

На правах рукописи



КУРДИНА СВЕТЛАНА ПАВЛОВНА

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ
С ПОКРЫТИЯМИ ПРИ ОПИСАНИИ ИХ
НЕОДНОРОДНОСТИ И ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ
БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ФУНКЦИЯМИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский технологический университет».

Научный руководитель:

иностраннный член НАН Республики Армении,
доктор физико-математических наук,
профессор Манжиров Александр Владимирович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Коссович Леонид Юрьевич,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»;

доктор физико-математических наук,
профессор Пожарский Дмитрий Александрович,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Донской государственный технический
университет»

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Защита состоится 21 марта 2018 г. в 14 часов на заседании Диссертационного совета Д 212.101.07 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Кубанский государственный университет» (ФГБОУ ВО КубГУ) по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, д. 49.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кубанский государственный университет» (ФГБОУ ВО КубГУ) по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, д. 49, <http://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>.

Автореферат разослан 15 января 2018 г.

Ученый секретарь

Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

М.В. Зарецкая

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию новых задач механики контактного взаимодействия вязкоупругих стареющих тел с покрытиями и систем штампов. В диссертации устанавливаются закономерности эволюции контактных характеристик оснований с неоднородными покрытиями и с покрытиями, имеющими сложную форму поверхности.

Актуальность темы. Описанные задачи актуальны как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения практических приложений. Практическая значимость таких исследований связана с необходимостью учета неоднородности или форм поверхностей, так как подобные свойства приобретаются за счет, например, поверхностной обработки и особенностей изготовления контактирующих тел и могут вносить существенный вклад в характер поведения контактирующих тел. В теоретическом плане такие задачи интересны тем, что для их решения необходимо усовершенствовать старые и разрабатывать новые методы решения систем смешанных интегральных уравнений (т.е. интегральных уравнений, содержащих как интегралы с постоянными пределами интегрирования, так и интегралы с переменными пределами интегрирования), в состав которых входят быстро изменяющиеся функции. Математическое моделирование контактного взаимодействия дает возможность проводить численные эксперименты для выбора необходимых материалов слоя с целью упрочнения основания либо для управления поведением штампов на слое.

Цель диссертационной работы состоит в исследовании новых задач механики контактного взаимодействия вязкоупругих стареющих тел с покрытиями и систем штампов, установлении закономерности эволюции контактных характеристик с неоднородными покрытиями и с покрытиями, имеющими сложную форму поверхности.

Целями и задачами данной работы являются постановка и исследование плоских задач множественного контакта упругих и вязкоупругих тел с покрытиями, форма которых совпадает с формами оснований штампов (согласованный контакт), либо с поверхностно неоднородными покрытиями в случае, когда формы и неоднородности описываются быстро изменяющимися функциями; развитие обобщенного проекционного метода решения систем смешанных интегральных уравнений; формулировка выводов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построение аналитического решения плоской задачи множественного контакта регулярной системы одинаковых жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с покрытием, форма которого совпадает с формами оснований штампов (т.е. когда их профили согласованы).

2. Построение аналитического решения плоской задачи множественного контакта регулярной системы одинаковых жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с поверхностно неоднородным (продольно неоднородным в плоском случае) покрытием, т.е. покрытием, свойства которого не меняются по глубине, но зависят от продольной координаты.

3. Применение проекционного метода для решения систем смешанных интегральных уравнений в контактных задачах для тел с покрытиями.

4. Анализ полученных результатов, формулировка выводов.

Научная новизна диссертации состоит в том, что в ней впервые рассмотрены задачи множественного контакта, учитывающие поверхностную неоднородность покрытий и согласованность контакта. Для построения аналитических решений поставленных задач применен обобщенный проекционный метод А.В. Манжирова. Исследованы механические эффекты связанные с множественностью контакта, сильной неоднородностью покрытий и учетом сложной формы контактирующих поверхностей.

Методы исследования представленных в диссертации задач опираются на современные методы контактной механики и, в частности, на теорию контактного взаимодействия тел с покрытиями, результаты и подходы математического и функционального анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью вышеописанных математических методов при построении аналитических решений задач. Сформулированные результаты допускают физическую и геометрическую интерпретацию и соответствуют представлениям о протекающих процессах и поведении контактирующих тел.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в работе, были представлены и обсуждались на следующих российских и международных конференциях: Международной молодежной научной конференции «XXXVIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ» (Москва, 2012); III Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Цахкадзор, Армения, 2012); VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела (с международным участием) (Ростов-на-Дону, 2013); XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2014); VIII международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис-Степанакерт, Армения, 2014); Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы трибологии технологических, энергетических и транспортных машин» (Самара, 2014); Международном симпозиуме IUTAM Symposium on Growing solids (Москва, 2015); XLII Междуна-

родной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2016); Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева (Москва, 2016); IX Всероссийской конференции «Механика деформируемого твердого тела» (Воронеж, 2016); Международной школе-конференции молодых ученых МЕХАНИКА-2016 (Цахкадзор, Армения, 2016); Научной конференции «Проблемы прочности, динамики, ресурса и оптимизации», посвященной 80-летию со дня рождения В.П. Малкова (Нижний новгород, 2016).

