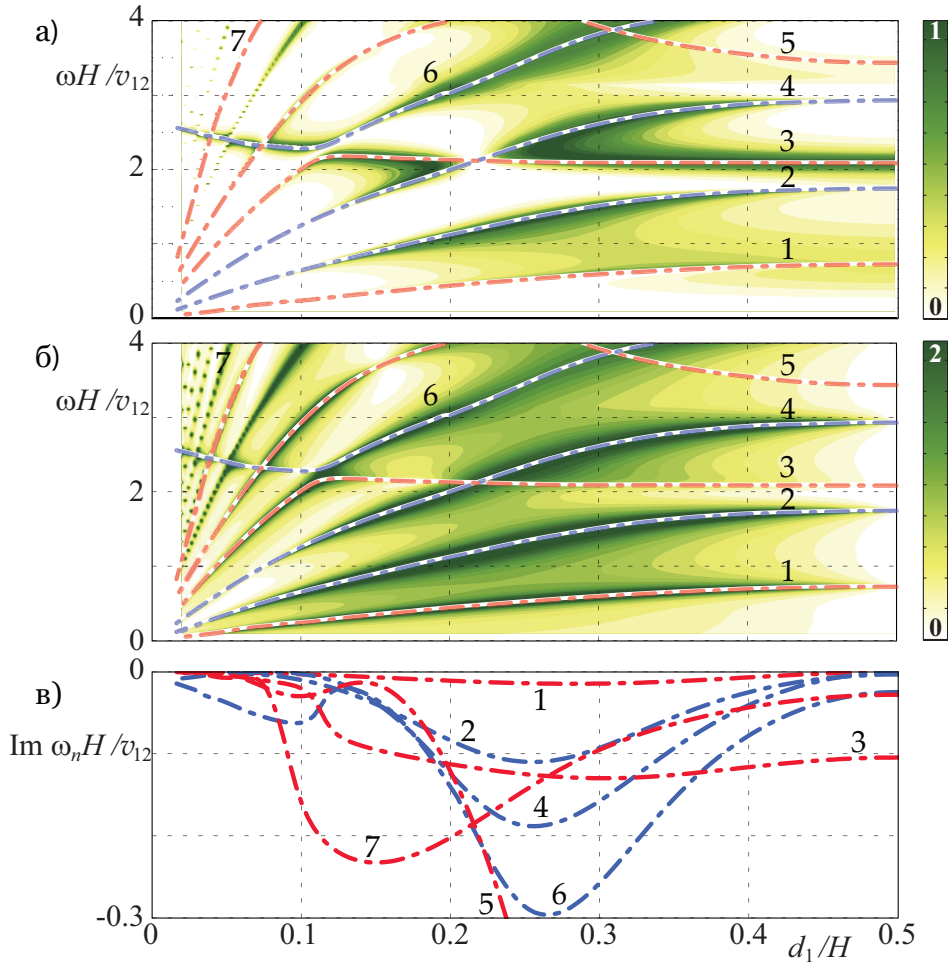


Рисунок 11 – Линии уровня  $\kappa^-(\omega, d_1)$  (а) и КИН  $K_3^+(\omega, d_1)$  (б) при рассеянии моды  $a_0$  полосовой трещиной ( $\kappa_{1;ii} = 0$ ) полуширины  $l_1 = H$  с наложенными сверху кривыми  $\text{Re } \omega_n(d_1)$  (а,б), а также  $\text{Im } \omega_n(d_1)$  (в); материал – алюминий

Результаты исследования дифракции волн Лэмба на полосовых отслоениях приводятся в §4.6. Проанализировано влияние положения  $d_1$ , ширины  $2l_1$  и харак-

тера отслоения  $\kappa_{1;ii}(x_1)$  на его резонансные и блокирующие свойства. В целом, проведённый параметрический анализ позволяет заключить, что резонансное блокирование и резкий рост коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) обусловлены расположением спектральных точек в плоскости частоты  $\omega$ . В качестве иллюстрации на рисунке 11 приведены линии уровня коэффициента отражения  $\varkappa^-$  и КИН  $K_3^+$  в зависимости от частоты  $\omega$  и места положения отслоения  $d_1$  (для однородного слоя результаты зеркально симметричны относительно  $d_1 = 0.5$ ). Рост КИН наблюдается при  $(\omega, d_1)$ , близких к траекториям  $\omega_n(d_1)$ , на которых достигается максимум, и чем меньше  $\text{Im } \omega_n$ , тем они уже и выше.

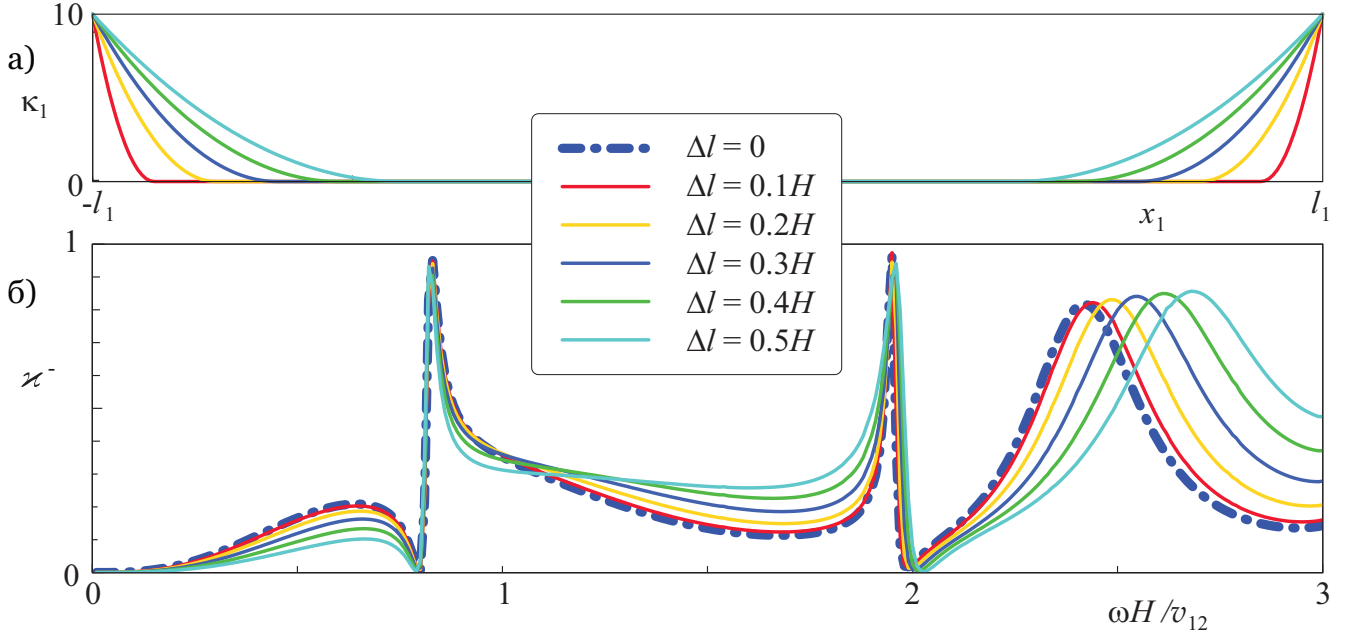


Рисунок 12 – Пружинная жёсткость внутренних связей  $\kappa'_{1;ii}(x_1)$  (а) и коэффициент отражения  $\varkappa^-(\omega)$  при рассеянии моды  $a_0$  отслоениями полуширины  $l_1 = H$  с неравномерно распределёнными внутренними связями на краях ( $|x_1| > l_1 \Delta l$ ) при  $\Delta l/H = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ ; материалы – полимер/алюминий

