

На правах рукописи



Евдокимов Александр Александрович

**ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В
ПРОТЯЖЕННЫХ СМАРТ- СТРУКТУРАХ С АКТИВНЫМИ
ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ**

Специальность 01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Краснодар – 2018

Работа выполнена в Институте математики, механики и информатики
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Кубанский государственный университет»

*Научный
руководитель:* **Глушков Евгений Викторович**
доктор физико-математических наук, профессор

*Официальные
оппоненты:* **Соловьев Аркадий Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная
механика» федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Донской государственный технический университет»

Сыромятников Павел Викторович
доктор физико-математических наук, старший научный
сотрудник, заведующий лабораторией федерального
государственного бюджетного учреждения науки
«Федеральный исследовательский центр Южный
научный центр Российской академии наук»

*Ведущая
организация:* Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Защита состоится «12» сентября 2018 г. в 14-00 на заседании диссертационного
совета Д 212.101.07 при ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»,
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, ауд. 231.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО
«Кубанский государственный университет» по адресу: 350040, г. Краснодар, ул.
Ставропольская, 149, <http://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>.

Автореферат разослан «2» июля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Зарецкая М.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования.

В настоящее время во многих областях науки и техники все большую популярность приобретают системы, использующие управляемые поверхностные или объемные волны, возбуждаемые и регистрируемые поверхностными или встроенными в волновод активными пьезосенсорами (смарт-структуры). В качестве типичных примеров смарт-структур можно указать снабженные сетью пьезоактивных элементов оболочки аэрокосмических изделий, системы активного виброгашения или системы волнового мониторинга, разрабатываемые для неразрушающего контроля текущего состояния протяженных элементов конструкций (нефтепроводы, газопроводы, стенки химических емкостей или реакторов и др.). В подобных конструкциях бегущие волны используются для выявления скрытых дефектов, поскольку сами волны распространяются на большие расстояния и взаимодействуют с неоднородностями любой природы. Подобная технология волнового контроля выделяется в самостоятельное научно-техническое направление – волновой мониторинг состояния конструкций (Structural Health Monitoring (SHM)). Одной из актуальных проблем SHM является подбор параметров проектируемых систем диагностики (несущие частоты, тип, размер, расстановка активных пьезоэлементов и т.п.). Выбор данных параметров обеспечивает максимальную эффективность зондирования элементов конструкций (максимальную амплитуду зондирующего сигнала) с конкретными физико-механическими свойствами (модули упругости, плотность, толщина пластины и др.). В целом разработка и оптимизация SHM-систем и смарт-материалов и структур предполагает решение задач возбуждения, распространения и дифракции бегущих волн в упругих слоистых волноводах с локальными неоднородностями.

Исходя из сформулированных задач для SHM систем и смарт-материалов в диссертационном исследовании разрабатываются математические и компьютерные модели процессов возбуждения (тонкими и гибкими поверхностными пьезонакладками), распространения и дифракции бегущих волн на препятствиях (дефектах). Возникающие волновые поля описываются краевыми задачами линейной теории упругости, решение которых строится на основе интегрального подхода (*Ворович И.И., Бабешко В.А., 1979; Бабешко В.А. и др., 1989*). В рамках разработанных моделей проводится расчет оптимальных режимов работы полосового и кругового актуаторов и исследуются закономерности распределения волновой энергии как при возбуждении бегущих волн, так и при их дифракции на локальных препятствиях. Помимо упомянутых выше областей науки и техники, полученные численные результаты представляют интерес для сейсмологии и сейсмостойкого строительства, виброзащиты, машиностроения, мехатроники, акустоэлектроники и др.

Для моделирования процесса взаимодействия пьезоактуатора и подложки необходимо найти решение связанной контактной задачи динамической теории упругости. Во многих используемых для этой цели моделях действие пьезоактуатора описывается нагрузкой, заданной в области контакта активного элемента с подложкой, или в виде набора сосредоточенных сил, распределенных вдоль границы области контакта (*Giurgiutiu V., 2014*). Подобные несвязные модели позволяют получать достаточно точные решения в низкочастотном диапазоне или/и при относительно небольших размерах источника колебаний. Другим способом численного решения данной задачи является конечно-элементное или гранично-элементное моделирование с помощью современных пакетов программ (COMSOL, ANSYS, ACELAN, ABACUS, BEASY и др.). Еще один способ построения решения задачи о динамическом взаимодействии активного пьезоактуатора с упругой подложкой был предложен в работах *Глушкова Е.В. и др., 2007-2011*. В рамках данной модели характеристики бегущих волн рассчитываются на основе решения интегро-дифференциальных уравнений, к которым сводится исходная задача. В продолжении указанного подхода в настоящей работе проводится обобщение на случай круговых пьезоактуаторов, а также анализируется энергетическая эффективность пьезоактуаторов (полосового и кругового) и закономерности межмодового распределения энергии, поступающей от источника в упругий слой.