Большинство исследований выполнено в рамках проектов, финансируемых Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00991 а, № 16-31-00329 мол_а) и Министерства образования и науки РФ (тема 1.2640.2014).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 15 научных работах, в их числе 5 статей в рецензируемых журналах и сборниках из Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Список использованной литературы включает 104 наименования. Общий объем диссертационной работы составляет 121 страницу.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** в *разделе 0.1* обосновывается актуальность проведенных исследований и степень проработанности выбранного научного направления, приводится краткий обзор важнейших работ по механике контактного взаимодействия тел, формулируются цели и задачи диссертации. *Раздел 0.2* посвящен описанию структуры работы и ее содержания, основным особенностям и используемым методам, приводятся краткие описания поставленных в диссертации задач. В *разделе 0.3* приводятся известные решения двух основополагающих задач: задачи о равновесии однородного слоя произвольной толщины под действием распределенной нагрузки и задачи о равновесии тонкого неоднородного слоя под действием распределенной нагрузки. В *разделе 0.4* описывается эффективный проекционный метод А.В. Манжирова, позволяющий находить решения смешанных интегральных уравнений, содержащих как интегральные операторы Вольтерра, так и интегральные операторы Фредгольма:

$$c(t)m(x)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)y(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{G}y(x, t) = f(x, t),$$

$$\int_{\Omega} y(\xi, t) f_l(\xi) d\Omega_{\xi} = M_l(t), \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

$$f(x, t) = \sum_{l=1}^N \alpha_l(t) f_l(x) - g(x, t), \quad \mathbf{G}f(x, t) = \int_{\Omega} k(x, \xi) f(\xi, t) d\Omega_{\xi},$$

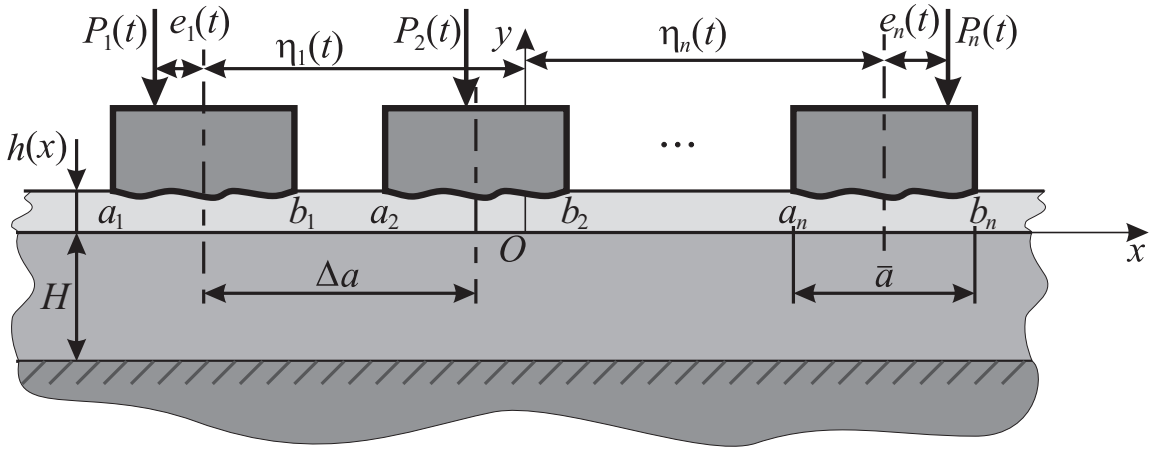
$$x \in \Omega, \quad t \in [\tau_0, T].$$

Здесь $c(t) \in C(\tau_0, T)$, $m(x) \in L_2(\Omega)$, $g(x, t) \in L_2(\Omega) \times C(\tau_0, T)$ — заданные функции, $y(x, t) \in L_2(\Omega) \times C(\tau_0, T)$, $\alpha_l(t) \in C(\tau_0, T)$ ($l = 1, 2, \dots, N$) — искомые функции; Ω — ограниченное замкнутое множество в \mathbb{R} (отрезок); $\{f_l(x)\}_{l=1,2,\dots,N}$ ($f_l(x) \in L_2(\Omega)$) — система N линейно независимых функций; \mathbf{I} — тождественный оператор; \mathbf{L}_i ($i = 1, 2$) — интегральные операторы Вольтерра с непрерывными либо полярными ядрами $K_i(t - \tau_0, \tau - \tau_0) \in C(\tau_0, T) \times C(\tau_0, T)$; $\mathbf{G}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный оператор с ядром $k(x, \xi) \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Описываемый метод позволяет не только находить решения задач с неполной информацией о правой части интегрального уравнения, но и получать новое эффективное аналитическое решение уравнения Фредгольма второго рода, в котором задана правая часть. Это решение отличается от изложенного в книге Гурса классического. Развитие этого метода позволяет находить решения поставленных в диссертационной работе задач.

В **главе 1** исследуются плоские задачи контакта систем одинаковых жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с тонким покрытием в случае, когда формы поверхностей штампов повторяют форму покрытий, то есть осуществляется конформный контакт. Такие задачи возникают, например, в случаях, когда в еще незатвердевшее покрытие без напряжения погружаются штампы, а затем, после отверждения, эти штампы отсоединяются. В результате форма покрытия и формы штампов в точности совпадают. В качестве таких материалов для таких покрытий могут выступать многие полимеры, бетон в молодом возрасте и т. п.

Для такой задачи контакта возможны 15 вариантов формулировок. Для всех вариантов формулировок поставлены задачи, выписаны разрешающие смешанные интегральные уравнения и при помощи обобщенного проекционного метода построены их аналитические решения. Решен ряд модельных примеров, включающих случаи, когда формы штампов и поверхностей задаются быстро изменяющимися функциями. Исследовано влияние сложных форм поверхностей на кинематические характеристики штампов и на распределение напряжений в области контакта.

В *разделе 1.1* главы 1 дается постановка плоской задачи множественного согласованного контакта для вязкоупругого основания с покрытием и систе-



Фиг. 1. Множественный конформный контакт для тел с покрытиями

мы жестких штампов. Однородный стареющий вязкоупругий слой толщины H , изготовленный в момент времени τ_2 , лежит на подстилающем недеформируемом основании. Между слоем и подстилающим основанием осуществляется либо идеальный контакт, либо гладкий. На слое располагается тонкое вязкоупругое стареющее покрытие, изготовленное в момент времени τ_1 из материала, отличного от материала основного слоя. Жесткость основного слоя не ниже жесткости покрытия, а между ними также либо гладкий, либо идеальный контакт. Толщина покрытия $h(x)$ является переменной величиной, однако в данной работе считается, что функция $h(x)$ периодична (период равен величине Δa).