Для изучения влияния неравномерно распределённых внутренних связей в области отслоения было рассмотрено изменение коэффициента отражения  $\varkappa^-(\omega)$  при рассеянии моды  $a_0$  на отслоении с неравномерными внутренними связями. В центре  $|x_1| < l_1 - \Delta l$  были заданы нулевые значения для жёсткости, а на обоих краях отслоения внутренние связи с жёсткостью, квадратично возрастающей к краям вплоть до  $\kappa'_{1;ii}$  (см. рисунок 12а). Из рисунка 12б, где приведены шесть графиков  $\varkappa^-(\omega)$  при  $\Delta l/H = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ , видно, что увеличение зоны с внутренними связями существенно меняет дифракционные свойства отслоения. В частности, с ростом  $\Delta l$  значения части резонансных частот увеличиваются. В целом, влияние степени отслоения  $\kappa_{1;ii}$  оказывается значительным, что может быть использовано для идентификации дефектов по рассеянным полям.

Описание экспериментального подтверждения эффекта локализации и захвата энергии в слое с трещиной, предсказанное на основе разработанной модели,

дано в §4.7. Для этого использовалась та же самая установка, что и при изучении взаимодействия пьезоактуатора с пластиной (см. рисунок 8). Был изготовлен образец с отслоением путём склеивания эпоксидным клеем двух одинаковых алюминиевых пластин ( $600 \times 100$  мм, толщина 1 мм) за исключением прямоугольной зоны отслоения. Зона отслоения в 20 мм изготовлена путём вложения фольги в месте отслоения с последующим её извлечением после затвердевания клея.

Таблица 1 – Безразмерные комплекснозначные спектральные точки  $\omega_n H/v_{12}$  и соответствующие размерные резонансные частоты  $f_n$ .

$n$	$\omega_n H/v_{12}$	$f_n$ [кГц]
1	$0.049 - 0.51 \cdot 10^{-8} i$	12.1
2	$0.133 - 0.407 \cdot 10^{-7} i$	32.9
3	$0.255 - 0.278 \cdot 10^{-5} i$	63.3
4	$0.411 - 0.565 \cdot 10^{-5} i$	102
5	$0.503 - 0.373 \cdot 10^{-3} i$	125

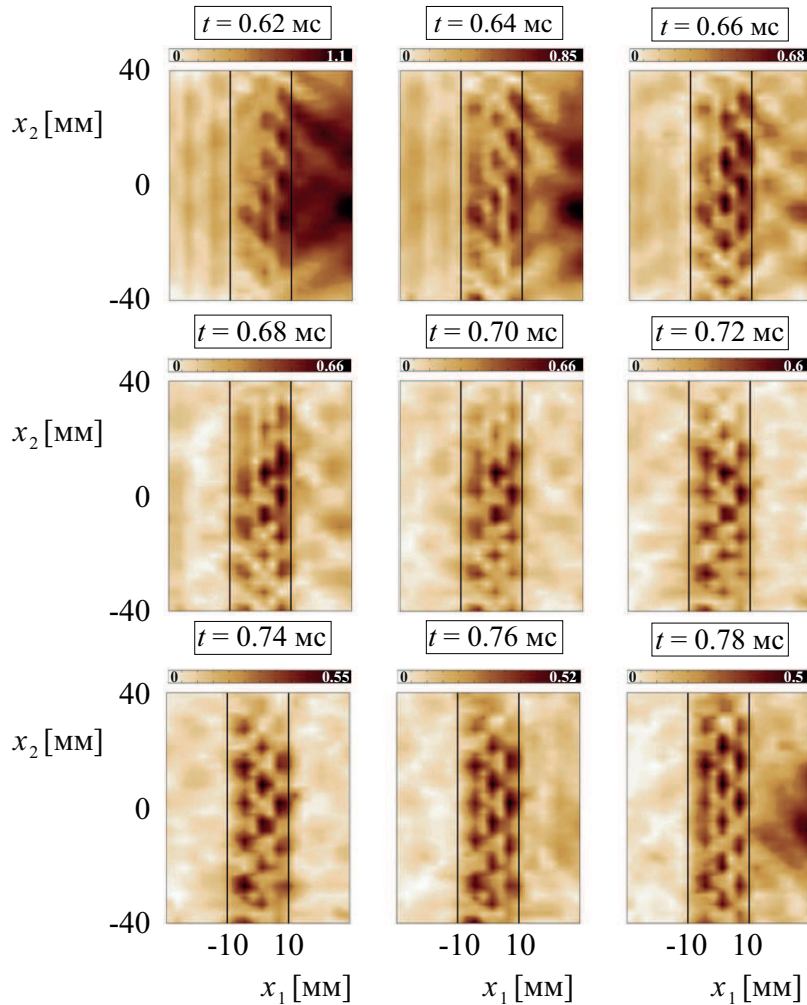


Рисунок 13 – Линии уровня  $\mathcal{E}[u_3(x_1, x_2, 0, t)]$  в различные моменты времени после прохождения основного волнового пакета через повреждённую зону, иллюстрирующие локализацию упругих колебаний; резонансная центральная частота  $f_0 = 63.3$  кГц (эксперимент)



С помощью МГИУ были вычислены пять первых значений точек спектра  $\omega_n H/v_{12}$ , которые вместе с размерными резонансными частотами  $f_n$  представлены в таблице 1. В результате в качестве центральной частоты  $f_0$  помимо резонансной  $f_3 = 63.3$  кГц были отобраны ещё 45 кГц и 75 кГц в окрестности  $f_3$ . При центральной частоте  $f_0 = f_3 = 63.3$  кГц, над отслоением формируются ярко выраженные стоячие волны, видимые как тёмные пятна на рисунках 14 и 13. Это указывает на локализацию волновых колебаний, так как в рассматриваемые моменты времени основной волновой пакет уже прошёл через отслоившуюся зону. При этом форма локализации между отслоением и поверхностью слоя сохраняется длительное время. Расчёты, сделанные для экспериментального образца с помощью математической модели, указывают на наличие трёх крупных вихрей энергии над трещиной, что также согласуется с локализацией на рисунке 14.

