МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский технологический университет»

На правах рукописи

Курдина Светлана Павловна

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ ПРИ ОПИСАНИИ ИХ НЕОДНОРОДНОСТИ И ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ФУНКЦИЯМИ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
А.В. Манжиров

Москва – 2017

Оглавление

Введение **4**

0.1 Обзор литературы 4

0.2 Описание работы 7

0.3 Равновесие полосы 11

1. Равновесие однородной полосы 11
2. Равновесие тонкой неоднородной полосы 16

0.4 Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений 20

1. Проекционная задача для смешанного операторного уравнения 20
2. Решение смешанных интегральных уравнений 22

Глава 1 Контакт слоя с покрытием и системы штампов, имеющих сложную форму поверхности **28**

1.1 Постановка задачи и общие соотношения 29

1. Формулировка задачи 29
2. Математическая модель задачи 30
3. Преобразование уравнений и базис специального вида 33

1.2 Решение задач для одной группы штампов 36

1. Решение задачи с известной правой частью (тип 1) 36
2. Решение задачи при известных давлениях и моментах (тип 2) 39
3. Задача с известными силами и углами поворота (тип 3) 43
4. Задача с известными моментами и осадками штампов (тип 4) 45

1.3 Решение задач для двух групп штампов 47

1. Решение задачи при условиях первого и второго типов 47
2. Решение задачи при условиях первого и третьего типов 49
3. Решение задачи при условиях второго и третьего типов 51
4. Решение задачи при условиях первого и четвертого типов 52
5. Решение задачи при условиях второго и четвертого типов 55
6. Решение задачи при условиях третьего и четвертого типов 57

1.4 Решение задач для трех групп штампов 59

1. Решение задачи при условиях первого, второго и третьего типов 59
2. Решение задачи при условиях первого, второго и четвертого типов 61

3. Решение задачи при условиях первого, третьего и четвертого типов 64
4. Решение задачи при условиях второго, третьего и четвертого типов 66

1.5 Решение задачи для четырех групп штампов 69

1.6 Численные расчеты 72

1. Расчеты при заданных силах и моментах 73
2. Расчеты при заданных силах и углах поворота 74

1.7 Основные результаты и выводы 77

Глава 2 Задачи множественного контакта для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями 78

2.1 Постановка задачи и общие соотношения 79

1. Формулировка задачи 79
2. Математическая модель задачи 79
3. О преобразовании уравнений, базисе и решении задачи 82

2.2 Решение задач для одной группы штампов 84

1. Решение задачи с известной правой частью (тип 1) 84
2. Решение задачи при известных давлениях и моментах (тип 2) 84
3. Задача с известными силами и углами поворота (тип 3) 85
4. Задача с известными моментами и осадками штампов (тип 4) 86

2.3 Решение задач для двух групп штампов 88

1. Решение задачи при условиях первого и второго типов 88
2. Решение задачи при условиях первого и третьего типов 89
3. Решение задачи при условиях второго и третьего типов 91
4. Решение задачи при условиях первого и четвертого типов 92
5. Решение задачи при условиях второго и четвертого типов 94
6. Решение задачи при условиях третьего и четвертого типов 96

2.4 Решение задач для трех групп штампов 98

1. Решение задачи при условиях первого, второго и третьего типов 98
2. Решение задачи при условиях первого, второго и четвертого типов 100
3. Решение задачи при условиях первого, третьего и четвертого типов 102
4. Решение задачи при условиях второго, третьего и четвертого типов 104

2.5 Решение задачи для четырех групп штампов 106

2.6 Численные расчеты 109

2.7 Основные результаты и выводы 111

Заключение 112

Список литературы 113

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию плоских задач механики контактного взаимодействия. В ней рассматривается контакт слоев, поверхностные свойства или профиль которых описываются быстро изменяющимися функциями, и регулярной системы жестких штампов.

0.1 Обзор литературы

Считается, что исследование механики контактного взаимодействия началось в 1882 году с работы Г. Герца [93], в которой он описывал решение задачи о контакте двух упругих тел с искривленными поверхностями. Результаты этих исследований, а также тех, которые были изложены в более поздней работе 1895 года [94], стали считаться классическими и до сих пор не потеряли своей ценности, несмотря на ряд серьезных допущений в исходной постановке. С контактными задачами также связаны и такие основополагающие задачи, как задача о действии сосредоточенной силы на полупространство, решенная Я. Буссинеском в 1885 году [90], и задача о действии нагрузки на полуплоскость, решенная Фламаном в 1892 году [95]. Следует отметить и, по-видимому, первую плоскую контактную задачу, поставленную и решенную С.А. Чаплыгиным в 1900 г., в которой он рассмотрел общую задачу давления цилиндра на упругую почву. Однако работа не была опубликована и была найдена в архивных документах [86], поэтому задачу для штампа с плоским основанием принято называть задачей М.А. Садовского, о которой рассказывается в работе [104]. До 30-х годов XX века всесторонние теоретико-экспериментальные исследования подтверждали теорию Герца и способствовали развитию ее применений в инженерном деле. Фундаментальные же исследования в области контактной механики практически не проводились, так как отсутствовала необходимая математическая база.

В 30-х годах XX столетия академиком Н.И. Мусхелишвили и его по-

следователями начали развиваться эффективные методы теории функции комплексного переменного (см. [68, 69]). Ими были получены основополагающие результаты в области интегральных уравнений, методах интегральных преобразований, теории потенциала. Они позволили получить решения новых задач теории упругости и, в частности, контактных задач. В самом общем виде было получено решение основной смешанной задачи о полуплоскости. Несомненно, математический аппарат, созданный академиком А.М. Ляпуновым [100], также внес существенный Вклад в развитие теории контактных взаимодействий. В дальнейшем он использовался, например, И.Я. Штаерманом [87]. В.А. Флорин предложил приближенное решение задачи о штампе, жестко связанном с основанием [85]. Нельзя пройти мимо фундаментальных работ таких авторов, как Л.А. Галина, А.Ю. Ишлинского, А.И. Лурье, Д.И. Шермана, В.М. Абрамова, Н.А. Кильчевского, М.Я. Леонова, В.И. Моссаковского, Г.Н. Савина и пр. Вследствие высокого темпа развития данной тематики во второй половине XX века выходят сборники работ [63, 64]. Доскональный обзор развития механики контактного взаимодействия отражен в обзорной книге «Развитие теории контактных задач в СССР», редактором которой выступил Л.А. Галин [78]. Этот сборник включает в себя работы десятков авторов и результаты, собранные почти из 1000 источников. В ней дается классификация различных направлений развития контактных задач. В нее вошли, в том числе, результаты работ таких авторов как В.М. Александров, А.Ю. Амензаде, Н.Х. Арутюнян, В.А. Бабешко, А.В. Белоконь, И.И. Ворович, Л.А. Галин, Ф.Д. Гахов, В.И. Довнорович, Б.А. Друянов, Д.Д. Ивлев, А.И. Лурье, В.С. Никишин, В.В. Панасюк, М.И. Теплый, Г.П. Черепанов, Я.С. Уфлянд, Г.С. Шапиро [15, 17, 19, 28, 29, 47, 48, 70, 71, 84].

Разумеется, развитие механики контактного взаимодействия продолжилось и после выхода [78]. Следующая обзорная книга, вышедшая в 2001 году под названием «Механика контактных взаимодействий» [65], подытожила результаты публикаций, вышедших в период 1976–2001 годов ([2–6, 10–13, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 38, 41, 49–56, 66, 67, 72–76, 77, 79, 81, 83, 88, 92] и другие).

Отдельно следует отметить раздел, написанный Е.В. Коваленко [39] и посвященный доскональному обзору задач контактного взаимодействия для тел с покрытиями. За рубежом также развивалась контактная механика, что отражено в книгах Дж. Гладуэлла и К. Джонсона [27, 91].

С темой данной диссертации тесно связаны два параграфа этой книги. Во-первых, это параграф, написанный А.В. Манжировым [57], в ко-

тором дается обзор контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих тел и описывается проекционный метод решения. Развитие и обобщение этого метода описано в [62, 103].

Дальнейшее развитие механика контактного взаимодействия получила в работах С.М. Айзиковича, В.М. Александрова, А.В. Белоконя, Т.И. Белянковой, В.В. Калинчука, Л.И. Кренева, И.С. Трубчика, М.И. Чебакова [1, 7, 8, 22, 23, 37, 41, 82]. Механика контактного взаимодействия для тел с покрытиями особенно активно исследуется А.В. Манжировым и К.Е. Казаковым в их работах [30, 31, 58, 60, 96, 101, 102]. В их работах рассматриваются задачи одиночного контакта жестких штампов и оснований с покрытиями со сложными свойствами, а также описываются и обосновываются математические методы решения таких задач. Данная диссертация является продолжением этих исследований для случая множественного контактного взаимодействия.

0.2 Описание работы

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Список литературы включает 104 наименования. Основные результаты диссертационной работы отражены в публикациях [32–36, 42–46, 59, 61, 97–99]. Общее количество иллюстраций в работе — ???.

В **первой главе** исследуется взаимодействие регулярной системы жестких штампов и вязкоупругого основания с тонким покрытием переменной толщины в случае, когда поверхности штампа и покрытия являются согласованы. В дальнейшем под регулярной системой штампов будем понимать множество одинаковых штампов, расстояния между которыми одинаковы. Такая задача возникает, когда, например, штампы погружаются в еще незатвердевшее покрытие, изготовленное, из клея, бетона в его молодом возрасте, полимерных материалов, в результате чего форма покрытия в точности совпадает с формой оснований штампов. Рассмотрен случай плоской деформации. Получены разрешающие системы смешанных интегральных уравнений. Даны различные постановки задач. Получены аналитические решения для всех возможных постановок. Для решения систем смешанный уравнений с дополнительными условиями развит обобщенный проекционный метод, описанный во введении. Проведены численные расчеты для ряда модельных задач, среди которых присутствуют задачи, в которых формы поверхностей описываются быстро изменяющимися функциями.

Во **второй главе** исследуются плоские контактные задачи для регулярной системы одинаковых жестких штампов и вязкоупругого поверхностно неоднородного основания, т.е. основания с покрытием, свойства которого не меняются по глубине, но зависят от продольной координаты. Поверхностная неоднородность обуславливается особенностями нанесения покрытия на нижний слой, обработкой поверхностных слоев (травление, лазерная обработка, термическая обработка, ионная имплантация и т. д.). Неоднородность может быть связана с использованием материалов с различными свойствами при изготовлении покрытий. Как и в первой главе рассмотрен случай плоской деформации. Получены разрешающие системы смешанных интегральных уравнений. Для всех возможных вариантов постановки задачи при помощи получены аналитические решения. Исследован модельный пример, в котором покрытие состоит из нескольких материалов, т.е. его неоднородность описывается разрывной функцией.

Заключение содержит основные выводы по диссертационной работе.

Описанные задачи актуальны как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения практических приложений. Практическая значимость таких исследований связана с необходимостью учета неоднородности или форм поверхностей, так как подобные свойства приобретаются за счет, например, поверхностной обработки и особенностей изготовления контактирующих тел и могут вносить существенный вклад в характер поведения контактирующих тел. В теоретическом плане такие задачи интересны тем, что для их решения необходимо усовершенствовать старые и разрабатывать новые методы решения систем смешанных интегральных уравнений (т.е. интегральных уравнений, содержащих как интегралы с постоянными пределами интегрирования, так и интегралы с переменными пределами интегрирования), в состав которых входят быстро изменяющиеся функции. Математическое моделирование контактного взаимодействия дает возможность проводить численные эксперименты для выбора необходимых материалов слоя с целью упрочнения основания либо для управления поведением штампов на слое.

Цель диссертационной работы состоит в исследовании новых задач механики контактного взаимодействия вязкоупругих стареющих тел с покрытиями и систем штампов, установлении закономерности эволюции контактных характеристик с неоднородными покрытиями и с покрытиями, имеющими сложную форму поверхности.

Целями и задачами данной работы являются постановка и исследование плоских задач множественного контакта упругих и вязкоупругих тел с покрытиями, форма которых совпадает с формами оснований штампов (согласованный контакт), либо с поверхностно неоднородными покрытиями в случае, когда формы и неоднородности описываются быстро изменяющимися функциями; развитие обобщенного проекционного метода решения систем смешанных интегральных уравнений; формулировка выводов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построение аналитического решения плоской задачи множественного контакта регулярной системы одинаковых жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с покрытием, форма которого совпадает с формами оснований штампов (т.е. когда их профили согласованы).

2. Построение аналитического решения плоской задачи множественного контакта регулярной системы одинаковых жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с поверхностно неоднородным (про-

дольно неоднородным в плоском случае) покрытием, т.е. покрытием, свойства которого не меняются по глубине, но зависят от продольной координаты.

3. Применение проекционного метода для решения систем смешанных интегральных уравнений в контактных задачах для тел с покрытиями.

4. Анализ полученных результатов, формулировка выводов.

Научная новизна диссертации состоит в том, что в ней впервые рассмотрены задачи множественного контакта, учитывающих поверхностную неоднородность покрытий и согласованность контакта. Для построения аналитических решений поставленных задач развит обобщенный проекционный метод А.В. Манжирова. Исследованы механические эффекты связанные с множественностью контакта, сильной неоднородностью покрытий и сложных форм контактирующих поверхностей.

Методы исследования представленных в диссертации задач опираются на классические методы контактной механики и, в частности, на теорию контактного взаимодействия тел с покрытиями, результаты и подходы математического и функционального анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью вышеописанных математических методов при построении аналитических решений задач. Сформулированные результаты допускают физическую и геометрическую интерпретацию и соответствуют представлениям о протекающих процессах и поведении контактирующих тел.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы были представлены на Международной молодёжной научной конференции «XXXVIII Гагаринские чтения» (Москва, 2012); III Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Цахкадзор, Армения, 2012); VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела (с международным участием) (Ростов-на-Дону, 2013); XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2014); VIII Международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис-Степанакерт, Армения, 2014); Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы трибологии технологических, энергетических и транспортных машин» (Самара, 2014); Международном симпозиуме IUTAM Symposium on Growing solids (Москва, 2015); XLII Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2016); Всероссийской научно-технической кон-

ференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева (Москва, 2016); IX Всероссийской конференции «Механика деформируемого твердого тела» (Воронеж, 2016); Международной школе-конференции молодых ученых МЕХАНИКА-2016 (Цахкадзор, Армения, 2016); Научной конференции «Проблемы прочности, динамики, ресурса и оптимизации», посвященной 80-летию со дня рождения В.П. Малкова (Нижний новгород, 2016).

Большинство исследований выполнено в рамках проектов, финансируемых Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00991 а, № 16-31-00329 мол_а) и Министерства образования и науки РФ (тема 1.2640.2014).

В двух параграфах, предшествующих основным главам, излагаются решения основополагающих задач о равновесии однородного и неоднородного слоев, а также дается описание обобщенного проекционного метода решения смешанных интегральных уравнений.

0.3 Равновесие полосы

Интегральные уравнения, используемые в диссертационной работе, опираются на результаты исследований, опубликованных в [8, 11]. В этих работах решены две основополагающие задачи: 1) задача о равновесии однородного слоя произвольной толщины под действием распределенной нагрузки; 2) задача о равновесии тонкого неоднородного слоя под действием распределенной нагрузки. Постановки и решения обеих задач приведены ниже.

1. Равновесие однородной полосы.

Рассмотрим задачу равновесия вязкоупругого стареющего однородного слоя толщиной h, изготовленного в момент времени τ^* и лежащего на подстилающем недеформируемом основании, на который действует нормальная $q(x,t)$ и касательная $\tau(x,t)$ распределенные нагрузки (рис. 1). Будем рассматривать случай плоской деформации.

Для нахождения перемещений будем искать решение уравнения Ламе

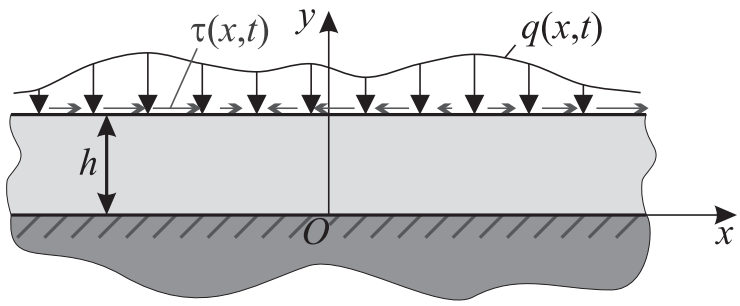
$$2(1-\nu)\text{grad div }\mathbf{u}(x,y,t) - (1-2\nu)\text{rot rot }\mathbf{u}(x,y,t) = 0. \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbf{u}(x,y,t) = (u(x,y,t) \quad v(x,y,t) \quad 0)$ — вектор перемещений точек слоя, ν — коэффициент Пуассона, который будем считать постоянной величиной. Деформации слоя и перемещения связаны формулами Коши

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x(x,y,t) = \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}, \quad \varepsilon_y(x,y,t) = \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y}, \\ &\gamma_{xy}(x,y,t) = \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x}; \end{aligned} \tag{0.2}$$

а напряжения в слое и деформации следующими определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} &\sigma_x(x,y,t) = \frac{2G(t-\tau^*)}{1-2\nu}(\mathbf{I}+\mathbf{N})[(1-\nu)\varepsilon_x(x,y,t) + \nu\varepsilon_y(x,y,t)], \\ &\sigma_y(x,y,t) = \frac{2G(t-\tau^*)}{1-2\nu}(\mathbf{I}+\mathbf{N})[(1-\nu)\varepsilon_y(x,y,t) + \nu\varepsilon_x(x,y,t)], \\ &\tau_{xy}(x,y,t) = G(t-\tau^*)(\mathbf{I}+\mathbf{N})\gamma_{xy}(x,y,t), \\ &\sigma_z(x,y,t) = \nu[\sigma_x(x,y,t) + \sigma_y(x,y,t)], \\ &\mathbf{N}f(t) = \int\limits_{\tau_0}^{t} R(t-\tau^*, \tau-\tau^*)f(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{0.3}$$



Фиг. 1. Равновесие однородной полосы

где $\mathbf{N}$ — интегральный оператор Вольтерра с ядром релаксации $R(t-\tau^*, \tau-\tau^*)$, $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, $(\mathbf{I}+\mathbf{N})$ — резольвентный оператор, $G(t)$ — модуль упругомгновенной деформации при сдвиге. Следует также отметить, что рассматриваются такие материалы, для которых коэффициенты Пуассона постоянны. Здесь и далее для аппроксимации модуля $G(t)$ будем пользоваться зависимостью $G(t) = G_0(1-\chi e^{-\alpha t})$, в которой G_0 — модуль сдвига для материала весьма старого возраста, а χ и α — положительные константы, зависящие от конкретного материала. В качестве ядра релаксации $R(t,\tau)$ будем пользоваться соотношением $R(t,\tau) = \frac{1}{G(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}[\Omega(t,\tau) - G(\tau)]$, в котором $\Omega(t,\tau)$ — мера релаксации при сдвиге, для аппроксимации которой обычно используется функция $\Omega(t,\tau) = (A + Be^{-\beta\tau})(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$, где A, C, β, γ — положительные константы, зависящие от конкретного материала. Детально об основах ползучести неоднородных стареющих тел и, в частности, об основных соотношениях линейной теории ползучести, можно прочитать, например, в [11].

Из формул (0.2) и (0.3) следует, что напряжения и перемещения связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x,y,t) &= \frac{2G(t-\tau^*)}{1-2\nu}(\mathbf{I}+\mathbf{N})\left[(1-\nu)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + \nu\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y}\right],\\
\sigma_y(x,y,t) &= \frac{2G(t-\tau^*)}{1-2\nu}(\mathbf{I}+\mathbf{N})\left[(1-\nu)\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y} + \nu\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right], \qquad (0.4)\\
\tau_{xy}(x,y,t) &= G(t-\tau^*)(\mathbf{I}+\mathbf{N})\left[\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x}\right].
\end{aligned}$$

Применим интегральное преобразование Фурье по переменной x к уравнениям (0.1) считая, что $U(\omega,y,t)$ является образом $u(x,y,t)$, а

$V(\omega, y, t)$ — образом $v(x, y, t)$, то есть

$$U(\omega, y, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) e^{i\omega x}\, dx, \quad u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\omega, y, t) e^{-i\omega x}\, d\omega,$$
$$V(\omega, y, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x, y, t) e^{i\omega x}\, dx, \quad v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(\omega, y, t) e^{-i\omega x}\, d\omega. \tag{0.5}$$

Тогда мы получим систему дифференциальных уравнений второго порядка для функций $U(\omega, y, t)$ и $V(\omega, y, t)$ относительно переменной y

$$(1 - 2\nu) U''_{yy}(\omega, y, t) - 2(1 - \nu)\omega^2 U(\omega, y, t) - i\omega V'_y(\omega, y, t) = 0,$$
$$2(1 - \nu) V''_{yy}(\omega, y, t) - (1 - 2\nu)\omega^2 V(\omega, y, t) - i\omega U'_y(\omega, y, t) = 0,$$

общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} U(\omega, y, t) &= [A_1(\omega, t) + A_2(\omega, t)\omega y] \operatorname{ch}(\omega y) + \\ &\quad + [B_1(\omega, t) + B_2(\omega, t)\omega y] \operatorname{sh}(\omega y), \\ V(\omega, y, t) &= i\{[B_1(\omega, t) - A_2(\omega, t)\kappa + B_2(\omega, t)\omega y] \operatorname{ch}(\omega y) + \\ &\quad + [A_1(\omega, t) - B_2(\omega, t)\kappa + A_2(\omega, t)\omega y] \operatorname{sh}(\omega y)\}, \end{aligned} \tag{0.6}$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$. Функции $A_1(\omega, t)$, $A_2(\omega, t)$, $B_1(\omega, t)$, $B_2(\omega, t)$ подлежат определению из граничных условий задачи. Используя выражения (0.5), (0.6), необходимые в дальнейшем формулы (0.4) для напряжений $\sigma_y(x, y, t)$ и $\tau_{xy}(x, y, t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y, t) &= \frac{iG(t - \tau^*)}{2\pi}(\mathbf{I} + \mathbf{N}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\{[-(\kappa + 1)B_2(\omega, t) + 2A_1(\omega, t) + \\ &\quad + 2\omega y A_2(\omega, t)] \operatorname{ch}(\omega y) + [-(\kappa + 1)A_2(\omega, t) + 2B_1(\omega, t) + \\ &\quad + 2\omega y B_2(\omega, t)] \operatorname{sh}(\omega y)\big\} \omega e^{-i\omega x} d\omega, \\ \tau_{xy}(x, y, t) &= \frac{G(t - \tau^*)}{2\pi}(\mathbf{I} + \mathbf{N}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\{[-(\kappa - 1)A_2(\omega, t) + 2B_1(\omega, t) + \\ &\quad + 2\omega y B_2(\omega, t)] \operatorname{ch}(\omega y) + [-(\kappa - 1)B_2(\omega, t) + 2A_1(\omega, t) + \\ &\quad + 2\omega y A_2(\omega, t)] \operatorname{sh}(\omega y)\big\} \omega e^{-i\omega x} d\omega. \end{aligned} \tag{0.7}$$

Пусть полоса защемлена по основанию. Тогда условия на нижней грани слоя представимы в виде

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0. \tag{0.8}$$

Условия же на верхней грани ставятся относительно напряжений

$$\sigma_y(x,h,t) = -q(x,t), \quad \tau_{xy}(x,h,t) = \tau(x,t).$$

Предполагая, что как касательная, так и нормальная распределенные нагрузки действуют лишь на участке $x \in [-a,a]$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_y(x,h,t) &= \begin{cases} -q(x,t), & x \in [-a,a], \\ 0, & x \notin [-a,a], \end{cases} \\ \tau_{xy}(x,h,t) &= \begin{cases} -\tau(x,t), & x \in [-a,a], \\ 0, & x \notin [-a,a]. \end{cases} \end{aligned} \tag{0.9}$$

Если эти функции непрерывны в $(-a,a)$ и абсолютно интегрируемы при $x \in [-a,a]$, для них также можно воспользоваться преобразованием Фурье

$$\begin{aligned} Q(\omega,t) &= \int\limits_{-a}^{a} q(x,t)e^{i\omega x}\,dx, \quad q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\omega,t)e^{-i\omega x}\,d\omega, \\ T(\omega,t) &= \int\limits_{-a}^{a} \tau(x,t)e^{i\omega x}\,dx, \quad \tau(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(\omega,t)e^{-i\omega x}\,d\omega, \end{aligned} \tag{0.10}$$

Подставив (0.6) в граничные условия (0.8), а (0.7) и (0.10) в граничные условия (0.9), получим систему для определения функций $A_1(\omega,t)$, $A_2(\omega,t)$, $B_1(\omega,t)$, $B_2(\omega,t)$, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} &A_1(\omega,t) \equiv 0, \\ &A_2(\omega,t) = (\mathbf{I}-\mathbf{L})\bigg[-\frac{T(\omega,t)}{G(t-\tau^*)}\frac{2\omega h\,\mathrm{sh}(\omega h) - (\kappa+1)\,\mathrm{ch}(\omega h)}{D(\omega h)} + \\ &\qquad + i\frac{Q(\omega,t)}{G(t-\tau^*)}\frac{2\omega h\,\mathrm{ch}(\omega h) - (\kappa-1)\,\mathrm{sh}(\omega h)}{\omega D(\omega h)}\bigg], \\ &B_1(\omega,t) = \kappa A_2(\omega,t), \\ &B_2(\omega,t) = (\mathbf{I}-\mathbf{L})\bigg[\frac{T(\omega,t)}{G(t-\tau^*)}\frac{2\omega h\,\mathrm{ch}(\omega h) + (\kappa-1)\,\mathrm{sh}(\omega h)}{D(\omega h)} - \\ &\qquad - i\frac{Q(\omega,t)}{G(t-\tau^*)}\frac{2\omega h\,\mathrm{sh}(\omega h) + (\kappa+1)\,\mathrm{ch}(\omega h)}{\omega D(\omega h)}\bigg]. \end{aligned} \tag{0.11}$$

Здесь введено обозначение $D(u) = 2\kappa\,\mathrm{ch}(2u) + \kappa^2 + 1 + 4u^2$, а $\mathbf{I}-\mathbf{L} = (\mathbf{I}+\mathbf{N})^{-1}$.

В результате, для нахождения перемещений $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ необходимо подставить (0.11) в (0.6), а затем перейти от полученных образов перемещений к оригиналам при помощи формул (0.5). Приведем лишь окончательные формулы для перемещений верхней грани слоя

$$\begin{aligned} u(x,h,t) &= (\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{1}{\pi\theta(t)}\Bigg\{\int\limits_{-a}^{a}\tau(\xi,t)\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\frac{D_{11}(\omega h)}{\omega D(\omega h)}\cos[\omega(\xi-x)]\,d\omega+ \\ &\quad+\varepsilon\int\limits_{-a}^{a}q(\xi,t)\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\frac{D_{12}(\omega h)}{\omega D(\omega h)}\Bigg\}, \\ v(x,h,t) &= -(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{1}{\pi\theta(t)}\Bigg\{\int\limits_{-a}^{a}q(\xi,t)\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\frac{D_{22}(\omega h)}{\omega D(\omega h)}\cos[\omega(\xi-x)]\,d\omega- \\ &\quad-\varepsilon\int\limits_{-a}^{a}\tau(\xi,t)\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\frac{D_{21}(\omega h)}{\omega D(\omega h)}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{0.12}$$

где

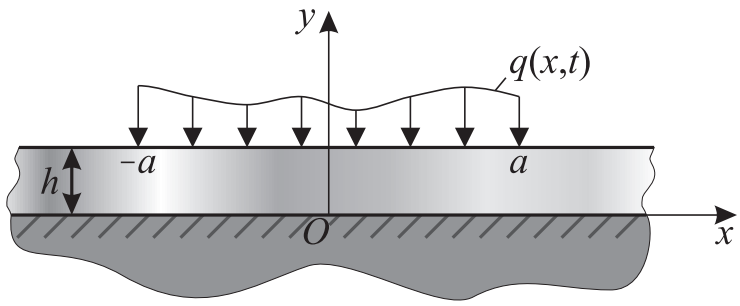
$$\begin{aligned} &D_{11}(u)=2\kappa\,\mathrm{sh}(2u)+4u,\quad D_{22}(u)=2\kappa\,\mathrm{sh}(2u)-4u,\\ &D_{12}(u)=D_{21}(u)=2\kappa[\mathrm{ch}(2u)-1]-\frac{8u^2}{\kappa-1},\\ &\theta(t)=\frac{G(t-\tau^*)}{1-\nu},\quad \varepsilon=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \end{aligned}$$

В диссертации нас будут интересовать вертикальные перемещения верхней грани слоя, на который действует только нормальная распределенная нагрузка. Поэтому из уравнений (0.12) и связи между модулем сдвига и модулем упругости $E(t)=2(1+\nu)G(t)$ следует

$$v(x,h,t)=-\frac{2(1-\nu^2)}{\pi}(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{1}{E(t-\tau^*)}\int\limits_{-a}^{a}k_{\mathrm{pl}}\left(\frac{\xi-x}{h}\right)q(\xi,t)\,d\xi, \tag{0.13}$$

где $k_{\mathrm{pl}}(s)$ — ядро плоской контактной задачи, вычисляемое по формуле

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{pl}}(s)&=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos(su)\,du, \\ L(u)&=\frac{2\kappa\,\mathrm{sh}(2u)+4u}{2\kappa\,\mathrm{ch}(2u)+\kappa^2+1+4u^2}. \end{aligned} \tag{0.14}$$



Фиг. 2. Равновесие тонкой неоднородной полосы

Замечание 1. Если между подстилающим основанием и нижней гранью слоя осуществляется гладкий контакт, то граничные условия на нижней грани слоя принимают вид

$$v(x,0,t)=0, \quad \tau_{xy}(x,0,t)=0. \tag{0.15}$$

В этом случае решение имеет вид (0.13), однако в ядре, опеределяемом формулой (0.14), меняется функция $L(u)$

$$L(u)=\frac{\operatorname{ch}(2u)-1}{\operatorname{sh}(2u)+2u}.$$

Замечание 2. В случае, если слой является тонким по сравнению с длиной отрезка $[-a,a]$, на котором действует распределенная нагрузка, формулу (0.13) можно преобразовать к виду

$$v(x,h,t)=-k_\nu h(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{q_*(x,t)}{E(t-\tau^*)}, \tag{0.16}$$

где $k_\nu=(1-\nu-2\nu^2)/(1-\nu)$ в случае идеального контакта между подстилающим основанием и слоем, $k_\nu=1-\nu^2$ в случае гладкого контакта.

2. Равновесие тонкой неоднородной полосы.