В момент времени $\tau_0 \geq \max\{\tau_1, \tau_2\}$ на описанный пакет слоев начинает действовать система n одинаковых жестких штампов шириной \bar{a} . Расстояние между осями соседних штампов равно Δa (система штампов регулярна). Формы штампов в точности совпадают с формами покрытий под ними, то есть осуществляется конформный контакт. Считается также, что толщина покрытия $h(x)$ много меньше ширины области контакта \bar{a} ; области контакта имеют ширины \bar{a} и со временем не изменяются. Рассматривается случай плоской деформации. Под воздействием нагрузки вышеописанное основание деформируется, а штампы перемещаются и поворачиваются. Схема контактного взаимодействия представлена на рисунке 1.

Показано, что уравнения математической модели такого контактного взаимодействия представляют из себя систему смешанных интегральных урав-

нений и дополнительный условий вида

$$\begin{aligned}
& k_\nu h(x)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) \frac{q_i(x, t)}{E_1(t - \tau_1)} + \\
& + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \frac{1}{E_2(t - \tau_2)} \int_{a_j}^{b_j} k_{\text{пл}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right) q_j(\xi, t) d\xi = \\
& = \delta_i(t) + \alpha_i(t)(x - \eta_i), \\
& \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t)(\xi - \eta_i) d\xi = e_i(t)P_i(t) \equiv M_i(t), \\
& x \in [a_i, b_i], \quad t \geq \tau_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{1}$$

где a_i, b_i — левая и правая координаты i -го штампа, $\eta_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$ — средняя точка i -го штампа; $q_i(x, t)$ — контактное давление под i -м штампом, $P_i(t)$ — сила, которая действует с момента времени τ_0 на i -й штамп, $e_i(t)$ — эксцентриситет ее приложения; $\nu_k, E_k(t - \tau_k)$ — коэффициенты Пуассона и модули упругомгновенной деформации покрытия ($k = 1$) и нижнего слоя ($k = 2$); k_ν — коэффициент, величина которого зависит от условий сцепления между покрытием и нижним слоем ($k_\nu = (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)/(1 - \nu_1)$ при сцеплении и $k_\nu = 1 - \nu_1^2$ при гладком контакте), \mathbf{I} — тождественный оператор; \mathbf{L}_k — интегральные операторы Вольтерра с ядрами $K^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$); $k_{\text{пл}}(s)$ — ядро плоской контактной задачи, которое зависит от условий на границе нижнего слоя и недеформируемого подстилающего основания; $\delta_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ — осадка и угол поворота i -го штампа.

Полученную систему уравнений с дополнительными условиями (1) заменой переменных можно привести к единственному операторному уравнению с двумя векторными дополнительными условиям

$$\begin{aligned}
& c(t)m(x)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)\mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{G}\mathbf{q}(x, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x, \\
& \int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t) d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t)\xi d\xi = \mathbf{M}(t), \quad x \in [-1, 1], \quad t \geq 1,
\end{aligned} \tag{2}$$

в котором $\mathbf{q}(x, t) = q^i(x, t)\mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t)\mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{P}(t) = P^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{M}(t) = M^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{k}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi)\mathbf{i}^i\mathbf{j}^j$, $\mathbf{G}\mathbf{f}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{k}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi$, а функция $m(x)$ пропорциональна толщине покрытия. Всюду считается, что по верхним повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до n в случае, когда другая часть формулы не зависит от этого индекса.

На любом штампе возможен один из четырех типов условий:

тип 1, известны осадка штампа и его угол поворота;

- тип 2, известны осадка штампа и момент приложения силы;
- тип 3, известны угол наклона штампа и приложенная сила;
- тип 4, известны приложенная сила и момент.

Несомненно, на каждом штампе возможен свой набор условий, независимо от того, какие условия ставятся на других штампах. Несложно показать, что существует 15 различных вариантов постановки задачи: 1) когда на всех штампах заданы условия одного типа, то говорят об одной группе штампов; таких постановок всего ($C_4^1 = 4$); 2) когда на части штампов заданы одни условия, а на другой части — другие, то говорят о двух группах штампов; таких постановок всего 6 ($C_4^2 = 6$); 3) существует 4 ($C_4^3 = 4$) постановки, когда штампы делятся на 3 группы штампов с различными типами условий; 4) и, наконец, существует одна постановка ($C_4^4 = 1$), когда можно выделить 4 группы штампов. Необходимо по известным данным определить недостающие величины, а также контактные давления под штампами.

Независимо от того, решение для какой из 15 задач будет строиться, операторное уравнение и систему дополнительных условий (2) необходимо привести к виду

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)\mathbf{Q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{F}\mathbf{Q}(x, t) = \frac{\delta(t) + \alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}}, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathbf{Q}(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{Q}(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi = \mathbf{M}(t), \quad x \in [-1, 1], \quad t \geq 1, \quad (4)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x, t) &= \sqrt{m(x)}\mathbf{q}(x, t), \quad \mathbf{K}(x, \xi) = \frac{\mathbf{k}(x, \xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}}, \\ \mathbf{F}\mathbf{f}(x) &= \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Такое представление удобно тем, что функция $m(x)$ отсутствует в явном виде в левой части уравнения. В случае, когда основание изготовлено из упругих материалов и на него действует единственный штамп, операторы $\mathbf{I} - \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{I} - \mathbf{L}_2$ будут отсутствовать и мы получим классическое уравнение Фредгольма второго рода с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта.