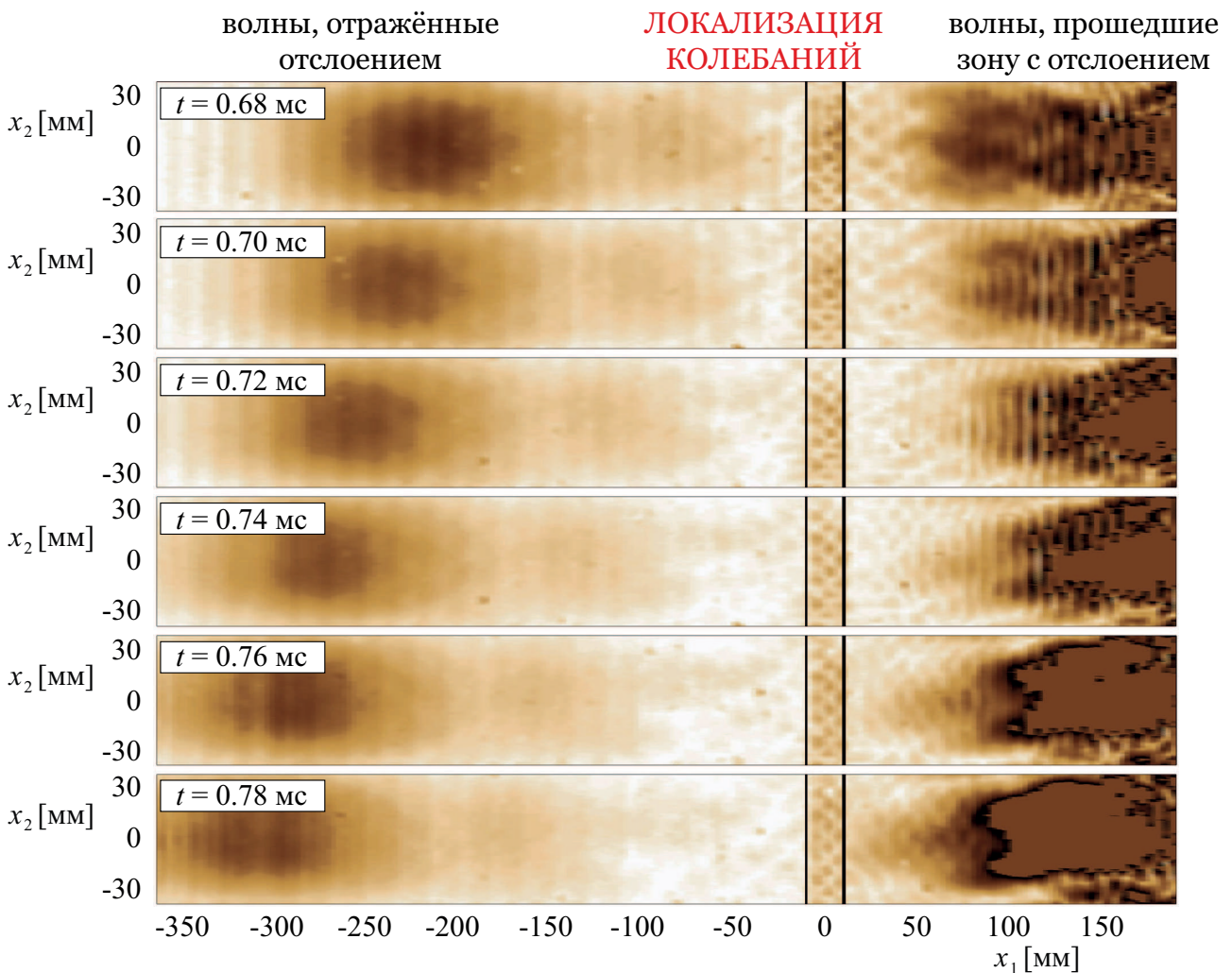


Рисунок 14– Линии уровня  $\mathcal{E}[\dot{u}_3(x_1, x_2, 0, t)]$  на поверхности образца в различные моменты времени после прохождения основного волнового пакета через повреждённую зону; резонансная центральная частота  $f_0 = 63.3$  кГц (эксперимент)

В §4.8 изучаются колебания фононного кристалла с отслоением, для чего используется МГИУ, описанный в §4.4. Вместо  $\mathcal{K}^-$  для анализа используются значения  $\tilde{u}_i$ , однако картина в целом схожа со случаем волновода конечной толщи-

ны: траектории движения точек спектра проявляются на поверхностях  $K_3(\omega, d_1)$ ,  $K_3(\omega, l_1)$ . Трещины, расположенные вблизи интерфейсов, требуют отдельного внимания, так как локализация колебаний между свободными от напряжений берегами трещин и границами слоёв становится тем сильнее, чем ближе они расположены. Амплитуды колебаний между свободными от напряжений берегами трещины и ближайшим интерфейсом, связанные с локализацией, заметно меньше, если трещина расположена на интерфейсе. Кроме того, рассеяние на интерфейсных трещинах не приводит к сильным резонансам на частотах из запрещённых зон. С ростом размера трещины  $l_1$  и частоты  $\omega$  происходит увеличение КИН в разрешённых зонах, а усреднённые значения амплитуд функции раскрытия берегов трещин  $|\overline{\Delta \mathbf{u}}(\omega, l)|$  не увеличиваются с ростом её длины.

Упругие колебания многослойных структур при наличии конечного числа отслоений, рассматриваются в **пятой главе**. В §5.1 рассматривается многослойный упругий волновод  $V$  с набором из  $N_D$  планарных отслоений  $\Omega_j$  с центрами в точках  $\mathbf{x}_j$ , расположенных в слоях  $V_{M_j}$  при  $x_3 = d_j$ . Общее поле перемещений в многослойной структуре претерпевает скачок на каждом дефекте, и соответствующий неизвестный скачок смещений обозначается  $\Delta \mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ . При этом вектор напряжений, создаваемых  $j$ -ым планарным отслоением, определяется интегральным представлением

$$\boldsymbol{\tau}_j^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{S}_j^+(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \Delta \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, & x_3 > d_j \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{S}_j^-(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \Delta \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, & x_3 < d_j \end{cases}. \quad (33)$$

Рассматривая рассеянное волновое поле в области  $\Omega_{j'}$ , нетрудно определить, что  $\sum_{j=1}^{N_D} [\mathbf{u}_j](\mathbf{x}) = \Delta \mathbf{u}_{j'}$ . В том случае, если отслоение оказывается на интерфейсе, то добавляется условие (7). Подставляя интегральное представление (33) в граничные условия на  $j'$ -ом дефекте, можно получить интегральные уравнения для  $N_D$  отслоений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{N_D} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{S}_j(\alpha_1, \alpha_2, d_{j'}) \cdot \Delta \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ - \boldsymbol{\kappa}_{j'}(x_1, x_2) \cdot \Delta \mathbf{u}_{j'}(x_1, x_2) = \mathbf{f}_{j'}, \quad j' = 1, \dots, N_D, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{j'} \quad (34) \\ \mathbf{f}_{j'} = \left( \mathbf{B}_{j'}^{\zeta} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{j'}(x_1, x_2) - \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Для решения (34) методом Галёркина используется аппроксимация решения теми же базисными функциями, что и в §§4.1–4.2. В случае кругового и полосового



одиночного отслоения методы, описанные в §§4.3–4.4, аналогичным образом МГИУ обобщается для системы произвольно расположенных полосовых отслоений и для системы круговых отслоений  $\Omega_j$  с центрами, расположенными один над другим.