Помимо математического и компьютерного моделирования процессов возбуждения и распространения упругих волн в диссертации также рассматриваются задачи дифракции. В связи со сложной геометрией поверхностных и внутренних препятствий (дефектов), встречающихся на практике, аналитическое решение соответствующих задач дифракции в большинстве случаев не представляется возможным. Поэтому для решения данного класса задач широкое распространение получили прямые численные методы, базирующиеся на сеточной аппроксимации – метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей (МКР) и их модификации, например, метод моделирования локального взаимодействия (LISA - Local Interaction Simulation Approach, *Nadella K.S., Cesnik C.E.S., 2013*), где перемещения в узлах конечно-разностной сетки выражаются через перемещения всех узловых точек, соседних с данной, посредством специальной линейной формы, учитывающей непрерывность расчетных физических величин. Альтернативой к МКЭ является метод граничных элементов (МГЭ) и его модификации, призванные уменьшить вычислительные затраты (*Ватульян А.О., Соловьев А.Н., Игумнов Л.А., Сыромятников П.В., Liu G.R., Хай М.В., Михаськив В.В., Brebbia C.A., Aliabadi M.H., Zhang Ch. и др.*). Вариантом МГЭ является метод слоистых элементов (*Глушков Е.В. и др., 2009*), в рамках которого в интегральное представление решения исходной задачи в качестве ядер входят фундаментальные решения для рассматриваемой многослойной структуры в целом, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям на всех ее внешних и внутренних плоскопарал-

лельных границах.

Для моделирования волноводов, содержащих бесконечно удаленную точку, развиты методики, полностью или в высокой степени уменьшающие отражение от границ расчетной области. К ним относится как вывод специальных поглощающих граничных условий (*Saffari N., Zhou J., 1996; Givoli D., 2004*), так и более универсальные подходы, например, идеально согласованный поглощающий слой (*Berenger J., 1994*) или поглощающие слои с возрастающим демпфированием (*Semblat J. et al, 2011*). Помимо данных моделей, предлагается схема, в которой расчет области конечных размеров ведется с использованием МКЭ, а поле в оставшейся безграничной среде аппроксимируется фундаментальными решениями или традиционными граничными элементами (*Velichko A., 2010*). В рамках диссертационной работы предлагается гибридная численно-аналитическая схема, основанная на сшивании МКЭ (применяемого в областях волновода, содержащих неоднородности) и модальных разложений, используемых в однородных областях волновода. Данная схема применяется для исследования эффекта ловушечных мод и образования зон запираения-прохождения в волноводах с множественными препятствиями.

Целью диссертационной работы является создание эффективных математических и компьютерных моделей, а также исследование на их основе процессов возбуждения (пьезонакладками), распространения и дифракции упругих волн в волноводах с локальными неоднородностями (препятствиями, дефектами).

Для достижения поставленных целей решены следующие **задачи**:

- 1) Разработаны и реализованы в виде пакета программ эффективные методы решения краевых задач о динамическом взаимодействии полосового и кругового пьезоактуатора с упругим слоем.
- 2) Проведено исследование границ применимости традиционных инженерных (упрощенных) моделей пьезоактуатора и разработанной связной модели, строго учитывающей взаимное влияние деформации пьезонакладки и упругой подложки.
- 3) Установлены оптимальные сочетания центральной частоты и размера пьезоактуатора, максимизирующие амплитуду зондирующего сигнала.
- 4) Разработаны математические и компьютерные модели процессов распространения и дифракции волн в слоистых средах с локальными неоднородностями на основе локально-глобальных гибридных численно-аналитических схем.
- 5) Исследованы резонансные эффекты в волноводах с локальными неоднородностями различной природы.

- 6) Предложена модификация численно-аналитической гибридной схемы для погруженных и встроенных волноводов произвольного сечения.