Какую бы из 15 постановок задачи мы ни рассматривали, решение операторного уравнения с дополнительными условиями мы будем искать классе вектор-функций непрерывных по времени t в гильбертовом простран-

стве $L_2([-1, 1], V)$. Так как в результирующее операторное уравнение и дополнительные условия входит функция $\sqrt{m(x)}$, связанная формой основания штампа и формой покрытия, следует учитывать то, что эта функция может быть быстро изменяющейся. Использование базиса, в структуру которого входит функция $\sqrt{m(x)}$, эффективнее, чем применение какого-либо стандартного базиса (например, классических полиномов Лежандра). Систему ортонормированных базисных вектор-функций, удовлетворяющих описанному условию, можно построить по следующему правилу

$$\mathbf{p}_k^i(x) = \frac{\mathbf{p}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \mathbf{p}_k^{i*}(x) = p_k^*(x)\mathbf{i}^i, \quad d_{-1} = 1, \quad J_k = \int_{-1}^1 \frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)},$$

$$d_k = \begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k & \cdots & J_{2k} \end{vmatrix}, \quad p_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ J_{k-1} & J_k & \cdots & J_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$$x \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Отметим, что если толщина покрытия постоянна, то $m(x) = \text{const}$, а базисные функции $p_k^i(x)$ являются ортонормированными полиномами Лежандра.

Для некоторых вариантов задач будет необходимо использовать чуть другую систему базисных функций, в которой система $\{1/\sqrt{m(x)}, x/\sqrt{m(x)}, x^2/\sqrt{m(x)}, x^3/\sqrt{m(x)}, \dots\}$ ортонормируется в другой последовательности. В ней в качестве первой функции берется $x/\sqrt{m(x)}$, а лишь затем $\{1/\sqrt{m(x)}, x^2/\sqrt{m(x)}, x^3/\sqrt{m(x)}, \dots\}$. Такая система может быть построена по правилу

$$\hat{\mathbf{p}}_k^i(x) = \frac{\hat{\mathbf{p}}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \hat{\mathbf{p}}_k^{i*}(x) = \hat{p}_k^*(x)\mathbf{i}^i, \quad \hat{p}_m^*(x) = p_m^*(x),$$

$$\hat{p}_0^*(x) = \frac{x}{\sqrt{J_2}} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}p_0^*(x) + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}}p_1^*(x), \quad (7)$$

$$\hat{p}_1^*(x) = \frac{J_2 - J_1x}{\sqrt{J_2(J_0J_2 - J_1^2)}} = \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0J_2}}p_0^*(x) - \frac{J_1}{\sqrt{J_0J_2}}p_1^*(x),$$

$$x \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 2, 3, 4, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где функции $p_k^*(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) задаются формулами (6).

И, наконец, в тех вариантах задач, в которых на части штампов (при $i_1 = 1, 2, \dots, n_1$) необходимо использовать систему (6), а на другой части (при $i_2 = n_1 + 1, n_2 + 1, \dots, n$) — систему (7), система базисных функций будет

строиться по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}}_k^i(x) &= \frac{\tilde{\mathbf{p}}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_k^{i_1*}(x) = \hat{p}_k^*(x)\mathbf{i}^{i_1}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_k^{i_2*}(x) = p_k^*(x)\mathbf{i}^{i_2}, \\ x &\in [-1, 1], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad i_1 = 1, 2, \dots, n_1, \quad i_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n,\end{aligned}\tag{8}$$

где функции $p_k^*(x)$ и $\hat{p}_k^*(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) задаются формулами (6) и (7).

Решение всех вариантов задач строится на основании развития обобщенного проекционного метода, который, как было показано в параграфе §0.4, позволяет получать последовательность независимых интегральных уравнений Вольтера вместо бесконечных систем интегральных уравнений Вольтера, к которым приводит метод разделения переменных Фурье и другие классические методы.

Раздел 1.2 посвящен подробному описанию решения поставленной в разделе 1.1 задачи в случае одной группы штампов. В §1 этого раздела детально рассмотрен случай, когда на всех штампах заданы осадки и углы поворота; §2 посвящен решению задачи в случае известных сил и моментов; в §3 и §4 решаются задачи при известных силах и углах поворота либо моментах и осадках штампов.

Применение обобщенного проекционного метода наиболее детально представлено в §2. Построение решения в этом случае приведем ниже.

Пусть известны силы $P^i(t)$, действующие на штампы, и моменты $M^i(t)$ приложения этих сил, а осадки штампов $\delta^i(t)$ и углы их поворота $\alpha^i(t)$ необходимо найти. Пространство $L_2([-1, 1], V)$ представим в виде прямой суммы евклидова пространства $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}_{i=1,2,\dots,n}$, и ортогонального ему гильбертова пространства $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ с базисом $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}_{k=2,3,4,\dots;i=1,2,\dots,n}$, то есть $L_2([-1, 1], V) = L_2^{(0)}([-1, 1], V) \oplus L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Тогда неизвестная вектор-функция $\mathbf{Q}(x, t)$ и правая часть уравнения (3) могут быть представлены как алгебраическая сумма вектор-функций, определенных в пространствах $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$:

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_0(x, t) + \mathbf{Q}_1(x, t), \quad \frac{\boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x}{\sqrt{m(x)}} = \boldsymbol{\Delta}_0(x, t) + \boldsymbol{\Delta}_1(x, t), \tag{9}$$

где $\mathbf{Q}_0(x, t), \boldsymbol{\Delta}_0(x, t) \in L_2^{(0)}([-1, 1], V)$, $\mathbf{Q}_1(x, t), \boldsymbol{\Delta}_1(x, t) \in L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ и справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_0(x, t) &= z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x) + z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x), \\ \boldsymbol{\Delta}_0(x, t) &= \left[\sqrt{J_0}\delta^i(t) + \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\alpha^i(t) \right] \mathbf{p}_0^i(x) + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\alpha^i(t)\mathbf{p}_1^i(x).\end{aligned}\tag{10}$$

Заметим, что в представлении $\mathbf{Q}(x, t)$ нам известно слагаемое $\mathbf{Q}_0(x, t)$, функции разложения которого $z_l^i(t)$ ($l = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$) определяются дополнительными условиями (4)

$$\begin{aligned} z_0^i(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} P^i(t), \\ z_1^i(t) &= \frac{-J_1}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}} P^i(t) + \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}} M^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (11)$$