Резонансные колебания системы отслоений изучаются в §5.2. При гармонических колебаниях взаимное влияние отслоений друг на друга должно сказываться независимо от расстояния между препятствиями. Даже при значительном расстоянии между областями  $\Omega_j$  спектр  $\omega_n$  краевой задачи для системы отслоений не является объединением спектров  $\omega_n^j$  задач дифракции на  $j$ -ом отслоении ( $j = \overline{1, N_D}$ ) в отдельности. Положение спектральных точек  $\omega_n$  меняется при изменении горизонтального расстояния между трещинами, причём диапазоны резонансного блокирования для каждой из них в отдельности в общем сохраняются. При распространении нестационарных колебаний блокирование первыми препятствиями прохождения сигнала приводит к тому, что сигнал не доходит до следующих препятствий и, значит, общая волновая картина не меняется.

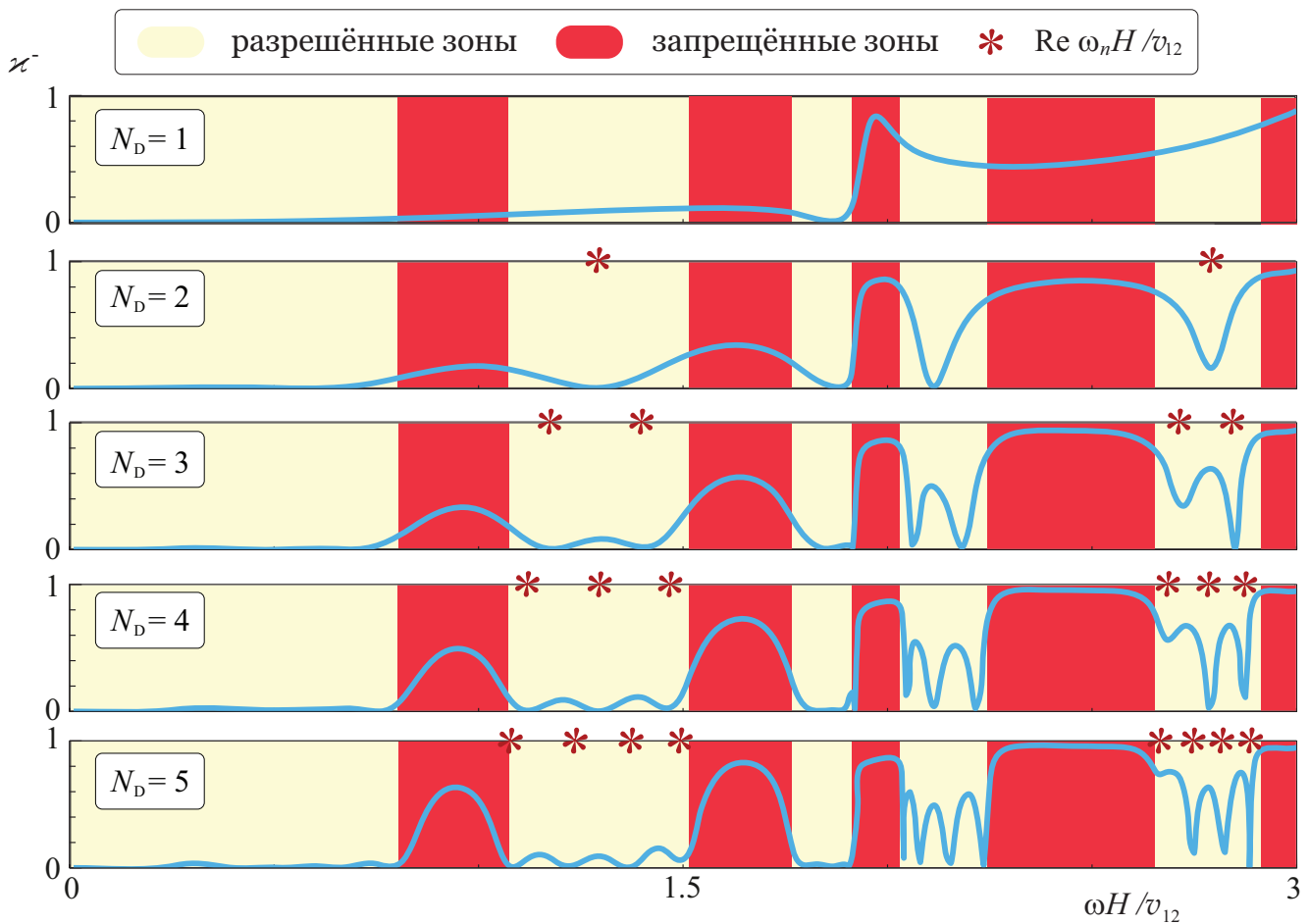


Рисунок 15 – Коэффициент отражения  $\kappa^-(\omega)$  при рассеянии моды  $a_0$  системой из  $N_D$  раскрытых трещин ( $\kappa_{j;ii} = 0$ ,  $l_j = 0.5H$ ,  $d_j = 0.5H$ ,  $\Delta\chi = 4H$ ) и точки, указывающие на резонансные частоты системы  $\text{Re } \omega_n$ ; материалы – алюминий/полимер,  $h_1 = h_2$

Эффекты формирования запрещённых и разрешённых зон равномерно отстоящими отслоениями в слое описаны в §5.3. В данном разделе изучается специальный случай расположения полосовых отслоений, при котором все неодно-

родности расположены на одинаковом расстоянии от поверхностей волновода и расстояние между соседними неоднородностями одинаково ( $\chi_j = (j - 1)\Delta\chi$ ). На рисунке 15 приведено пять графиков коэффициента отражения  $\varkappa^-(\omega)$  для разного количества  $N_D$  периодически расположенных раскрытых трещин ( $\kappa_{j;ii} = 0$ ). Для одного отслоения коэффициент отражения имеет один ярко выраженный резонансный скачок в окрестности  $\omega H/v_{12} = 2$ . С ростом количества препятствий  $N_D$  начинают формироваться запрещённые и разрешённые зоны. В разрешённых зонах происходит резкое убывание  $\varkappa^-(\omega)$  на частотах, близких к значениям  $\text{Re } \omega_n$ , некоторые из которых отмечены звёздочками на рисунке 15. При этом количество резонансных частот и минимумов  $\varkappa^-(\omega)$  в разрешённых зонах возрастает пропорционально  $N_D$ . На рисунке 16 приводятся линии тока соответствующие резонансному прохождению моды  $a_0$  через зону с несколькими препятствиями.