Научную новизну исследования составляют:

- 1) Обобщение пленочной модели полосового пьезоактуатора на случай круговой пьезонакладки.
- 2) Определение границ применимости иерархии моделей пленочных актуаторов различной геометрии.
- 3) Расчет оптимальных параметров зондирующей системы актуатор-упругая подложка.
- 4) Методы численно-аналитического решения рассматриваемых краевых задач для волноводов с локальными неоднородностями.
- 5) Расчет собственных частот ловушечных мод в волноводах, содержащих в себе препятствия различной природы (упругие включения, выемки, полости).
- 6) Определение зон запираения и прохождения для систем последовательно расположенных упругих включений.
- 7) Разработка и реализация метода расчета собственных характеристик вытекающих мод для встроенных волноводов.

Теоретическая и практическая значимость проведенного диссертационного исследования определяется необходимостью разработки математических и компьютерных моделей при проектировании и реализации смарт-структур, систем неразрушающего контроля и волнового мониторинга состояния конструкций и др. Полученные результаты также могут быть использованы в таких областях науки и техники, как сейсмология и сейсмостойкое строительство, машиностроение, виброзащита, акустоэлектроника, механотроника.

Методология и методы исследования. Краевые задачи, рассматриваемые в диссертационном исследовании, решаются в рамках интегрального подхода, основанного на применении интегральных преобразований к уравнениям и граничным условиям. В случае волноводов с локальными неоднородностями применяется гибридный подход, включающий в себя как метод конечных элементов, применяемый в ограниченной области, содержащей в себе препятствие, так и интегральный подход, применяемый при моделировании однородных зон волновода.

На защиту выносятся:

- 1) Математическая модель, описывающая динамическое взаимодействие тонких и гибких пьезоактуаторов с упругим волноводом.

- 2) Численные методы решения краевых задач о связном динамическом взаимодействии полосовых и круговых пьезонакладок с упругим слоем.
- 3) Результаты расчета оптимальных параметров связной системы пьезоактуатор-упругая подложка.
- 4) Численно-аналитические методы решения краевых задач для сред с локальными неоднородностями.
- 5) Результаты численного исследования резонансных эффектов в средах с одиночными или множественными препятствиями, включающие в себя определение резонансных частот рассеяния и зон прохождения-запираания.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных при выполнении работы, обеспечивается корректностью постановки рассматриваемых краевых задач, строгостью математических методов их решения, сравнением с результатами, полученными другими авторами в рамках иных моделей, проверенных на эксперименте.

Апробация работы. Основные результаты исследований были представлены на следующих научных мероприятиях:

- 1) Международная конференция «The 13th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics», Vienna, Austria, 2017 г.
- 2) Международная конференция «International Congress on Ultrasonics», Metz, France, 2015 г.
- 3) Международная конференция «International Conference on Physics and Mechanics of new Materials and their Applications», Азов, 2015 г.
- 4) XVII и XVIII международные конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, 2014 и 2016 г.
- 5) XX Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 2017 г.
- 6) XXI международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред имени А.Г. Горшкова», Вятчи, 2015 г.
- 7) Научная конференция «Проблемы прочности, динамики и ресурса», Нижний Новгород, 2014 г.
- 8) Международная конференция «Days on Diffraction 2014», Санкт-Петербург, 2014 г.
- 9) VII Всероссийская (с международным участием) конференция по механике деформируемого твердого тела, Ростов-на-Дону, 2013 г.

Основная часть исследований проводилась в рамках выполнения проектов РФФИ 12-01-00320а, 13-01-96520, 14-08-003-370а, 16-41-230744 р а, при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (шифры проектов 1.2737.2011, 1.189.2014/К).

Публикации. Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертации, содержатся в работах [1] - [9], из них три работы опубликованы в журналах, указанных в перечне ВАК Минобрнауки России [1-3], две работы опубликованы в журналах индексируемых в базах Web of Science и Scopus [1,2], еще две работы в изданиях, индексируемых только в Scopus [4,5].

Личный вклад автора. Результаты исследований получены и опубликованы совместно с профессором Глушковым Е.В. и профессором Глушковой Н.В. Постановку задачи и общее руководство исследованиями осуществляли Е.В. Глушков и Н.В. Глушкова. Лично автором осуществлена реализация методов решения рассмотренных задач, разработка пакетов программ и численные расчеты, а также проведен анализ полученных результатов.