Рассмотрим теперь задачу равновесия вязкоупругого стареющего неоднородного слоя толщиной h, изготовленного в момент времени τ^* и лежащего на подстилающем недеформируемом основании, на который действует нормальная $q(x,t)$ распределенная нагрузка на отрезке $[-a,a]$ при условии, что слой является тонким по сравнению областью действия нагрузки, то есть $h \ll 2a$ (рис. 2). Как и в предыдущей задаче, будем рассматривать случай плоской деформации.

Уравнения состояния такого слоя имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x,y,t) &= \frac{2G(x,t-\tau^*)}{1-2\nu(x)}\times \\
&\quad\times(\mathbf{I}+\mathbf{N})\{[1-\nu(x)]\varepsilon_x(x,y,t)+\nu(x)\varepsilon_y(x,y,t)\}, \\
\sigma_y(x,y,t) &= \frac{2G(x,t-\tau^*)}{1-2\nu(x)}\times \\
&\quad\times(\mathbf{I}+\mathbf{N})\{[1-\nu(x)]\varepsilon_y(x,y,t)+\nu(x)\varepsilon_x(x,y,t)\}, \\
\tau_{xy}(x,y,t) &= G(x,t-\tau^*)(\mathbf{I}+\mathbf{N})\gamma_{xy}(x,y,t).
\end{aligned} \tag{0.17}$$

Деформации связаны с перемещениями формулами Коши (0.2), а для напряжения выполняются условия равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y}&=0, \\
\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y(x,y,t)}{\partial y}&=0.
\end{aligned} \tag{0.18}$$

Предполагаем также, что на нижней грани осуществляется сцепление с подстилающим основанием (0.15), а на верхней — гладкий контакт

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x,h,t) &= \begin{cases} -q(x,t), & x\in[-a,a], \\ 0, & x\notin[-a,a], \end{cases} \\
\tau_{xy}(x,h,t) &= 0.
\end{aligned} \tag{0.19}$$

Так как слой тонкий и характерный размер области контакта существенно больше толщины слоя, то $h/(2a)\ll 1$. Тогда представим касательное напряжение $\tau_{xy}(x,y,t)$ в виде разложения в ряд Тейлора по координате y, в котором ограничимся лишь линейными слагаемыми

$$\tau_{xy}(x,y,t)=k_0(x,t)+k_1(x,t)y.$$

Подставив это представление во второе граничное условие (0.19), получим

$$\tau_{xy}(x,y,t)=k_1(x,t)(y-h).$$

Тогда из второго уравнения равновесия (0.18) следует, что

$$\sigma_y(x,y,t)=-k_1'(x,t)\frac{(y-h)^2}{2}+C(x,t),$$

которое с учетом первого граничного условия (0.19) преобразуется в

$$\sigma_y(x,y,t)=-k_1'(x,t)\frac{(y-h)^2}{2}-q(x,t),$$

Используя полученное представление для напряжения $\sigma_y(x,y,t)$ и уравнения состояния (0.17) можно вывести уравнение для напряжения $\sigma_x(x,y,t)$

$$\sigma_x(x,y,t) = \frac{2G(x,t-\tau^*)}{1-\nu(x)}(\mathbf{I}+\mathbf{N})\varepsilon_x(x,y,t) - \\ - \frac{\nu(x)}{1-\nu(x)}\left[k_1'(x,t)\frac{(y-h)^2}{2} + q(x,t)\right]. \tag{0.20}$$

Выразив в первом уравнении равновесия $\sigma_x(x,y,t)$ и приравняв его вышезаписанному выражению с учетом того, что $\lim\limits_{|x|\to\infty}\sigma_x(x,y,t) = 0$, получим соотношение

$$\frac{2G(x,t-\tau^*)}{1-\nu(x)}(\mathbf{I}+\mathbf{N})\varepsilon_x(x,y,t) - \\ - \frac{\nu(x)}{1-\nu(x)}\left[k_1'(x,t)\frac{(y-h)^2}{2} + q(x,t)\right] = -K_1(x,t),$$

где $K_1(x,t) = \int k_1(x,t)\,dx$. Так как слой тонкий, то $|K_1(x,t)| \gg \frac{h^2}{2}|k_1'(x,t)|$ и тогда

$$\frac{2G(x,t-\tau^*)}{1-\nu(x)}(\mathbf{I}+\mathbf{N})\varepsilon_x(x,y,t) - \frac{\nu(x)}{1-\nu(x)}q(x,t) = -K_1(x,t),$$

Так как нижняя грань защемлена, то $\varepsilon_x(x,0,t) = 0$ и тогда

$$K_1(x,t) = \frac{\nu(x)}{1-\nu(x)}q(x,t), \quad \varepsilon_x(x,y,t) \equiv 0.$$

В этом случае из (0.20) следует, что

$$\sigma_x(x,y,t) = -\frac{\nu(x)}{1-\nu(x)}q(x,t),$$

а из первого уравнения (0.17)

$$\varepsilon_y(x,y,t) = -\frac{1-2\nu(x)}{1-\nu(x)}(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{q(x,t)}{2G(x,t-\tau^*)}.$$

Интегрируя полученное выражение для деформаций и используя граничное условие для перемещений (0.8), получим вертикальные перемещения верхней грани слоя

$$v(x,h,t) = -\frac{1-2\nu(x)}{2[1-\nu(x)]}h(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{q(x,t)}{G(x,t-\tau^*)} = \\ = -\frac{1-\nu(x)-2\nu^2(x)}{1-\nu(x)}h(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{q(x,t)}{E(x,t-\tau^*)}. \tag{0.21}$$

Замечание 3. Если между подстилающим основанием и нижней гранью слоя осуществляется гладкий контакт, то граничные условия на нижней грани слоя принимают вид (0.15), а решение принимает вид

$$\begin{aligned} v(x,h,t) &= -\frac{1-\nu(x)}{2}h(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{q(x,t)}{G(x,t-\tau^*)} = \\ &= -[1-\nu^2(x)]h(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{q(x,t)}{E(x,t-\tau^*)}. \end{aligned} \tag{0.22}$$

Замечание 4. Если основание однородно, то решения (0.21) и (0.22) совпадают с (0.16).

Замечание 5. Отметим, что напряжения $\sigma_y(x,y,t)$ не зависят от глубины и равны $\sigma_y(x,y,t) = -q(x,t)$ при любых $y \in [0,h]$.

Замечание 6. Если тонкое основание имеет переменную высоту, то в случае идеального контакта перемещение верхней грани будет определяться соотношением

$$v(x,h(x),t) = -\frac{1-\nu(x)-2\nu^2(x)}{1-\nu(x)}h(x)(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{q(x,t)}{E(x,t-\tau^*)},$$

а в случае гладкого – соотношением

$$v(x,h(x),t) = -[1-\nu^2(x)]h(x)(\mathbf{I}-\mathbf{L})\frac{q(x,t)}{E(x,t-\tau^*)}.$$

0.4 Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений

Описывается эффективный проекционный метод, позволяющий строить решения в аналитической форме с выделенными главными особенностями так называемых смешанных интегральных уравнений (см. [62, 103]), то есть уравнений, содержащих как интегральные операторы Вольтерра, так и интегральные операторы Фредгольма. Этот метод позволяет не только находить решения задач с неполной информацией о правой части интегрального уравнения, но и получать эффективное аналитическое решение задачи для интегрального уравнения Фредгольма второго рода с заданной правой частью, которое отличается от решения, построенного в [26].

1. Проекционная задача для смешанного операторного уравнения.

Интегральные уравнения, к которым сводятся задачи, рассматриваемые в данной диссертации, при помощи разнообразных замен переменных можно привести к операторному вида

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)y(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{F}y(t)=f(t),\quad t\in[t_0,T], \tag{0.23}$$

в котором $y(t), f(t)\in H\times C(\tau_0,T)$ — непрерывные функции параметра t из пространстве H, $c(t)\in C(\tau_0,T)$, $c(t)>0$ — непрерывная положительная функция параметра t; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор; $\mathbf{F}\colon H\to H$ — интегральный оператор Фредгольма; $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ — операторы Вольтерра по параметру t; H — гильбертово пространство, $C(\tau_0,T)$ — пространство непрерывных в $t\in(\tau_0,T)$ функций. Известно также, что оператор $\mathbf{F}$ является вполне непрерывным, самосопряженным и положительным, а интегральные операторы $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ обладают следующим свойством: результатом действия операторов $(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)$, $(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)$, $[\mathbf{I}-(\omega_1\mathbf{L}_1+\omega_2\mathbf{L}_2)]$, $(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)^{-1}$, $(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)^{-1}$, $[\mathbf{I}-(\omega_1\mathbf{L}_1+\omega_2\mathbf{L}_2)]^{-1}$ на непрерывную функцию параметра t является непрерывная функция параметра t.

Представив пространство H в виде прямой суммы ортогональных подпространств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$, запишем функции $y(t)$ и $f(t)$ в виде

$$y(t)=y^{(0)}(t)+y^{(1)}(t),\quad f(t)=f^{(0)}(t)+f^{(1)}(t), \tag{0.24}$$

где $y^{(i)}(t), f^{(i)}(t)\in H^{(i)}\times C(\tau_0,T)$ $(i=0,1)$ — непрерывные функции параметра t в соответствующих подпространствах.

Обобщенная проекционная задача может быть сформулирована следующим образом. *Предположим, что функции* $f(t)$ *и* $y(t)$ *удовлетворяют уравнению* (0.23) *и могут быть представлены в виде* (0.24). *Необходимо при известных функциях* $y^{(0)}(t)$ *и* $f^{(1)}(t)$ *определить неизвестные функции* $y^{(1)}(t)$ *и* $f^{(0)}(t)$.

Для решения поставленной задачи необходимо ввести операторы ортогонального проектирования $\mathbf{P}_i\colon H \to H^{(i)}$ $(i = 0, 1)$ такие, что $\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 = \mathbf{I}$. Тогда очевидно, что $\mathbf{P}_i y(t) = y^{(i)}(t)$, $\mathbf{P}_i f(t) = f^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2)$. Подействовав ортопроектором $\mathbf{P}_1$ на уравнение (0.23) получим операторное уравнение с известной правой часть

$$\begin{aligned} c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)y^{(1)}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}y^{(1)}(t) = \\ = f^{(1)}(t) - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}y^{(0)}(t), \quad t \in [\tau_0, T], \end{aligned} \tag{0.25}$$

которое содержит компактный, самосопряженный и положительный оператор $\mathbf{P}_1\mathbf{F}\colon H^{(1)} \to H^{(1)}$. Если функции φ_k являются собственными функциями оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$, соответствующими собственным значениям γ_k, то есть $\mathbf{P}_1\mathbf{F}\varphi_k = \gamma_k\varphi_k$, то они образуют базис пространства $H^{(1)}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. В этом случае произвольную непрерывную функцию параметра t из подпространства $H^{(1)}$ можно представить в виде разложения по этим функциям

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)\varphi_k, \quad f^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k, \\ \tilde{f}^{(1)}(t) \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}y^{(0)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(t)\varphi_k, \end{aligned} \tag{0.26}$$

в которых $y_k(t), f_k(t), \tilde{f}_k(t) \in H \times C(t_0, +\infty)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Подставив (0.26) в (0.25) получим уравнение для нахождения функций $y_k(t)$

$$y_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{f_k(t) - \tilde{f}_k(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{0.27}$$

где $\mathbf{W}_k$ — резольвентный оператор для оператора $\mathbf{L}^k = [c(t)\mathbf{L}_1 + \gamma_k\mathbf{L}_2]/[c(t) + \gamma_k]$, $(\mathbf{I} - \mathbf{L}^k)^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{W}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. В результате, из уравнений (0.26) и (0.27) следует, что неизвестная функция $y^{(1)}(t)$ принимает вид

$$y^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{f_k(t) - \tilde{f}_k(t)}{c(t) + \gamma_k}\varphi_k, \quad t \in [\tau_0, T].$$

Подействовав ортопроектором $\mathbf{P}_0$ на уравнение (0.23) и учитывая то, что функция $y^{(1)}(t)$ уже известна, получим уравнение для определения функции $f^{(0)}(t)$

$$f^{(0)}(t) = c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)y^{(0)}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_0\mathbf{F}[y^{(0)}(t) + y^{(1)}(t)], \quad t \in [\tau_0, T].$$

Отметим, что полученные решения существуют и единственны.

2. Решение смешанных интегральных уравнений.

Рассмотрим смешанное интегральное уравнение с системой из N дополнительных условий:

$$c(t)m(x)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)y(x,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{G}y(x,t) = f(x,t), \tag{0.28}$$

$$\int\limits_\Omega y(\xi,t)f_l(\xi)\,d\Omega_\xi = M_l(t), \quad l = 1,2,\ldots,N, \tag{0.29}$$

$$f(x,t) = \sum_{l=1}^{N}\alpha_l(t)f_l(x) - g(x,t), \quad \mathbf{G}f(x,t) = \int\limits_\Omega k(x,\xi)f(\xi,t)\,d\Omega_\xi,$$

$$x \in \Omega, \quad t \in [\tau_0, T],$$

в котором $c(t) \in C(\tau_0, T)$, $m(x) \in L_2(\Omega)$, $m(x) > 0$, $g(x,t) \in L_2(\Omega) \times C(\tau_0, T)$ — заданные функции, $y(x,t) \in L_2(\Omega) \times C(\tau_0, T)$, $\alpha_l(t) \in C(\tau_0, T)$ $(l = 1,2,\ldots,N)$ — искомые функции; Ω — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}$ (отрезок); $\{f_l(x)\}_{l=1,2,3,\ldots}$ $(f_l(x) \in L_2(\Omega))$ — система линейно независимых функций; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор; $\mathbf{L}_i$ $(i = 1,2)$ — интегральные операторы Вольтерра с полярными либо непрерывными ядрами $K_i(t - \tau_0, \tau - \tau_0) \in C(\tau_0, T) \times C(\tau_0, T)$; $\mathbf{G}\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — положительно определенный, вполне непрерывный, самосопряженный оператор с ядром $k(x,\xi) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Произведя в (0.28), (0.29) замену переменных по приведенным ниже формулам

$$Y(x,t) = y(x,t)\sqrt{m(x)}, \quad F(x,t) = \frac{f(x,t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad K(x,\xi) = \frac{k(x,\xi)}{\sqrt{m(x)}\sqrt{m(\xi)}}$$

получим преобразованное интегральное уравнение и систему дополнительных условий

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)Y(x,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{F}Y(x,t) = F(x,t), \tag{0.30}$$

$$\int\limits_\Omega Y(\xi,t)\frac{f_l(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}}\,d\Omega_\xi = M_l(t), \quad l = 1,2,\ldots,N, \tag{0.31}$$

$$F(x,t)=\sum_{l=1}^{N}\alpha_l(t)\frac{f_l(x)}{\sqrt{m(x)}}-\frac{g(x,t)}{\sqrt{m(x)}},\quad \mathbf{F}f(x,t)=\int\limits_{\Omega}K(x,\xi)f(\xi,t)\,d\Omega_\xi,$$

$x\in\Omega,\quad t\in[\tau_0,T].$

Если предположить, что $H=L_2(\Omega)$, то можно видеть, что уравнение (0.30) совпадает с уравнением (0.23).

Чтобы построить решение в классе функций $L_2(\Omega)\times C(\tau_0,T)$ уравнения (0.30) с дополнительными условиями (0.31) необходимо ввести в рассмотрение базис в $L_2(\Omega)$, содержащий в себе в явном виде функцию $1/\sqrt{m(x)}$. Это предположение следует из вида правой части уравнения (0.30) и левых частей системы уравнений (0.31). Для построения такой системы воспользуемся соотношениями

$$p_k(x)=\frac{p_k^*(x)}{\sqrt{m(x)}},\quad J_{km}=\int\limits_{\Omega}\frac{f_k(\xi)f_m(\xi)}{m(\xi)}\,d\Omega_\xi,\quad d_0=1,$$

$$d_k=\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1k}\\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J_{k1} & J_{k2} & \cdots & J_{kk}\end{vmatrix},\ p_k^*(x)=\frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}}\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1k}\\ J_{21} & J_{22} & \cdots & J_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x)\end{vmatrix},\quad (0.32)$$

$k,m=1,2,3,\ldots$

Из (0.32) следует, что функции $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_N(x)$ могут быть представлены в виде:

$$p_l(x)=\sum_{j=1}^{l}a_{lj}\frac{f_j(x)}{\sqrt{m(x)}},\quad l=1,2,\ldots,N.\qquad (0.33)$$

Разрешая систему уравнений (0.33) относительно $f_i(x)/\sqrt{m(x)}$, получим

$$\frac{f_l(x)}{\sqrt{m(x)}}=\sum_{j=1}^{l}b_{lj}p_j(x),\quad l=1,2,\ldots,N,\qquad (0.34)$$

где матрица, составленная из элементов b_{lj}, является обратной по отношению к матрице, составленной из элементов a_{lj} $(l,j=1,2,\ldots,N)$.

Представив пространство $L_2(\Omega)$ в виде суммы ортогональных подпространств $L_2^{(0)}(\Omega)$ и $L_2^{(1)}(\Omega)$, базисами которых являются системы $\{p_l(x)\}_{l=1,2,\ldots,N}$ и $\{p_k(x)\}_{k=N+1,N+2,N+3\ldots}$, соответственно, заметим, что произвольные функции из $L_2(\Omega)\times C(\tau_0,T)$ могут быть представлены как

алгебраическая сумма функций из $L_2^{(0)}(\Omega)\times C(\tau_0,T)$ и $L_2^{(1)}(\Omega)\times C(\tau_0,T)$. Тогда искомая функция $Y(x,t)$ и функция $F(x,t)$, стоящая в правой части уравнения (0.30), принимают вид

$$Y(x,t)=Y^{(0)}(x,t)+Y^{(1)}(x,t),\quad Y^{(0)}(x,t)=\sum_{l=1}^{N}Y_l^{(0)}(t)p_l(x), \tag{0.35}$$

$$F(x,t)=F^{(0)}(x,t)+F^{(1)}(x,t),\quad F^{(0)}(x,t)=\sum_{l=1}^{N}\Bigg[\sum_{j=l}^{N}b_{jl}\alpha_j(t)-g_l^{(0)}(t)\Bigg]p_l(x),$$

$$F^{(1)}(x,t)=-G^{(1)}(x,t),\quad \frac{g(x,t)}{\sqrt{m(x)}}=G^{(0)}(x,t)+G^{(1)}(x,t), \tag{0.36}$$

$$G^{(0)}(x,t)=\sum_{l=1}^{N}g_l^{(0)}(t)p_l(x),\quad g_l^{(0)}(t)=\int\limits_{\Omega}\frac{g(x,t)}{\sqrt{m(x)}}p_l(x)\,d\Omega_\xi,\quad l=1,2,\ldots,N.$$

Из дополнительных условий (0.31), представления (0.34), разложения (0.35), (0.36) и условия ортогональности системы базисных функций $\{p_k(x)\}_{k=1,2,3,\ldots}$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{l}b_{lj}Y_j^{(0)}(t)=M_l(t),\quad l=1,2,\ldots,N.$$

Разрешая ее относительно $Y_l^{(1)}(t)$, получим

$$Y_l^{(0)}(t)=\sum_{j=1}^{l}a_{lj}M_j(t),\quad l=1,2,\ldots,N. \tag{0.37}$$

Таким образом, из представления (0.35) и формул для функций разложения (0.37) следует, что функция $Y^{(0)}(x,t)$ может быть определена при помощи соотношения

$$Y^{(0)}(x,t)=\sum_{l=1}^{N}p_l(x)\sum_{j=1}^{l}a_{lj}M_j(t) \tag{0.38}$$

Получается, что в представлении (0.35) для функции $Y(x,t)$ известно слагаемое $Y^{(0)}(x,t)\in L_2^{(0)}(\Omega)\times C(\tau_0,T)$, а слагаемое $Y^{(1)}(x,t)\in L_2^{(1)}(\Omega)\times C(\tau_0,T)$ необходимо определить. В представлении функции $F(x,t)$ обратная ситуация — требуется определить $F^{(0)}(x,t)\in L_2^{(0)}(\Omega)\times C(\tau_0,T)$, а $F^{(1)}(x,t)\in L_2^{(1)}(\Omega)\times C(\tau_0,T)$ известно. Это позволяют классифицировать описанную задачу как один из случаев обобщенной проекционной задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Опираясь на описанный ранее обобщенный метод, введем ортопроекторы, отображающие пространство $L_2(\Omega)$ на $L_2^{(0)}(\Omega)$ и $L_2^{(1)}(\Omega)$ при помощи следующих формул

$$\mathbf{P}_0 f(x) = \int\limits_\Omega f(\xi) \sum_{l=1}^{N} p_l(x) p_l(\xi)\, d\Omega_\xi, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Очевидно, что $\mathbf{P}_l Y(x,t) = Y^{(l)}(x,t)$, $\mathbf{P}_l F(x,t) = F^{(l)}(x,t)$ $(l = 0,1)$. Как и ранее, подействовав оператором $\mathbf{P}_1$ на уравнение (0.30), получим операторное уравнение с известной правой частью

$$\begin{aligned} c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) Y^{(1)}(x,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1 \mathbf{F} Y^{(1)}(x,t) = \\ = -G^{(1)}(x,t) - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1 \mathbf{F} Y^{(0)}(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [\tau_0, T], \end{aligned} \tag{0.39}$$

содержащее компактный самосопряженный оператор Гильберта-Шмидта $\mathbf{P}_1\mathbf{F}\colon L_2^{(1)}(\Omega) \to L_2^{(1)}(\Omega)$, ядро которого имеет вид

$$K^{(1)}(x,\xi) = K(x,\xi) - \int\limits_\Omega K(s,\xi) \sum_{l=1}^{N} p_l(x) p_l(s)\, d\Omega_s.$$

Решение (0.39) следует строить в виде ряда по собственным функциям $\varphi_k(x)$ оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$, которые, очевидно, образуют базис пространства $L_2^{(1)}(\Omega)$: $\mathbf{P}_1\mathbf{F}\varphi_k(x) = \gamma_k \varphi_k(x)$, где γ_k — соответствующие собственные значения $(k = N+1, N+2, N+3, \ldots)$. Сами собственные функции представляются в виде

$$\varphi_k(x) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \psi_{km} p_m(x), \quad m = N+1, N+2, N+3, \ldots$$

Поскольку ядро $K(x,\xi)$ раскладывается в двойной ряд по функциям $p_k(x)$, то есть

$$K(x,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} K_{ml} p_m(x) p_l(\xi),$$

где коэффициенты разложения определяются формулами

$$K_{ml} = \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega F(x,\xi) p_m(x) p_n(\xi)\, d\Omega_x\, d\Omega_\xi,$$

то разложение ядра $K^{(1)}(x,\xi)$ принимает вид:

$$K^{(1)}(x,\xi) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} K_{ml} p_m(x) p_l(\xi) + \sum_{m=1}^{N} \sum_{l=N+1}^{\infty} K_{ml} p_l(x) p_m(\xi).$$

Спектральная задача преобразуется к бесконечной системе уравнений относительно коэффициентов разложения ψ_{km} и γ_k

$$\sum_{l=N+1}^{\infty} K_{ml}\psi_{kl} = \gamma_k\psi_{km}, \quad k,m = N+1, N+2, N+3, \ldots$$

Представив функции $Y^{(1)}(x,t)$ и $G^{(1)}(x,t)$ в виде разложения по системе собственных функций, то есть

$$Y^{(1)}(x,t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} Y_k^{(1)}(t)\varphi_k(x), \quad G^{(1)}(x,t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k^{(1)}(t)\varphi_k(x), \quad (0.40)$$

в котором

$$g_k^{(1)}(t) = \int\limits_{\Omega} \frac{g(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}\varphi_k(\xi)\, d\Omega_\xi, \quad k = N+1, N+2, N+3, \ldots,$$

и подставив эти представления в уравнение (0.39), можно получить уравнение для определения функций разложения $Y_k^{(1)}(t)$ $(k = N+1, N+2, N+3, \ldots)$, решение которого будет иметь вид

$$Y_k^{(1)}(t) = -(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{g_k^{(1)}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\sum\limits_{l=1}^{N} K_{(l)k}Y_l^{(0)}(t)}{c(t)+\gamma_k}, \quad (0.41)$$
$$k = N+1, N+2, N+3, \ldots,$$

где $K_{(l)k} = \sum\limits_{m=N+1}^{\infty} K_{ml}\psi_{km}$, а $\mathbf{W}_k$ — резольвентный оператор для оператора $\mathbf{L}^k = [c(t)\mathbf{L}_1 + \gamma_k\mathbf{L}_2]/[c(t)+\gamma_k]$, $(\mathbf{I}-\mathbf{L}^k)^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{W}^k$ $(l = 1,2,\ldots,N$, $k = N+1, N+2, N+3, \ldots)$. В результате из уравнений (0.40) и (0.41) следует, что неизвестная функция $Y^{(1)}(t)$ принимает вид

$$Y^{(1)}(x,t) = -\sum_{k=N+1}^{\infty}(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{g_k^{(1)}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\sum\limits_{l=1}^{N}K_{(l)k}Y_l^{(0)}(t)}{c(t)+\gamma_k}\varphi_k(x), \ \ t\in[\tau_0,T],$$

а функция $y(x,t)$ уравнения (0.28) на основании полученного выражения, формул (0.35), (0.38) и замены $Y(x,t) = y(x,t)\sqrt{m(x)}$ может быть представлена выражением

$$y(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[\sum_{l=1}^{N} p_l^*(x)\sum_{j=1}^{l} a_{lj}M_j(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} Y_k^{(1)}(t)\varphi_k^*(x)\right], \quad (0.42)$$
$$x\in\Omega, \quad t\in[\tau_0,T],$$

в котором

$$\varphi_k^*(x) = \sqrt{m(x)}\varphi_k(x) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \psi_{km} p_m^*(x), \quad k = N+1, N+2, N+3, \ldots$$

Уравнение (0.42) также можно представить в виде

$$y(x,t) = \frac{1}{m(x)} \left[\sum_{l=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{l} a_{lj} M_j(t) \right) p_l^*(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} \psi_{mk} Y_m^{(1)}(t) \right) p_k^*(x) \right],$$
$$x \in \Omega, \quad t \in [\tau_0, T].$$

В полученном представлении отдельным сомножителем выделена функция $m(x)$. Это дает возможность производить вычисления даже для быстро изменяющихся функций $m(x)$.

Подействовав ортопроектором $\mathbf{P}_0$ на уравнение (0.30) получим уравнения для определения функций $\alpha_l(t)$:

$$\alpha_l(t) = \sum_{i=l}^{N} a_{il} \Bigg\{ g_i^{(0)}(t) + c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) \sum_{j=1}^{i} a_{ij} M_j(t) + \\ + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \left[\sum_{m=1}^{N} K_{mi} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{mj} M_j(t) \right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} K_{(i)k} Y_k^{(1)}(t) \right] \Bigg\},$$
$$l = 1, 2, \ldots, N, \quad t \in [\tau_0, T],$$

где функции $g_i^{(0)}(t)$ определяются уравнением (0.36).

Глава 1

Контакт слоя с покрытием и системы штампов, имеющих сложную форму поверхности

В главе исследуются плоские задачи контакта систем одинаковых жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с тонким покрытием в случае, когда формы поверхностей штампов повторяют форму покрытий, то есть осуществляется конформный контакт. Такие задачи возникают, например, в случаях, когда в еще незатвердевшее покрытие без напряжения погружаются штампы, а затем, после отверждения, эти штампы отсоединяются. В результате форма покрытия и формы штампов в точности совпадают. В качестве таких материалов для таких покрытий могут выступать многие полимеры, бетон в молодом возрасте и т. п.

Для такой задачи контакта возможны 15 вариантов формулировок. Для всех вариантов формулировок поставлены задачи, выписаны разрешающие смешанные интегральные уравнения и при помощи обобщенного проекционного метода построены их аналитические решения. Решен ряд модельных примеров, включающих случаи, когда формы штампов и поверхностей задаются быстро изменяющимися функциями. Исследовано влияние сложных форм поверхностей на кинематические характеристики штампов и на распределение напряжений в области контакта.

Основные результаты главы отражены в работах [33, 42, 45, 59, 61, 98].

1.1 Постановка задачи и общие соотношения

1. Формулировка задачи.

Однородный стареющий вязкоупругий слой толщины H, изготовленный в момент времени τ_2, лежит на подстилающем недеформируемом основании. Между слоем и подстилающим основанием осуществляется либо идеальный контакт, либо гладкий. На слое располагается тонкое вязкоупругое стареющее покрытие, изготовленное в момент времени τ_1 из материала, отличного от материала основного слоя. Жесткость основного слоя не ниже жесткости покрытия, а между ними также либо гладкий, либо идеальный контакт. Толщина покрытия $h(x)$ является переменной величиной, однако в данной работе считается, что функция $h(x)$ периодична (период равен величине Δa).

В момент времени $\tau_0 \geq \max\{\tau_1, \tau_2\}$ на описанный пакет слоев начинает действовать система n одинаковых жестких штампов шириной $\bar{a}$. Расстояние между осями соседних штампов равна Δa (система штампов регулярна). Формы штампов в точности совпадают с формами покрытий под ними, то есть осуществляется конформный контакт.

Считается также, что толщина покрытия $h(x)$ много меньше ширины области контакта $\bar{a}$; области контакта имеют ширины $\bar{a}$ и со временем не изменяются. Рассматривается случай плоской деформации.

Схема контактного взаимодействия представлена на рисунке 1.1.

Под воздействием нагрузки вышеописанное основание деформируется, а штампы перемещаются и поворачиваются.

На любом штампе возможен один из четырех типов условий:

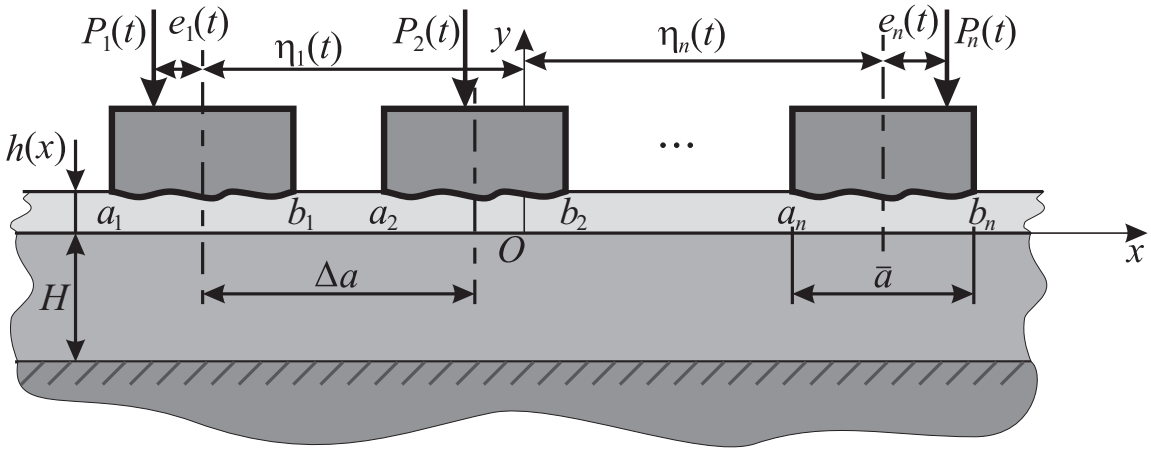
тип 1, известны осадка штампа и его угол поворота;

тип 2, известны осадка штампа и момент приложения силы;

тип 3, известны угол наклона штампа и приложенная сила;

тип 4, известны приложенная сила и момент.