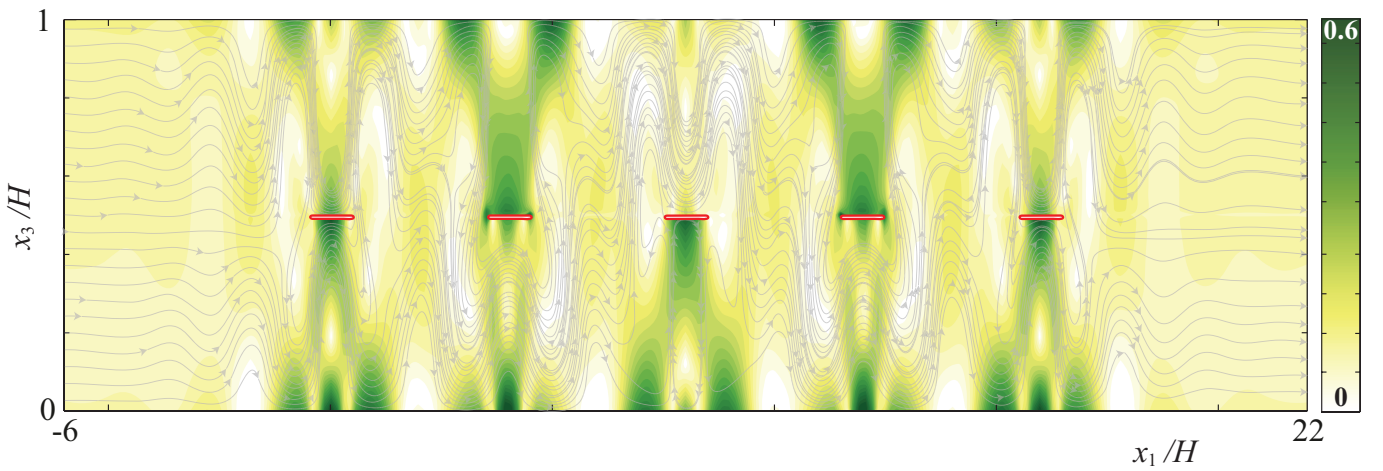


Рисунок 16 – Величина вектора плотности энергии  $|e(x_1, x_3)|$  и соответствующие им линии тока энергии для моды  $a_0$ , падающей на  $N_D = 5$  полосовых раскрытых трещины  $l_j = 0.5H$ ,  $d_j = 0.5H$ ,  $\Delta\chi = 4$  при  $\omega H/v_0 = 2.885$ ; материалы – алюминий/полимер,  $h_1 = h_2$

Установлено, что с увеличением количества препятствий растёт количество точек дискретного спектра, сгущающихся в разрешённых зонах. Однако возникает вопрос предельного перехода к периодической системе с бесконечным количеством неоднородностей ( $N_D = \infty$ ). Задача о колебаниях слоя с периодической бесконечной системой трещин ( $N_D = \infty$ ) имеет непрерывный спектр, который покрывает на вещественной оси разрешённые зоны и отклоняется в комплексную плоскость в запрещённых зонах. Таким образом, можно говорить о том, что при предельном переходе к  $N_D = \infty$  дискретный спектр задачи с конечным числом неоднородностей  $N_D < \infty$  трансформируется в непрерывный спектр задачи для  $N_D = \infty$ .

В §5.4 метод, описанный в §5.1, используется для анализа колебаний фононного кристалла с  $N_D$  отслоениями. Изучается влияние взаимного расположения дефектов на резонансные свойства всей системы, которое проявляется в наибольшей степени при расположении трещин в одной ячейке. При регулярном рассеянии происходит увеличение амплитуд колебаний в ячейке, которая содержит первое по

ходу распространения плоской волны отслоение, а также образуются энергетические вихри небольшой интенсивности между отслоениями. В случае резонанса образуются менее крупные по площади энергетические вихри большей интенсивности. В обоих случаях происходит перенаправление потоков энергии, которое отличается от рассмотренного в §4.8 случая одиночной трещины, а за трещинами формируется зона «тени». Кроме того, демонстрируется случай фокусировки волновой энергии за счёт расположения неоднородностей.

**Шестая глава** посвящена моделям, описывающим колебания многослойных структур с распределёнными системами отслоений. В §6.1 исследуются вопросы моделирования прохождения волн через границу раздела двух сред, на которой расположена стохастически распределённая система раскрытых трещин. С помощью теоремы взаимности и техники усреднения по ансамблю полный коэффициент прохождения в случае интерфейса с распределением трещин выражается через повреждённость  $C = S_d/S_{total}$  (отношение суммарной площади отслоений  $S_d$  к площади рассматриваемого интерфейса  $S_{total}$ ) и среднее значение компонент скачка смещений на одиночной трещине  $\overline{\Delta \mathbf{u}}$ . В области низких частот для некоторых форм выводится аналитическое представление для  $\overline{\Delta \mathbf{u}}$ .

В §6.2 на основе предположения об эквивалентности модели повреждённого интерфейса со стохастическим распределением микротрещин и модели, основанной на использовании ГУ ПТ, определяются связывающие их соотношения:

$$\kappa_{33} = f_1 \left( \frac{1}{C \overline{\Delta \mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1} - \frac{1}{2} \right), \quad \kappa_{11} = \kappa_{22} = f_2 \left( \frac{1}{C \overline{\Delta \mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2} - \frac{1}{2} \right), \quad (35)$$

где  $f_s = (2ic_{s1}k_{s1}c_{s2}k_{s2}) \cdot (c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2})$ ,  $c_{1l} = \lambda_l + 2\mu_l$ ,  $c_{2l} = \mu_l$ ,  $\hat{\mathbf{p}}_s$  – вектор распространения волны Р- или S-волны ( $s = 1$  и  $s = 2$ ). Соотношения (35) получаются путём приравнивания полных коэффициентов прохождения и связывают жёсткость в ГУ ПТ с повреждённостью  $C$ , упругими модулями контактирующих материалов и характерным размером трещин.

В §6.3 излагается схема применения МГИУ для периодической системы отслоений. Рассматривается пакет слоёв между двумя полупространствами, динамическое поведение которого описывается уравнениями (1). Помимо граничных условий (16) в плоскости  $x_3 = d$  предполагается наличие двоякопериодической системы отслоений, для которых верны граничные условия (15). Отслоения  $\Omega_{j_1 j_2}$  располагаются в узлах косоугольной решётки с направляющими векторами  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  с углом  $\vartheta$  между ними (см. рисунок 17). Плоскость, в которой лежит система отслоений, можно разбить на ячейки

$$G_{j_1 j_2} = \{ \mathbf{y} | \mathbf{y} = \mathbf{x} + j_1 \mathbf{g}_1 + j_2 \mathbf{g}_2 \}, \mathbf{x} \in G_{00},$$

$$G_{00} = \{ \mathbf{x} | \mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{g}_1 + \beta_2 \mathbf{g}_2 \}, \beta_i \in [-1/2, 1/2].$$

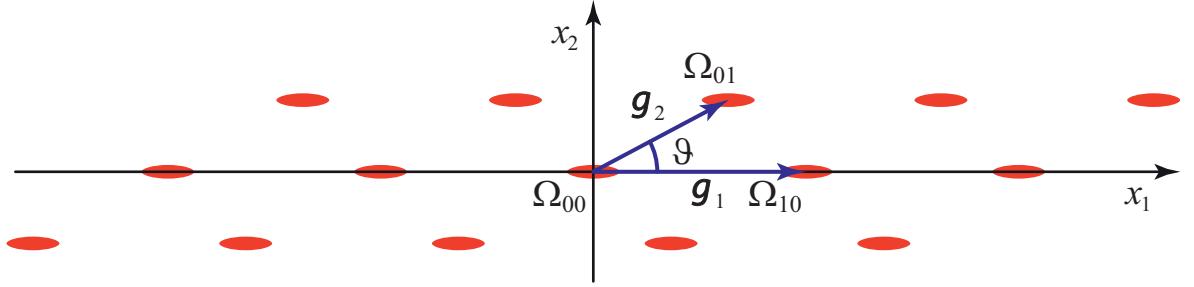
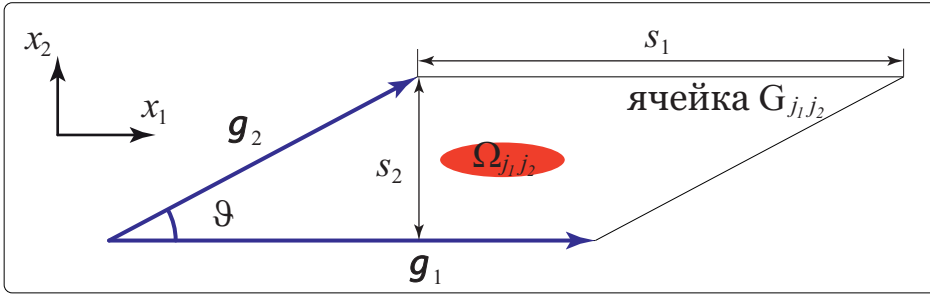