Структура и объем диссертации. Работа общим объемом 146 страниц имеет следующую структуру: введение, шесть глав основной части, заключение и список литературы, включающий 138 источников. Работа содержит 46 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится общая характеристика работы, указывается актуальность проводимых исследований, обсуждаются существующие подходы к решению задач, рассматриваемых в работе (рисунок 1), формулируются цели и задачи исследования, а также дается краткое описание содержания работы.

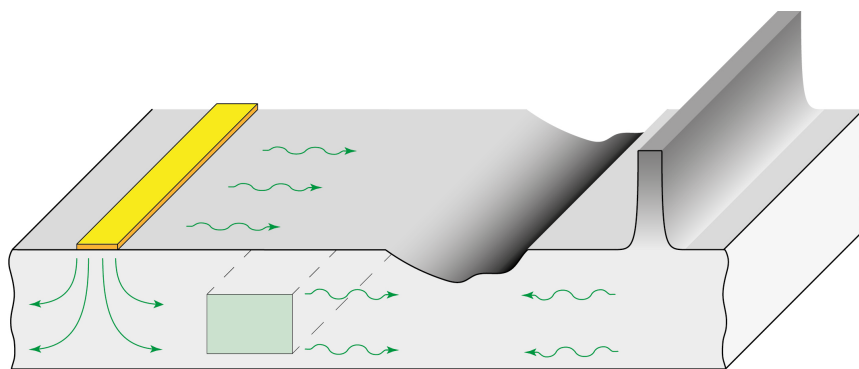


Рисунок 1 – Общий вид волновода с локальными неоднородностями

В **первой главе** диссертации в рамках линейной теории упругости формулируются динамические краевые задачи для упругих и пьезоупругих тел. Дается постановка линейных краевых задач для акустических сред. Приводится описание математических моделей пьезоактуаторов, используемых в дальнейшем.

В большинстве случаев рассматривается упругий волновод толщины h , занимающий область $-\infty < x, y < \infty, z \in (-h, 0)$ со свободными от напряжений горизонтальными поверхностями. В качестве возбудителей колебаний выступают полосовые или круговые пьезонакладки, приклеенные к верхней поверхности волновода в областях $\Omega = \{(x, y, z) : x \in [-a, a], -\infty < y < \infty, z = 0\}$ или $\Omega_r = \{(r, \theta, z) : r \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi), z = 0\}$ соответственно (рисунок 2 (а) и (б)). Для описания динамического взаимодействия кругового актуатора с упругой подложкой удобно перейти в цилиндрическую систему координат. Пьезоактуаторы поляризованы вдоль вертикальной оси Oz по всей толщине h_0 , т.е. материал накладок принадлежит к классу симметрии $6mm$.

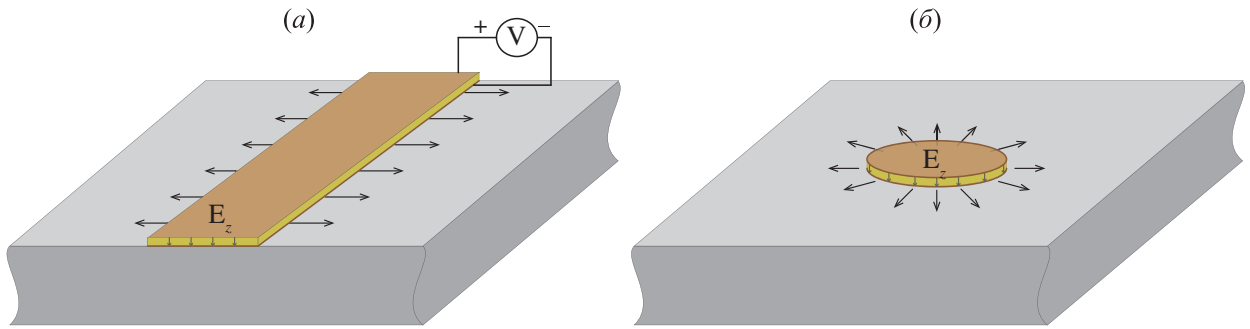


Рисунок 2 – Геометрия задач; (а) – для полосового пьезоактуатора, (б) – для кругового пьезоактуатора

Электроды располагаются на верхней и нижней границе пьезонакладки, причем их влияние на механические свойства системы, состоящей из пьезоактуатора и упругой подложки, в дальнейшем не учитывается. На электроды подается разность потенциалов $V e^{-i\omega t}$, которое порождает электрическое поле внутри накладок с напряженностью $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$, при этом $E_z = V/h_0$. Далее гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опущен. Вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта в накладках возникают механические деформации с комплексными амплитудами смещений $v = (v_x, v_y, v_z)^T$ для полосовой и $v = (v_r, v_\theta, v_z)^T$ для круговой пьезонакладки.