Несомненно, на каждом штампе возможен свой набор условий, независимо от того, какие условия ставятся на других штампах. Несложно показать, что существует 15 различных вариантов постановки задачи: 1) когда на всех штампах заданы условия одного типа, то говорят об одной группе штампов; таких постановок всего 4 ($C_4^1 = 4$); 2) когда на части штампов заданы одни условия, а на другой части — другие, то говорят о двух группах штампов; таких постановок всего 6 ($C_4^2 = 6$); 3) существует 4 ($C_4^3 = 4$) постановки, когда штампы делятся на 3 группы штампов с различными типами условий; 4) и, наконец, существует одна постановка



Фиг. 1.1. Множественный конформный контакт для тел с покрытиями

($C_4^4 = 1$), когда можно выделить 4 группы штампов. Подход к решению всех 15 вариантов подобен. В диссертационной работе будут рассмотрены построения решений для всех возможных постановок.

Необходимо по известным данным определить недостающие величины, а также контактные давления под штампами. Например, если слой вдавливаются 2 штампа, на одном из которых известны вдавливающая сила и момент приложения нагрузки, а на другом — осадка и угол поворота, то на первом штампе подлежат определению его осадка и угол поворота, а на втором — приложенная сила и момент; под обоими штампами также необходимо определить распределение контактных давлений.

2. Математическая модель задачи.

Для составления математической модели поставленной задачи, заменим штампы некоторыми распределенными нагрузками $p_i(x,t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Очевидно, что в области действия штампов они будут совпадать по модулю с контактными давлениями $q_i(x,t)$, но иметь противоположные направления, то есть $p_i(x,t) = -q_i(x,t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. На основании известных решений для однородного слоя произвольной толщины и тонкого слоя (см. раздел 0.3), можно получить выражение для перемещений верхней грани слоя с покрытием под действием распределенных нормальных нагрузок $q_i(x,t)$

$$v_i(x,t) = k_\nu h(x)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)\frac{q_i(x,t)}{E_1(t-\tau_1)} + \\ + \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\frac{1}{E_2(t-\tau_2)}\int\limits_{a_j}^{b_j} k_{\text{pl}}\left(\frac{x-\xi}{H}\right)q_j(\xi,t)d\xi, \qquad (1.1)$$

$$x \in [a_i, b_i], \quad t \geq \tau_0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

где $E_1(t-\tau_1)$, ν_1 — модуль упругомгновенной деформации и коэффициент Пуассона покрытия, $E_2(t-\tau_2)$, ν_2 — модуль упругомгновенной деформации и коэффициент Пуассона нижнего основного слоя, k_ν — коэффициент, величина которого зависит от условий сцепления между покрытием и нижним слоем ($k_\nu = (1-\nu_1-2\nu_1^2)/(1-\nu_1)$ при сцеплении и $k_\nu = 1-\nu_1^2$ при гладком контакте); a_i, b_i — левая и правая координаты i-го штампа ($i = 1, 2, \ldots, n$); $k_{\rm pl}(s)$ — ядро плоской контактной задачи, зависящее от условий на нижней грани слоя

$$k_{\rm pl}(s) = \int\limits_0^\infty \frac{L(u)}{u}\cos(su)\,du, \tag{1.2}$$

в котором $L(u) = [2\kappa_2\,\mathrm{sh}(2u)+4u]/[2\kappa_2\,\mathrm{ch}(2u)+\kappa_2^2+1+4u^2]$ при сцеплении и $L(u) = [\mathrm{ch}(2u)-1]/[\mathrm{sh}(2u)+2u]$ при гладком контакте; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, $\mathbf{L}_k$ — интегральные операторы Вольтерра с ядрами $K_k(t-\tau_k, \tau-\tau_k)$, $K_k(t,\tau) = E_k(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[E_k^{-1}(\tau)+C_k(t,\tau)]$, а $C_k(t,\tau)$ — мера ползучести ($k = 1, 2$), то есть

$$\mathbf{L}_k f(t) = \int\limits_{\tau_0}^{t} K_k(t-\tau_k, \tau-\tau_k) f(\tau)\,d\tau.$$

С другой стороны осадка верхней грани слоя будет в точности совпадать с осадками штампов как жесткого целого, так как в еще недеформированном состоянии профили штампов и профиль покрытия в точности совпадают и зазоров между поверхностями нет. Тогда, приравнивая правую часть уравнения (1.1) осадкам штампов, можно получить следующую систему смешанных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &k_\nu h(x)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)\frac{q_i(x,t)}{E_1(t-\tau_1)}+ \\ &\quad+\frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\frac{1}{E_2(t-\tau_2)}\int\limits_{a_j}^{b_j} k_{\rm pl}\left(\frac{x-\xi}{H}\right)q_j(\xi,t)d\xi = \\ &\quad=\delta_i(t)+\alpha_i(t)(x-\eta_i), \\ &x\in[a_i,b_i],\quad t\ge\tau_0,\quad i=1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\delta_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ — осадка и угол поворота i-го штампа, $\eta_i = \frac{1}{2}(a_i+b_i)$ — срединная точка i-го штампа.

Дополнительными условиями для штампов являются условия их равновесия на слое, представляющие из себя следующие уравнения

$$\begin{gathered}\int\limits_{a_i}^{b_i} q_i(\xi,t)\,d\xi = P_i(t),\\ \int\limits_{a_i}^{b_i} q_i(\xi,t)(\xi-\eta_i)\,d\xi = e_i(t)P_i(t)\equiv M_i(t),\quad t\geq\tau_0,\quad i=1,2,\ldots,n,\end{gathered}\tag{1.4}$$

где $P_i(t)$ — сила, которая действует на i штамп, $e_i(t)$ — эксцентриситет приложения указанной силы, $M_i(t)$ — момент приложения нагрузки.

Таким образом математическая модель задачи представляет из себя систему уравнений (1.3) с дополнительными условиями (1.4).

Приведем эту систему с дополнительными условиями к безразмерному виду. Для этого сделаем следующую замену переменных

$$\begin{gathered}x^*=\frac{2(x-\eta_i)}{\bar a},\quad \xi^*=\frac{2(\xi-\eta_j)}{\bar a},\quad t^*=\frac{t}{\tau_0},\quad \tau_1^*=\frac{\tau_1}{\tau_0},\quad \tau_2^*=\frac{\tau_2}{\tau_0},\\ \lambda=\frac{2H}{\bar a},\quad \delta^{i*}(t^*)=\frac{2\delta_i(t)}{\bar a},\quad \alpha^{i*}(t^*)=\alpha_i(t),\quad c^*(t^*)=\frac{E_2(t-\tau_2)}{E_1(t-\tau_1)},\\ m^*(x^*)\equiv m^i(x^*)=\frac{k_\nu}{2(1-\nu_2^2)}\frac{2h(x)}{\bar a},\quad q^{i*}(x^*,t^*)=\frac{2(1-\nu_2^2)q_i(x,t)}{E_2(t-\tau_2)},\\ P^{i*}(t^*)=\frac{4P_i(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)\bar a},\quad M^{i*}(t^*)=\frac{8e_i(t)P_i(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)\bar a^2},\\ \mathbf{F}^{ij*}f(x^*)=\int\limits_{-1}^{1}k^{ij}(x^*,\xi^*)f(\xi^*)d\xi^*,\quad \mathbf{L}_k^*f(t^*)=\int\limits_{1}^{t^*}K^{k*}(t^*,\tau^*)f(\tau^*)d\tau^*,\\ k^{ij}(x^*,\xi^*)=\frac{1}{\pi}k_{\rm pl}\left(\frac{x-\xi}{H}\right)=\frac{1}{\pi}k_{\rm pl}\left(\frac{x^*-\xi^*+\eta^{i*}-\eta^{j*}}{\lambda}\right),\quad \eta^{i*}=\frac{2\eta_i}{\bar a},\\ K^{1*}(t^*,\tau^*)=\frac{E_1(t-\tau_1)}{E_1(\tau-\tau_1)}\frac{E_2(\tau-\tau_1)}{E_2(t-\tau_1)}K_1(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\tau_0,\\ K^{2*}(t^*,\tau^*)=K(t-\tau_2,\tau-\tau_2)\tau_0,\quad i,j=1,2,\ldots,n.\end{gathered}\tag{1.5}$$

Опустив в новой системе звездочки, получим теперь уже безразмерную

систему уравнений с дополнительными условиями

$$
\begin{gathered}
c(t)m(x)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)q^i(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}^{ij}q^j(x,t)=\delta^i(t)+\alpha^i(t)x,\\
\int\limits_{-1}^{1}q^i(\xi,t)\,d\xi=P^i(t),\quad \int\limits_{-1}^{1}q^i(\xi,t)\xi\,d\xi=M^i(t),\\
x\in[-1,1],\quad t\geq 1,\quad i=1,2,\ldots,n.
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Полученную систему уравнений с дополнительными условиями (1.6) можно представить в виде единственного операторного уравнения с двумя векторными дополнительными условиям

$$
\begin{gathered}
c(t)m(x)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)\mathbf{q}(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{G}\mathbf{q}(x,t)=\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)x,\\
\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\mathbf{P}(t),\quad \int\limits_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi=\mathbf{M}(t),\quad x\in[-1,1],\quad t\geq 1,
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

где введены следующие векторы, матрицы и операторы

$$
\begin{gathered}
\mathbf{q}(x,t)=q^i(x,t)\mathbf{i}^i,\quad \mathbf{P}(t)=P^i(t)\mathbf{i}^i,\quad \mathbf{M}(t)=M^i(t)\mathbf{i}^i,\\
\boldsymbol{\delta}(t)=\delta^i(t)\mathbf{i}^i,\quad \boldsymbol{\alpha}(t)=\alpha^i(t)\mathbf{i}^i,\quad \mathbf{k}(x,\xi)=k^{ij}(x,\xi)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^j,\\
\mathbf{G}\mathbf{f}(x)=\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{k}(x,\xi)\cdot\mathbf{f}(\xi)\,d\xi.
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

Здесь и далее будет считаться, что в правой части формулы производится суммирование от 1 до n по верхним дважды повторяющимся индексам в случае, когда левая часть формулы не зависит от этих индексов.

3. Преобразование уравнений и базис специального вида.

Независимо от того, решение для какой из 15 задач будет строиться, операторное уравнение и систему дополнительных условий (1.7) необходимо привести к виду

$$
c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)\mathbf{Q}(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{F}\mathbf{Q}(x,t)=\frac{\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)x}{\sqrt{m(x)}},
\tag{1.9}
$$

$$
\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathbf{Q}(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}\,d\xi=\mathbf{P}(t),\quad \int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathbf{Q}(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}\xi\,d\xi=\mathbf{M}(t),\quad x\in[-1,1],\quad t\geq 1,
\tag{1.10}
$$

где введены следующие обозначения

$$\mathbf{Q}(x,t)=\sqrt{m(x)}\mathbf{q}(x,t),\quad \mathbf{K}(x,\xi)=\frac{\mathbf{k}(x,\xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}},$$
$$\mathbf{Ff}(x)=\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{K}(x,\xi)\cdot\mathbf{f}(\xi)\,d\xi. \tag{1.11}$$

Такое представление удобно тем, что функция $m(x)$ отсутствует в явном виде в левой части уравнения. В случае, когда основание изготовлено из упругих материалов и на него действует единственный штамп, операторы $\mathbf{I}-\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{I}-\mathbf{L}_2$ будут отсутствовать и мы получим классическое уравнение Фредгольма второго рода с положительно определенным симметричным оператором типа Гильберта–Шмидта.

Какую бы из 15 постановок задачи мы ни рассматривали, решение операторного уравнения с дополнительными условиями мы будем искать классе вектор-функций непрерывных по времени t в гильбертовом пространстве $L_2([-1,1],V)$ (см., например [11, 14]). Так как в результирующее операторное уравнение и дополнительные условия входит функция $\sqrt{m(x)}$, связанная формой основания штампа и формой покрытия, следует учитывать то, что эта функция может быть быстро изменяющейся. Использование базиса, в структуру которого входит функция $\sqrt{m(x)}$, эффективнее, чем применение какого-либо стандартного базиса (например, классических полиномов Лежандра). Систему ортонормированных базисных вектор-функций, удовлетворяющих описанному условию, можно построить по следующему правилу

$$\mathbf{p}_k^i(x)=\frac{\mathbf{p}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}},\quad \mathbf{p}_k^{i*}(x)=p_k^*(x)\mathbf{i}^i,\quad d_{-1}=1,\quad J_k=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\xi^k\,d\xi}{m(\xi)},$$
$$d_k=\begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ J_k & \cdots & J_{2k}\end{vmatrix},\quad p_k^*(x)=\frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}}\begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J_{k-1} & J_k & \cdots & J_{2k-1}\\ 1 & x & \cdots & x^k\end{vmatrix}, \tag{1.12}$$
$$x\in[-1,1],\quad k=0,1,2,\ldots,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Отметим, что если толщина покрытия постоянна, то $m(x)=\mathrm{const}$, а базисные функции $p_k^i(x)$ являются ортонормированными полиномами Лежандра.

Для некоторых вариантов задач будет необходимо использовать чуть другую систему базисных функций, в которой система $\{1/\sqrt{m(x)}, x/\sqrt{m(x)}, x^2/\sqrt{m(x)}, x^3/\sqrt{m(x)}, \ldots\}$ ортонормируется в другой последовательности. В ней в качестве первой функции берется $x/\sqrt{m(x)}$, а лишь затем $\{1/\sqrt{m(x)}, x^2/\sqrt{m(x)}, x^3/\sqrt{m(x)}, \ldots\}$. Такая система может быть построена по правилу

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{p}}_k^i(x) = \frac{\hat{\mathbf{p}}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \hat{\mathbf{p}}_k^{i*}(x) = \hat{p}_k^*(x)\mathbf{i}^i, \quad \hat{p}_m^*(x) = p_m^*(x), \\
&\hat{p}_0^*(x) = \frac{x}{\sqrt{J_2}} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0 J_2}} p_0^*(x) + \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0 J_2}} p_1^*(x), \\
&\hat{p}_1^*(x) = \frac{J_2 - J_1 x}{\sqrt{J_2(J_0 J_2 - J_1^2)}} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0 J_2}} p_0^*(x) - \frac{J_1}{\sqrt{J_0 J_2}} p_1^*(x), \\
&x \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 2, 3, 4, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где функции $p_k^*(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ задаются формулами (1.12).

И, наконец, в тех вариантах задач, в которых на части штампов (при $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$) необходимо использовать систему (1.13), а на другой части (при $i_2 = n_1 + 1, n_2 + 1, \ldots, n$) — систему (1.12), система базисных функций будет строиться по формулам

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{p}}_k^i(x) = \frac{\tilde{\mathbf{p}}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_k^{i_1*}(x) = \hat{p}_k^*(x)\mathbf{i}^{i_1}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_k^{i_2*}(x) = p_k^*(x)\mathbf{i}^{i_2}, \\
&x \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\
&i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где функции $p_k^*(x)$ и $\hat{p}_k^*(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ задаются формулами (1.12) и (1.13).

Решение всех вариантов задач будет строиться на основании развития обобщенного проекционного метода, который, как было показано в разделе 0.4, позволяет получать последовательность независимых интегральных уравнений Вольтера вместо бесконечных систем интегральных уравнений Вольтера, к которым приводит метод разделения переменных Фурье и другие классические методы.

Далее всюду в формулах с безразмерными величинами $x \in [-1, 1]$, $t \geq 1$, если отдельно не выписаны иные диапазоны.

1.2 Решение задач для одной группы штампов

1. Решение задачи с известной правой частью (тип 1).

Пусть известны осадки $\delta_i(t)$ и углы поворота $\alpha_i(t)$ всех штампов, а приложенные силы $P_i(t)$ и моменты $M_i(t)$ неизвестны ($i = 1, 2, \ldots, n$). В этом случае операторное уравнение (1.9) является уравнением с известной правой частью, а вектор-функция $\mathbf{Q}(x,t)$ подлежит определению. Базисом пространства $L_2([-1,1],V)$ являются вектор-функции $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}_{k=0,1,2,\ldots;i=1,2,\ldots,n}$, построенные по правилу (1.12). Решение этого уравнения необходимо строить в виде разложения по собственным функциям вполне непрерывного, симметричного и положительно определенного оператора $\mathbf{F}$ из $L_2([-1,1],V)$ в $L_2([-1,1],V)$, система собственных функций $\{\boldsymbol{\varphi}_k(x)\}_{k=0,1,2,\ldots}$ которого также как и $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}_{k=0,1,2,\ldots;i=1,2,\ldots,n}$ составляет базис пространства $L_2^{(1)}([-1,1],V)$. Спектральная задача для этого оператора имеет вид

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_k(x) = \gamma_k\boldsymbol{\varphi}_k(x), \quad \boldsymbol{\varphi}_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}^i\mathbf{p}_m^i(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Она преобразуется к бесконечной системе уравнений относительно коэффициентов разложения ψ_{km}^i и γ_k

$$\sum_{l=0}^{\infty}K_{ml}^{ij}\psi_{kl}^j = \gamma_k\psi_{km}^i, \quad k, m = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.15}$$

где K_{ml}^{ij} — коэффициенты разложения ядра $\mathbf{K}(x,\xi)$, определяемые из соотношений

$$K_{ml}^{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{p}_m^i(x)\cdot\mathbf{K}(x,\xi)\mathbf{p}_l^j(\xi)\,dx\,d\xi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{p_m^*(x)k^{ij}(x,\xi)p_l^*(\xi)}{m(x)m(\xi)}\,dx\,d\xi, \tag{1.16}$$

$m, l = 0, 1, 2, \ldots, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Представив функцию $\mathbf{Q}(x,t)$ в виде разложения по $\{\boldsymbol{\varphi}_k(x)\}_{k=0,1,2,\ldots}$, то есть

$$\mathbf{Q}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}z_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(x), \quad x \in [-1,1], \quad t \geq 1, \tag{1.17}$$

и подставив это представление в (1.9), получим уравнение для определения функций разложения $z_k(t)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_k(t) + \gamma_k(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)z_k(t)]\boldsymbol{\varphi}_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(x),$$

где $\Delta_k(t)$ — функциональные коэффициенты разложения правой части, определяемые соотношениями

$$\begin{gathered}\Delta_k(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x}{\sqrt{m(x)}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k(x)\, dx = \delta_k^i \delta^i(t) + \alpha_k^i \alpha^i(t), \\ \delta_k^i = k_{\delta 0}\psi_{k0}^i, \quad \alpha_k^i = k_{\alpha 0}\psi_{k0}^i + k_{\alpha 1}\psi_{k1}^i, \\ k_{\delta 0} = \sqrt{J_0}, \quad k_{\delta 1} = 0, \quad k_{\alpha 0} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}, \quad k_{\alpha 1} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}.\end{gathered} \tag{1.18}$$

Величины J_0, J_1, J_2 задаются формулами (1.12). Так как вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}_k(x)$ линейно независимы, то выражения для определения функций $z_k(t)$ представляются в виде

$$[c(t) + \gamma_k] z_k(t) - [c(t)\mathbf{L}_1 + \gamma_k \mathbf{L}_2] z_k(t) = \Delta_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$\begin{gathered} z_k(t) = -(\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{\Delta_k(t)}{c(t) + \gamma_k}, \\ \mathbf{W}_k f(t) = \int\limits_{1}^{t} R_k(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{1.19}$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвенты ядер $[c(t)K^1(t, \tau) + \gamma_k K^2(t, \tau)]/[c(t) + \gamma_k]$. Подставляя эти функции в (1.17) и учитывая замену (1.11), получим выражения для контактных давлений

$$\mathbf{q}(x, t) = \frac{1}{m(x)} \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \boldsymbol{\Phi}_k(x), \tag{1.20}$$

где, пользуясь (1.12), функции $\boldsymbol{\Phi}_k(x)$ можно вычислить при помощи соотношений

$$\boldsymbol{\Phi}_k(x) = \sqrt{m(x)}\boldsymbol{\varphi}_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^{i*}(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.21}$$

Отметим, что в представленном виде решения отдельным сомножителем выделена функция $m(x)$, связанная с толщиной покрытия и формой оснований штампов, что позволяет производить численно-аналитические расчеты для оснований с покрытиями и штампов в случае, когда формы поверхностей описываются быстро изменяющимися функциями.

Получив уравнение для определения контактных давлений под штампами (1.20), используя дополнительные условия (1.7) можно найти приложенные силы и моменты

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathbf{\Phi}_k(\xi)\,d\xi}{m(\xi)} = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\delta_k^i \mathbf{i}^i,\\ \mathbf{M}(t) &= \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathbf{\Phi}_k(\xi)\xi\,d\xi}{m(\xi)} = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\alpha_k^i \mathbf{i}^i,\end{aligned} \tag{1.22}$$

где коэффициенты δ_k^i и α_k^i определяются уравнениями (1.18).

Таким образом, на основании (1.17)–(1.22), решение задачи (1.7) при известных $\boldsymbol{\delta}(t)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t)$ и неизвестных $\mathbf{q}(x,t)$, $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{M}(t)$, имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(x,t) &= \frac{1}{m(x)} \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x),\\ \mathbf{P}(t) &= \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\delta_k^i \mathbf{i}^i,\\ \mathbf{M}(t) &= \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\alpha_k^i \mathbf{i}^i,\end{aligned} \tag{1.23}$$

где

$$z_k(t) = -(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\delta_k^i\delta^i(t)+\alpha_k^i\alpha^i(t)}{c(t)+\gamma_k}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$\delta_k^i = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^i, \quad \alpha_k^i = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^i + \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^i,$$

$$\mathbf{W}_k f(t) = \int\limits_{1}^{t} R_k(t,\tau) f(\tau)\,d\tau, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k,m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) находятся из системы уравнений (1.15) и (1.16), а ядра $R_k(t,\tau)$ ($k = 0,1,2,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau)+\gamma_k K^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$.

2. Решение задачи при известных давлениях и моментах (тип 2).

Пусть теперь известны силы $P^i(t)$, действующие на штампы, и моменты $M^i(t)$ приложения этих сил, а осадки штампов $\delta^i(t)$ и углы их поворота $\alpha^i(t)$ необходимо найти. Следуя обобщенному проекционному методу, описанному в разделе 0.4, пространство $L_2([-1,1],V)$ представим в виде прямой суммы евклидова пространства $L_2^{(0)}([-1,1],V)$, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^i(x),\mathbf{p}_1^i(x)\}_{i=1,2,\dots,n}$, и ортогонального ему гильбертова пространства $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ с базисом $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}_{k=2,3,4,\dots;i=1,2,\dots,n}$, то есть $L_2([-1,1],V) = L_2^{(0)}([-1,1],V) \oplus L_2^{(1)}([-1,1],V)$. Тогда неизвестная вектор-функция $\mathbf{Q}(x,t)$ и правая часть уравнения (1.9) могут быть представлены как алгебраическая сумма вектор-функций, определенных в пространствах $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $L_2^{(1)}([-1,1],V)$:

$$\mathbf{Q}(x,t)=\mathbf{Q}_0(x,t)+\mathbf{Q}_1(x,t),\quad \frac{\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)x}{\sqrt{m(x)}}=\boldsymbol{\Delta}_0(x,t)+\boldsymbol{\Delta}_1(x,t), \tag{1.24}$$

где $\mathbf{Q}_0(x,t),\boldsymbol{\Delta}_0(x,t)\in L_2^{(0)}([-1,1],V)$, $\mathbf{Q}_1(x,t),\boldsymbol{\Delta}_1(x,t)\in L_2^{(1)}([-1,1],V)$ и справедливы соотношения

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}_0(x,t)=z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x)+z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x),\\ &\boldsymbol{\Delta}_0(x,t)=[k_{\delta0}\delta^i(t)+k_{\alpha0}\alpha^i(t)]\mathbf{p}_0^i(x)+k_{\alpha1}\alpha^i(t)\mathbf{p}_1^i(x).\end{aligned} \tag{1.25}$$

Здесь коэффициенты $k_{\delta0}$, $k_{\alpha0}$ и $k_{\alpha1}$ определяются соотношениями (1.18). Заметим, что в представлении функции $\mathbf{Q}(x,t)$ слагаемое $\mathbf{Q}_0(x,t)$ известно, так как его функции разложения $z_l^i(t)$ ($l=1,2$, $i=1,2,\dots,n$) определяются дополнительными условиями (1.10)

$$\begin{aligned}&z_0^i(t)=k_{P0}P^i(t),\quad z_1^i(t)=k_{P1}P^i(t)+k_{M1}M^i(t),\quad i=1,2,\dots,n,\\ &k_{P0}=\frac{1}{\sqrt{J_0}},\quad k_{P1}=\frac{-J_1}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},\quad k_{M0}=0,\quad k_{M1}=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}},\end{aligned} \tag{1.26}$$

а слагаемое $\mathbf{Q}_1(x,t)$ подлежит определению. В правой части $\boldsymbol{\Delta}_1(x,t)\equiv\mathbf{0}$, а требуется определить $\boldsymbol{\Delta}_0(x,t)$. Отметим, что величины J_0, J_1, J_2 задаются формулами (1.12), а коэффициенты $k_{\delta0}$, $k_{\delta1}$, $k_{\alpha0}$, $k_{\alpha1}$ и k_{P0}, k_{P1}, k_{M0}, k_{M1} связаны между собой соотношением

$$\begin{pmatrix}k_{\delta0}&k_{\alpha0}\\k_{\delta1}&k_{\alpha1}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}k_{P0}&k_{M0}\\k_{P1}&k_{M1}\end{pmatrix}.$$

Для нахождения неизвестной вектор-функции $\mathbf{Q}_1(x,t)$ введем ортогональные проекторы $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ (см., например, [40]), которые отображают гильбертово пространство $L_2([-1,1],V)$ на подпространства

$L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $L_2^{(1)}([-1,1],V)$, соответственно:

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = k^i_{\mathrm{f}0}\mathbf{p}^i_0(x) + k^i_{\mathrm{f}1}\mathbf{p}^i_1(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0,$$

где коэффициенты разложения вектор-функции $\mathbf{f}(x)$ определяются по формуле

$$k^i_{\mathrm{f}l} = \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}^i_l(\xi)\,d\xi, \quad l = 0,1, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Очевидно, что имеют место соотношения

$$\mathbf{P}_l\mathbf{Q}(x,t) = \mathbf{Q}_l(x,t), \quad \mathbf{P}_l\left[\frac{\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)x}{\sqrt{m(x)}}\right] = \boldsymbol{\Delta}_l(x,t), \quad l = 0,1.$$

Подействовав оператором $\mathbf{P}_1$ на (1.9), получим уравнение с известной правой частью

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)\mathbf{Q}_1(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_1(x,t) = -(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x,t), \quad (1.27)$$

решение которого стороится аналогично тому, как это было проделано в параграфе 1 текущего раздела. Решение уравнения (1.27) необходимо строить в виде разложения по собственным функциям получившегося оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$. Можно показать, что он является вполне непрерывным, симметричным и положительно определенным оператором из $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ в $L_2^{(1)}([-1,1],V)$, а его система собственных функций является базисом пространства $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ [40]. Поставив для него спектральная задачу

$$\mathbf{P}_1\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_k(x) = \gamma_k\boldsymbol{\varphi}_k(x), \quad \boldsymbol{\varphi}_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty}\psi^i_{km}\mathbf{p}^i_m(x), \quad k = 2,3,4,\ldots,$$

получим бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов разложения ψ^i_{km} и γ_k

$$\sum_{l=2}^{\infty} K^{ij}_{ml}\psi^j_{kl} = \gamma_k\psi^i_{km}, \quad k,m = 2,3,4,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (1.28)$$

где коэффициенты разложения ядра $\mathbf{K}(x,\xi)$ определяются из соотношений (1.16). Представив функцию $\mathbf{Q}_1(x,t)$ в виде разложения по $\{\boldsymbol{\varphi}_k(x)\}_{k=2,3,4,\ldots}$, то есть

$$\mathbf{Q}_1(x,t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(x), \qquad (1.29)$$

и подставив это представление в (1.27), получим уравнение для определения функций $z_k(t)$

$$\sum_{k=2}^{\infty}[c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_k(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\gamma_k z_k(t)]\boldsymbol{\varphi}_k(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\Delta_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(x),$$

где $\Delta_k(t)$ — функциональные коэффициенты разложения вектор-функции $-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x,t)$, стоящей в правой части уравнения (1.27), и определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}\Delta_k(t)=-\int_{-1}^{1}(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x,t)\cdot\boldsymbol{\varphi}_k(x)\,dx=\\ =-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K^i_{0k}z^i_0(t)+K^i_{1k}z^i_1(t)].\end{aligned}\tag{1.30}$$

Легко показать, что коэффициенты K^i_{lk} в этом выражении вычисляются по формуле

$$K^i_{lk}=\sum_{m=2}^{\infty}K^{ij}_{lm}\psi^j_{km},\quad i=1,2,\ldots,n,\quad l=0,1,\quad k=2,3,4,\ldots\tag{1.31}$$

Тогда

$$[c(t)+\gamma_k]z_k(t)-[c(t)\mathbf{L}_1+\gamma_k\mathbf{L}_2]z_k(t)=\Delta_k(t),\quad k=2,3,4,\ldots,$$

откуда

$$\begin{aligned}z_k(t)&=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\Delta_k(t)}{c(t)+\gamma_k},\\ \mathbf{W}_kf(t)&=\int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad k=2,3,4,\ldots,\end{aligned}\tag{1.32}$$

где $R_k(t,\tau)$ — резольвенты ядер $[c(t)K^1(t,\tau)+\gamma_kK^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$. Подставляя функции $z_k(t)$ в (1.29) и учитывая представления (1.24), (1.25), выражения (1.26), замены (1.11) и формул для базисных функций (1.12), получим

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z^i_0(t)\mathbf{p}^{i*}_0(x)+z^i_1(t)\mathbf{p}^{i*}_1(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\boldsymbol{\Phi}_k(x)\right],\tag{1.33}$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}_k(x)=\sqrt{m(x)}\boldsymbol{\varphi}_k(x)=\sum_{m=2}^{\infty}\psi^i_{km}\mathbf{p}^{i*}_m(x),\quad k=2,3,4,\ldots\tag{1.34}$$

Как и в предыдущем разделе в выражении для контактных давлений отдельным сомножителем выделена функция $m(x)$, связанная с толщиной покрытия и формой оснований штампов.