Рисунок 17 – Интерфейс с периодической системой трещин

Для решения сформулированной задачи могут быть модифицированы методы решения краевых задач для одиночного отслоения, описанные в §§4.1–4.2. При этом получаемое после подстановки в граничные условия интегральное уравнение записывается в том же виде, что и для одиночного дефекта. После подстановки представлений полного скачка перемещений в форме

$$\Delta U(\alpha_1) = \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \Delta U_{j_1 j_2}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\Delta U_{j_1 j_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \Delta U_{00} e^{i(s_1 j_1 + s_2 j_2) \alpha_1} e^{i s_2 \operatorname{tg} \vartheta j_2 \alpha_2} e^{i(\bar{k}_1 j_1 + \bar{k}_2 j_2)},$$

где  $s_1 = |\mathbf{g}_1|$ ,  $s_2 = |\mathbf{g}_2| \cos \vartheta$  и  $\bar{k}_i = k_{0i} s_i$ , интегральное уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \mathbf{L}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Delta \mathbf{U}_{00}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i(E_{j_1 j_2}(\alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$- \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) \cdot \Delta \mathbf{u}_{00}(x_1, x_2) = (\mathbf{B}_1^{\zeta} \cdot \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2) - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (36)$$

$$E_{j_1 j_2}(\alpha_1, \alpha_2) = (s_1 j_1 + s_2 j_2) \alpha_1 + s_2 \operatorname{tg} \vartheta j_2 \alpha_2 + \bar{k}_1 j_1 + \bar{k}_2 j_2.$$

В §6.4 анализируются колебания фононного кристалла с периодической системой трещин. При конечном количестве ячеек коэффициент прохождения  $\kappa^+$  в запрещённых зонах не обращается в нуль, поэтому на трещине, расположенной в середине фононного кристалла конечной толщины, рассеивается некоторый поток волновой энергии. Это приводит к возникновению более сильных резонансов в запрещённой зоне, которые существенно отличаются от резонансов в разрешённой зоне значительно бóльшими амплитудами колебаний. На рисунках 18а и 18б

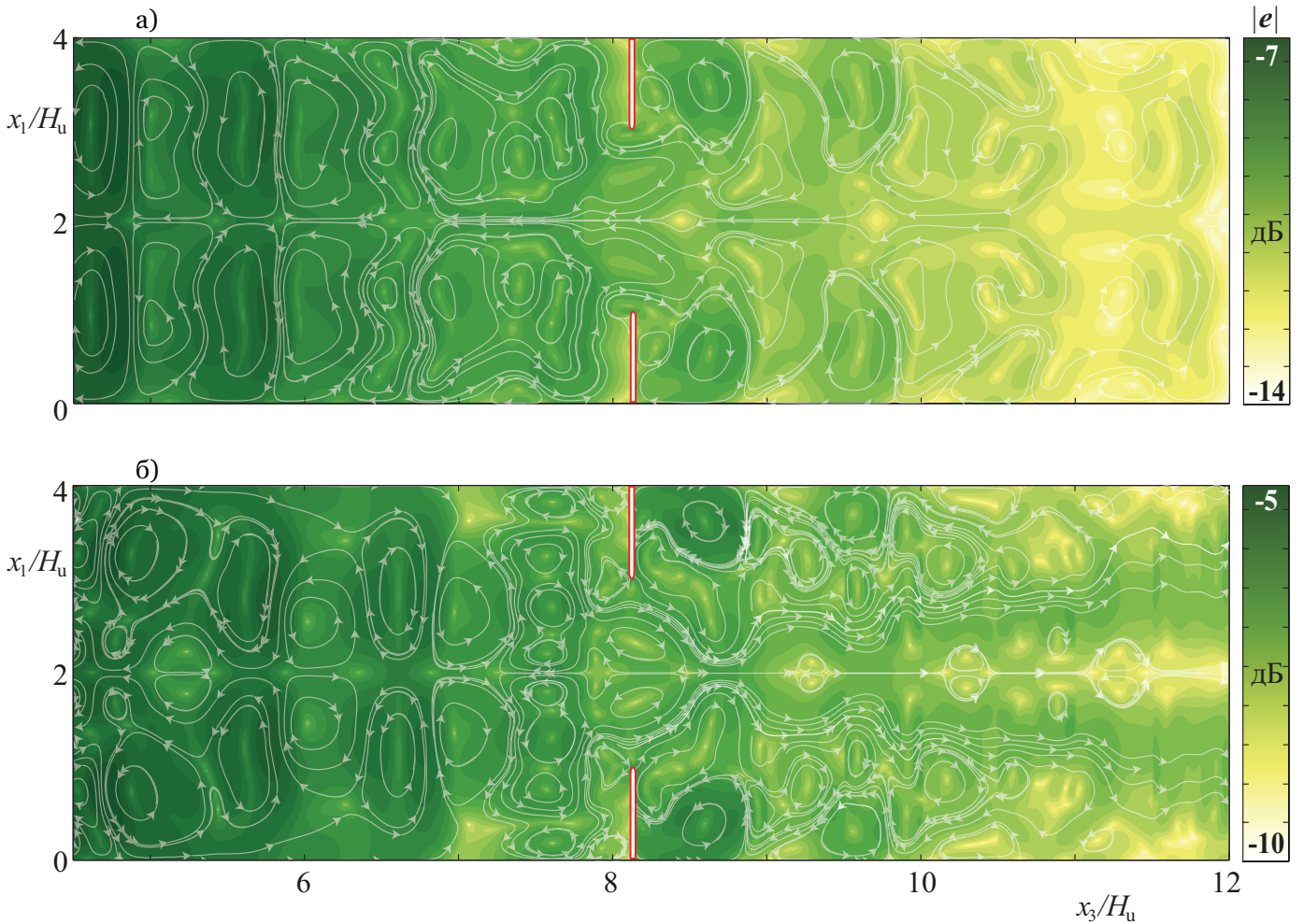


Рисунок 18 – Величина вектора плотности энергии  $|\log_{10} e(x_1, x_3)|$  и соответствующие линии тока энергии для падающей под углом  $\theta_1^{\text{in}} = 0^\circ$  Р-волны на частоте  $\omega H_u / v_{21} = 9.1093$ , лежащей во 2-ой запрещённой зоне,  $l/H_u = 1$ ,  $s/H_u = 4$ ,  $h_1/h_2 = 1$ : а) резонансное рассеяние при  $d/H_u = 8.1296$  ( $\varkappa^+ = 10^{-16}$ ), б) регулярное рассеяние при  $d/H_u = 8.12$  ( $\varkappa^+ = 5 \cdot 10^{-11}$ ); материалы – свинец/эпоксид

приведены линии тока энергии для частоты, являющейся в случае  $d/H_u = 8.1296$  резонансной и принадлежащей запрещённой зоне; при небольшом изменении положения массива трещин с  $d/H_u = 8.1296$  на  $d/H_u = 8.12$  колебания на этой частоте уже являются нерезонансными. В левой части рисунка ( $x_3 < d$ ) видны вихри энергии, которые в резонансном случае полностью перегораживают волновод, а при регулярном рассеянии остаются небольшие коридоры, по которым энергия проходит мимо вихрей за повреждённую зону.