а слагаемое $\mathbf{Q}_1(x, t)$ подлежит определению. В правой части $\mathbf{\Delta}_1(x, t) \equiv \mathbf{0}$, а требуется определить $\mathbf{\Delta}_0(x, t)$. Для нахождения неизвестной вектор-функции $\mathbf{Q}_1(x, t)$ введем ортогональные проекторы $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$, которые отображают гильбертово пространство $L_2([-1, 1], V)$ на подпространства $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$, соответственно:

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{f}(x) = \left(\int_{-1}^1 \mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{p}_0^i(\xi) d\xi \right) \mathbf{p}_0^i(x) + \left(\int_{-1}^1 \mathbf{f}(\xi) \cdot \mathbf{p}_1^i(\xi) d\xi \right) \mathbf{p}_1^i(x), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0.$$

Очевидно, что имеют место соотношения

$$\mathbf{P}_l \mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_l(x, t), \quad \mathbf{P}_l \mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_l(x, t), \quad l = 0, 1.$$

Поддействовав оператором \mathbf{P}_1 на (3), получим операторное уравнение, правая часть которого известна

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) \mathbf{Q}_1(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \mathbf{P}_1 \mathbf{F} \mathbf{Q}_1(x, t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \mathbf{P}_1 \mathbf{F} \mathbf{Q}_0(x, t). \quad (12)$$

Его решение стоится в виде разложения по собственным функциям получившегося оператора $\mathbf{P}_1 \mathbf{F}$. Можно показать, что он является вполне непрерывным, симметричным и положительно определенным оператором из $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ в $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$, а его система собственных функций является базисом пространства $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$. Поставив для него спектральная задачу

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{F} \boldsymbol{\varphi}_k(x) = \gamma_k \boldsymbol{\varphi}_k(x), \quad \boldsymbol{\varphi}_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^i(x), \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

получим бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов разложения ψ_{km}^i

$$\sum_{l=2}^{\infty} K_{ml}^{ij} \psi_{kl}^j = \gamma_k \psi_{km}^i, \quad k, m = 2, 3, 4, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

где коэффициенты разложения ядра $\mathbf{K}(x, \xi)$ определяются из соотношений

$$K_{ml}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{p}_m^i(x) \cdot \mathbf{K}(x, \xi) \mathbf{p}_l^j(\xi) dx d\xi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{p_m^*(x) k^{ij}(x, \xi) p_l^*(\xi)}{m(x)m(\xi)} dx d\xi, \quad (14)$$

$$m, l = 0, 1, 2, \dots, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Представив функцию $\mathbf{Q}_1(x, t)$ в виде разложения по $\{\varphi_k(x)\}_{k=2,3,4,\dots}$, то есть

$$\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x), \quad (15)$$

и подставив это представление в (12), получим уравнение для определения функций $z_k(t)$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)z_k(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\gamma_k z_k(t)] \varphi_k(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \Delta_k(t) \varphi_k(x),$$

где $\Delta_k(t)$ — функциональные коэффициенты разложения вектор-функции $-(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x, t)$, стоящей в правой части уравнения (12), и определяемые соотношениями

$$\Delta_k(t) = - \int_{-1}^1 (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x, t) \cdot \varphi_k(x) dx = -(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)[K_{0k}^i z_0^i(t) + K_{1k}^i z_1^i(t)].$$

$$K_{lk}^i = \sum_{m=2}^{\infty} K_{lm}^{ij} \psi_{km}^j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad l = 0, 1, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Тогда

$$z_k(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\Delta_k(t)}{c(t) + \gamma_k},$$

$$\mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвенты ядер $[c(t)K^1(t, \tau) + \gamma_k K^2(t, \tau)]/[c(t) + \gamma_k]$. Подставляя функции $z_k(t)$ в (15) и учитывая представления (9), (10), выражения (11), замены (5) и формул для базисных функций (6), получим

$$\mathbf{q}(x, t) = \frac{1}{m(x)} \left[z_0^i(t) \mathbf{p}_0^{i*}(x) + z_1^i(t) \mathbf{p}_1^{i*}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \Phi_k(x) \right],$$

где

$$\Phi_k(x) = \sqrt{m(x)} \varphi_k(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi_{km}^i \mathbf{p}_m^{i*}(x), \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

В выражении для контактных давлений отдельным сомножителем выделена функция $m(x)$, связанная с толщиной покрытия и формой оснований штампов.

Определив функцию распределения давлений $\mathbf{Q}(x, t)$ можно найти и осадки и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором \mathbf{P}_0 на уравнение (2):

$$\begin{aligned} & c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x) + z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x)] + \\ & + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{P}_0\mathbf{F} \left[z_0^i(t)\mathbf{p}_0^i(x) + z_1^i(t)\mathbf{p}_1^i(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(x) \right] = \\ & = \left[\sqrt{J_0}\delta^i(t) + \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\alpha^i(t) \right] \mathbf{p}_0^i(x) + \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\alpha^i(t)\mathbf{p}_1^i(x), \end{aligned}$$