Определив функцию распределения давлений $\mathbf{Q}(x,t)$ можно найти и осадки и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором $\mathbf{P}_0$ на уравнение (1.9):

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x)+z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x)]+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{P}_0\mathbf{F}\left[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x)+z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(x)\right]=$$
$$=[k_{\delta 0}\delta^i(t)+k_{\alpha 0}\alpha^i(t)]\mathbf{p}_0^i(x)+k_{\alpha 1}\alpha^i(t)\mathbf{p}_1^i(x).$$

Можно показать, что

$$\mathbf{P}_0\mathbf{F}\mathbf{p}_l^i(x)=K_{0l}^{ji}\mathbf{p}_0^j(x)+K_{1l}^{ji}\mathbf{p}_1^j(x),\quad \mathbf{P}_0\mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_k(x)=K_{0k}^i\mathbf{p}_0^i(x)+K_{1k}^i\mathbf{p}_1^i(x),$$

где коэффициенты определяются из формул (1.16) и (1.31). Тогда мы получим систему уравнений относительно $\delta^i(t)$ и $\alpha^i(t)$

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^i(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{ij}z_0^j(t)+K_{01}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^iz_k(t)\right]=$$
$$=k_{\delta 0}^i\delta^i(t)+k_{\alpha 0}^i\alpha^i(t),$$
$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^i(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{10}^{ij}z_0^j(t)+K_{11}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^iz_k(t)\right]=k_{\alpha 1}^i\alpha^i(t),$$

решая которую с учетом выражений для коэффициентов $k_{\delta 0}^i$, $k_{\alpha 0}^i$ и $k_{\alpha 1}^i$ получим следующие выражения для осадок и углов поворота штампов

$$\alpha^i(t)=k_{M1}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^i(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{10}^{ij}z_0^j(t)+K_{11}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^iz_k(t)\right]\Bigg\},$$
$$\delta^i(t)=k_{P0}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^i(t)+ \tag{1.35}$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{ij}z_0^j(t)+K_{01}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^iz_k(t)\right]\Bigg\}+k_{P1}\frac{\alpha^i(t)}{k_{M1}},$$
$$i=1,2,\ldots,n,$$

где коэффициенты k_{P0}, k_{P1} и k_{M1} определяются формулами (1.26).

Таким образом, решение операторного уравнения с дополнительными условиями (1.7) при известных $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{M}(t)$ и неизвестных $\mathbf{q}(x,t)$, $\boldsymbol{\delta}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ строится на основании (1.26), (1.30)–(1.35) и имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^{i*}(x)+z_1^i(t)\mathbf{p}_1^{i*}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Bigg\{&c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^i(t)+\\&+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{10}^{ij}z_0^j(t)+K_{11}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^{i}z_k(t)\right]\Bigg\}\mathbf{i}^i,\end{aligned}\tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{&c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^i(t)+\\&+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{ij}z_0^j(t)+K_{01}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i}z_k(t)\right]\Bigg\}\mathbf{i}^i-\frac{J_1}{J_0}\boldsymbol{\alpha}(t),\end{aligned}$$

где

$$z_0^i(t)=\frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^i(t)=\frac{J_0M^i(t)-J_1P^i(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},\quad \mathbf{\Phi}_k(x)=\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^i\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t)=-(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^iz_0^i(t)+K_{1k}^iz_1^i(t)]}{c(t)+\gamma_k},$$

$$K_{lk}^i=\sum_{m=2}^{\infty}K_{lm}^{ij}\psi_{km}^j,\quad \mathbf{W}_kf(t)=\int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad k=2,3,4,\ldots,\quad l=0,1,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k,m=2,3,4,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) находятся из системы уравнений (1.28), коэффициенты K_{ml}^{ij} ($m,l=0,1,2,\ldots$, $i,j=1,2,\ldots,n$) задаются выражением (1.16), а ядра $R_k(t,\tau)$ ($k=2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau)+\gamma_kK^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$.

3. Задача с известными силами и углами поворота (тип 3). Пусть теперь известны силы $\mathbf{P}(t)$, действующие на все штампы, и углы поворота штампов $\boldsymbol{\alpha}(t)$, а требуется определить осадки штампов $\boldsymbol{\delta}(t)$ и моменты приложения сил $\mathbf{M}(t)$.

Поскольку ход решения задачи в такой постановке и всех последующих аналогичен ходу, представленному в параграфе 2 текущего разде-

ла, то все промежуточные выкладки будем опускать, обращая внимание лишь на то, что меняется и принципиально именно в рассматриваемой постановке. Необходимо сразу отметить, что отличия будет состоять лишь в том, как пространство $L_2([-1,1],V)$ делится на два подпространства $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и как вводятся операторы $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$, отображающие пространство $L_2([-1,1],V)$ на $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $L_2^{(0)}([-1,1],V)$, соответственно.

В рассматриваемой задаче $L_2([-1,1],V) = L_2^{(0)}([-1,1],V) \oplus L_2^{(1)}([-1,1],V)$, причем $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство, базисом которого являются$\{\mathbf{p}_0^i(x)\}_{i=1,2,\dots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}_{k=1,2,3,\dots;i=1,2,\dots,n}$. Операторы $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ ортогонального проектирования в этом случае имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^i(\xi)\,d\xi\;\mathbf{p}_0^i(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Опуская выкладки, выпишем лишь окончательное решение такой задачи

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(x,t) &= \frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^{i*}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],\\
\boldsymbol{\delta}(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^i(t) + \\
&\qquad + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{ij}z_0^j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t)\right]\Bigg\}\mathbf{i}^i - \boldsymbol{\alpha}(t)\frac{J_1}{J_0},\\
\mathbf{M}(t) &= \int\limits_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi = \left[z_0^i(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\alpha_{1k}^i\right]\mathbf{i}^i,
\end{aligned} \tag{1.37}$$

где

$$\begin{aligned}
z_0^i(t) &= \frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^i\mathbf{p}_m^{i*}(x),\\
z_k(t) &= (\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\alpha_{1k}^i\alpha^i(t) - (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)K_{0k}^i z_0^i(t)}{c(t)+\gamma_k},\\
\alpha_{1k}^i &= \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^i, \quad K_{0k}^i = \sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{ij}\psi_{km}^j,\\
\mathbf{W}_k f(t) &= \int\limits_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad i=1,2,\dots,n, \quad k=1,2,3,\dots,
\end{aligned}$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ находятся из системы $\sum\limits_{l=1}^{\infty} K_{ml}^{ij}\psi_{kl}^j = \gamma_k\psi_{km}^i$, коэффициенты K_{ml}^{ij} $(m, l = 1, 2, 3, \ldots,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражением (1.16), а ядра $R_k(t,\tau)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau) + \gamma_k K^2(t,\tau)]/[c(t) + \gamma_k]$.

4. Задача с известными моментами и осадками штампов (тип 4).

Пусть известны моменты приложения сил $\mathbf{M}(t)$ и осадки штампов $\boldsymbol{\delta}(t)$. В этом случае необходимо найти углы поворота штампов $\boldsymbol{\alpha}(t)$ и приложенные к штампам силы $\mathbf{P}(t)$.

В такой постановке $L_2([-1,1],V) = L_2^{(0)}([-1,1],V) \oplus L_2^{(1)}([-1,1],V)$, причем $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство, базисом которого являются $\{\hat{\mathbf{p}}_0^i(x)\}_{i=1,2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\hat{\mathbf{p}}_k^i(x)\}_{k=1,2,3,\ldots;i=1,2,\ldots,n}$. Операторы $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ ортогонального проектирования в этом случае имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\hat{\mathbf{p}}_0^i(\xi)\,d\xi\ \hat{\mathbf{p}}_0^i(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы, представляющие решение такой задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(x,t) &= \frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\hat{\mathbf{p}}_0^{i*}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\boldsymbol{\Phi}_k(x)\right],\\
\boldsymbol{\alpha}(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^i(t) + \\
&\quad + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\hat{K}_{00}^{ij}z_0^j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t)\right]\Bigg\}\mathbf{i}^i - \boldsymbol{\delta}(t)\frac{J_1}{J_2},\\
\mathbf{P}(t) &= \int\limits_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \left[z_0^i(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^i\right]\mathbf{i}^i,
\end{aligned} \tag{1.38}$$

где

$$z_0^i(t) = \frac{M^i(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad \boldsymbol{\Phi}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^i\hat{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{\hat{\delta}^i_{1k}\delta^i(t) - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)K^i_{0k}z^i_0(t)}{c(t) + \gamma_k},$$

$$\hat{\delta}^i_{1k} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_2}}\psi^i_{k1}, \quad K^i_{0k} = \sum_{m=1}^{\infty}\hat{K}^{ij}_{0m}\psi^j_{km},$$

$$\mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad k = 1,2,3,\ldots,$$

полиномы $\hat{\mathbf{p}}^{i*}_m(x)$ $(m = 0,1,2,\ldots,\ i = 1,2,\ldots,n)$ определяются соотношениями (1.13), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau) + \gamma_k K^2(t,\tau)]/[c(t) + \gamma_k]$, а коэффициенты ψ^i_{km} и γ_k $(k = 1,2,3,\ldots,\ i = 1,2,\ldots,n)$ являются решением задачи $\sum\limits_{l=0}^{\infty}\hat{K}^{ij}_{ml}\psi^j_{kl} = \gamma_k\psi^i_{km}$, где коэффициенты $\hat{K}^{ij}_{ml}$ $(m,l = 0,1,2,\ldots,\ i,j = 1,2,\ldots,n)$ задаются выражением

$$\hat{K}^{ij}_{ml} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\hat{\mathbf{p}}^i_m(x)\cdot\mathbf{K}(x,\xi)\hat{\mathbf{p}}^j_l(\xi)\,dx\,d\xi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\hat{p}^*_m(x)k^{ij}(x,\xi)\hat{p}^*_l(\xi)}{m(x)m(\xi)}\,dx\,d\xi,$$

$$m,l = 0,1,2,\ldots, \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Отметим, что коэффициенты $\hat{K}^{ij}_{ml}$, вычисляемые по вышенаписанной формуле, и коэффициенты K^{ij}_{ml}, заданные формулой (1.16), связаны соотношением

$$\begin{aligned}
\hat{K}^{ij}_{00} &= \frac{J_1^2}{J_0J_2}K^{ij}_{00} + \frac{J_1\sqrt{J_0J_2 - J_1^2}}{J_0J_2}(K^{ij}_{01} + K^{ij}_{10}) + \frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}K^{ij}_{11},\\
\hat{K}^{ij}_{01} &= \frac{J_1\sqrt{J_0J_2 - J_1^2}}{J_0J_2}(K^{ij}_{00} - K^{ij}_{11}) - \frac{J_1^2}{J_0J_2}K^{ij}_{01} + \frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}K^{ij}_{10},\\
\hat{K}^{ij}_{10} &= \frac{J_1\sqrt{J_0J_2 - J_1^2}}{J_0J_2}(K^{ij}_{00} - K^{ij}_{11}) + \frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}K^{ij}_{01} - \frac{J_1^2}{J_0J_2}K^{ij}_{10},\\
\hat{K}^{ij}_{11} &= \frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}K^{ij}_{00} - \frac{J_1\sqrt{J_0J_2 - J_1^2}}{J_0J_2}(K^{ij}_{01} + K^{ij}_{10}) + \frac{J_1^2}{J_0J_2}K^{ij}_{11},
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\hat{K}^{ij}_{0l} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K^{ij}_{0l} + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}}K^{ij}_{1l}, \quad \hat{K}^{ij}_{1l} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}}K^{ij}_{0l} - \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K^{ij}_{1l},$$

$$\hat{K}^{ij}_{m0} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K^{ij}_{m0} + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}}K^{ij}_{m1}, \quad \hat{K}^{ij}_{m1} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}}K^{ij}_{m0} - \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K^{ij}_{m1},$$

$$\hat{K}^{ij}_{ml} = K^{ij}_{ml}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \quad m,l = 2,3,4,\ldots$$

1.3 Решение задач для двух групп штампов

В данном разделе считается, что на первых n_1 штампах задан один тип условий, а на оставшихся $n - n_1$ — другой. Будет считаться, что в одной из частей формулы производится суммирование от 1 до n_1 по верхним дважды повторяющимся индексам i_1, j_1, либо от $n_1 + 1$ до n по верхним дважды повторяющимся индексам i_2, j_2, в случае, если другая часть формулы не зависит от этих индексов.

1. Решение задачи при условиях первого и второго типов.
Рассмотрим вариант, когда система штампов состоит из двух групп, на одной из которых заданы квазистатические (известны вдавливающие усилия и моменты), а на другой кинематические условия (известны осадки и углы поворота). Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_1, а второй — от $n_1 + 1$ до n.

Пусть на одной части штампов заданы силы $P^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_1}(t)$, на другой части — осадки $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, а требуется найти контактные давления $q^i(r,t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$, вдавливающие усилия $P^{i_2}(t)$ и моменты $M^{i_2}(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$, $i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$).

В этом случае пространство $L_2([-1,1],V) = L_2^{(0)}([-1,1],V) \oplus L_2^{(1)}([-1,1],V)$, где $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^{i_1}(x), \mathbf{p}_1^{i_1}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство, базисом которого являются $\{\mathbf{p}_0^{i_2}(x), \mathbf{p}_1^{i_2}(x), \mathbf{p}_k^{i}(x)\}_{i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n;i=1,2,\ldots,n;k=2,3,4,\ldots}$. Операторы ортогонального проектирования имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^{i_1}(\xi)\,d\xi\;\mathbf{p}_0^{i_1}(x) + \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}_1^{i_1}(\xi)\,d\xi\;\mathbf{p}_1^{i_1}(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы, представляющие решение поставленной задачи имеют вид

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\mathbf{p}_0^{i_1*}(x) + z_1^{i_1}(t)\mathbf{p}_1^{i_1*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^{i_1}(t) + \\ + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{10}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t) + K_{11}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\},$$

$$\delta^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_1}(t)+ \\ +(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t)+K_{01}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_1}(t), \tag{1.40}$$

$$P^{i_2}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_2}(\xi,t)\,d\xi=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\delta_k^{i_2},$$

$$M^{i_2}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_2}(\xi,t)\xi\,d\xi=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\alpha_k^{i_2},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^{i_1}(t)=\frac{J_0M^{i_1}(t)-J_1P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\delta_k^{i_2}\delta^{i_2}(t)+\alpha_k^{i_2}\alpha^{i_2}(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)+K_{1k}^{i_1}z_1^{i_1}(t)]}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k0}^{i_2}\mathbf{p}_0^{i_2*}(x)+\psi_{k1}^{i_2}\mathbf{p}_1^{i_2*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$\delta_k^{i_2}=\sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_2},\quad \alpha_k^{i_2}=\frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_2}+\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K_{lk}^{i_1}=K_{l0}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2}+K_{l1}^{i_1j_2}\psi_{k1}^{j_2}+\sum_{m=2}^{\infty}K_{lm}^{i_1j}\psi_{km}^{j},\quad \mathbf{W}_kf(t)=\int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$
$$k=2,3,4,\ldots,\quad l=0,1,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^{i} и γ_k ($k=2,3,4,\ldots$) находятся из системы уравнений

$$K_{00}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2}+K_{01}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2}+\sum_{l=2}^{\infty}K_{0l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{k0}^{i_2},$$

$$K_{10}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2}+K_{11}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2}+\sum_{l=2}^{\infty}K_{1l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K^{ij_2}_{m_20}\psi^{j_2}_{k0} + K^{ij_2}_{m_21}\psi^{j_2}_{k1} + \sum_{l=2}^{\infty} K^{ij}_{m_2l}\psi^{j}_{kl} = \gamma_k\psi^{i}_{km_2},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n, \quad m_2 = 2, 3, 4, \ldots,$$

коэффициенты K^{ij}_{ml} $(m, l = 0, 1, 2, \ldots,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражением (1.14), а ядра $R_k(t, \tau)$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t, \tau) + \gamma_k K^2(t, \tau)]/[c(t) + \gamma_k]$.

2. Решение задачи при условиях первого и третьего типов.

Рассмотрим вариант, когда система штампов состоит из двух групп, на одной из которых заданы кинематические условия (известны осадки и углы поворота штампов), а на другой известны вдавливающие силы и углы поворота. Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_1, а второй — от $n_1 + 1$ до n.

Пусть на всех штампах известны углы поворота $\alpha^i(t)$, на одной части штампов — осадки $\delta^{i_1}(t)$, на другой части — действующие силы $P^{i_2}(t)$, а требуется найти контактные давления $q^i(r, t)$, моменты $M^i(t)$, силы $P^{i_1}(t)$ и осадки $\delta^{i_2}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ i_1 = 1, 2, \ldots, n_1,\ i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n)$.

Пространство $L_2([-1, 1], V)$ представляется в виде прямой суммы следующих ортогональных подпространств: $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Здесь $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ — евклидово пространство, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^{i_2}(x)\}_{i_2=n+1,n+2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ — гильбертово пространство, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^{i_1}(x), \mathbf{p}_k^{i}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1;i=1,2,\ldots,n;k=1,2,3,\ldots}$. Ортопроекторы принимают вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{p}_0^{i_2}(\xi)\, d\xi\ \mathbf{p}_0^{i_2}(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы для неизвестных величин принимают вид

$$\mathbf{q}(x, t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_2}(t)\mathbf{p}_0^{i_2*}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$
$$\delta^{i_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)z_0^{i_2}(t) + $$
$$+ (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{i_2j_2}z_0^{j_2}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^{i_2}z_k(t)\right]\Bigg\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_2}(t),$$

$$P^{i_1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\delta_k^{i_1}, \tag{1.41}$$

$$M^{i_1}(t) = \int_{-1}^{1} q^{i_1}(\xi,t)\xi\, d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\alpha_k^{i_1},$$

$$M^{i_2}(t) = \int_{-1}^{1} q^{i_2}(\xi,t)\xi\, d\xi = z_0^{i_2}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\alpha_{1k}^{i_2},$$

$$i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_2}(t) = \frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \psi_{k0}^{i_1}\mathbf{p}_0^{i_1*}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^{i}\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t) = (\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\delta_k^{i_1}\delta^{i_1}(t) + \alpha_k^{i_1}\alpha^{i_1}(t) + \alpha_{1k}^{i_2}\alpha^{i_2}(t) - (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)K_{0k}^{i_2}z_0^{i_2}(t)}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\delta_k^{i_1} = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_1}, \quad \alpha_k^{i_1} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_1} + \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_1}, \quad \alpha_{1k}^{i_2} = \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K_{0k}^{i_2} = K_{00}^{i_2j_1}\psi_{k0}^{j_1} + \sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{i_2j}\psi_{km}^{j}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n,$$

$$k = 1,2,3,\ldots,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^{i} и γ_k ($k = 1,2,3,\ldots$) находятся из

$$K_{00}^{i_1j_1}\psi_{k0}^{j_1} + \sum_{l=1}^{\infty}K_{0l}^{i_1j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k0}^{i_1},$$

$$K_{m_20}^{ij_1}\psi_{k0}^{j_1} + \sum_{l=1}^{\infty}K_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad m_2 = 1,2,3,\ldots,$$

коэффициенты K_{ml}^{ij} ($m,l = 0,1,2,\ldots$, $i,j = 1,2,\ldots,n$) задаются выражением (1.14), а ядра $R_k(t,\tau)$ ($k = 1,2,3,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau) + \gamma_kK^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$.

3. Решение задачи при условиях второго и третьего типов. Пусть теперь на одной части штампов заданы квазистатические условия, а на другой — силы и углы поворота. Как обычно пронумеруем первую группу штампов от 1 до n_1, а вторую — от n_1+1 до n.

Итак, на всех штампах известны вдавливающие силы $P^i(t)$, на первой части штампов известны моменты $M^{i_1}(t)$, на второй части штампов — углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, осадки $\delta^i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_2}(t)$ $(i=1,2,\ldots,n,\ i_1=1,2,\ldots,n_1,\ i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n)$.

Пространство $L_2([-1,1],V)$ представляется в виде прямой суммы следующих ортогональных подпространств: $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $L_2^{(1)}([-1,1],V)$. Здесь $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^i(x),\mathbf{p}_1^{i_1}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1;i=1,2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство, базисными функциями которого являются $\{\mathbf{p}_1^{i_2}(x),\mathbf{p}_k^i(x)\}_{i_2=n+1,n+2,\ldots,n;i=1,2,\ldots,n;k=2,3,4,\ldots}$. Ортопроекторы принимают вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x)=\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^i(\xi)\,d\xi\ \mathbf{p}_0^i(x)+\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}_1^{i_1}(\xi)\,d\xi\ \mathbf{p}_1^{i_1}(x),\quad \mathbf{P}_1=\mathbf{I}-\mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы для неизвестных величин принимают вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^{i*}(x)+z_1^{i_1}(t)\mathbf{p}_1^{i_1*}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\boldsymbol{\delta}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^i(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{ij}z_0^j(t)+K_{01}^{ij_1}z_0^{j_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i}z_k(t)\right]\Bigg\}\boldsymbol{i}^i-\boldsymbol{\alpha}(t)\frac{J_1}{J_0},$$

$$\alpha^{i_1}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^{i_1}(t)+ \tag{1.42}$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{10}^{i_1j}z_0^j(t)+K_{11}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\},$$

$$M^{i_2}(t)=\int\limits_{-1}^{1}q^{i_2}(\xi,t)\xi\,d\xi=z_0^{i_2}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_0}}+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\alpha_{1k}^{i_2},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^i(t)=\frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^{i_1}(t)=\frac{J_0M^{i_1}(t)-J_1P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\alpha_{1k}^{i_2}\alpha^{i_2}(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^iz_0^i(t)+K_{1k}^{i_1}z_1^{i_1}(t)]}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k1}^{i_2}\mathbf{p}_1^{i_2*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^i\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^i=K_{01}^{ij_2}\psi_{k1}^{j_2}+\sum_{m=2}^{\infty}K_{0m}^{ij}\psi_{km}^j,\quad K_{1k}^{i_1}=K_{11}^{i_1j_2}\psi_{k1}^{j_2}+\sum_{m=2}^{\infty}K_{1m}^{i_1j}\psi_{km}^j,$$

$$\alpha_{1k}^{i_2}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},\quad \mathbf{W}_kf(t)=\int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

$$k=2,3,4,\ldots,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k=2,3,4,\ldots$) находятся из

$$K_{11}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2}+\sum_{l=2}^{\infty}K_{1l}^{i_2j}\psi_{kl}^j=\gamma_k\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K_{m_21}^{ij_2}\psi_{k1}^{j_2}+\sum_{l=2}^{\infty}K_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^j=\gamma_k\psi_{km_2}^i,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,\quad m_2=2,3,4,\ldots,$$

коэффициенты K_{ml}^{ij} ($m,l=0,1,2,\ldots$, $i,j=1,2,\ldots,n$) задаются выражением (1.14), а ядра $R_k(t,\tau)$ ($k=2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau)+\gamma_kK^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$.

4. Решение задачи при условиях первого и четвертого типов.

Пусть теперь на одной части штампов заданы моменты и осадки штампов, а на другой — осадки и углы поворота штампов. Первую группу штампов от 1 до n_1, а вторую — от n_1+1 до n.

Тогда на всех штампах известны осадки $\delta^i(t)$, на первой части штампов известны моменты $M^{i_1}(t)$, на второй части штампов — углы поворота

$\alpha^{i_2}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, силы $P^i(t)$, углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_2}(t)$ ($i = 1,2,\ldots,n$, $i_1 = 1,2,\ldots,n_1$, $i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n$).

В данной задаче следует использовать систему базисных функций, определяемых соотношениями (1.14).

Пространство $L_2([-1,1],V)$ представляется в виде прямой суммы следующих ортогональных подпространств: $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $L_2^{(1)}([-1,1],V)$. Здесь $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство, базисными функциями которого являются $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство, базисными функциями которого являются $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2}(x), \tilde{\mathbf{p}}_k^{i}(x)\}_{i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n;i=1,2,\ldots,n;k=1,2,3,\ldots}$. Ортопроекторы принимают вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(\xi)\,d\xi\;\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I}-\mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы для неизвестных величин принимают вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],\\
&\alpha^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_1}(t)+\\
&\qquad +(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\} - \frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),\\
&M^{i_2}(t) = \int\limits_{-1}^{1} q^{i_2}(\xi,t)\xi\,d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\hat{\alpha}_k^{i_2},\\
&P^{i_2}(t) = \int\limits_{-1}^{1} q^{i_2}(\xi,t)\,d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\hat{\delta}_k^{i_2},\\
&P^{i_1}(t) = \int\limits_{-1}^{1} q^{i_1}(\xi,t)\,d\xi = z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1},\\
&i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

где

$$z_0^{i_1}(t) = \frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \psi_{k0}^{i_2}\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t) = (\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\hat\delta_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t) + \hat\delta_k^{i_2}\delta^{i_2}(t) + \hat\alpha_k^{i_2}\alpha^{i_2}(t) - (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\hat\delta_{1k}^{i_1} = \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1}, \quad \hat\delta_k^{i_2} = \frac{J_1}{\sqrt{J_2}}\psi_{k0}^{i_2} + \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_2}, \quad \hat\alpha_k^{i_2} = \sqrt{J_2}\psi_{k0}^{i_2},$$

$$K_{0k}^{i_1} = \tilde K_{00}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2} + \sum_{m=1}^{\infty}\tilde K_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j}, \quad \mathbf{W}_kf(t) = \int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n,$$

$$k = 1,2,3,\ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k = 1,2,3,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau) + \gamma_kK^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k = 1,2,3,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) являются решением задачи

$$\tilde K_{00}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2} + \sum_{l=1}^{\infty}\tilde K_{0l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k0}^{i_2},$$

$$\tilde K_{m_20}^{ij_2}\psi_{k0}^{j_2} + \sum_{l=1}^{\infty}\tilde K_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n, \quad m_2 = 1,2,3,\ldots,$$

где коэффициенты $\tilde K_{ml}^{ij}$ ($m,l = 0,1,2,\ldots$, $i,j = 1,2,\ldots,n$) задаются выражениями

$$\begin{aligned}
&\tilde K_{ml}^{i_1j_1} = \hat K_{ml}^{i_1j_1},\\
&\tilde K_{0l}^{i_1j_2} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K_{0l}^{i_1j_2} + \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0J_2}}K_{1l}^{i_1j_2},\\
&\tilde K_{1l}^{i_1j_2} = \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0J_2}}K_{0l}^{i_1j_2} - \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K_{1l}^{i_1j_2}, \quad \tilde K_{m_2l}^{i_1j_2} = K_{m_2l}^{i_1j_2},\\
&\tilde K_{m0}^{i_2j_1} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K_{m0}^{i_2j_1} + \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0J_2}}K_{m1}^{i_2j_1},\\
&\tilde K_{m1}^{i_2j_1} = \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0J_2}}K_{m0}^{i_2j_1} - \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K_{m1}^{i_2j_1}, \quad \tilde K_{ml_2}^{i_2j_1} = K_{ml_2}^{i_2j_1},
\end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\tilde{K}_{ml}^{i_2j_2} = K_{ml}^{i_2j_2},$$
$$i,j = 1,2,\ldots,n, \quad i_1,j_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2,j_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n,$$
$$m,l = 0,1,2,\ldots, \quad m_2,l_2 = 2,3,4,\ldots,$$

в которых коэффициенты K_{ml}^{ij} и $\hat{K}_{ml}^{ij}$ вычисляются по формулам (1.16) и (1.39), соответственно.

5. Решение задачи при условиях второго и четвертого типов.

Пусть теперь на одной части штампов заданы моменты и осадки штампов, а на другой — вдавливающие силы и моменты. Первую группу штампов от 1 до n_1, а вторую — от n_1+1 до n.

Тогда на всех штампах известны моменты $M^i(t)$, на первой части штампов известны осадки $\delta^{i_1}(t)$, на второй части штампов — вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$, углы поворота $\alpha^i(t)$ и силы $P^{i_1}(t)$ ($i = 1,2,\ldots,n$, $i_1 = 1,2,\ldots,n_1$, $i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n$).

Как и в предыдущей задаче, здесь следует использовать систему базисных функций, определяемых соотношениями (1.14).

Пространство $L_2([-1,1],V)$ представляется в виде прямой суммы следующих ортогональных подпространств: $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ и $L_2^{(1)}([-1,1],V)$. Здесь $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^i(x), \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(x)\}_{i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n;i=1,2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство с базисными функциями $\{\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1}(x), \tilde{\mathbf{p}}_k^i(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n;i=1,2,\ldots,n;k=2,3,4,\ldots}$. Ортопроекторы принимают вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^i(\xi)\,d\xi\;\tilde{\mathbf{p}}_0^i(x) + \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(\xi)\,d\xi\;\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы для неизвестных величин принимают вид

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i*}(x) + z_1^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_1}(t) + \\ + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_1j}z_0^j(t) + \tilde{K}_{01}^{i_1j_2}z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\} - \delta^{i_1}(t)\frac{J_1}{J_2},$$

$$\delta^{i_2}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Biggl\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_2}(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Biggl[\tilde K_{00}^{i_2j}z_0^j(t)+\tilde K_{01}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_2}z_k(t)\Biggr]\Biggr\}-\alpha^{i_2}(t)\frac{J_1}{J_0},\quad(1.45)$$

$$\alpha^{i_2}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Biggl\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^{i_2}(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Biggl[\tilde K_{10}^{i_2j}z_0^j(t)+\tilde K_{11}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^{i_2}z_k(t)\Biggr]\Biggr\},$$

$$P^{i_1}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_1}(\xi,t)\,d\xi=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\hat\delta_{1k}^{i_1},$$

$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad z_0^{i_2}(t)=\frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^{i_2}(t)=\frac{J_0M^{i_2}(t)-J_1P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\hat\delta_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^iz_0^i(t)+K_{1k}^{i_2}z_1^{i_2}(t)]}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k1}^{i_1}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^i\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^i=\tilde K_{01}^{ij_1}\psi_{k1}^{j_1}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde K_{0m}^{ij}\psi_{km}^j,\quad K_{1k}^{i_2}=\tilde K_{11}^{i_2j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde K_{1m}^{i_2j}\psi_{km}^j,$$

$$\hat\delta_{1k}^{i_1}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1},\quad \mathbf{W}_kf(t)=\int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$

$k=2,3,4,\ldots,$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k=2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau)+\gamma_kK^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k=2,3,4,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) являются решением задачи

$$\tilde K_{11}^{i_1j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\sum_{l=2}^{\infty}\tilde K_{1l}^{i_1j}\psi_{kl}^j=\gamma_k\psi_{k1}^{i_1},$$

$$\tilde{K}^{ij_1}_{m_2 1}\psi^{j_1}_{k1} + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{K}^{ij}_{m_2 l}\psi^{j}_{kl} = \gamma_k \psi^{i}_{k m_2},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad m_2 = 2, 3, 4, \ldots,$$

где коэффициенты $\tilde{K}^{ij}_{ml}$ $(m, l = 0, 1, 2, \ldots,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражениями (1.44).