В §6.5 приводятся результаты сравнительного анализа разработанных подходов к моделированию повреждённых интерфейсов. Значения жёсткости (35) сравниваются с жёсткостями, полученными в квазистатическом приближении для периодических полосовых трещин и гексагонального распределения круговых трещин в работе [Lekesiz H., Katsube N., Rokhlin S., Seghi R. *IJSS*, 2013]. Установлено расхождение приблизительно в 10 – 11% как для полосовых, так и для круговых трещин, которое напрямую обусловлено только различием между стохастическим

и периодическим распределением. Полученные в диссертационном исследовании соотношения (35) для жёсткости в ГУ ПТ являются более общими и могут использоваться для описания динамических процессов, в частности, для определения значений матриц  $\zeta_l$ , учитывающих ослабленные межслойные связи на интерфейсах.

**В приложение** диссертации вынесены таблицы со значениями упругих констант, использованных при расчётах.

**В заключении** даётся краткая сводка основных результатов:

- 1) на основе интегрального подхода и метода матриц переноса развиты методы решения краевых задач, описывающие распространение упругих волн различных типов в многослойных структурах с неидеальным контактом между слоями или при ослаблении адгезионных связей межслойных соединений, и развиты методы решения этих задач;
- 2) созданы механико-математические модели, описывающие упругие колебания многослойного волновода с системами полосовых и трёхмерных планарных отслоений с учётом ослабления адгезионных связей межслойных соединений или неидеальности контакта, а также при наличии стохастических и периодических распределений полосовых и трёхмерных планарных отслоений;
- 3) проанализированы спектральные свойства задач о колебаниях многослойных волноводов с системами отслоений различного типа и их связь с резонансными явлениями и локализацией волновой энергии;
- 4) выполнена экспериментальная верификация явления захвата и локализации волновой энергии в слоистом волноводе с отслоением;
- 5) на основе результатов численного анализа, проведённого с использованием разработанных моделей для упругого волновода с системой горизонтальных раскрытых трещин, установлено, что спектральные точки  $\omega_n$  всей системы не являются объединением точек спектра  $\omega_n^m$  краевых задач для каждого из отслоений в отдельности, но зачастую блокирующие и резонансные свойства системы отслоений определяются свойствами каждой из них;
- 6) продемонстрирован эффект формирования разрешённых и запрещённых частотных зон путём периодической расстановки одинаковых неоднородностей (отслоений или включений) в многослойном волноводе конечной толщины, при котором с увеличением количества препятствий растёт количество точек дискретного спектра, которые сгущаются в разрешённых зонах, а при переходе к волноводам с бесконечным количеством препятствий точки дискретного спектра задачи с конечным количеством неоднородностей формируют сплошной спектр задачи с периодической системой неоднородностей, который по-



крывает на вещественной оси разрешённые зоны, тогда как в запрещённых зонах он отклоняется в комплексную плоскость;

- 7) проведён сравнительный анализ разработанных подходов, описывающих распространение упругих волн через слоистые структуры с повреждёнными интерфейсами.

**Список работ по теме диссертации, опубликованных в рецензируемых журналах, включенных в базы данных Scopus и Web of Science и рекомендованных ВАК РФ**

1. Golub, M. V. Effective spring boundary conditions for a damaged interface between dissimilar media in three-dimensional case / M. V. Golub, O. V. Doroshenko, A. Boström // International Journal of Solids and Structures. — 2016.— Vol. 81.— P. 141–150.

2. Golub, M. V. In-plane time-harmonic elastic wave motion and resonance phenomena in a layered phononic crystal with periodic cracks / M. V. Golub, Ch. Zhang // Journal of Acoustical Society of America.— 2015.— Vol. 137, No. 1.— P. 238–252.

3. Fomenko, S. I. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals / S. I. Fomenko, M. V. Golub, T. Q. Bui, Ch. Zhang, Y.-S. Wang // International Journal of Solids and Structures. — 2014.— Vol. 51, No. 13.— P. 2491–2503.

4. Golub, M. V. In-plane motion and resonance phenomena in a periodically layered composite with a strip-like crack / M. V. Golub, Ch. Zhang // Wave Motion.— 2014.— Vol. 54, No. 2.— P. 308–322.

5. Bui, T.Q. Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method / T.Q. Bui, A. Khosravifard, Ch. Zhang, M.R. Hematiyan, M. V. Golub // Engineering Structures. — 2013.— Vol. 47.— P. 90–104.

6. Golub, M. V. Wave propagation of functionally graded layers treated by recursion relations and effective boundary conditions / M. V. Golub, A. Boström, P. D. Folkow // International Journal of Solids and Structures. — 2013.— Vol. 50.— P. 766–772.

7. Glushkov, E. Wave energy trapping and localization in a plate with a delamination / E. Glushkov, N. Glushkova, M.V. Golub, J. Moll, C.-P. Fritzen // Smart Materials and Structures. — 2012.— Vol. 21. — P. 125001.

8. Golub, M. V. SH-wave propagation and scattering in periodically layered composites with a damaged layer / M. V. Golub, Ch. Zhang, Y.-S. Wang // Journal of Sound and Vibration. — 2012.— Vol. 331, No. 8.— P. 1829–1843.

9. Liu, P. The singular edge-based smoothed finite element method for stationary dynamic crack problems in 2D elastic solids / P. Liu, T.Q. Bui, Ch. Zhang, G.R. Liu,

M. V. Golub // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.— 2012.— Vol. 233-236. — P. 68–80.

10. Moll, J. Non-axisymmetric Lamb wave excitation by piezoelectric wafer active sensors / J. Moll, M. Golub, E. Glushkov, N. Glushkova, C.-P. Fritzen // Sensors and Actuators: A. Physical.— 2012.— Vol. 130.— P. 113–121.

11. Golub, M. V. Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates / M. V. Golub, S. I. Fomenko, T. Q. Bui, Ch. Zhang, Y.-S. Wang // International Journal of Solids and Structures. — 2012. — Vol. 49, No. 2.— P. 344–354.

12. Glushkov, E. Resonance blocking and passing effects in two-dimensional elastic waveguides with obstacles / E. Glushkov, N. Glushkova, M. Golub, A. Eremin // Journal of the Acoustical Society of America.— 2011.— Vol. 130, No. 1.— P. 113–121.