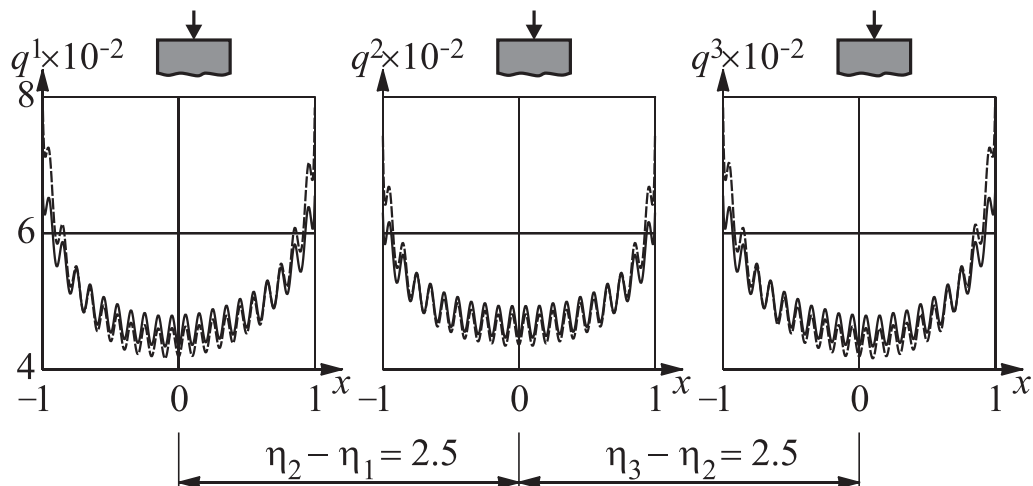
Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \alpha^i(t) &= \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}} \left\{ c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)z_1^i(t) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \left[K_{10}^{ij}z_0^j(t) + K_{11}^{ij}z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{1k}^i z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta^i(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)z_0^i(t) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \left[K_{00}^{ij}z_0^j(t) + K_{01}^{ij}z_1^j(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_{0k}^i z_k(t) \right] \right\} - \frac{J_1}{J_0}\alpha^i(t), \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Разделы 1.3–1.5 посвящены решению задач для двух, трех и четырех групп штампов. Их решения строятся аналогично тому, как это было описано выше. Отметим лишь, что решение для четырех групп штампов является наиболее общим и все остальные случаи являются частными по отношению к нему.

Численные расчеты взаимодействия оснований с покрытиями и систем штампов, профили которых согласованы, представлены в *разделе 1.6*. Отмечено, что величина приложенной силы не влияет на вид графика распределения контактных давлений. Из графиков видно, что профиль покрытия вносит существенный вклад в вид графика контактных давлений (рис. 2), а построенное решение позволило уловить все особенности. Даже в случае одинаковых форм покрытия под штампами и одинаково приложенных нагрузок, все штампы ведут себя по-разному (рис. 3 и 4). Это объясняется взаимовлиянием штампов друг на друга. Если бы расстояние между штампами значительно превышало их ширины, то все графики были бы идентичны.



Фиг. 2. Контактные давления

Зачастую бывает необходимо обеспечить заданные углы поворота штампов при известных приложенных силах. Такая задача актуальна, например, при строительстве объектов недвижимости в непосредственной близости друг от друга, когда крены зданий стремятся свести к минимуму; при такой постановке необходимо, чтобы все углы поворота тождественно обращались в ноль. В диссертации показано, что такого эффекта можно добиться, если регулировать моменты приложения сил.

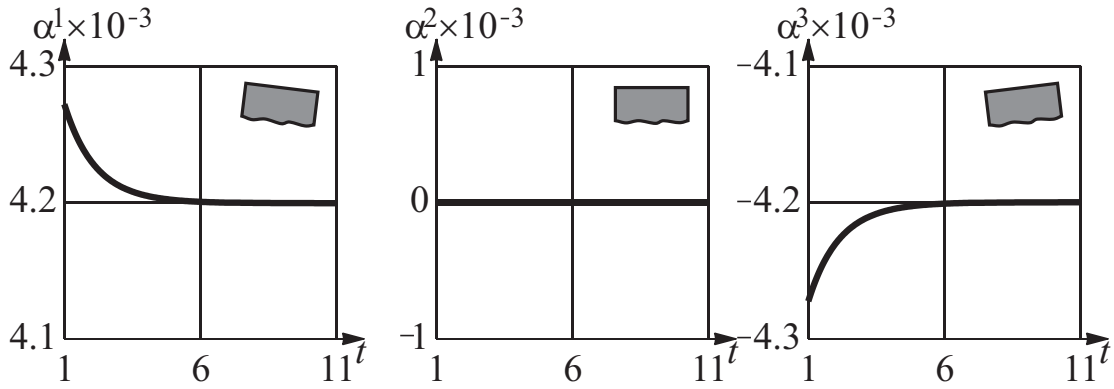
Приведенные расчеты показывают, что построенное в этом главе решение позволяет учесть одновременно множество факторов: вязкоупругие свойства материалов основания, взаимное влияние штампов, быстроизменяющиеся профили контактирующих поверхностей.

В *разделе 1.7* сформулированы основные результаты и выводы, относящиеся к первой главе.

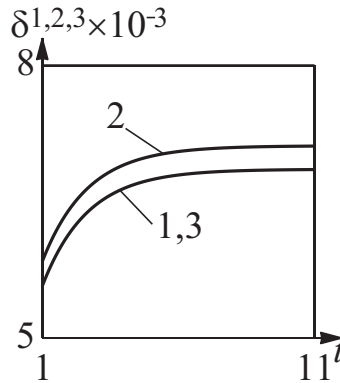
Глава 2 посвящена исследованию плоских задач контакта систем жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с поверхностно неоднородным тонким покрытием, то есть таким покрытием, свойства которого не меняются по глубине, но зависят от продольной координаты. Поверхностная неоднородность обуславливается особенностями нанесения покрытия на нижний слой, обработкой поверхностных слоев (травление, лазерная обработка, термическая обработка, ионная имплантация и т. д.). Неоднородность может быть связана с использованием материалов с различными свойствами при изготовлении покрытий.

Как и в случае задачи о согласованном контакте, для такой задачи также существуют 15 различных постановок. Решения для всех 15 постановок получены и представлены в настоящем разделе. Проведены численные расчеты. Сделаны качественные выводы.