6. Решение задачи при условиях третьего и четвертого типов.

Пусть теперь на одной части штампов заданы моменты и осадки штампов, а на другой — вдавливающие силы и углы поворота. Первую группу штампов от 1 до n_1, а вторую — от $n_1 + 1$ до n.

Тогда на первой части штампов известны осадки $\delta^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_1}(t)$, на второй части штампов — вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x, t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$, углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, силы $P^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_2}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n,$ $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1,\ i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n)$.

Так как здесь присутствуют условия 4 типа, то следует использовать систему базисных функций, определяемых соотношениями (1.14).

Пространство $L_2([-1, 1], V)$ представляется в виде прямой суммы следующих ортогональных подпространств: $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Здесь $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\tilde{\mathbf{p}}^i_0(x)\}_{i=1,2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ — гильбертово пространство с базисными функциями $\{\tilde{\mathbf{p}}^i_k(x)\}_{i=1,2,\ldots,n;k=1,2,3,\ldots}$. Ортопроекторы принимают вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi) \cdot \tilde{\mathbf{p}}^i_0(\xi)\, d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}^i_0(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы для неизвестных величин принимают вид

$$\mathbf{q}(x, t) = \frac{1}{m(x)}\left[z^i_0(t)\tilde{\mathbf{p}}^{i*}_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$
$$\alpha^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)z^{i_1}_0(t) +$$
$$+ (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}^{i_1 j}_{00} z^j_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K^{i_1}_{0k} z_k(t)\right]\Bigg\} - \delta^{i_1}(t)\frac{J_1}{J_2},$$

$$\delta^{i_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Biggl\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_2}(t)+ \\ +(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Biggl[\tilde{K}_{00}^{i_2 j}z_0^j(t)+\sum_{k=1}^{\infty}K_{0k}^{i_2}z_k(t)\Biggr]\Biggr\}-\alpha^{i_2}(t)\frac{J_1}{J_0}, \tag{1.46}$$

$$P^{i_1}(t)=\int\limits_{-1}^{1}q^{i_1}(\xi,t)\,d\xi=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1},$$

$$M^{i_2}(t)=\int\limits_{-1}^{1}q^{i_2}(\xi,t)\xi\,d\xi=z_0^{i_2}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_0}}+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\alpha_{1k}^{i_2},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad z_0^{i_2}(t)=\frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad \mathbf{\Phi}_k(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^i\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)+\alpha_{1k}^{i_2}\alpha^{i_2}(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)K_{0k}^i z_0^i(t)}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1},\quad \alpha_{1k}^{i_2}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K_{0k}^i=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{ij}\psi_{km}^j,\quad \mathbf{W}_k f(t)=\int\limits_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

$$k=1,2,3,\ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k=1,2,3,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau)+\gamma_k K^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k=1,2,3,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) являются решением задачи

$$\sum_{l=1}^{\infty}\tilde{K}_{m_2 l}^{ij}\psi_{kl}^j=\gamma_k\psi_{km_2}^i,\quad i=1,2,\ldots,n,\quad m_2=1,2,3,\ldots,$$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ ($m,l=0,1,2,\ldots$, $i,j=1,2,\ldots,n$) задаются выражениями (1.44).

1.4 Решение задач для трех групп штампов

В данном разделе считается, что на первых n_1 штампах задан один тип условий, а на следующих $n_2 - n_1$ — другой тип условий, а на оставшихся $n - n_2$ — третий. Будет считаться, что в правой части формулы производится суммирование от 1 до n_1 по верхним дважды повторяющимся индексам i_1, j_1, от $n1 + 1$ до n_2 по верхним дважды повторяющимся индексам i_2, j_2, от $n2+1$ до n по верхним дважды повторяющимся индексам i_3, j_3, в случае, когда левая часть формулы не зависит от этих индексов.

1. Решение задачи при условиях первого, второго и третьего типов.

Рассмотрим вариант, когда штампы можно разделить на три группы, на одной из которых заданы квазистатические (известны вдавливающие усилия и моменты), на второй кинематические условия (известны осадки и углы поворота), а на третьей известны силы и углы поворота. Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_1, второй — от n_1+1 до n_2, третьей — от $n_2 + 1$ до n.

Итак, частично известны вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, $\alpha^{i_3}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, моменты $M^{i_2}(t)$, $M^{i_3}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, $\delta^{i_3}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$, $i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2$, $i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n$).

Пространство представляется в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств $L_2([-1,1],V) = L_2^{(0)}([-1,1],V) \oplus L_2^{(1)}([-1,1],V)$, где $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\mathbf{p}_0^{i_1}(x), \mathbf{p}_0^{i_3}(x), \mathbf{p}_1^{i_1}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1;i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\mathbf{p}_0^{i_2}(x), \mathbf{p}_1^{i_2}(x), \mathbf{p}_1^{i_3}(x), \mathbf{p}_k^{i}(x)\}_{i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2;i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n;i=1,2,\ldots,n;k=2,3,4,\ldots}$. Операторы ортогонального проектирования имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^{i_1}(\xi)\,d\xi\;\mathbf{p}_0^{i_1}(x) + \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^{i_3}(\xi)\,d\xi\;\mathbf{p}_0^{i_3}(x) + \\ + \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\mathbf{p}_1^{i_1}(\xi)\,d\xi\;\mathbf{p}_1^{i_1}(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы, представляющие решение поставленной за-

дачи имеют вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\mathbf{p}_0^{i_1*}(x)+z_0^{i_3}(t)\mathbf{p}_0^{i_3*}(x)+z_1^{i_1}(t)\mathbf{p}_1^{i_1*}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^{i_1}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[K_{10}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t)+$$
$$+K_{10}^{i_1j_3}z_0^{j_3}(t)+K_{11}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^{i_1}z_k(t)\Bigg]\Bigg\},$$

$$\delta^{i_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_1}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[K_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t)+$$
$$+K_{00}^{i_1j_3}z_0^{j_3}(t)+K_{01}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\Bigg]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_1}(t), \tag{1.47}$$

$$\delta^{i_3}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_3}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[K_{00}^{i_3j_1}z_0^{j_1}(t)+$$
$$+K_{00}^{i_3j_3}z_0^{j_3}(t)+K_{01}^{i_3j_1}z_1^{j_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_3}z_k(t)\Bigg]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_3}(t),$$

$$P^{i_2}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\delta_k^{i_2},\quad M^{i_2}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\alpha_k^{i_2},\quad M^{i_3}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\alpha_{1k}^{i_3},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_0^{i_3}(t)=\frac{P^{i_3}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^{i_1}(t)=\frac{J_0M^{i_1}(t)-J_1P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\big(\{\delta_k^{i_2}\delta^{i_2}(t)+\alpha_k^{i_2}\alpha^{i_2}(t)+\alpha_{1k}^{i_3}\alpha^{i_3}(t)-$$
$$-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)+K_{0k}^{i_3}z_0^{i_3}(t)+K_{1k}^{i_1}z_1^{i_1}(t)]\}/[c(t)+\gamma_k]\big),$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k0}^{i_2}\mathbf{p}_0^{i_2*}(x)+\psi_{k1}^{i_2}\mathbf{p}_1^{i_2*}(x)+\psi_{k1}^{i_3}\mathbf{p}_1^{i_3*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^{i_1}=K_{00}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2}+K_{01}^{i_1j_2}\psi_{k1}^{j_2}+K_{01}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{m=2}^{\infty}K_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{1k}^{i_1}=K_{10}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2}+K_{11}^{i_1j_2}\psi_{k1}^{j_2}+K_{11}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{m=2}^{\infty}K_{1m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{0k}^{i_3}=K_{00}^{i_3j_2}\psi_{k0}^{j_2}+K_{01}^{i_3j_2}\psi_{k1}^{j_2}+K_{01}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{m=2}^{\infty}K_{0m}^{i_3j}\psi_{km}^{j},$$

$$\delta_k^{i_2} = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_2}, \quad \alpha_k^{i_2} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_2} + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},$$

$$\alpha_{1k}^{i_3} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int\limits_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2,$$

$$i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n, \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, n)$ и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ находятся из

$$K_{00}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{01}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{01}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty} K_{0l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k0}^{i_2},$$

$$K_{10}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{11}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{11}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty} K_{1l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K_{10}^{i_3j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{11}^{i_3j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{11}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty} K_{1l}^{i_3j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_3},$$

$$K_{m_20}^{ij_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{m_21}^{ij_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{m_21}^{ij_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty} K_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2, \quad i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n,$$

$$m_2 = 2, 3, 4, \ldots,$$

коэффициенты K_{ml}^{ij} $(m, l = 0, 1, 2, \ldots, i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражением (1.14), а ядра $R_k(t,\tau)$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau) + \gamma_k K^2(t,\tau)]/[c(t) + \gamma_k]$.

2. Решение задачи при условиях первого, второго и четвертого типов.

Рассмотрим вариант, когда штампы можно разделить на три группы, на одной из которых заданы осадки и моменты, на другой известны вдавливающие усилия и моменты, а на третьей — осадки и углы поворота. Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_1, второй — от $n_1 + 1$ до n_2, третьей — от $n_2 + 1$ до n.

Итак, частично известны вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, $M^{i_2}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_3}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, $P^{i_3}(t)$, моменты

$M^{i_3}(t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$, $\alpha^{i_1}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ i_1 = 1, 2, \ldots, n_1,\ i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2,\ i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n)$.

Так как здесь присутствуют условия 4 типа, то следует использовать систему базисных функций, определяемых соотношениями (1.14).

Пространство представляется в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств $L_2([-1,1],V) = L_2^{(0)}([-1,1],V) \oplus L_2^{(1)}([-1,1],V)$, где $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(x), \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2}(x), \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1;i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3}(x), \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1}(x), \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3}(x), \tilde{\mathbf{p}}_k^{i}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1;i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n;i=1,2,\ldots,n;k=2,3,4,\ldots}$. Операторы ортогонального проектирования имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(x) + \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2}(x) + \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы, представляющие решение поставленной задачи имеют вид

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(x) + z_0^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(x) + z_1^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}}\left\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_1}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t) + \tilde{K}_{00}^{i_1j_2}z_0^{j_2}(t) + \tilde{K}_{01}^{i_1j_2}z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_1}z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),$$

$$\alpha^{i_2}(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}}\left\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^{i_2}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{10}^{i_2j_1}z_0^{j_1}(t) + \tilde{K}_{10}^{i_2j_2}z_0^{j_2}(t) + \tilde{K}_{11}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^{i_2}z_k(t)\right]\right\}, \tag{1.48}$$

$$\delta^{i_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\left\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_2}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_2j_1}z_0^{j_1}(t) + \tilde{K}_{00}^{i_2j_2}z_0^{j_2}(t) + \tilde{K}_{01}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_2}z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_2}(t),$$

$$P^{i_1}(t)=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_2},\quad P^{i_3}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\delta_k^{i_3},\quad M^{i_3}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\alpha_k^{i_3},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad z_0^{i_2}(t)=\frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^{i_2}(t)=\frac{J_0M^{i_2}(t)-J_1P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\big(\{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)+\delta_k^{i_3}\delta^{i_3}(t)+\alpha_k^{i_3}\alpha^{i_3}(t)-$$
$$-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)+K_{0k}^{i_2}z_0^{i_2}(t)+K_{1k}^{i_2}z_1^{i_2}(t)]\}/[c(t)+\gamma_k]\big),$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k0}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3*}(x)+\psi_{k1}^{i_1}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1*}(x)+\psi_{k1}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^{i_1}=\tilde{K}_{00}^{i_1j_3}\psi_{k0}^{j_3}+\tilde{K}_{01}^{i_1j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{01}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{0k}^{i_2}=\tilde{K}_{00}^{i_2j_3}\psi_{k0}^{j_3}+\tilde{K}_{01}^{i_2j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{01}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_2j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{1k}^{i_2}=\tilde{K}_{10}^{i_2j_3}\psi_{k0}^{j_3}+\tilde{K}_{11}^{i_2j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{11}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{1m}^{i_2j}\psi_{km}^{j},$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1},\quad \delta_k^{i_3}=\sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_3},$$

$$\alpha_k^{i_3}=\frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_3}+\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3},\quad \mathbf{W}_kf(t)=\int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,$$
$$i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,\quad k=2,3,4,\ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k=2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau)+\gamma_kK^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k=2,3,4,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) являются решением задачи

$$\tilde{K}_{00}^{i_3j_3}\psi_{k0}^{j_3}+\tilde{K}_{01}^{i_3j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{01}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{0l}^{i_3j}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{k0}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_1j_3}\psi_{k0}^{j_3}+\tilde{K}_{11}^{i_1j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{11}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{1l}^{i_1j}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{k1}^{i_1},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_3 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_3 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_3 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{1l}^{i_3 j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{m_2 0}^{i j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{m_2 1}^{i j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{m_2 1}^{i j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{m_2 l}^{i j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k m_2}^{i},$$

$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2, \quad i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n,$
$m_2 = 2, 3, 4, \ldots,$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ $(m, l = 0, 1, 2, \ldots,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражениями (1.44).

3. Решение задачи при условиях первого, третьего и четвертого типов.

Рассмотрим вариант, когда штампы можно разделить на три группы, на одной из которых заданы осадки и моменты, на другой — кинематический условия (осадки и углы поворотов), а на третьей — вдавливающие силы и углы поворота. Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_1, второй — от $n_1 + 1$ до n_2, третьей — от $n_2 + 1$ до n.

Итак, частично известны вдавливающие силы $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, $\alpha^{i_3}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x, t)$, вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, $P^{i_2}(t)$, моменты $M^{i_2}(t)$, $M^{i_3}(t)$, осадки $\delta^{i_3}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ i_1 = 1, 2, \ldots, n_1,\ i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2,\ i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n)$.

Так как здесь присутствуют условия 4 типа, то следует использовать систему базисных функций, определяемых соотношениями (1.14).

Пространство представляется в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств $L_2([-1, 1], V) = L_2^{(0)}([-1, 1], V) \oplus L_2^{(1)}([-1, 1], V)$, где $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(x), \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1; i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2}(x), \tilde{\mathbf{p}}_k^{i}(x)\}_{i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2; i=1,2,\ldots,n; k=1,2,3,\ldots}$. Операторы ортогонального проектирования имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1}\mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(x) + \int_{-1}^{1}\mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3}(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы, представляющие решение поставленной задачи имеют вид

$$\mathbf{q}(x, t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1 *}(x) + z_0^{i_3}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3 *}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_2}}\Biggl\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_1}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Biggl[\tilde K_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t)+$$
$$+\tilde K_{00}^{i_1j_3}z_0^{j_3}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\Biggr]\Biggr\}-\frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),$$
$$\delta^{i_3}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Biggl\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_3}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Biggl[\tilde K_{00}^{i_3j_1}z_0^{j_1}(t)+$$
$$+\tilde K_{00}^{i_3j_3}z_0^{j_3}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}K_{0k}^{i_3}z_k(t)\Biggr]\Biggr\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_3}(t), \tag{1.49}$$
$$P^{i_1}(t)=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\hat\delta_{1k}^{i_1},\quad P^{i_2}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\delta_k^{i_2},$$
$$M^{i_2}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\alpha_k^{i_2},\quad M^{i_3}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\alpha_{1k}^{i_3},$$
$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad z_0^{i_3}(t)=\frac{P^{i_3}(t)}{\sqrt{J_0}},$$
$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\bigl(\{\hat\delta_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)+\delta_k^{i_2}\delta^{i_2}(t)+\alpha_k^{i_2}\alpha^{i_2}(t)+\alpha_{1k}^{i_3}\alpha^{i_3}(t)-$$
$$-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)+K_{0k}^{i_3}z_0^{i_3}(t)]\}/[c(t)+\gamma_k]\bigr),$$
$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k0}^{i_2}\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$
$$K_{0k}^{i_1}=\tilde K_{00}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2}+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde K_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},\quad K_{1k}^{i_3}=\tilde K_{00}^{i_3j_2}\psi_{k0}^{j_2}+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde K_{0m}^{i_3j}\psi_{km}^{j},$$
$$\mathbf{W}_kf(t)=\int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad \hat\delta_{1k}^{i_1}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1},\quad \delta_k^{i_2}=\sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_2},$$
$$\alpha_k^{i_2}=\frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_2}+\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},\quad \alpha_{1k}^{i_3}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3},$$
$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,$$
$$i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,\quad k=1,2,3,\ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k=1,2,3,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau)+$

$\gamma_k K^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ^i_{km} и γ_k ($k=1,2,3,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) являются решением задачи

$$\tilde K^{i_2j_2}_{00}\psi^{j_2}_{k0}+\sum_{l=1}^{\infty}\tilde K^{i_2j}_{0l}\psi^{j}_{kl}=\gamma_k\psi^{i_2}_{k0},$$

$$\tilde K^{ij_2}_{m_20}\psi^{j_2}_{k0}+\sum_{l=1}^{\infty}\tilde K^{ij}_{m_2l}\psi^{j}_{kl}=\gamma_k\psi^{i}_{km_2},$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$

$$m_2=1,2,3,\ldots,$$

где коэффициенты $\tilde K^{ij}_{ml}$ ($m,l=0,1,2,\ldots$, $i,j=1,2,\ldots,n$) задаются выражениями (1.44).

4. Решение задачи при условиях второго, третьего и четвертого типов.

Рассмотрим вариант, когда штампы можно разделить на три группы, на одной из которых заданы осадки и моменты, на другой известны вдавливающие усилия и моменты, а на третьей — вдавливающие силы и углы поворота. Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_1, второй — от n_1+1 до n_2, третьей — от n_2+1 до n.

Итак, частично известны вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, $M^{i_2}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_3}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, моменты $M^{i_3}(t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$, $\delta^{i_3}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$, $\alpha^{i_2}(t)$ ($i=1,2,\ldots,n$, $i_1=1,2,\ldots,n_1$, $i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2$, $i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n$).

Так как здесь присутствуют условия 4 типа, то следует использовать систему базисных функций, определяемых соотношениями (1.14).

Пространство представляется в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств $L_2([-1,1],V)=L_2^{(0)}([-1,1],V)\oplus L_2^{(1)}([-1,1],V)$, где $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\tilde{\mathbf{p}}^i_0(x),\tilde{\mathbf{p}}^{i_2}_1(x)\}_{i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2;i=1,2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\tilde{\mathbf{p}}^{i_1}_1(x),\tilde{\mathbf{p}}^{i_3}_1(x),\tilde{\mathbf{p}}^{i}_k(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1;i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n;i=1,2,\ldots,n;k=2,3,4,\ldots}$. Операторы ортогонального проектирования имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x)=\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}^i_0(\xi)\,d\xi\;\tilde{\mathbf{p}}^i_0(x)+\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}^{i_2}_1(\xi)\,d\xi\;\tilde{\mathbf{p}}^{i_2}_1(x),\quad \mathbf{P}_1=\mathbf{I}-\mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы, представляющие решение поставленной задачи имеют вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^i(x)+z_1^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_1}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_1j}z_0^j(t)+$$
$$+\tilde{K}_{01}^{i_1j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\Bigg]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),$$

$$\delta^{i_2}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_2}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_2j}z_0^j(t)+$$
$$+\tilde{K}_{01}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_2}z_k(t)\Bigg]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_1}(t),$$

$$\alpha^{i_2}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^{i_2}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{10}^{i_2j}z_0^j(t)+ \tag{1.50}$$
$$+\tilde{K}_{11}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^{i_2}z_k(t)\Bigg]\Bigg\},$$

$$\delta^{i_3}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_3}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_3j}z_0^j(t)+$$
$$+\tilde{K}_{01}^{i_3j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_3}z_k(t)\Bigg]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_3}(t),$$

$$P^{i_1}(t)=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1},\quad M^{i_3}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\alpha_{1k}^{i_3},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad z_0^{i_2}(t)=\frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_0^{i_3}(t)=\frac{P^{i_3}(t)}{\sqrt{J_0}},$$

$$z_1^{i_2}(t)=\frac{J_0M^{i_2}(t)-J_1P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\big(\{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)+\alpha_{1k}^{i_3}\alpha^{i_3}(t)-$$
$$-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^iz_0^i(t)+K_{1k}^{i_2}z_1^{i_2}(t)]\}/[c(t)+\gamma_k]\big),$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k1}^{i_1}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1*}(x)+\psi_{k1}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^i\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^{i} = \tilde{K}_{01}^{ij_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{ij_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{ij}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{1k}^{i_2} = \tilde{K}_{11}^{i_2j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_2j}\psi_{km}^{j},$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1}, \quad \alpha_{1k}^{i_3} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3},$$

$$\mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n_2,$$

$$i_3 = n_2+1, n_2+2,\ldots,n, \quad k = 2,3,4,\ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k = 2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau) + \gamma_k K^2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k = 2,3,4,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) являются решением задачи

$$\tilde{K}_{11}^{i_1j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{1l}^{i_1j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_1},$$

$$\tilde{K}_{11}^{i_3j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{1l}^{i_3j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{m_21}^{ij_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{m_21}^{ij_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n_2, \quad i_3 = n_2+1, n_2+2,\ldots,n,$$

$$m_2 = 2,3,4,\ldots,$$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ ($m,l = 0,1,2,\ldots$, $i,j = 1,2,\ldots,n$) задаются выражениями (1.44).

1.5 Решение задачи для четырех групп штампов

Рассмотрим вариант, когда система штампов состоит из четырех групп, на первой из которых заданы моменты приложения нагрузок и осадки штампов, на второй — квазистатические (известны вдавливающие усилия и моменты), на третьей — кинематические условия (известны осадки и углы поворота), а на на четвертой известны силы и углы поворота. Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_1, второй — от n_1+1 до n_2, третьей — от n_2+1 до n_3, третьей — от n_3+1 до n.

Итак, частично известны вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, $P^{i_4}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, $M^{i_2}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, $\delta^{i_3}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_3}(t)$, $\alpha^{i_4}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_3}(t)$, $M^{i_4}(t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$, $\delta^{i_4}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$, $\alpha^{i_2}(t)$ $(i=1,2,\ldots,n,\ i_1=1,2,\ldots,n_1,\ i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,$ $i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n_3,\ i_4=n_3+1,n_3+2,\ldots,n)$.

Пространство представляется в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств $L_2([-1,1],V) = L_2^{(0)}([-1,1],V) \oplus L_2^{(1)}([-1,1],V)$, где $L_2^{(0)}([-1,1],V)$ — евклидово пространство, базис которого $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(x), \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2}(x), \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_4}(x), \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(x)\}_{i_1=1,2,\ldots,n_1, i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2; i_4=n_3+1,n_3+2,\ldots,n}$, а $L_2^{(1)}([-1,1],V)$ — гильбертово пространство, базисными функциями которого являются $\{\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3}(x), \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1}(x), \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3}(x), \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_4}(x), \tilde{\mathbf{p}}_k^{i}(x)\}_{\substack{i_1=1,2,\ldots,n_1; i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n_3; \\ i_3=n_3+1,n_3+2,\ldots,n; i=1,2,\ldots,n; k=2,3,4,\ldots}}$. Операторы ортогонального проектирования имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1}(x) + \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2}(x) +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_4}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_0^{i_4}(x) + \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(\xi)\,d\xi\ \tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2}(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Окончательные формулы, представляющие решение поставленной задачи имеют вид

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\Bigg[z_0^{i_1}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(x) + z_0^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(x) + z_0^{i_4}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_4*}(x) +$$

$$+ z_1^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\Bigg],$$

$$\alpha^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_1}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_1 j_1} z_0^{j_1}(t) + \tilde{K}_{00}^{i_1 j_2} z_0^{j_2}(t) +$$

$$+\tilde{K}_{00}^{i_1j_4}z_0^{j_4}(t)+\tilde{K}_{01}^{i_1j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\Big]\Big\}-\frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),$$

$$\delta^{i_2}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Big\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_2}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Big[\tilde{K}_{00}^{i_2j_1}z_0^{j_1}(t)+\tilde{K}_{00}^{i_2j_2}z_0^{j_2}(t)+$$

$$+\tilde{K}_{00}^{i_2j_4}z_0^{j_4}(t)+\tilde{K}_{01}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_2}z_k(t)\Big]\Big\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_2}(t),$$

$$\alpha^{i_2}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Big\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_1^{i_2}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Big[\tilde{K}_{10}^{i_2j_1}z_0^{j_1}(t)+ \tag{1.51}$$

$$+\tilde{K}_{10}^{i_2j_2}z_0^{j_2}(t)+\tilde{K}_{10}^{i_2j_4}z_0^{j_4}(t)+\tilde{K}_{11}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^{i_2}z_k(t)\Big]\Big\},$$

$$\delta^{i_4}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Big\{c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)z_0^{i_4}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Big[\tilde{K}_{00}^{i_4j_1}z_0^{j_1}(t)+\tilde{K}_{00}^{i_4j_2}z_0^{j_2}(t)+$$

$$+\tilde{K}_{00}^{i_4j_4}z_0^{j_4}(t)+\tilde{K}_{01}^{i_4j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_4}z_k(t)\Big]\Big\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_4}(t),$$

$$P^{i_1}(t)=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1},\quad P^{i_3}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\delta_k^{i_3},$$

$$M^{i_3}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\alpha_k^{i_3},\quad M^{i_4}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\alpha_{1k}^{i_4},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,$$

$$i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n_3,\quad i_4=n_3+1,n_3+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad z_0^{i_2}(t)=\frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_0^{i_4}(t)=\frac{P^{i_4}(t)}{\sqrt{J_0}},$$

$$z_1^{i_2}(t)=\frac{J_0M^{i_2}(t)-J_1P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\big(\{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)+\delta_k^{i_3}\delta^{i_3}(t)+\alpha_k^{i_3}\alpha^{i_3}(t)+\alpha_{1k}^{i_4}\alpha^{i_4}(t)-g_k-$$

$$-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)+K_{0k}^{i_2}z_0^{i_2}(t)+K_{0k}^{i_4}z_0^{i_4}(t)+K_{1k}^{i_2}z_1^{i_2}(t)]\}/[c(t)+\gamma_k]\big),$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k0}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3*}(x)+\psi_{k1}^{i_1}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1*}(x)+\psi_{k1}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3*}(x)+\psi_{k1}^{i_4}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_4*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^{i_1}=\tilde{K}_{00}^{i_1j_3}\psi_{k0}^{j_3}+\tilde{K}_{01}^{i_1j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{01}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\tilde{K}_{01}^{i_1j_4}\psi_{k1}^{j_4}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{0k}^{i_2} = \tilde{K}_{00}^{i_2 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_2 j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{0k}^{i_4} = \tilde{K}_{00}^{i_4 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_4 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_4 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_4 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_4 j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{1k}^{i_2} = \tilde{K}_{10}^{i_2 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_2 j}\psi_{km}^{j},$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1}, \quad \delta_k^{i_3} = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_3},$$

$$\alpha_k^{i_3} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_3} + \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3}, \quad \alpha_{1k}^{i_4} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_4},$$

$$\mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2,$

$i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n_3, \quad i_4 = n_3 + 1, n_3 + 2, \ldots, n,$

$k = 2, 3, 4, \ldots,$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ являются резольвентами ядер $[c(t)K^1(t,\tau) + \gamma_k K^2(t,\tau)]/[c(t) + \gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k $(k = 2, 3, 4, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ являются решением задачи

$$\tilde{K}_{00}^{i_3 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_3 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_3 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_3 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_3 j}\psi_{km}^{j} = \gamma_k\psi_{k0}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_1 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_1 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_1 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_1 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_1 j}\psi_{km}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_1},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_3 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_3 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_3 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_3 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_3 j}\psi_{km}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_4 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_4 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_4 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_4 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_4 j}\psi_{km}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_4},$$

$i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n_3, \quad i_4 = n_3 + 1, n_3 + 2, \ldots, n,$

$m_2 = 2, 3, 4, \ldots,$

где $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ $(m, l = 0, 1, 2, \ldots,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются формулами (1.44).

1.6 Численные расчеты

Будем рассматривать двухслойное основание, нижний слой которого является упругим, а верхний — вязкоупругим. Для определенности будем считать, что сцеплены как слои, так и нижний слой и недеформируемого основание. В качестве вязкоупругого материала покрытия будем рассматривать такой материал, изменение модуля упругости которого с течением времени несущественно, то есть $E_1(t) \equiv E_1$, мера ползучести этого материала задается выражением

$$C_1(t,\tau) = (C_0 + A_0 e^{-\chi\tau})\big[1 - e^{-\psi(t-\tau)}\big], \tag{1.52}$$

а материалы характеризуется следующими соотношениями параметров

$$c(t) \equiv \frac{E_2}{E_1} = 40, \quad \nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.1,$$
$$C_0 E_1 = 0.5522, \quad A_0 E_1 = 4, \quad \chi = 0.031\,(1/\text{сут}), \quad \psi = 0.06\,(1/\text{сут}).$$

Такие отношения характерны для многих полимеров, композитов и бетонов.