13. Golub, M. V. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves / M. V. Golub, A. Boström // Wave Motion.— 2011.— Vol. 48(2). — P. 105–115.

14. Golub, M. V. SH-wave propagation and resonance phenomena in a periodically layered composite structure with a crack / M. V. Golub, Ch. Zhang, Y.-S. Wang // Journal of Sound and Vibration.— 2011.— Vol. 330, No. 13.— P. 3141–3154.

15. Golub, M. V. Propagation of elastic waves in layered composites with micro-defect concentration zones and their simulation with spring boundary conditions / M. V. Golub // Acoustical Physics.— 2010.— Vol. 56(6). — P. 848–855.

16. Boström, A. Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions / A. Boström, M. V. Golub // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics.— 2009.— Vol. 62.— P. 39–52.

17. Голуб М.В. Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности / М.В. Голуб, А.Н. Шпак, И. Бюте, К.-П. Фритцен // Вычислительная механика сплошных сред. — 2015. — Т. 8, № 4. — С. 397-407.

18. Голуб, М. В. Моделирование прохождения упругих волн через зоны неидеального контакта с помощью граничных условий пружинного типа / М. В. Голуб, О. В. Дорошенко // Проблемы прочности и пластичности.— 2015.— Т. 77, № 2.— С. 113–120.

19. Голуб, М. В. Моделирование дифракции упругих волн на множественных полосовых трещинах в слоистом периодическом композите / М. В. Голуб // Вычислительная механика сплошных сред.— 2015.— Т. 8, № 2.— С. 136–143.

20. Голуб, М. В. Распространение упругих волн в слоистых композитах периодической структуры и их рассеяние на дефектах / М. В. Голуб, С. И. Фоменко // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.— 2011.— Т. 4, №



5.— С. 2106–2108.

21. Голуб, М. В. Дифракция SH-волн и резонансы в периодических структурах с бесконечно тонкими неоднородностями / М. В. Голуб // Известия Российской академии наук. Серия физическая.— 2010.— Т. 74, № 12.— С. 1762–1766.

22. Глушков, Е. В. Резонансное блокирование бегущих волн системой трещин в упругом слое / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, М. В. Голуб, Ч. Жанг // Акустический журнал. — 2009.— Т. 55, № 1.— С. 11–20.

### **Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ**

23. Свидетельство о государственной регистрации № 2016617868 от 21.07.2016 «Программный комплекс для описания динамики отслоившихся пьезоэлектрических преобразователей “Debonded PWAS 2D”» / Голуб М.В., Шпак А.Н.— № 2016 615251; заявл. 24.05.2016; опублик. 20.08.2016, Бюл. 8.— 1 с.

24. Свидетельство о государственной регистрации № 2016613619 от 01.04.2016 «Программный комплекс для описания динамики пьезоактуаторов “PWAS 2D hp-FEM”» / Голуб М.В., Шпак А.Н.— № 2016611037; заявл.10.02.2016; опублик.20.04.2016, Бюл. 4.— 1 с.

25. Свидетельство о государственной регистрации № 2015616893 от 25.06.2015 «Программный комплекс для моделирования упругих волноводов с круговыми отслоениями “Circular crack”» / Голуб М.В., Дорошенко О.В.— № 2015613618; заявл. 30.04.2015; опублик. 20.07.2015, Бюл. .— 1 с.

26. Свидетельство о государственной регистрации № 2015610643 от 15.01.2015 «Программный комплекс для определения несущих и мгновенных частот нестационарных сигналов “Carrier/instantaneous frequencies”» / Голуб М.В., Шпак А.Н.— № 2014661650; заявл. 18.11.2014; опублик. 20.02.2015, Бюл. 2.— 1 с.

27. Свидетельство о государственной регистрации № 2014617356 от 17.07.2014 «Программный комплекс для описания плоских колебаний в слоистых фононных кристаллах с множественными повреждениями “Layered PnCr P-SV Multiple Damages”» / Голуб М.В. № 2014614584; заявл. 20.05.2014; опублик. 20.08.2014, Бюл. 8.— 1 с.

28. Свидетельство о государственной регистрации № 2013660531 от 08.10.2013 «Программный комплекс для описания антиплоских колебаний в слоистых фононных кристаллах с неоднородностями «Layered PnCr Inhomogeneity SH”» / Голуб М.В.— № 2013618465; заявл. 20.09.2013; опублик. 20.12.2013, Бюл. 12.— 1 с.

29. Свидетельство о государственной регистрации № 2013660530 от 08.10.2013 «Программный комплекс для описания волновой динамики слоистых пьезоупругих фононных кристаллов “Layered Piezoelastic PnCr”» / Голуб М.В., Фоменко С.И., Александров А.А.— № 2013618464; заявл.20.09.2013; опублик.20.12.2013, Бюл.12.— 1с.

30. Свидетельство о государственной регистрации № 2013618657 от 13.09.2013 «Программный комплекс для описания волновой динамики поврежденных слои-

стных фоновых кристаллов “Damaged Layered PnCr P-SV”» / Голуб М.В., Фоменко С.И.— № 2013616714; заявл. 30.07.2013; опубли. 20.12.2013, Бюл. 12.— 1 с.

31. Свидетельство о государственной регистрации № 2013610967 от 09.01.2013 «Программный комплекс для описания волновой динамики слоистых фоновых кристаллов “Layered PnCr P-SV”» / Голуб М.В., Фоменко С.И.— № 2012660664; заявл. 04.12.2012.— 1 с.

32. Свидетельство о государственной регистрации № 2012617865 от 31.08.2012 «Программный комплекс для восстановления типа и размера поврежденной области в упругом слое с полосовым дефектом “Single SL Defect Identification 2D Layer”» / Голуб М.В.— № 2012615999; заявл. 16.07.2012.— 1 с.

33. Свидетельство о государственной регистрации № 2011614884 от 22.06.2011 «Программный комплекс для расчета волновых характеристик в поврежденных многослойных структурах (пружинные граничные условия и распределение трещин) “Damaged SBC-AoS SH MultiLayered Space”» / Голуб М.В.— № 2011613063; заявл. 28.04.2011.— 1 с.

34. Свидетельство о государственной регистрации № 2011614885 от 22.06.2011 «Программный комплекс для моделирования гармонических колебаний в упругом слое с полосовой наклонной трещиной “Single Inclined SL Crack 2D Layer”» / Голуб М.В., Глушкова Н.В., Глушков Е.В.— № 2011613064; заявл. 28.04.2011.— 1 с.

35. Свидетельство о государственной регистрации № 2011612658 от 31.03.2011 «Программный комплекс для моделирования гармонических колебаний в упругом слое с полосовой горизонтальной трещиной “Single Horizontal SL Crack 2D Layer”» / Голуб М.В., Глушкова Н.В., Глушков Е.В.— № 2011610747; заявл. 09.02.2011.—1с.

ГОЛУБ МИХАИЛ ВЛАДИМИРОВИЧ

**ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН,  
ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ И РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В  
ПОВРЕЖДЁННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУРАХ**

Автореферат диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