В *разделе 2.1* ставится плоская задачи множественного контакта вязко-



Фиг. 3. Углы поворота штампов



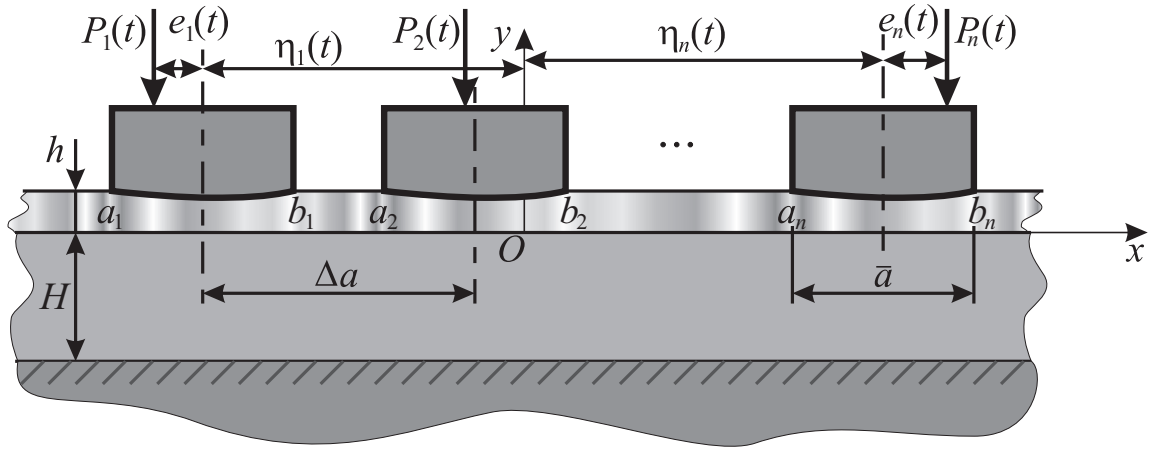
Фиг. 4. Осадки штампов

упругого основания с поверхностно неоднородным упругим покрытием и системы регулярных штампов. Постановка задачи аналогична постановке для случая согласованного контакта за исключением следующих аспектов:

- 1) покрытие имеет постоянную толщину h ;
- 2) покрытие изготовлено из упругого материала, свойства которого меняются от точки к точке поверхности, то есть его контактная жесткость описывается функцией $R(x)$; при этом рассматривается случай, когда функция $R(x)$ периодична (период равен Δa);
- 3) формы оснований штампов задаются функциями $g_i(x)$, которые, фактически, описывают зазор (расстояние) между i -м штампом и покрытием в недеформированном состоянии ($g_i(x) \equiv g(x) \geq 0$, $\exists x_{0i} \in [a_i, b_i]: g_i(x_{0i}) = 0$; $x \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$).

Схема контактного взаимодействия представлена на рисунке 5.

Показано, что уравнения математической модели такого контактного взаимодействия представляют из себя систему смешанных интегральных урав-



Фиг. 5. Множественный контакт для тел с неоднородными покрытиями

нений и дополнительный условий вида

$$h \frac{q_i(x, t)}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \frac{1}{E_2(t - \tau_2)} \int_{a_j}^{b_j} k_{\text{пл}} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) q_j(\xi, t) d\xi =$$

$$= \delta_i(t) + \alpha_i(t)(x - \eta_i) - g_i(x), \quad (16)$$

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t)(\xi - \eta_i) d\xi = e_i(t)P_i(t) \equiv M_i(t),$$

$$x \in [a_i, b_i], \quad t \geq \tau_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $R(x)$ — функция, зависящая от упругих характеристик покрытия и условий соединения слоев, которую иногда называют контактной жесткостью ($R(x) = E_1(x)[1 - \nu_1(x)]/\{[1 + \nu_1(x)][1 - 2\nu_1(x)]\}$ при сцеплении и $R(x) = E_1(x)/[1 - \nu_1^2(x)]$ при гладком контакте). Все остальные функции и константы описаны при постановке задачи для согласованного контакта.

Замена переменных приводит уравнения (16) к виду

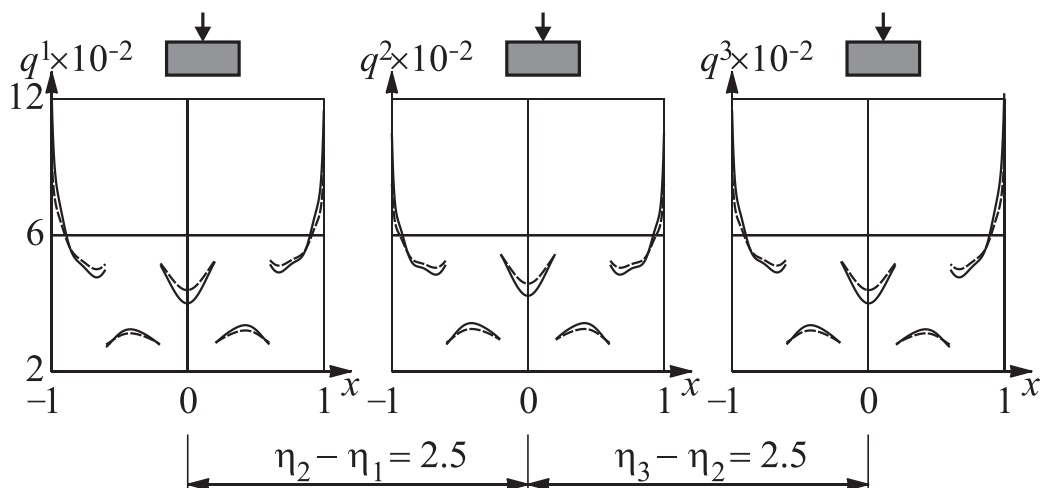
$$c(t)m(x)\mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)\mathbf{G}\mathbf{q}(x, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x + \mathbf{g}(x),$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t) d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t)\xi d\xi = \mathbf{M}(t), \quad x \in [-1, 1], \quad t \geq 1, \quad (17)$$

где функция $m(x)$ обратно пропорциональна контактной жесткости покрытия.

Построение решений для этой группы задач идентично тому, что было сделано в главе 1.

Не останавливаясь на деталях упомянем лишь, что в *разделах 2.2–2.5* приведены результаты решения задач для одной, двух, трех и четырех групп



Фиг. 6. Контактные давления

штампов. Решения всюду получены в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных давлений функция $m(x)$, а значит и связанная с ней контактная жесткость покрытия $R(x)$, выделена отдельным множителем.