Основание взаимодействует с системой из трех одинаковых штампов. Толщина нижнего слоя в 1.5 раза больше полуширин штампов, а расстояния между соседними штампами одинаковы и составляют четверть ширины каждого штампа. Это означает, что

$$n = 3, \quad \lambda = 1.5, \quad \eta^2 - \eta^1 = \eta^3 - \eta^2 = 2.5.$$

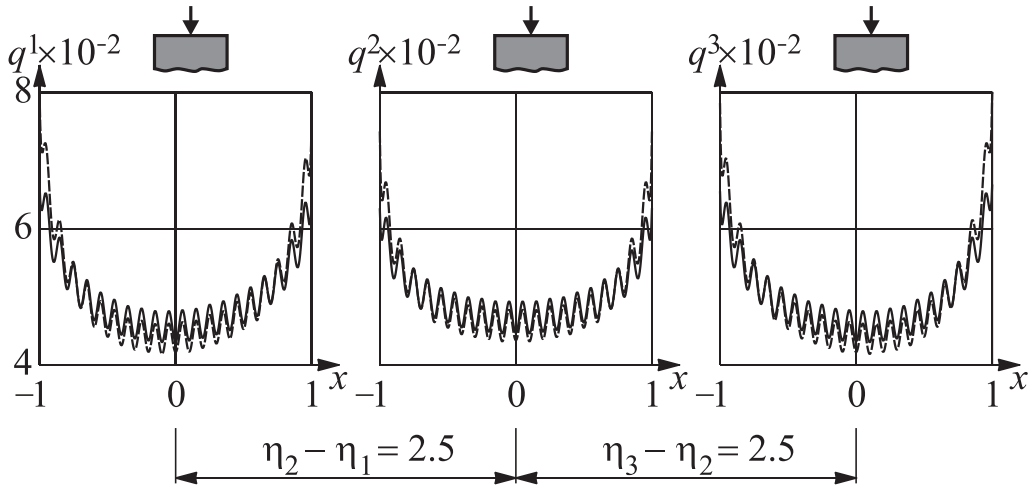
Примем также, что первый ось первого штампа совпадает осью y, то есть $\eta^1 = 0$. Толщина покрытия переменна и значительно меньше ширин штампов. Примем, что отношение толщины покрытия к ширине штампа задается в виде

$$\frac{h(x)}{\bar{a}} = 0.01\left[1 + 0.05\cos\left(\frac{40\pi x}{\bar{a}}\right)\right].$$

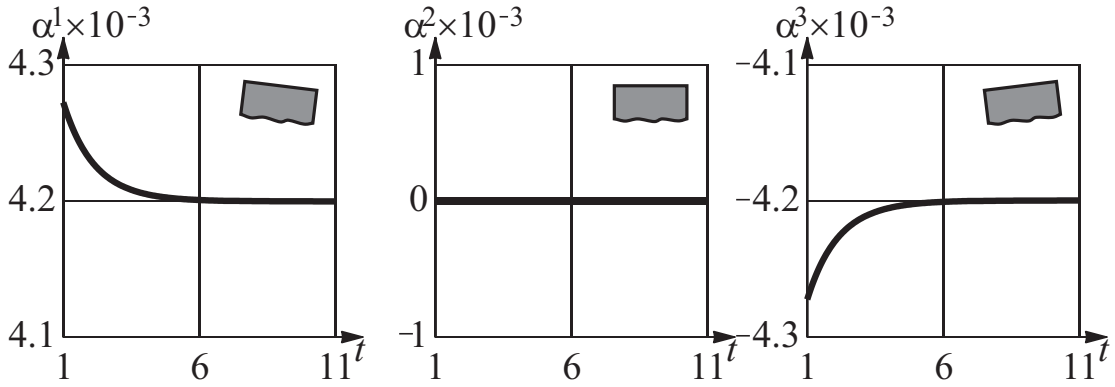
Так как рассматривается конформный контакт, то формы основания штампов согласованы с формой покрытия. Тогда безразмерная функция $m(x)$ принимает вид

$$m(x) = 0.0075[1 + 0.05\cos(20\pi x)]. \tag{1.53}$$

Первая группа расчетов будет включать в себя случаи, когда на всех штампах известны приложенные силы и моменты, а вторая группа расчетов — когда на всех штампах известны осадки и углы поворотов. Во



Фиг. 1.2. Контактные давления

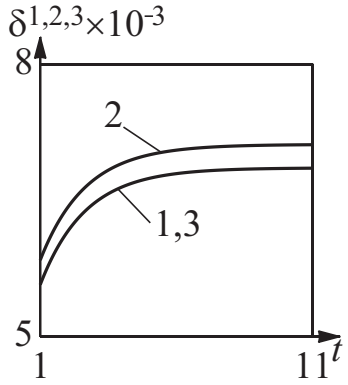


Фиг. 1.3. Углы поворота штампов

всех расчетах считается, что силы начинают прикладываться в момент времени $\tau_0 = 10$ сут.

1. Расчеты при заданных силах и моментах.

Пусть ко всем штампам приложена одинаковая осевая постоянная сила: $P^1(t) = P^2(t) = P^3(t) \equiv 0.1$, $M^1(t) = M^2(t) = M^3(t) \equiv 0$. Графики контактных давлений в различные моменты времени представлены на рисунке 1.2 (здесь и далее графики, изображенные штриховыми линиями соответствуют начальному моменту времени, а графики, изображенные сплошными линиями, соответствуют $t \to \infty$). Следует отметить, что величина приложенной силы не влияет на вид графика распределения контактных давлений. Из графика видно, что профиль покрытия вносит существенный вклад в вид графика контактных давлений, а построенное решение позволило уловить все особенности. Так как задача симметрична, то средний штамп не поворачивается, а крайние штампы наклоняются в сторону среднего на одинаковый угол (рис. 1.3). При



Фиг. 1.4. Осадки штампов

этом осадка среднего штампа больше, чем крайних (рис. 1.4). Несмотря на то, что форма покрытия под штампами описывается абсолютно одной и той же функцией, а приложенная нагрузка одинакова, все штампы ведут себя по-разному. Это объясняется взаимовлиянием штампов друг на друга. Если бы расстояние между штампами значительно превышало их ширины, то все графики были бы абсолютно одинаковы. Задавая другие значения сил и моментов ($P^1(t) = P^2(t) = P^3(t) \equiv 0.1$, $M^1(t) \equiv 0$, $M^2(t) = M^3(t) = 0.01$), можно добиться того, например, чтобы все штампы наклонялись в одну сторону. Контактные давления и графики изменения углов поворота для этого случая изображены на рис. 1.5 и 1.6).

Характер наклона штампов может объясняться не только величиной и местом приложения нагрузки, но и видом функции толщины покрытия. В случае, когда функция $m(x)$ нечетна, например,

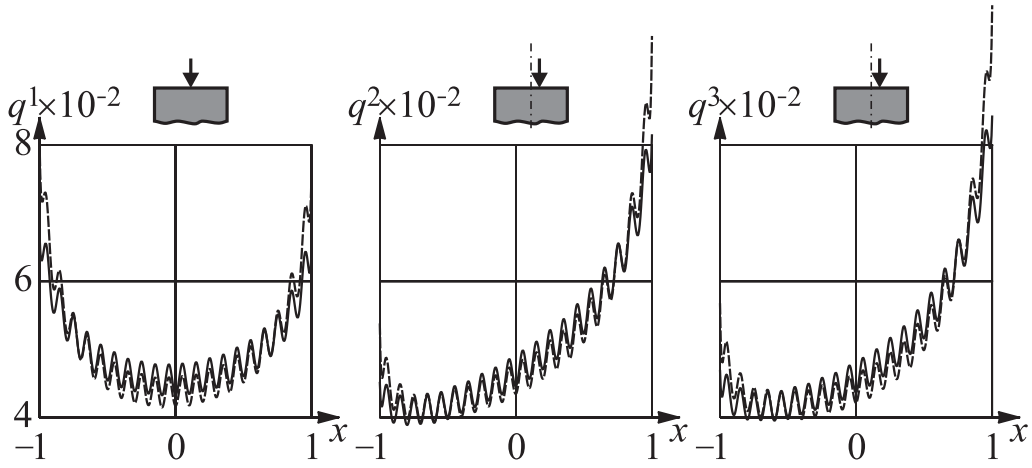
$$m(x) = 0.0075[1 + 0.05\sin(20\pi x)],$$

распределение контактных давлений также несимметрично и, как следствие, наклон среднего штампа объясняется только несимметричностью функции $m(x)$ (рис. 1.7).

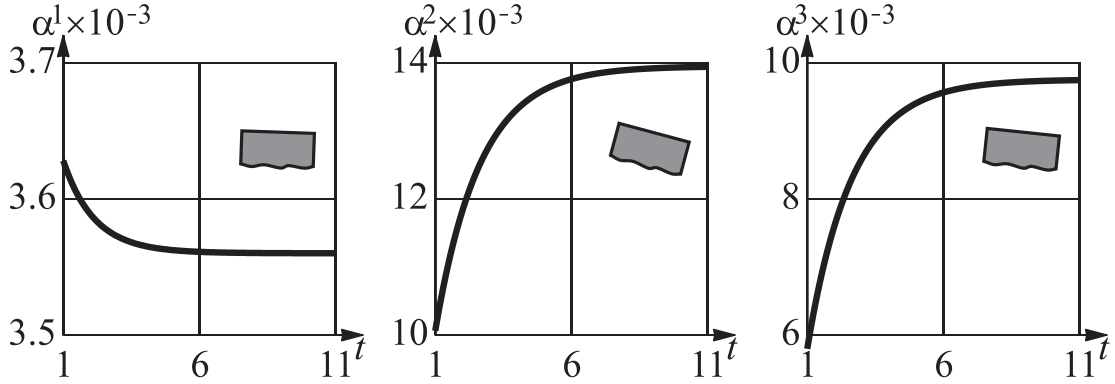
2. Расчеты при заданных силах и углах поворота.

Зачастую бывает необходимо обеспечить заданные углы поворота штампов при известных приложенных силах. Такая задача актуальна, например, при строительстве объектов недвижимости в непосредственной близости друг от друга, когда крены зданий стремятся свести к минимуму; при такой постановке необходимо, чтобы все углы поворота тождественно обращались в ноль.

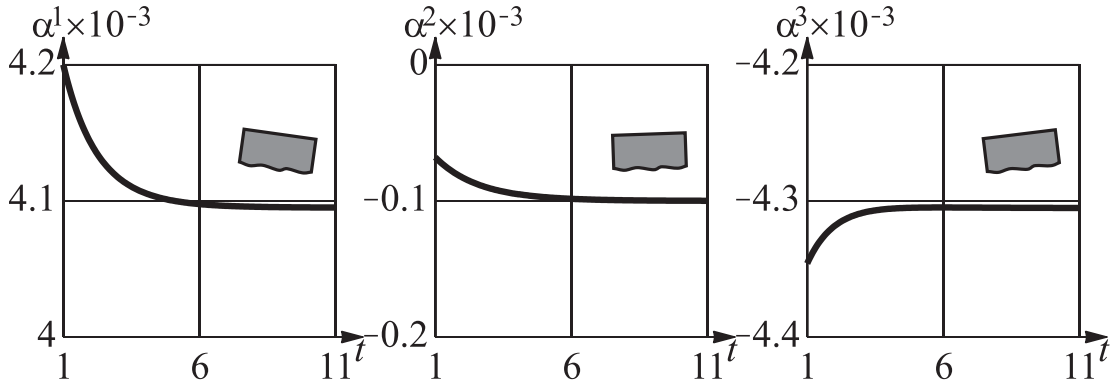
Проведем расчет при условии, что все приложенные силы одинаковы и равны $P^1(t) = P^2(t) = P^3(t) \equiv 0.1$, все углы поворота равны ну-



Фиг. 1.5. Контактные давления

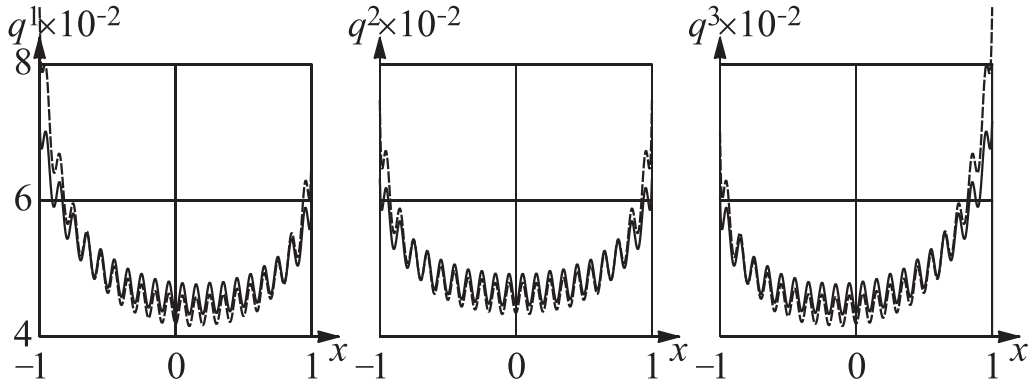


Фиг. 1.6. Углы поворота штампов

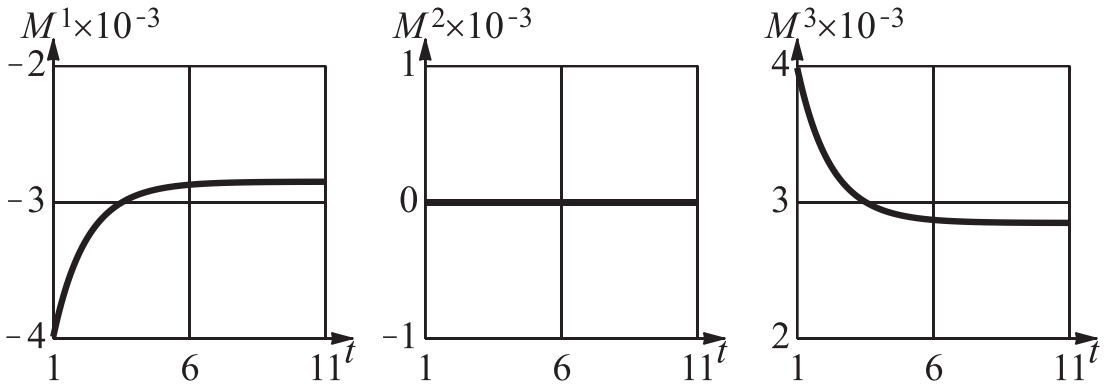


Фиг. 1.7. Углы поворота штампов

лю, а функция $m(x)$ задается уравнением (1.53). Графики контактных давлений в начальный момент времени и при $t \to \infty$ представлены на рис. 1.8. Видно, что характер распределения поменялся по сравнению со случаем, представленным на рис. 1.2. Для обеспечения нулевых углов



Фиг. 1.8. Контактные давления



Фиг. 1.9. Моменты приложения нагрузки

поворота необходимо с течением времени менять моменты приложения нагрузки, графики которых представлены на рис. 1.9.

Приведеные расчеты показывают, что построенное в этом главе решение позволяет учесть одновременно множество факторов: вязкоупругие свойства материалов основания, взаимное влияние штампов, быстроизменяющиеся профили контактирующих поверхностей.

1.7 Основные результаты и выводы

Подведем итоги проведенных в этой главе исследований.

1. Поставлены плоские задачи о конформном (согласованном) контакте между вязкоупругими стареющими основаниями с покрытиями и регулярными системами жестких штампов. Для 15 возможных вариантов постановки контактной задачи на основании обобщенного проекционного метода впервые построены аналитические решения. В выражениях для контактных давлений под штампами в явном виде выделена функция, пропорциональная толщине покрытия, что позволяет производить вычисления в случаях, когда форма покрытия описывается быстро изменяющейся функцией, что характерно для реальных поверхностей, профили которых измерены экспериментально.

2. Получены аналитические выражения для неизвестных характеристик на каждом штампе в каждой из 15 постановок (углы поворота, осадки штампов, приложенная нагрузка, момент приложения нагрузки).

3. Исследовано влияние сил и эксцентриситетов их приложения на характер решения. Установлено, что к наклону штампов может приводить как действия приложенных нагрузкок, так и форма покрытия. При помощи управления какими-либо параметрами можно добиться заданного заранее правила изменения других параметров. Например, при помощи изменения эксцентриситета приложенной нагрузки можно добиться нулевых углов поворота всех штампов.

Глава 2

Задачи множественного контакта для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями

В главе исследуются плоские задачи контакта систем жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с тонким поверхностно неоднородным покрытием, то есть покрытием, свойства которого не меняются по глубине, но зависят от продольной координаты. Поверхностная неоднородность обуславливается особенностями нанесения покрытия на нижний слой, обработкой поверхностных слоев (травление, лазерная обработка, термическая обработка, ионная имплантация и т. д.). Неоднородность может быть связана с использованием материалов с различными свойствами при изготовлении покрытий.

Как и в случае задачи о конформном контакте, для такой задачи также существуют 15 различных постановок. Решения для всех 15 постановок получены и представлены в настоящем разделе. Проведены численные расчеты. Сделаны качественные выводы.

Основные результаты главы отражены в работах [32, 34–36, 43, 44, 46, 97, 99].

2.1 Постановка задачи и общие соотношения

1. Формулировка задачи.

Однородный вязкоупругий стареющий слой толщины H, изготовленный в момент времени τ_2 лежит на подстилающем недеформируемом основании. Между слоем и подстилающим основанием осуществляется либо идеальный контакт, либо гладкий. Слой покрыт тонким упругим покрытием толщины h, жесткость которого не превышает жесткости основного слоя. Между слоем и покрытием также может осуществляться либо идеальный, либо гладкий контакт. Слой обладает поверхностной неоднородностью, то есть его упругие характеристики меняются от точки к точке поверхности, но постоянны по глубине. Рассматривается случай, когда неоднородность описывается функцией, период которой равен Δa.

В момент времени $\tau_0 \geq \tau_2$ на описанный пакет слоев начинает действовать система n жестких штампов шириной $\bar{a}$. Расстояние между осями соседних штампов равна Δa (система штампов регулярна). Формы штампов задаются одинаковыми функциями $g_i(x)$, которые, фактически, описывают зазор (расстояние) между i-м штампом и покрытием в недеформированном состоянии ($g_i(x) \equiv g(x) \geq 0$, $\exists x_{0i} \in [a_i, b_i]$: $g_i(x_{0i}) = 0$; $x \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

Схема контактного взаимодействия представлена на рисунке 2.1.

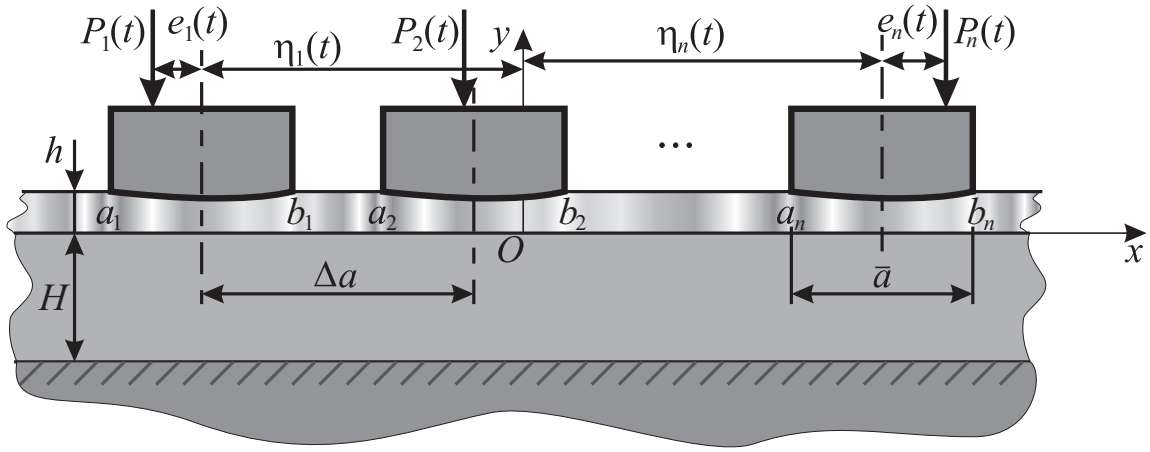
Считается также, что толщина покрытия h много меньше ширины области контакта $\bar{a}$, а области контакта имеют ширины $\bar{a}$ и со временем не изменяются. Рассматривается случай плоской деформации.

Под воздействием нагрузки вышеописанное основание деформируется, а штампы перемещаются и поворачиваются.

Как и в предыдущей задаче, на любом штампе возможен один из четырех типов условий. Поэтому существует 15 различных вариантов постановки задачи. Подход к решению всех 15 вариантов одинаков. Необходимо по известным данным определить недостающие величины, а также контактные давления под штампами.

2. Математическая модель задачи.

Как и ранее, заменив штампы некоторыми распределенными нагрузками $p_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, что в области действия штампов они будут совпадать по модулю с контактными давлениями $q_i(x, t)$, но иметь противоположные направления, то есть $p_i(x, t) = -q_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. На основании известных решений для однородного слоя



Фиг. 2.1. Множественный контакт для тел с неоднородными покрытиями

произвольной толщины и тонкого слоя (см. раздел 0.3), можно получить выражение для перемещений верхней грани слоя с покрытием под действием распределенных нормальных нагрузок $q_i(x,t)$

$$v_i(x,t) = h\frac{q_i(x,t)}{R(x)} + \\ + \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\frac{1}{E_2(t-\tau_2)}\int\limits_{a_j}^{b_j} k_{\rm pl}\left(\frac{x-\xi}{H}\right)q_j(\xi,t)d\xi, \qquad (2.1)$$

$$x\in[a_i,b_i], \quad t\geq\tau_0, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

где $E_2(t-\tau_2)$, ν_2 — модуль упругомгновенной деформации и коэффициент Пуассона нижнего основного слоя, a_i, b_i — левая и правая координаты i-го штампа ($i=1,2,\ldots,n$); $k_{\rm pl}(s)$ — ядро плоской контактной задачи, зависящее от условий на нижней грани слоя и задаваемое формулой (1.2); $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, $\mathbf{L}_2$ — интегральный оператор Вольтерра с ядром $K_2(t-\tau_2,\tau-\tau_2)$, $K_2(t,\tau)=E_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[E_2^{-1}(\tau)+C_2(t,\tau)]$, а $C_2(t,\tau)$ — мера ползучести; $R(x)$ — функция, зависящая от упругих характеристик покрытия и условий соединения слоев, которую иногда называют контактной жесткостью ($R(x)=E_1(x)[1-\nu_1(x)]/\{[1+\nu_1(x)][1-2\nu_1(x)]\}$ при сцеплении и $R(x)=E_1(x)/[1-\nu_1^2(x)]$ при гладком контакте).

В то же время осадка верхней грани слоя будет в точности совпадать с осадками штампов как жесткого целого за вычетом формы штампов (исходных зазоров). Из сформулированного утверждения и формулы (2.1) можно получить следующую систему смешанных интегральных уравне-

ний

$$h\frac{q_i(x,t)}{R(x)}+\frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\frac{1}{E_2(t-\tau_2)}\int\limits_{a_j}^{b_j}k_{\rm pl}\left(\frac{x-\xi}{H}\right)q_j(\xi,t)d\xi= \tag{2.2}$$
$$=\delta_i(t)+\alpha_i(t)(x-\eta_i)-g_i(x),$$
$$x\in[a_i,b_i],\quad t\geq\tau_0,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

где $\delta_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ — осадка и угол поворота i-го штампа, $\eta_i=\frac{1}{2}(a_i+b_i)$ — срединная точка i-го штампа.

Дополнительными условиями для штампов являются условия их равновесия на слое (1.4).

Таким образом математическая модель задачи представляет из себя систему уравнений (2.2) с дополнительными условиями (1.4).

Приведем эту систему с дополнительными условиями к безразмерному виду. Для этого сделаем следующую замену переменных

$$x^*=\frac{2(x-\eta_i)}{\bar a},\quad \xi^*=\frac{2(\xi-\eta_j)}{\bar a},\quad t^*=\frac{t}{\tau_0},\quad \tau_2^*=\frac{\tau_2}{\tau_0},$$
$$\lambda=\frac{2H}{\bar a},\quad \delta^{i*}(t^*)=\frac{2\delta_i(t)}{\bar a},\quad \alpha^{i*}(t^*)=\alpha_i(t),$$
$$g^{i*}(x^*)\equiv g^*(x)=\frac{2g_i(x)}{\bar a}\equiv\frac{2g(x)}{\bar a},\quad c^*(t^*)=\frac{E_2(t-\tau_2)}{E_0},$$
$$m^*(x^*)\equiv m^i(x^*)=\frac{E_0}{2(1-\nu_2^2)R(x)}\frac{2h}{\bar a},\quad q^{i*}(x^*,t^*)=\frac{2(1-\nu_2^2)q_i(x,t)}{E_2(t-\tau_2)},$$
$$P^{i*}(t^*)=\frac{4P_i(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)\bar a},\quad M^{i*}(t^*)=\frac{8e_i(t)P_i(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)\bar a^2}, \tag{2.3}$$
$$\mathbf{F}^{ij*}f(x^*)=\int\limits_{-1}^{1}k^{ij}(x^*,\xi^*)f(\xi^*)d\xi^*,\quad \mathbf{L}_2^*f(t^*)=\int\limits_{1}^{t^*}K^{2*}(t^*,\tau^*)f(\tau^*)d\tau^*,$$
$$k^{ij}(x^*,\xi^*)=\frac{1}{\pi}k_{\rm pl}\left(\frac{x-\xi}{H}\right)=\frac{1}{\pi}k_{\rm pl}\left(\frac{x^*-\xi^*+\eta^{i*}-\eta^{j*}}{\lambda}\right),\quad \eta^{i*}=\frac{2\eta_i}{\bar a},$$
$$K^{2*}(t^*,\tau^*)=K(t-\tau_2,\tau-\tau_2)\tau_0,\quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Опустив в новой системе звездочки, получим теперь уже безразмерную

систему уравнений с дополнительными условиями

$$
\begin{gathered}
c(t)m(x)q^i(x,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}^{ij}q^j(x,t) = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x - g^i(x),\\
\int\limits_{-1}^{1} q^i(\xi,t)\,d\xi = P^i(t), \quad \int\limits_{-1}^{1} q^i(\xi,t)\xi\,d\xi = M^i(t),\\
x\in[-1,1], \quad t\geq 1, \quad i=1,2,\ldots,n.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Полученную систему уравнений с дополнительными условиями (2.4) можно представить в виде единственного операторного уравнения с двумя векторными дополнительными условиям

$$
\begin{gathered}
c(t)m(x)\mathbf{q}(x,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{G}\mathbf{q}(x,t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x),\\
\int\limits_{-1}^{1} \mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi = \mathbf{M}(t), \quad x\in[-1,1], \quad t\geq 1,
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

где введены следующие векторы, матрицы и операторы

$$
\begin{gathered}
\mathbf{q}(x,t) = q^i(x,t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{P}(t) = P^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{M}(t) = M^i(t)\mathbf{i}^i,\\
\boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t)\mathbf{i}^i, \quad \mathbf{g}(x) = g^i(x)\mathbf{i}^i,\\
\mathbf{k}(x,\xi) = k^{ij}(x,\xi)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^j, \quad \mathbf{G}\mathbf{f}(x) = \int\limits_{-1}^{1}\mathbf{k}(x,\xi)\cdot\mathbf{f}(\xi)\,d\xi.
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

3. О преобразовании уравнений, базисе и решении задачи.

Как и в случае задачи о конформном контакте, все решения данной задачи будут строиться идентично. И для получения решения всех вариантов необходимо в первую очередь преобразовать уравнение к необходимому виду.

Сделаем в (2.5) замену переменных по формулам (1.11), мы придем к следующим уравнениям

$$
c(t)\mathbf{Q}(x,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\mathbf{F}\mathbf{Q}(x,t) = \frac{\boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x)}{\sqrt{m(x)}},
\tag{2.7}
$$

$$
\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathbf{Q}(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}\,d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathbf{Q}(\xi,t)}{\sqrt{m(\xi)}}\xi\,d\xi = \mathbf{M}(t), \quad x\in[-1,1], \quad t\geq 1.
\tag{2.8}
$$

Так как математические модели задач о конформном контакте и контакте тел с неоднородными покрытиями схожи и отличаются лишь наличием либо отсутствием в левой стороне основного уравнения оператора вязкоупругости, а в правой — вектора $\mathbf{g}(x)$, то построение решения любой из постановок будет практически полностью повторять тот процесс, который был описан ранее. Поэтому в ограничимся в этом разделе лишь представлением окончательных результатов. Отметим, что как и ранее, мы будем использовать те же самые специальные базисы, для построения которых будем пользоваться соотношениями (1.12)–(1.14).

2.2 Решение задач для одной группы штампов

1. Решение задачи с известной правой частью (тип 1).

Известны осадки $\delta^i(t)$ и углы поворота $\alpha^i(t)$. Требуется определить контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^i(t)$ и моменты $M^i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Решение такой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(x,t) &= \frac{1}{m(x)}\sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x),\\
\mathbf{P}(t) &= \int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\delta_k^i\mathbf{i}^i,\\
\mathbf{M}(t) &= \int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\alpha_k^i\mathbf{i}^i,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$z_k(t) = -(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\delta_k^i\delta^i(t)+\alpha_k^i\alpha^i(t)-g_k}{c(t)+\gamma_k},\quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}^i\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$\delta_k^i = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^i,\quad \alpha_k^i = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^i + \sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^i,$$

$$g_k = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ $(m=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n)$ и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k $(k,m=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n)$ находятся из системы уравнений (1.15) и (1.16), а ядра $R_k(t,\tau)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$.

2. Решение задачи при известных давлениях и моментах (тип 2).

Известны вдавливающие силы $P^i(t)$ и моменты $M^i(t)$. Требуется определить контактные давления $q^i(x,t)$, осадки $\delta^i(t)$ и углы поворота штампов $\alpha^i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^{i*}(x)+z_1^i(t)\mathbf{p}_1^{i*}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Bigg\{g_1^i+c(t)z_1^i(t)+$$

$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{10}^{ij}z_0^j(t)+K_{11}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^iz_k(t)\right]\Bigg\}\mathbf{i}^i, \qquad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\delta}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{g_0^i+c(t)z_0^i(t)+$$

$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{ij}z_0^j(t)+K_{01}^{ij}z_1^j(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^iz_k(t)\right]\Bigg\}\mathbf{i}^i-\frac{J_1}{J_0}\boldsymbol{\alpha}(t),$$

где

$$z_0^i(t)=\frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^i(t)=\frac{J_0M^i(t)-J_1P^i(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},\quad \mathbf{\Phi}_k(x)=\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^i\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t)=-(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^iz_0^i(t)+K_{1k}^iz_1^i(t)]-g_k}{c(t)+\gamma_k},$$

$$g_l^i=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_l^{i*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad g_k=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$K_{lk}^i=\sum_{m=2}^{\infty}K_{lm}^{ij}\psi_{km}^j,\quad \mathbf{W}_kf(t)=\int_1^tR_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad k=2,3,4,\ldots,\quad l=0,1,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k,m=2,3,4,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) находятся из системы уравнений (1.28), коэффициенты K_{ml}^{ij} ($m,l=0,1,2,\ldots$, $i,j=1,2,\ldots,n$) задаются выражением (1.16), а ядра $R_k(t,\tau)$ ($k=2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $\gamma_kK^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$.

3. Задача с известными силами и углами поворота (тип 3). Известны вдавливающие силы $P^i(t)$ и углы поворота штампов $\alpha^i(t)$. Требуется определить контактные давления $q^i(x,t)$, осадки штампов $\delta^i(t)$ и моменты $M^i(t)$ ($i=1,2,\ldots,n$).

Решение такой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(x,t) &= \frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^{i*}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],\\
\boldsymbol{\delta}(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{g_0^i + c(t)z_0^i(t) + \\
&\quad + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{ij}z_0^j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t)\right]\Bigg\}\mathbf{i}^i - \boldsymbol{\alpha}(t)\frac{J_1}{J_0},\\
\mathbf{M}(t) &= \int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi = \left[z_0^i(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\alpha_{1k}^i\right]\mathbf{i}^i,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned}
z_0^i(t) &= \frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^i\mathbf{p}_m^{i*}(x),\\
z_k(t) &= (\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\alpha_{1k}^i\alpha^i(t) - (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)K_{0k}^i z_0^i(t) - g_k}{c(t)+\gamma_k},\\
\alpha_{1k}^i &= \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^i, \quad K_{0k}^i = \sum_{m=1}^{\infty}K_{0m}^{ij}\psi_{km}^j,\\
g_0^i &= \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^{i*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_k = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\\
\mathbf{W}_k f(t) &= \int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad k=1,2,3,\ldots,
\end{aligned}$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ $(m=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n)$ и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k $(k=1,2,3,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n)$ находятся из системы $\sum\limits_{l=1}^{\infty}K_{ml}^{ij}\psi_{kl}^j = \gamma_k\psi_{km}^i$, коэффициенты K_{ml}^{ij} $(m,l=1,2,3,\ldots,\ i,j=1,2,\ldots,n)$ задаются выражением (1.16), а ядра $R_k(t,\tau)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$.

4. Задача с известными моментами и осадками штампов (тип 4).

Известны моменты $M^i(t)$ и осадки штампов $\delta^i(t)$. Требуется определить контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^i(t)$ и углы поворота $\alpha^i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Решение такой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(x,t) &= \frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\hat{\mathbf{p}}_0^{i*}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],\\
\boldsymbol{\alpha}(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{g_0^i + c(t)z_0^i(t) + \\
&\quad + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\hat{K}_{00}^{ij}z_0^j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t)\right]\Bigg\}\mathbf{i}^i - \boldsymbol{\delta}(t)\frac{J_1}{J_2},\\
\mathbf{P}(t) &= \int_{-1}^{1}\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \left[z_0^i(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^i\right]\mathbf{i}^i,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned}
z_0^i(t) &= \frac{M^i(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^i\hat{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),\\
z_k(t) &= (\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\hat{\delta}_{1k}^i\delta^i(t) - (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)K_{0k}^i z_0^i(t) - g_k}{c(t)+\gamma_k},\\
\hat{\delta}_{1k}^i &= \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^i, \quad K_{0k}^i = \sum_{m=1}^{\infty}\hat{K}_{0m}^{ij}\psi_{km}^j,\\
g_0^i &= \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\hat{\mathbf{p}}_0^{i*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_k = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\\
\mathbf{W}_k f(t) &= \int_{1}^{t} R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad k=1,2,3,\ldots,
\end{aligned}$$

полиномы $\hat{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) определяются соотношениями (1.13), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k = 1,2,3,\ldots$) являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k = 1,2,3,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) являются решением задачи $\sum\limits_{l=0}^{\infty}\hat{K}_{ml}^{ij}\psi_{kl}^j = \gamma_k\psi_{km}^i$, где коэффициенты $\hat{K}_{ml}^{ij}$ ($m,l = 0,1,2,\ldots$, $i,j = 1,2,\ldots,n$) задаются выражениями (1.39).

2.3 Решение задач для двух групп штампов

1. Решение задачи при условиях первого и второго типов.

Пусть на одной части штампов заданы силы $P^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_1}(t)$, на другой части — осадки $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, а требуется найти контактные давления $q^i(r,t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$, вдавливающие усилия $P^{i_2}(t)$ и моменты $M^{i_2}(t)$ ($i=1,2,\ldots,n$, $i_1=1,2,\ldots,n_1$, $i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n$).

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\mathbf{p}_0^{i_1*}(x)+z_1^{i_1}(t)\mathbf{p}_1^{i_1*}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Bigg\{g_1^{i_1}+c(t)z_1^{i_1}(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{10}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t)+K_{11}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\},$$

$$\delta^{i_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{g_0^{i_1}+c(t)z_0^{i_1}(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t)+K_{01}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_1}(t), \tag{2.13}$$

$$P^{i_2}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_2}(\xi,t)\,d\xi=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\delta_k^{i_2},$$

$$M^{i_2}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_2}(\xi,t)\xi\,d\xi=\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\alpha_k^{i_2},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^{i_1}(t)=\frac{J_0M^{i_1}(t)-J_1P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\delta_k^{i_2}\delta^{i_2}(t)+\alpha_k^{i_2}\alpha^{i_2}(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)+K_{1k}^{i_1}z_1^{i_1}(t)]-g_k}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k0}^{i_2}\mathbf{p}_0^{i_2*}(x)+\psi_{k1}^{i_2}\mathbf{p}_1^{i_2*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$\delta_k^{i_2} = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_2}, \quad \alpha_k^{i_2} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_2} + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},$$

$$g_l^{i_1} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_l^{i_1*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_k = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$K_{lk}^{i_1} = K_{l0}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{l1}^{i_1j_2}\psi_{k1}^{j_2} + \sum_{m=2}^{\infty} K_{lm}^{i_1j}\psi_{km}^{j}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int\limits_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n,$$
$$k = 2,3,4,\ldots, \quad l = 0,1,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k = 2,3,4,\ldots$) находятся из системы уравнений

$$K_{00}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{01}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2} + \sum_{l=2}^{\infty} K_{0l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k0}^{i_2},$$

$$K_{10}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{11}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2} + \sum_{l=2}^{\infty} K_{1l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K_{m_20}^{ij_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{m_21}^{ij_2}\psi_{k1}^{j_2} + \sum_{l=2}^{\infty} K_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n, \quad m_2 = 2,3,4,\ldots,$$

коэффициенты K_{ml}^{ij} ($m,l = 0,1,2,\ldots$, $i,j = 1,2,\ldots,n$) задаются выражением (1.14), а ядра $R_k(t,\tau)$ ($k = 2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$.

2. Решение задачи при условиях первого и третьего типов.

Пусть на всех штампах известны углы поворота $\alpha^i(t)$, на одной части штампов — осадки $\delta^{i_1}(t)$, на другой части — действующие силы $P^{i_2}(t)$, а требуется найти контактные давления $q^i(r,t)$, моменты $M^i(t)$, силы $P^{i_1}(t)$ и осадки $\delta^{i_2}(t)$ ($i = 1,2,\ldots,n$, $i_1 = 1,2,\ldots,n_1$, $i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n$).

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_2}(t)\mathbf{p}_0^{i_2*}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$
\begin{aligned}
&\delta^{i_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{ g_0^{i_2} + c(t) z_0^{i_2}(t) + \\
&\qquad + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\Bigg[K_{00}^{i_2 j_2} z_0^{j_2}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^{i_2} z_k(t) \Bigg] \Bigg\} - \frac{J_1}{J_0} \alpha^{i_2}(t), \\
&P^{i_1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \delta_k^{i_1}, \\
&M^{i_1}(t) = \int_{-1}^{1} q^{i_1}(\xi, t) \xi \, d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \alpha_k^{i_1}, \\
&M^{i_2}(t) = \int_{-1}^{1} q^{i_2}(\xi, t) \xi \, d\xi = z_0^{i_2}(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \alpha_{1k}^{i_2}, \\
&i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

где

$$
z_0^{i_2}(t) = \frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \psi_{k0}^{i_1} \mathbf{p}_0^{i_1 *}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{km}^{i} \mathbf{p}_m^{i *}(x),
$$

$$
z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\delta_k^{i_1} \delta^{i_1}(t) + \alpha_k^{i_1} \alpha^{i_1}(t) + \alpha_{1k}^{i_2} \alpha^{i_2}(t) - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) K_{0k}^{i_2} z_0^{i_2}(t) - g_k}{c(t) + \gamma_k},
$$

$$
\delta_k^{i_1} = \sqrt{J_0} \psi_{k0}^{i_1}, \quad \alpha_k^{i_1} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} \psi_{k0}^{i_1} + \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}} \psi_{k1}^{i_1}, \quad \alpha_{1k}^{i_2} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}} \psi_{k1}^{i_2},
$$

$$
g_0^{i_2} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{g}(\xi) \cdot \mathbf{p}_0^{i_2 *}(\xi)}{m(\xi)} d\xi, \quad g_k = \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{g}(\xi) \cdot \mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)} d\xi,
$$

$$
K_{0k}^{i_2} = K_{00}^{i_2 j_1} \psi_{k0}^{j_1} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{0m}^{i_2 j} \psi_{km}^{j}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_{1}^{t} R_k(t, \tau) f(\tau) \, d\tau,
$$

$$
i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n,
$$

$$
k = 1, 2, 3, \ldots,
$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i *}(x)$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^{i} и γ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) находятся из

$$
K_{00}^{i_1 j_1} \psi_{k0}^{j_1} + \sum_{l=1}^{\infty} K_{0l}^{i_1 j} \psi_{kl}^{j} = \gamma_k \psi_{k0}^{i_1},
$$

$$K^{ij_1}_{m_20}\psi^{j_1}_{k0} + \sum_{l=1}^{\infty} K^{ij}_{m_2l}\psi^{j}_{kl} = \gamma_k \psi^{i}_{km_2},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad m_2 = 1, 2, 3, \ldots,$$

коэффициенты K^{ij}_{ml} $(m, l = 0, 1, 2, \ldots,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражением (1.14), а ядра $R_k(t, \tau)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t, \tau)/[c(t) + \gamma_k]$.

3. Решение задачи при условиях второго и третьего типов. На всех штампах известны вдавливающие силы $P^i(t)$, на первой части штампов известны моменты $M^{i_1}(t)$, на второй части штампов — углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x, t)$, осадки $\delta^i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_2}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ i_1 = 1, 2, \ldots, n_1,\ i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n)$.

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x, t) = \frac{1}{m(x)}\left[z^i_0(t)\mathbf{p}^{i*}_0(x) + z^{i_1}_1(t)\mathbf{p}^{i_1*}_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{g^i_0 + c(t)z^i_0(t) + \\ + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[K^{ij}_{00}z^j_0(t) + K^{ij_1}_{01}z^{j_1}_0(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K^i_{0k}z_k(t)\right]\Bigg\}\boldsymbol{i}^i - \boldsymbol{\alpha}(t)\frac{J_1}{J_0},$$

$$\alpha^{i_1}(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}}\Bigg\{g^{i_1}_1 + c(t)z^{i_1}_1(t) + \\ + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[K^{i_1j}_{10}z^j_0(t) + K^{i_1j_1}_{11}z^{j_1}_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K^{i_1}_{1k}z_k(t)\right]\Bigg\}, \tag{2.15}$$

$$M^{i_2}(t) = \int_{-1}^{1} q^{i_2}(\xi, t)\xi\, d\xi = z^{i_2}_0(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\alpha^{i_2}_{1k},$$

$$i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n,$$

где

$$z^i_0(t) = \frac{P^i(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z^{i_1}_1(t) = \frac{J_0M^{i_1}(t) - J_1P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2 - J_1^2)}},$$

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{\alpha^{i_2}_{1k}\alpha^{i_2}(t) - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)[K^i_{0k}z^i_0(t) + K^{i_1}_{1k}z^{i_1}_1(t)] - g_k}{c(t) + \gamma_k},$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x) = \psi_{k1}^{i_2}\mathbf{p}_1^{i_2*}(x) + \sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^{i} = K_{01}^{ij_2}\psi_{k1}^{j_2} + \sum_{m=2}^{\infty}K_{0m}^{ij}\psi_{km}^{j}, \quad K_{1k}^{i_1} = K_{11}^{i_1j_2}\psi_{k1}^{j_2} + \sum_{m=2}^{\infty}K_{1m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},$$

$$g_0^i = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^{i*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_1^{i_1} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_1^{i_1*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_k = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$\alpha_{1k}^{i_2} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2}, \quad \mathbf{W}_kf(t) = \int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n,$$
$$k = 2,3,4,\ldots,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k = 2,3,4,\ldots$) находятся из

$$K_{11}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2} + \sum_{l=2}^{\infty}K_{1l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K_{m_21}^{ij_2}\psi_{k1}^{j_2} + \sum_{l=2}^{\infty}K_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n, \quad m_2 = 2,3,4,\ldots,$$

коэффициенты K_{ml}^{ij} ($m,l = 0,1,2,\ldots$, $i,j = 1,2,\ldots,n$) задаются выражением (1.14), а ядра $R_k(t,\tau)$ ($k = 2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $\gamma_kK^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$.

4. Решение задачи при условиях первого и четвертого типов.

На всех штампах известны осадки $\delta^i(t)$, на первой части штампов известны моменты $M^{i_1}(t)$, на второй части штампов — углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, силы $P^i(t)$, углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_2}(t)$ ($i = 1,2,\ldots,n$, $i_1 = 1,2,\ldots,n_1$, $i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n$).

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{g_0^{i_1}+c(t)z_0^{i_1}(t)+ \\ +(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),$$

$$M^{i_2}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_2}(\xi,t)\xi\,d\xi=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\hat{\alpha}_k^{i_2}, \tag{2.16}$$

$$P^{i_2}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_2}(\xi,t)\,d\xi=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\hat{\delta}_k^{i_2},$$

$$P^{i_1}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_1}(\xi,t)\,d\xi=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad \mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k0}^{i_2}\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)+\hat{\delta}_k^{i_2}\delta^{i_2}(t)+\hat{\alpha}_k^{i_2}\alpha^{i_2}(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)-g_k}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1},\quad \hat{\delta}_k^{i_2}=\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}\psi_{k0}^{i_2}+\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_2},\quad \hat{\alpha}_k^{i_2}=\sqrt{J_2}\psi_{k0}^{i_2},$$

$$g_0^{i_1}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad g_k=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$K_{0k}^{i_1}=\tilde{K}_{00}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2}+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},\quad \mathbf{W}_kf(t)=\int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

$$k=1,2,3,\ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра

$R_k(t,\tau)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ^i_{km} и γ_k $(k=1,2,3,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n)$ являются решением задачи

$$\tilde K^{i_2j_2}_{00}\psi^{j_2}_{k0}+\sum_{l=1}^{\infty}\tilde K^{i_2j}_{0l}\psi^{j}_{kl}=\gamma_k\psi^{i_2}_{k0},$$
$$\tilde K^{ij_2}_{m_20}\psi^{j_2}_{k0}+\sum_{l=1}^{\infty}\tilde K^{ij}_{m_2l}\psi^{j}_{kl}=\gamma_k\psi^{i}_{km_2},$$
$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,\quad m_2=1,2,3,\ldots,$$

где коэффициенты $\tilde K^{ij}_{ml}$ $(m,l=0,1,2,\ldots,\ i,j=1,2,\ldots,n)$ задаются выражениями

$$\tilde K^{i_1j_1}_{ml}=\hat K^{i_1j_1}_{ml},$$
$$\tilde K^{i_1j_2}_{0l}=\frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K^{i_1j_2}_{0l}+\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0J_2}}K^{i_1j_2}_{1l},$$
$$\tilde K^{i_1j_2}_{1l}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0J_2}}K^{i_1j_2}_{0l}-\frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K^{i_1j_2}_{1l},\quad \tilde K^{i_1j_2}_{m_2l}=K^{i_1j_2}_{m_2l},$$
$$\tilde K^{i_2j_1}_{m0}=\frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K^{i_2j_1}_{m0}+\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0J_2}}K^{i_2j_1}_{m1},\tag{2.17}$$
$$\tilde K^{i_2j_1}_{m1}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0J_2}}K^{i_2j_1}_{m0}-\frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}K^{i_2j_1}_{m1},\quad \tilde K^{i_2j_1}_{ml_2}=K^{i_2j_1}_{ml_2},$$
$$\tilde K^{i_2j_2}_{ml}=K^{i_2j_2}_{ml},$$
$$i,j=1,2,\ldots,n,\quad i_1,j_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2,j_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$
$$m,l=0,1,2,\ldots,\quad m_2,l_2=2,3,4,\ldots,$$

в которых коэффициенты K^{ij}_{ml} и $\hat K^{ij}_{ml}$ вычисляются по формулам (1.16) и (1.39), соответственно.

5. Решение задачи при условиях второго и четвертого типов.

На всех штампах известны моменты $M^i(t)$, на первой части штампов известны осадки $\delta^{i_1}(t)$, на второй части штампов — вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$, углы поворота $\alpha^i(t)$ и силы $P^{i_1}(t)$ $(i=1,2,\ldots,n,\ i_1=1,2,\ldots,n_1,\ i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n)$.

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i*}(x)+z_1^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(x)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{g_0^{i_1}+c(t)z_0^{i_1}(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_1j}z_0^j(t)+\tilde{K}_{01}^{i_1j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\right]\Bigg\}-\delta^{i_1}(t)\frac{J_1}{J_2},$$

$$\delta^{i_2}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{g_0^{i_2}+c(t)z_0^{i_2}(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_2j}z_0^j(t)+\tilde{K}_{01}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{0k}^{i_2}z_k(t)\right]\Bigg\}-\alpha^{i_2}(t)\frac{J_1}{J_0},\quad(2.18)$$

$$\alpha^{i_2}(t)=\sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2-J_1^2}}\Bigg\{g_1^{i_2}+c(t)z_1^{i_2}(t)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{10}^{i_2j}z_0^j(t)+\tilde{K}_{11}^{i_2j_2}z_1^{j_2}(t)+\sum_{k=2}^{\infty}K_{1k}^{i_2}z_k(t)\right]\Bigg\},$$

$$P^{i_1}(t)=\int_{-1}^{1}q^{i_1}(\xi,t)\,d\xi=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad z_0^{i_2}(t)=\frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad z_1^{i_2}(t)=\frac{J_0M^{i_2}(t)-J_1P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2-J_1^2)}},$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^iz_0^i(t)+K_{1k}^{i_2}z_1^{i_2}(t)]-g_k}{c(t)+\gamma_k},$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k1}^{i_1}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^i\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^i=\tilde{K}_{01}^{ij_1}\psi_{k1}^{j_1}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{ij}\psi_{km}^j,\quad K_{1k}^{i_2}=\tilde{K}_{11}^{i_2j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{1m}^{i_2j}\psi_{km}^j,$$

$$g_0^i=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad g_1^{i_2}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad g_k=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1}, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int\limits_1^t R_k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n,$$

$$k = 2, 3, 4, \ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t,\tau)/[c(t) + \gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k $(k = 2, 3, 4, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ являются решением задачи

$$\tilde{K}_{11}^{i_1 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{K}_{1l}^{i_1 j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k \psi_{k1}^{i_1},$$

$$\tilde{K}_{m_2 1}^{i j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{K}_{m_2 l}^{ij}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k \psi_{k m_2}^{i},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad m_2 = 2, 3, 4, \ldots,$$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ $(m, l = 0, 1, 2, \ldots,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражениями (1.44).

6. Решение задачи при условиях третьего и четвертого типов.

На первой части штампов известны осадки $\delta^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_1}(t)$, на второй части штампов — вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$, углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, силы $P^{i_1}(t)$ и моменты $M^{i_2}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ i_1 = 1, 2, \ldots, n_1,\ i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n)$.

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i*}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{ g_0^{i_1} + c(t) z_0^{i_1}(t) + \\ + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_1 j} z_0^j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^{i_1} z_k(t)\right]\Bigg\} - \delta^{i_1}(t)\frac{J_1}{J_2},$$

$$\delta^{i_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{ g_0^{i_2} + c(t) z_0^{i_2}(t) +$$

$$+ (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_2 j} z_0^j(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{0k}^{i_2} z_k(t)\right]\Bigg\} - \alpha^{i_2}(t)\frac{J_1}{J_0}, \qquad (2.19)$$

$$P^{i_1}(t) = \int_{-1}^{1} q^{i_1}(\xi, t)\, d\xi = z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1},$$

$$M^{i_2}(t) = \int_{-1}^{1} q^{i_2}(\xi, t)\xi\, d\xi = z_0^{i_2}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\alpha_{1k}^{i_2},$$

$$i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t) = \frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad z_0^{i_2}(t) = \frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad \mathbf{\Phi}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{km}^i \tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t) + \alpha_{1k}^{i_2}\alpha^{i_2}(t) - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)K_{0k}^i z_0^i(t) - g_k}{c(t) + \gamma_k},$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1}, \quad \alpha_{1k}^{i_2} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},$$

$$g_0^i = \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i*}(\xi)}{m(\xi)} d\xi, \quad g_k = \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)} d\xi,$$

$$K_{0k}^i = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{K}_{0m}^{ij}\psi_{km}^j, \quad \mathbf{W}_k f(t) = \int_{1}^{t} R_k(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t, \tau)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t, \tau)/[c(t) + \gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$) являются решением задачи

$$\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{K}_{m_2 l}^{ij}\psi_{kl}^j = \gamma_k \psi_{km_2}^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad m_2 = 1, 2, 3, \ldots,$$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ ($m, l = 0, 1, 2, \ldots$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$) задаются выражениями (1.44).

2.4 Решение задач для трех групп штампов

1. Решение задачи при условиях первого, второго и третьего типов.

Частично известны вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, $\alpha^{i_3}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, моменты $M^{i_2}(t)$, $M^{i_3}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, $\delta^{i_3}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$, $i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2$, $i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n$).

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\mathbf{p}_0^{i_1*}(x) + z_0^{i_3}(t)\mathbf{p}_0^{i_3*}(x) + z_1^{i_1}(t)\mathbf{p}_1^{i_1*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}}\left\{g_1^{i_1} + c(t)z_1^{i_1}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[K_{10}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t) + K_{10}^{i_1j_3}z_0^{j_3}(t) + K_{11}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^{i_1}z_k(t)\right]\right\},$$

$$\delta^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\left\{g_0^{i_1} + c(t)z_0^{i_1}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t) + K_{00}^{i_1j_3}z_0^{j_3}(t) + K_{01}^{i_1j_1}z_1^{j_1}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_1}z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_1}(t), \tag{2.20}$$

$$\delta^{i_3}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\left\{g_0^{i_3} + c(t)z_0^{i_3}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[K_{00}^{i_3j_1}z_0^{j_1}(t) + K_{00}^{i_3j_3}z_0^{j_3}(t) + K_{01}^{i_3j_1}z_1^{j_1}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_3}z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_3}(t),$$

$$P^{i_2}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\delta_k^{i_2}, \quad M^{i_2}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\alpha_k^{i_2}, \quad M^{i_3}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\alpha_{1k}^{i_3},$$

$$i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2, \quad i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t) = \frac{P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_0^{i_3}(t) = \frac{P^{i_3}(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1^{i_1}(t) = \frac{J_0M^{i_1}(t) - J_1P^{i_1}(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2 - J_1^2)}},$$

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\big(\{\delta_k^{i_2}\delta^{i_2}(t) + \alpha_k^{i_2}\alpha^{i_2}(t) + \alpha_{1k}^{i_3}\alpha^{i_3}(t) - g_k - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t) + K_{0k}^{i_3}z_0^{i_3}(t) + K_{1k}^{i_1}z_1^{i_1}(t)]\}/[c(t) + \gamma_k]\big),$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x) = \psi_{k0}^{i_2}\mathbf{p}_0^{i_2*}(x) + \psi_{k1}^{i_2}\mathbf{p}_1^{i_2*}(x) + \psi_{k1}^{i_3}\mathbf{p}_1^{i_3*}(x) + \sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\mathbf{p}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^{i_1} = K_{00}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{01}^{i_1j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{01}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{m=2}^{\infty}K_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{1k}^{i_1} = K_{10}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{11}^{i_1j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{11}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{m=2}^{\infty}K_{1m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{0k}^{i_3} = K_{00}^{i_3j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{01}^{i_3j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{01}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{m=2}^{\infty}K_{0m}^{i_3j}\psi_{km}^{j},$$

$$g_0^{i_1} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^{i_1*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_1^{i_1} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_1^{i_1*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$g_0^{i_3} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{p}_0^{i_3*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_k = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$\delta_k^{i_2} = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_2}, \quad \alpha_k^{i_2} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_2} + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},$$

$$\alpha_{1k}^{i_3} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3}, \quad \mathbf{W}_kf(t) = \int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \quad i_1 = 1,2,\ldots,n_1, \quad i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n_2,$$
$$i_3 = n_2+1, n_2+2,\ldots,n, \quad k = 2,3,4,\ldots,$$

полиномы $\mathbf{p}_m^{i*}(x)$ ($m = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n$) и значения интегралов J_0, J_1, J_2 определяются соотношениями (1.12), коэффициенты ψ_{km}^{i} и γ_k ($k = 2,3,4,\ldots$) находятся из

$$K_{00}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{01}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{01}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}K_{0l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k0}^{i_2},$$

$$K_{10}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{11}^{i_2j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{11}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}K_{1l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_2},$$

$$K_{10}^{i_3j_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{11}^{i_3j_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{11}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}K_{1l}^{i_3j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_3},$$

$$K_{m_20}^{ij_2}\psi_{k0}^{j_2} + K_{m_21}^{ij_2}\psi_{k1}^{j_2} + K_{m_21}^{ij_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}K_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2, \quad i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n,$
$m_2 = 2, 3, 4, \ldots,$

коэффициенты K_{ml}^{ij} $(m, l = 0, 1, 2, \ldots, i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражением (1.14), а ядра $R_k(t, \tau)$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t, \tau)/[c(t) + \gamma_k]$.

2. Решение задачи при условиях первого, второго и четвертого типов.

Частично известны вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, $M^{i_2}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_3}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x, t)$, вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_3}(t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$, $\alpha^{i_1}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n$, $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$, $i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2$, $i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n)$.

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(x) + z_0^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(x) + z_1^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}}\left\{g_0^{i_1} + c(t)z_0^{i_1}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_1 j_1} z_0^{j_1}(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \tilde{K}_{00}^{i_1 j_2} z_0^{j_2}(t) + \tilde{K}_{01}^{i_1 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_1} z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),$$

$$\alpha^{i_2}(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}}\left\{g_1^{i_2} + c(t)z_1^{i_2}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{10}^{i_2 j_1} z_0^{j_1}(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \tilde{K}_{10}^{i_2 j_2} z_0^{j_2}(t) + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^{i_2} z_k(t)\right]\right\}, \qquad (2.21)$$

$$\delta^{i_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\left\{g_0^{i_2} + c(t)z_0^{i_2}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_2 j_1} z_0^{j_1}(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \tilde{K}_{00}^{i_2 j_2} z_0^{j_2}(t) + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_2} z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_2}(t),$$

$$P^{i_1}(t) = z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_2}, \quad P^{i_3}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\delta_k^{i_3}, \quad M^{i_3}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\alpha_k^{i_3},$$

$i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2, \quad i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n,$

где

$$z_0^{i_1}(t) = \frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad z_0^{i_2}(t) = \frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1^{i_2}(t) = \frac{J_0 M^{i_2}(t) - J_1 P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}},$$

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\big(\{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t) + \delta_k^{i_3}\delta^{i_3}(t) + \alpha_k^{i_3}\alpha^{i_3}(t) - g_k - \\ - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t) + K_{0k}^{i_2}z_0^{i_2}(t) + K_{1k}^{i_2}z_1^{i_2}(t)]\}/[c(t) + \gamma_k]\big),$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x) = \psi_{k0}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3*}(x) + \psi_{k1}^{i_1}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1*}(x) + \psi_{k1}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3*}(x) + \sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^{i_1} = \tilde{K}_{00}^{i_1j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_1j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{0k}^{i_2} = \tilde{K}_{00}^{i_2j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_2j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_2j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{1k}^{i_2} = \tilde{K}_{10}^{i_2j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_2j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{1m}^{i_2j}\psi_{km}^{j},$$

$$g_0^{i_1} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_0^{i_2} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$g_1^{i_2} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_k = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1}, \quad \delta_k^{i_3} = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_3},$$

$$\alpha_k^{i_3} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_3} + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3}, \quad \mathbf{W}_kf(t) = \int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2,$$
$$i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n, \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$) определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k = 2, 3, 4, \ldots$) являются резольвентами ядер $\gamma_kK^2(t,\tau)/[c(t) + \gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k ($k = 2, 3, 4, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$) являются решением задачи

$$\tilde{K}_{00}^{i_3j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_3j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{0l}^{i_3j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k0}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_1j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_1j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{1l}^{i_1j}\psi_{kl}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_1},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_3j_3}\psi_{k0}^{j_3}+\tilde{K}_{11}^{i_3j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{11}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{1l}^{i_3j}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{k1}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{m_20}^{ij_3}\psi_{k0}^{j_3}+\tilde{K}_{m_21}^{ij_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{m_21}^{ij_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$

$$m_2=2,3,4,\ldots,$$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ $(m,l=0,1,2,\ldots,\ i,j=1,2,\ldots,n)$ задаются выражениями (1.44).

3. Решение задачи при условиях первого, третьего и четвертого типов.

Частично известны вдавливающие силы $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, $\delta^{i_2}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_2}(t)$, $\alpha^{i_3}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, $P^{i_2}(t)$, моменты $M^{i_2}(t)$, $M^{i_3}(t)$, осадки $\delta^{i_3}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$ $(i=1,2,\ldots,n$, $i_1=1,2,\ldots,n_1$, $i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2$, $i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n)$.

Решение такой задачи имеет вид

$$\mathbf{q}(x,t)=\frac{1}{m(x)}\left[z_0^{i_1}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(x)+z_0^{i_3}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3*}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],$$

$$\alpha^{i_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{g_0^{i_1}+c(t)z_0^{i_1}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_1j_1}z_0^{j_1}(t)+$$
$$+\tilde{K}_{00}^{i_1j_3}z_0^{j_3}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}K_{0k}^{i_1}z_k(t)\Bigg]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),$$

$$\delta^{i_3}(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{g_0^{i_3}+c(t)z_0^{i_3}(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_3j_1}z_0^{j_1}(t)+ \tag{2.22}$$
$$+\tilde{K}_{00}^{i_3j_3}z_0^{j_3}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}K_{0k}^{i_3}z_k(t)\Bigg]\Bigg\}-\frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_3}(t),$$

$$P^{i_1}(t)=z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}}+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1},\quad P^{i_2}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\delta_k^{i_2},$$

$$M^{i_2}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\alpha_k^{i_2},\quad M^{i_3}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\alpha_{1k}^{i_3},$$

$$i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t)=\frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}},\quad z_0^{i_3}(t)=\frac{P^{i_3}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad \mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k0}^{i_2}\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\big(\{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)+\delta_k^{i_2}\delta^{i_2}(t)+\alpha_k^{i_2}\alpha^{i_2}(t)+\alpha_{1k}^{i_3}\alpha^{i_3}(t)-g_k-$$
$$-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1}z_0^{i_1}(t)+K_{0k}^{i_3}z_0^{i_3}(t)]\}/[c(t)+\gamma_k]\big),$$

$$K_{0k}^{i_1}=\tilde{K}_{00}^{i_1j_2}\psi_{k0}^{j_2}+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_1j}\psi_{km}^{j},\quad K_{1k}^{i_3}=\tilde{K}_{00}^{i_3j_2}\psi_{k0}^{j_2}+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_3j}\psi_{km}^{j},$$

$$g_0^{i_1}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad g_1^{i_3}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad g_k=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$\mathbf{W}_kf(t)=\int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad \hat{\delta}_{1k}^{i_1}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1},\quad \delta_k^{i_2}=\sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_2},$$

$$\alpha_k^{i_2}=\frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_2}+\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_2},\quad \alpha_{1k}^{i_3}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3},$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,$$

$$i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,\quad k=1,2,3,\ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ $(m=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n)$ определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ являются резольвентами ядер $\gamma_kK^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^{i} и γ_k $(k=1,2,3,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n)$ являются решением задачи

$$\tilde{K}_{00}^{i_2j_2}\psi_{k0}^{j_2}+\sum_{l=1}^{\infty}\tilde{K}_{0l}^{i_2j}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{k0}^{i_2},$$

$$\tilde{K}_{m_20}^{ij_2}\psi_{k0}^{j_2}+\sum_{l=1}^{\infty}\tilde{K}_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$

$$m_2=1,2,3,\ldots,$$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ $(m,l=0,1,2,\ldots,\ i,j=1,2,\ldots,n)$ задаются выражениями (1.44).