В *разделе 2.6* представлены расчеты для случая, когда неоднородность описывается разрывной функцией. Графики контактных давлений в этом случае имеют вид, представленный на рисунке 6. Очевидно, что неоднородность существенно влияет на контактные давления, а значит и на поведения штампов на основании.

В *разделе 2.7* сформулированы основные результаты и выводы, относящиеся ко второй главе.

В **заключении** сформулированы основные научные результаты диссертации и выводы.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Впервые решены плоские задачи множественного контакта регулярной системы жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с покрытием, форма которого совпадает с формами оснований штампов (то есть когда их профили согласованы) и описывается быстро изменяющейся функцией.
2. Рассмотрены 15 вариантов постановки задачи согласованного контакта. Для всех вариантов на основании проекционного метода получены аналитические формулы для неизвестных характеристик на каждом штампе (углов поворота, осадок штампов, приложенных нагрузок, моментов приложения нагрузок).
3. Впервые решены плоские задачи о контакте регулярной системы жестких штампов и вязкоупругого стареющего основания с поверхностно неоднородностью.

родным покрытием, свойства которого описываются быстро изменяющейся функцией.

4. Рассмотрены 15 вариантов постановки задачи для поверхностно неоднородного основания. Для всех вариантов построено аналитическое решение для определения неизвестных характеристик контактного взаимодействия на каждом штампе.
5. Формы полученных решений содержат быстро изменяющиеся функции в явном виде. Это позволяет производить расчеты возникающих прикладных задач с высокой точностью для оснований, реальные свойства и форма которых описываются такими функциями, в то время как использование других известных методов приводит к существенным вычислительным ошибкам.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Статьи в журналах и сборниках из Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

1. Манжиров А.В., Курдина С.П., Кухарский С. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности // Известия Саратовского университета. «Новая серия. Серия Математика, Механика, Информатика». 2012. Т. 12. Вып. 4. С. 80–89.
2. Курдина С.П. Задача множественного контакта для тел с поверхностно неоднородными покрытиями // Известия Самарского научного центра РАН. Специальный выпуск «Актуальные проблемы трибологии». 2015. Т. 17. № 1. С. 69–71.
3. Манжиров А.В., Курдина С.П., Казаков К.Е., Федотов И. Согласованный контакт вязкоупругого основания с шероховатым покрытием и системы одинаковых жестких штампов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4(26). С. 26–38.
4. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Indentation of the regular system of punches into the foundation with rough coating // Mechanics for Materials and Technologies / Ed. by H. Altenbach, R.V. Goldstein, E. Murashkin. Advanced Structured Materials. Vol. 46. Springer. 2017. P. 297–308.

5. *Kazakov K.E., Kurdina S.P., Manzhirou A.V.* Contact interaction between surface inhomogeneous foundations and systems of rigid punches // *Procedia IUTAM*. 2017. V. 23. 201–209.

Статьи, опубликованные в сборниках трудов научных конференций

6. *Курдина С.П.* О согласованном осесимметричном контакте упругого основания с покрытием и системы кольцевых штампов // XXXVIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ. Научные труды Международной молодежной конференции в 8 томах. Москва, 10–14 апреля 2012 г. — М.: МАТИ, 2012. Т. 1, 336 с. С. 175–176.
7. *Курдина С.П.* Осесимметричный контакт тел с поверхностно неоднородными покрытиями и систем жестких штампов // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.: в 2 т. Т. II. Р.н/Д: Издательство Южного федерального университета, 2013. 264 с. С. 41–45.
8. *Курдина С.П.* Плоская задача множественного контакта для вязкоупругих тел с неоднородными покрытиями // Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г. в 2 т. Т. 2. Р.н/Д: Издательство Южного федерального университета, 2014. С. 75–80.
9. *Курдина С.П.* О конформном контакте системы штампов и тел с покрытиями // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VIII международной конференции. Сентябрь 22–26, 2014, Горис-Степанакерт. Армения. Ер.: Чартарагет, 2014. С. 276–280.
10. *Kazakov K., Kurdina S., Manzhirou A.* Multibody contact problems for discretely growing systems // *IUTAM Symposium on Growing solids. Symposium materials*. М.: IPMech RAS, 2015. P. 39–42.
11. *Казаков К.Е., Курдина С.П.* Плоская контактная задача для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярной системы жестких штампов // Международная молодежная научная конференция «XLII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ». Секция №4. «Механика и моделирование материалов и технологий». Материалы докладов. Москва, 12–15 апреля 2016 г. М.: ИПМех РАН, 2016. С. 27.
12. *Казаков К.Е., Манжиров А.В., Курдина С.П.* Контактное взаимодействие основания с шероховатым покрытием и регулярной системы штампов // Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня

рождения Героя Социалистического труда, лауреата Ленинской и Государственной премий СССР, члена-корреспондента АН СССР, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, доктора технических наук Всеволода Ивановича Феодосьева: сборник тезисов / Российская академия наук, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. С. 104–108.

13. Казаков К.Е., Курдина С.П., Сабитова А.Х. Контакт основания с поверхностью неоднородным покрытием и регулярной системы жестких штампов // Механика деформируемого твердого тела: сборник трудов IX Всероссийской конференции, Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2016. С. 20–23.
14. Казаков К.Е., Курдина С.П. Задача множественного контакта регулярной системы штампов и поверхностно неоднородного покрытия // МЕХАНИКА 2016: Труды международной школы-конференции молодых ученых, 3–7 октября 2016, Цахкадзор, Армения. Ер.: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, 2016. С. 67–70.
15. Казаков К.Е., Курдина С.П. О контакте тел с поверхностно неоднородными покрытиями и регулярных систем штампов // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.): в 2 т. Т. 1. Р.н/Д: Издательство Южного Федерального Университета, 2016. С. 244–248.

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ
С ПОКРЫТИЯМИ ПРИ ОПИСАНИИ ИХ
НЕОДНОРОДНОСТИ И ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ
БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ФУНКЦИЯМИ**

Курдина Светлана Павловна