4. Решение задачи при условиях второго, третьего и четвертого типов.

Частично известны вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, $M^{i_2}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_3}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, моменты $M^{i_3}(t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$, $\delta^{i_3}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$, $\alpha^{i_2}(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$, $i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2$, $i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n$).

Решение такой задачи имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{q}(x,t) = \frac{1}{m(x)}\left[z_0^i(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^i(x) + z_1^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\right],\\
&\alpha^{i_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}}\left\{g_0^{i_1} + c(t)z_0^{i_1}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_1 j} z_0^j(t) + \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + \tilde{K}_{01}^{i_1 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_1} z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t),\\
&\delta^{i_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\left\{g_0^{i_2} + c(t)z_0^{i_2}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_2 j} z_0^j(t) + \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_2} z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_1}(t),\\
&\alpha^{i_2}(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}}\left\{g_1^{i_2} + c(t)z_1^{i_2}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{10}^{i_2 j} z_0^j(t) + \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^{i_2} z_k(t)\right]\right\},\\
&\delta^{i_3}(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\left\{g_0^{i_3} + c(t)z_0^{i_3}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\left[\tilde{K}_{00}^{i_3 j} z_0^j(t) + \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. + \tilde{K}_{01}^{i_3 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_3} z_k(t)\right]\right\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_3}(t),\\
&P^{i_1}(t) = z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1}, \quad M^{i_3}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\alpha_{1k}^{i_3},\\
&i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2, \quad i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

где

$$
z_0^{i_1}(t) = \frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad z_0^{i_2}(t) = \frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1^{i_2}(t) = \frac{J_0 M^{i_2}(t) - J_1 P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}},
$$

$$z_0^{i_3}(t)=\frac{P^{i_3}(t)}{\sqrt{J_0}},\quad \mathbf{\Phi}_k(x)=\psi_{k1}^{i_1}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1*}(x)+\psi_{k1}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3*}(x)+\sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$z_k(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\big(\{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t)+\alpha_{1k}^{i_3}\alpha^{i_3}(t)-g_k-$$
$$-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i}z_0^{i}(t)+K_{1k}^{i_2}z_1^{i_2}(t)]\}/[c(t)+\gamma_k]\big),$$

$$K_{0k}^{i}=\tilde{K}_{01}^{ij_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{01}^{ij_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{ij}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{1k}^{i_2}=\tilde{K}_{11}^{i_2j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{11}^{i_2j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_2j}\psi_{km}^{j},$$

$$g_0^{i}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad g_1^{i_2}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,\quad g_k=\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1},\quad \alpha_{1k}^{i_3}=\sqrt{\frac{J_0J_2-J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3},$$

$$\mathbf{W}_kf(t)=\int_{1}^{t}R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_1=1,2,\ldots,n_1,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,$$
$$i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,\quad k=2,3,4,\ldots,$$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ ($m=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) вычисляются по (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 — по (1.12), ядра $R_k(t,\tau)$ ($k=2,3,4,\ldots$) являются резольвентами ядер $\gamma_kK^2(t,\tau)/[c(t)+\gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^{i} и γ_k ($k=2,3,4,\ldots$, $i=1,2,\ldots,n$) являются решением задачи

$$\tilde{K}_{11}^{i_1j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{11}^{i_1j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{1l}^{i_1j}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{k1}^{i_1},$$

$$\tilde{K}_{11}^{i_3j_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{11}^{i_3j_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{1l}^{i_3j}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{k1}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{m_21}^{ij_1}\psi_{k1}^{j_1}+\tilde{K}_{m_21}^{ij_3}\psi_{k1}^{j_3}+\sum_{l=2}^{\infty}\tilde{K}_{m_2l}^{ij}\psi_{kl}^{j}=\gamma_k\psi_{km_2}^{i},$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad i_2=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_2,\quad i_3=n_2+1,n_2+2,\ldots,n,$$
$$m_2=2,3,4,\ldots,$$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ ($m,l=0,1,2,\ldots$, $i,j=1,2,\ldots,n$) задаются выражениями (1.44).

2.5 Решение задачи для четырех групп штампов

Частично известны вдавливающие силы $P^{i_2}(t)$, $P^{i_4}(t)$, моменты $M^{i_1}(t)$, $M^{i_2}(t)$, осадки $\delta^{i_1}(t)$, $\delta^{i_3}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_3}(t)$, $\alpha^{i_4}(t)$, а необходимо найти контактные давления $q^i(x,t)$, вдавливающие силы $P^{i_1}(t)$, $P^{i_3}(t)$, моменты $M^{i_3}(t)$, $M^{i_4}(t)$, осадки $\delta^{i_2}(t)$, $\delta^{i_4}(t)$ и углы поворота $\alpha^{i_1}(t)$, $\alpha^{i_2}(t)$ ($i = 1,2,\ldots,n$, $i_1 = 1,2,\ldots,n_1$, $i_2 = n_1+1, n_1+2,\ldots,n_2$, $i_3 = n_2+1, n_2+2,\ldots,n_3$, $i_4 = n_3+1, n_3+2,\ldots,n$).

Решение такой задачи имеет вид

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}(x,t) &= \frac{1}{m(x)}\Bigg[z_0^{i_1}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(x) + z_0^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(x) + z_0^{i_4}(t)\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_4*}(x) + \\
&\quad + z_1^{i_2}(t)\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\mathbf{\Phi}_k(x)\Bigg], \\
\alpha^{i_1}(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_2}}\Bigg\{g_0^{i_1} + c(t)z_0^{i_1}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_1 j_1} z_0^{j_1}(t) + \tilde{K}_{00}^{i_1 j_2} z_0^{j_2}(t) + \\
&\quad + \tilde{K}_{00}^{i_1 j_4} z_0^{j_4}(t) + \tilde{K}_{01}^{i_1 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_1} z_k(t)\Bigg]\Bigg\} - \frac{J_1}{J_2}\delta^{i_1}(t), \\
\delta^{i_2}(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{g_0^{i_2} + c(t)z_0^{i_2}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_2 j_1} z_0^{j_1}(t) + \tilde{K}_{00}^{i_2 j_2} z_0^{j_2}(t) + \\
&\quad + \tilde{K}_{00}^{i_2 j_4} z_0^{j_4}(t) + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_2} z_k(t)\Bigg]\Bigg\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_1}(t), \\
\alpha^{i_2}(t) &= \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}}\Bigg\{g_1^{i_2} + c(t)z_1^{i_2}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{10}^{i_2 j_1} z_0^{j_1}(t) + \\
\delta^{i_4}(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}}\Bigg\{g_0^{i_4} + c(t)z_0^{i_4}(t) + (\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\Bigg[\tilde{K}_{00}^{i_4 j_1} z_0^{j_1}(t) + \tilde{K}_{00}^{i_4 j_2} z_0^{j_2}(t) + \\
&\quad + \tilde{K}_{00}^{i_4 j_4} z_0^{j_4}(t) + \tilde{K}_{01}^{i_4 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^{i_4} z_k(t)\Bigg]\Bigg\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^{i_4}(t), \\
&\quad + \tilde{K}_{10}^{i_2 j_2} z_0^{j_2}(t) + \tilde{K}_{10}^{i_2 j_4} z_0^{j_4}(t) + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_2} z_1^{j_2}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^{i_2} z_k(t)\Bigg]\Bigg\}, \\
P^{i_1}(t) &= z_0^{i_1}(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\hat{\delta}_{1k}^{i_1}, \quad P^{i_3}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\delta_k^{i_3}, \\
M^{i_3}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\alpha_k^{i_3}, \quad M^{i_4}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\alpha_{1k}^{i_4},
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

$$i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2,$$
$$i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n_3, \quad i_4 = n_3 + 1, n_3 + 2, \ldots, n,$$

где

$$z_0^{i_1}(t) = \frac{M^{i_1}(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad z_0^{i_2}(t) = \frac{P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_0^{i_4}(t) = \frac{P^{i_4}(t)}{\sqrt{J_0}},$$

$$z_1^{i_2}(t) = \frac{J_0 M^{i_2}(t) - J_1 P^{i_2}(t)}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}},$$

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\big(\{\hat{\delta}_{1k}^{i_1}\delta^{i_1}(t) + \delta_k^{i_3}\delta^{i_3}(t) + \alpha_k^{i_3}\alpha^{i_3}(t) + \alpha_{1k}^{i_4}\alpha^{i_4}(t) - g_k - $$
$$- (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)[K_{0k}^{i_1} z_0^{i_1}(t) + K_{0k}^{i_2} z_0^{i_2}(t) + K_{0k}^{i_4} z_0^{i_4}(t) + K_{1k}^{i_2} z_1^{i_2}(t)]\}/$$
$$/[c(t) + \gamma_k]\big),$$

$$\mathbf{\Phi}_k(x) = \psi_{k0}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_3*}(x) + \psi_{k1}^{i_1}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_1*}(x) + \psi_{k1}^{i_3}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_3*}(x) + \psi_{k1}^{i_4}\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_4*}(x) + \sum_{m=2}^{\infty}\psi_{km}^{i}\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x),$$

$$K_{0k}^{i_1} = \tilde{K}_{00}^{i_1 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_1 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_1 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_1 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_1 j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{0k}^{i_2} = \tilde{K}_{00}^{i_2 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_2 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_2 j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{0k}^{i_4} = \tilde{K}_{00}^{i_4 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_4 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_4 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_4 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_4 j}\psi_{km}^{j},$$

$$K_{1k}^{i_2} = \tilde{K}_{10}^{i_2 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_2 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_2 j}\psi_{km}^{j},$$

$$g_0^{i_1} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_1*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_0^{i_2} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_2*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_0^{i_4} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_0^{i_4*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$g_1^{i_2} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\tilde{\mathbf{p}}_1^{i_2*}(\xi)}{m(\xi)}d\xi, \quad g_k = \int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{g}(\xi)\cdot\mathbf{\Phi}_k(\xi)}{m(\xi)}d\xi,$$

$$\hat{\delta}_{1k}^{i_1} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_2}}\psi_{k1}^{i_1}, \quad \delta_k^{i_3} = \sqrt{J_0}\psi_{k0}^{i_3},$$

$$\alpha_k^{i_3} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\psi_{k0}^{i_3} + \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_3}, \quad \alpha_{1k}^{i_4} = \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}\psi_{k1}^{i_4},$$

$$\mathbf{W}_k f(t) = \int_{1}^{t} R_k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2,$
$i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n_3, \quad i_4 = n_3 + 1, n_3 + 2, \ldots, n,$
$k = 2, 3, 4, \ldots,$

полиномы $\tilde{\mathbf{p}}_m^{i*}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются соотношениями (1.14), значения интегралов J_0, J_1, J_2 находятся из (1.12), ядра $R_k(t, \tau)$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ являются резольвентами ядер $\gamma_k K^2(t, \tau)/[c(t) + \gamma_k]$, а коэффициенты ψ_{km}^i и γ_k $(k = 2, 3, 4, \ldots, i = 1, 2, \ldots, n)$ являются решением задачи

$$\tilde{K}_{00}^{i_3 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_3 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{01}^{i_3 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{01}^{i_3 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_3 j}\psi_{km}^{j} = \gamma_k\psi_{k0}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_1 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_1 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_1 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_1 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_1 j}\psi_{km}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_1},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_3 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_3 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_3 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_3 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_3 j}\psi_{km}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_3},$$

$$\tilde{K}_{10}^{i_4 j_3}\psi_{k0}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_4 j_1}\psi_{k1}^{j_1} + \tilde{K}_{11}^{i_4 j_3}\psi_{k1}^{j_3} + \tilde{K}_{11}^{i_4 j_4}\psi_{k1}^{j_4} + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{K}_{0m}^{i_4 j}\psi_{km}^{j} = \gamma_k\psi_{k1}^{i_4},$$

$i_1 = 1, 2, \ldots, n_1, \quad i_3 = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n_3, \quad i_4 = n_3 + 1, n_3 + 2, \ldots, n,$
$m_2 = 2, 3, 4, \ldots,$

где коэффициенты $\tilde{K}_{ml}^{ij}$ $(m, l = 0, 1, 2, \ldots, i, j = 1, 2, \ldots, n)$ задаются выражениями (1.44).

2.6 Численные расчеты

В этой главе будем рассматривать двухслойное основание, нижний слой которого является вязкоупругим, а верхний — упругим неоднородным с постоянным коэффициентом Пуассона ν_1 и переменным можулем упругости $E_1(x)$. Как и в расчетах в первой главе для определенности будем считать, что сцеплены как слои, так и нижний слой и недеформируемого основание. В качестве вязкоупругого материала покрытия будем рассматривать такой материал, изменение модуля упругости которого с течением времени несущественно, то есть $E_2(t) \equiv E_2$, а выражение для мера ползучести этого материала имеет вид

$$C_2(t,\tau) = (C_0 + A_0 e^{-\chi\tau})\big[1 - e^{-\psi(t-\tau)}\big].$$

Возьмем следующие характерные для полимеров, композитов и бетонов соотношения для параметров

$$\frac{R(x)}{E_2} = \begin{cases} 0.05, & x \in [(-0.1+1.25k)\bar{a}, (0.1+1.25k)\bar{a}] \\ & \quad \cup\, [(0.3+1.25k)\bar{a}, (1.35+1.25k)\bar{a}], \\ 0.025, & x \in ((-0.3+1.25k)\bar{a}, (-0.1+1.25k)\bar{a}) \\ & \quad \cup\, ((0.1+1.25k)\bar{a}, (0.3+1.25k)\bar{a}), \end{cases} \qquad k \in \mathtt{N},$$

$\nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.1, \quad c(t) \equiv 40,$

$C_0 E_2 = 0.5522, \quad A_0 E_2 = 4, \quad \chi = 0.031\,(1/\text{сут}), \quad \psi = 0.06\,(1/\text{сут}).$

Как и ранее, в момент времени $\tau_0 = 10$ суток основание начинает взаимодействовать с системой из трех одинаковых штампов. Толщина нижнего слоя в 1.5 раза больше полуширин штампов, а расстояния между соседними штампами одинаковы и составляют четверть ширины каждого штампа. Толщина покрытия постоянна и в 100 раз меньше ширины штампа. Это означает, что

$$n = 3, \quad \lambda = 1.5, \quad \eta^2 - \eta^1 = \eta^3 - \eta^2 = 2.5, \quad h/\bar{a} = 0.01.$$

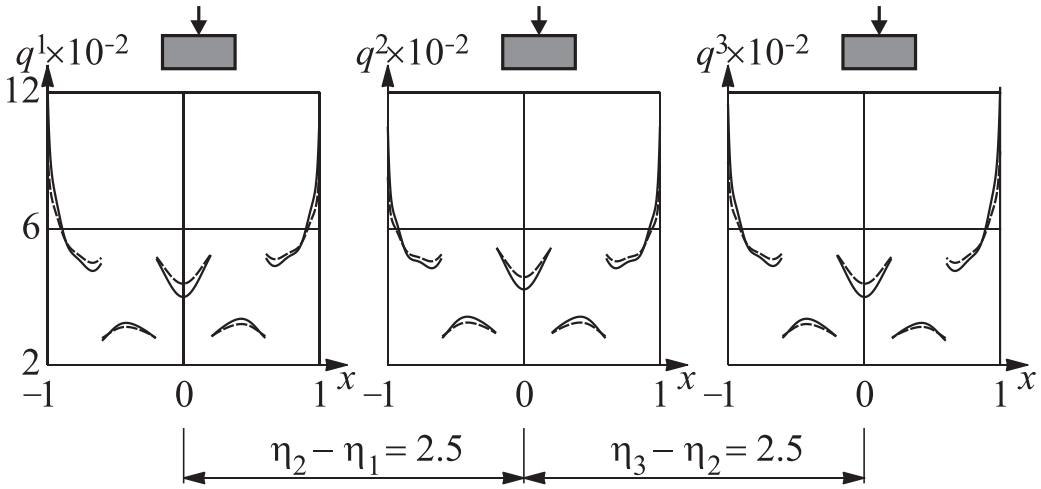
Профили штампов одинаковы и описывается функциями $g_i(x) \equiv g(x-\eta_i)$

$$\frac{g_i(x-\eta_i)}{\bar{a}} = 0.001\left[\frac{2(x-\eta_i)}{\bar{a}}\right]^2.$$

Тогда безразмерные функции $m(x)$ и $g^i(x)$ принимают вид

$$m(x) = \begin{cases} 0.005, & x \in [-1,-0.6] \cup [-0.2, 0.2] \cup [0.6, 1], \\ 0.01, & x \in (-0.6,-0.2) \cup (0.2, 0.6), \end{cases}$$

$$g^i(x) = 0.001x^2.$$



Фиг. 2.2. Контактные давления

Пусть ко всем штампам приложена одинаковая осевая постоянная сила: $P^1(t) = P^2(t) = P^3(t) \equiv 0.1$, $M^1(t) = M^2(t) = M^3(t) \equiv 0$. Графики контактных давлений в различные моменты времени представлены на рисунке 2.2 (графики, изображенные штриховыми линиями соответствуют начальному моменту времени, а графики, изображенные сплошными линиями, соответствуют $t \to \infty$). Видно, что неоднородность покрытия существенно влияет на вид графика контактных давлений, а построенное решение позволило уловить все особенности. Так как задача симметрична, то средний штамп не поворачивается, а крайние штампы наклоняются в сторону среднего на одинаковый угол (аналогично тому, как это было в примере, изображенном на рисунках 1.2 и 1.3).

Если же неоднородность будет описываться не симметричной функцией, то даже при приложении осевых нагрузок график давлений на среднем штампе станет несимметричным, а сам штамп наклонится.

Исследований поведения штампов на поверхностно неоднородном слое аналогичны тем, которые проводились для случая конформного контакта. Отличие состоит в том, что в случае неоднородного покрытия необходимо, чтобы верхний слой был упругим. Однако в случае неоднородного контакта функция $m(x)$ теперь уже может быть разрывной, в то время как при конформном контакте из физических соображений она была непрерывна.

2.7 Основные результаты и выводы

Подведем итоги проведенных во второй главе исследований.

1. Поставлены плоские задачи о контакте вязкоупругих стареющих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями и систем жестких штампов. Сформулированы 15 возможных вариантов постановки задачи.

2. Применен проекционный метод решения систем смешанных интегральных уравнений в конкретных случаях плоских задач множественного контакта тел с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярных систем жестких штампов.

3. Впервые построены аналитические решения для всех вариантов постановки задачи. В выражениях для контактных напряжений под штампом функция, описывающая неоднородность покрытия, выделена отдельным сомножителем, что позволяет проводить расчеты в случае, когда свойства покрытия описываются сложными быстро изменяющимися или даже разрывными функциями. Получены аналитические формулы для остальных неизвестных параметров задачи (силы, моменты, осадки и углы).

4. Рассмотрен модельный пример, демонстрирующий применение описанного подхода при решении контактной задачи для случая, когда покрытие состоит из различных материалов, а функция, описывающая его жесткость является разрывной.

Заключение

В заключении перечислим наиболее значимые результаты, полученные в диссертации, и сформулируем основные выводы.

1. Впервые решены плоские задачи множественного контакта регулярной системы жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с покрытием, форма которого совпадает с формами оснований штампов (то есть когда их профили согласованы) и описывается быстро изменяющейся функцией.

2. Рассмотрены 15 вариантов постановки задачи согласованного контакта. Для всех вариантов на основании проекционного метода получены аналитические формулы для неизвестных характеристик на каждом штампе (углов поворота, осадок штампов, приложенных нагрузок, моментов приложения нагрузок).

3. Впервые решены плоские задачи о контакте регулярной системы жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с поверхностно неоднородным покрытием, свойства которого описываются быстро изменяющейся функцией.

4. Рассмотрены 15 вариантов постановки задачи для поверхностно неоднородного основания. Для всех вариантов построено аналитическое решение для определения неизвестных характеристик контактного взаимодействия на каждом штампе.

5. Формы полученных решений содержат быстро изменяющиеся функции в явном виде. Это позволяет производить расчеты возникающих прикладных задач с высокой точностью для оснований, реальные свойства и форма которых описываются такими функциями, в то время как использование других известных методов приводит к существенным вычислительным ошибкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 237 с.

2. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 58–66.

3. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

4. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.

5. *Александров В.М., Сметанин Б.Н., Соболь Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1986. 224 с.

6. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.

7. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 304 с.

8. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Введение в механику контактных взаимодействий. Р.н/Д: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. 108 с.

9. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.* Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.

10. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э.* Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.

11. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В.* Контактные задачи теории ползучести. Ер.: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.

12. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

13. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.

14. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

15. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

16. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.

17. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 304 с.

18. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.

19. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 640 с.

20. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 352 с.

21. *Горячева И.Г., Добычин М. Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.

22. *Горячева И.Г., Солдатенков И.А.* Контактные задачи с учетом износа. М.: Физматлит, 2001. С. 438–458.

23. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

24. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.

25. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости. Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.

26. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Том третий. Часть II. Интегральные уравнения и вариационное исчисление. М.-Л.: ГТТИ, 1934. 318 с.

27. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.

28. *Довнорович В.И.* Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во БГУ, 1959. 107 с.

29. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

30. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел с покрытиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54). С. 176–196.

31. *Казаков К.Е., Манжиров А.В.* О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 227–240.

32. *Казаков К.Е., Курдина С.П.* Плоская контактная задача для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярной системы жестких штампов // Международная молодежная научная конференция «XLII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ». Секция № 4. «Механика и моделирование материалов и технологий». Материалы докладов. Москва, 12–15 апреля 2016 г. М.: ИПМех РАН, 2016. С. 27.

33. *Казаков К.Е., Манжиров А.В., Курдина С.П.* Контактное взаимодействие основания с шероховатым покрытием и регулярной системы штампов // Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения Героя Социалистического труда, лауреата Ленинской и Государственной премий СССР, члена-корреспондента АН СССР, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, доктора технических наук Всеволода Ивановича Феодосьева: сборник тезисов / Российская академия наук, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академи наук. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. С. 104–108.

34. *Казаков К.Е., Курдина С.П., Сабитова А.Х.* Контакт основания с поверхностно неоднородным покрытием и регулярной системы жестких штампов // Механика деформируемого твердого тела: сборник трудов IX Всероссийской конференции, Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2016. С. 20–23.

35. *Казаков К.Е., Курдина С.П.* Задача множественного контакта регулярной системы штампов и поверхностно неоднородного покрытия // МЕХАНИКА 2016: Труды международной школы-конференции молодых ученых, 3–7 октября 2016, Цахкадзор, Армения. Ер.: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, 2016. С. 67–70.

36. *Казаков К.Е., Курдина С.П.* О контакте тел с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярных систем штампов // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.): в 2 т. Т. 1. Р.н/Д: Издательство Южного Федерального Университета, 2016. С. 244–248.

37. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред. М.: Физматлит, 2006. 272 с.

38. *Кильчевский Н.А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1976. 320 с.

39. *Коваленко Е.В.* Контактные задачи для тел с покрытиями // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 459–475.

40. *Колмагоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 496 с.

41. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 576 с.

42. *Курдина С.П.* О согласованном осесимметричном контакте упругого основания с покрытием и системы кольцевых штампов // XXXVIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ. Научные труды Международной молодежной конференции в 8 томах. Москва, 10–14 апреля 2012 г. М.: МАТИ, 2012. Т. 1. С. 175–176.

43. *Курдина С.П.* Осесимметричный контакт тел с поверхностно неоднородными покрытиями и систем жестких штампов // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.: в 2 т. Т. II. Р.н/Д: Издательство Южного федерального университета, 2013. С. 41–45.

44. *Курдина С.П.* Плоская задача множественного контакта для вязкоупругих тел с неоднородными покрытиями // Труды XVII Международной конференции ББСовременные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г. в 2 т. Т. 2. Р.н/Д: Издательство Южного федерального университета, 2014. С. 75–80.

45. *Курдина С.П.* О конформном контакте системы штампов и тел с покрытиями // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VIII международной конференции. Сентябрь 22–26, 2014, Горис-Степанакерт. Армения. Ер.: Чартарагет, 2014. С. 276–280.

46. *Курдина С.П.* Задача множественного контакта для тел с поверхностно неоднородными покрытиями // Известия Самарского научного центра РАН. Специальный выпуск «Актуальные проблемы трибологии». 2015. Т. 17. № 1. С. 69–71.

47. *Лурье А.И* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 492 с.

48. *Лурье А.И* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

49. *Манжиров А.В., Коваленко Е.В.* Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 674–682.

50. *Манжиров А.В.* Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 684–693.

51. *Манжиров А.В.* Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ. 1983. № 5. С. 153–158.

52. *Манжиров А.В.* Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1019–1025.

53. *Манжиров А.В., Гришин С А.* Контактные задачи для тонкого слоя в условиях нелинейной установившейся ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 119–125.

54. *Манжиров А.В.* Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 670–685.

55. *Манжиров А.В.* О некоторых постановках и решениях контактные задач теории ползучести для произвольных систем штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 139–151.

56. *Манжиров А.В., Александров В.М.* О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ. 1987. № 5. С. 146–152.

57. *Манжиров А.В.* Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 549–565.

58. *Манжиров А.В., Казаков К.Е.* Плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих стареющих тел с поверхностно неоднородными покрытиями // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию со дня рождения Е. И. Шемякина. М.: Физматлит, 2006. С. 411–422.

59. *Манжиров А.В., Курдина С.П., Кухарский С.* О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. 2012. Т. 12. Вып. 4. С. 80–89.

60. *Манжиров А.В.* Контактные задачи для оснований с произвольно неоднородными покрытиями // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3(21). С. 1–13.

61. *Манжиров А.В., Курдина С.П., Казаков К.Е., Федотов И.* Согласованный контакт вязкоупругого основания с шероховатым покрытием и системы одинаковых жестких штампов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4(26). С. 26–38.

62. *Манжиров А.В.* Смешанное интегральное уравнение механики и обобщенный проекционный метод его решения // ДАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 401–405.

63. Механика в СССР за 30 лет (1917–1947). М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 416 с.

64. Механика в СССР за 50 лет. В 4 томах. М.: Наука, 1972.

65. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.

66. *Морозов Е.М., Зернин М.В.* Контактные задачи механики разрушения. М.: Машиностроение, 1999. 544 с.

67. *Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С.* Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наукова думка, 1985. 176 с.

68. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1933.

69. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 448 с.

70. *Никишин В.С., Шапиро Г.С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Наука, 1969. 132 с.

71. *Панасюк В.В., Теплий М.Й.* Деякі контактні задачі теорії пружності. Київ: Наукова думка, 1975. 196 с.

72. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.

73. *Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.

74. *Попов Г.Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: Вища школа, 1982. 168 с.

75. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.

76. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.

77. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.

78. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.

79. *Саркисян В.С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос. Ереван: Ереван. ун-т, 1983. 260 с.

80. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962. 500 с.

81. *Сеймов В.М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976. 284 с.

82. *Солдатенков И.А.* Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. М.: Физматлит, 2010. 160 стр.

83. *Теплый М.И.* Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Вища школа, 1983. 176 с.

84. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.

85. *Флорин В.А.* Определение напряженного состояния упругого основания // Сб. Гидростройпроекта, вып. 1. М.: Госэнергоиздат, 1936. С. 21–34.

86. *Чаплыгин С.А.* Давление жесткого штампа на упругое основание // Собрание сочинений. Т. 3. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.

87. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.

88. *Alexandrov V.M., Pozharskii D.A.* Three-Dimensional Contact Problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.

89. *Bažant Z.P.* Mathematical models for creep and shrinkage of concrete // Creep and shrinkage in concrete structures / Ed. by Z.P. Bažant and F.H. Wittmann. London: John Wiley & Sons Ltd., 1982. P. 163–256.

90. *Boussinesque J.* Applications des potentiels á l'tude de l'quilibre et d. mouvement des solides elastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885. 772 p.

91. *Gladwell G.M.L.* Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity Sijthoff & Noordhoff, 1980. 716 p.

92. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dortrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1998. 360 p.

93. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper (On contact problem of elastic solids) // J. Reine Angew. Math. 1882. 92. P. 156–171.

94. *Hertz H.* Gesammelte Werke. Bd. I. Leipzig, 1895.

95. *Flamant A.* Sur la repartition des pressions dans un solide rectangulaire charge transversalement // Compt. Rendus. 1892. Vol. 114. P. 1465–1468.

96. *Kazakov K.E.* Modeling of contact interaction for solids with inhomogeneous coatings // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. Vol. 181. 012013.

97. *Kazakov K., Kurdina S., Manzhirov A.* Multibody contact problems for discretely growing systems // IUTAM Symposium on Growing solids. Symposium materials. M.: IPMech RAS, 2015. P. 39–42.

98. *Kazakov K.E., Kurdina S.P.* Indentation of the regular system of punches into the foundation with rough coating // Mechanics for Materials and Technologies / Ed. by H. Altenbach, R.V. Goldstein, E. Murashkin. Advanced Structured Materials. Vol. 46. Springer. 2017. В печати.

99. *Kazakov K.E., Kurdina S.P., Manzhirov A.V.* Contact interaction between surface inhomogeneous foundations and systems of rigid punches // Procedia IUTAM. 2017. Vol. 23. P. 201–209.

100. *Liapounoff A.* Sur les figures d'équilibre. Pt. 3. St.-Pétersbourg, 1912.

101. *Manzhirov A.V.* Integral equations with several different operators and their application to mechanics // Lect. Notes Engng Comput. Sci. 2016. Vol. 2224 (1). P. 10–15.

102. *Manzhirov A.V. Kazakov K.E.* Contact problem for a foundation with a rough coating // Lect. Notes Engng Comput. Sci. 2016. Vol. 2224 (1). P. 877–882.

103. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Integral Equations, Second Edition. Boca Raton–London: Chapman & Hall/ CRC, 2008. 1144 p.

104. *Sadowski M.L.* Zweidumentionale Probleme der Elastizitätstheorie // ZAMM. 1928. Bd. 8. №2. P. 107–121.