На практике, в используемых устройствах, толщина накладки достаточно мала $h_0 \ll l$, где l - характерная длина объемных волн в пьезоэлектрике, поэтому в случае полосового пьезоактуатора предполагается, что компоненты тензора деформации ε_{xz} , ε_{yz} и ε_z малы по сравнению с остальными ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_z = 0$), а соответствующие им соотношения закона Гука отбрасываются. Компонента тензора напряжений σ_z мала в сравнении с σ_x , σ_y и τ_{xy} . В случае кругового пьезоактуатора рассматривается осесимметричная задача. Дополнительно предполагается, что диск находится в условиях плоского напряженного состояния – $v_r = v_r(r)$. Фактически пьезоактуаторы рассматриваются как тонкие и гибкие пленки. В рамках данных допущений полные связные краевые задачи об установившихся гармонич-

ческих колебаниях упругого слоя, возбуждаемых пьезонакладками, имеют вид:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\nabla\text{div } \mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}\big|_{z=0} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}\big|_{z=-h} = 0, \\ u_x\big|_{z=0} = v, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} v'' + \kappa^2 v = b_0 q, \\ v'\big|_{x=\pm a} = e_0, \end{cases} \quad (2)$$

для полосовой пьезонакладки, а для кругового актуатора:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho\omega^2 u_z = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}\big|_{z=0} = \begin{pmatrix} q_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}\big|_{z=-h} = 0, \\ u_r\big|_{z=0} = v, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} v'' + \frac{1}{r}v' - \frac{1}{r^2}v + \kappa_1^2 v = b_0 q_r, \\ v' + v\frac{\nu_0}{r}\big|_{r=a} = e_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_x(x, z), u_z(x, z))^T$, $\mathbf{u} = (u_r(r, z), u_z(r, z))^T$ - комплексные амплитуды вектора смещений точек слоя в декартовой и цилиндрической системе координат; $\boldsymbol{\sigma} = (\tau_{xz}(x, z), \sigma_z(x, z))^T$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{rz}(r, z), \sigma_{zz}(r, z))^T$ - векторы напряжений на горизонтальных поверхностях волновода; $q = \tau_{xz}$ и $q_r = \sigma_{rz}$ - неизвестные касательные контактные напряжения; λ и μ - коэффициенты Ламе; $\kappa^2 = \rho_0\omega^2(1 - \nu_0^2)/Y_0$, $b_0 = (1 - \nu_0^2)/(Y_0 h_0)$, $e_0 = d_{31}E_z(1 + \nu_0)$ - константы, а ρ_0 , ν_0 , Y_0 и d_{31} - плотность, коэффициент Пуассона, модуль Юнга и одна из компонент тензора пьезоэлектрических модулей наклейки.

В отдельных задачах, изучаемых в диссертационной работе, первоначально рассматриваются более простые уравнения и краевые задачи, нежели краевые задачи теории упругости. Поэтому в *параграфе 1.4* приводятся общие сведения из теории акустики. Изначальные уравнения гидродинамики сводятся к уравнению Гельмгольца относительно давления в рассматриваемой среде с граничными условиями Дирихле и/или Неймана.

Вторая глава посвящена описанию интегрального подхода (*Ворович И.И., Бабешко В.А., 1979; Бабешко В.А., Глушков Е.В. и др., 1986*), который исполь-

зуются для решения краевых задач динамической теории упругости. Приводятся различные представления решения сформулированных краевых задач, как в интегральной форме, так и в виде суммы нормальных мод. Подробно описаны дисперсионные характеристики и приведены основные формулы для вычисления энергетических характеристик возбуждаемых волн.

В параграфе 2.1 приводятся интегральные представления решения краевых задач (1) и (3). В декартовых координатах решение представимо в виде свертки матрицы Грина \mathbf{k} и внешней поверхностной нагрузки \mathbf{q} или в альтернативной форме обратного преобразования Фурье от произведения их Фурье-символов $K = \mathcal{F}[k]$ и $\mathbf{Q} = \mathcal{F}[\mathbf{q}]$:

$$\mathbf{u}(x, z) = \int_{\Omega} k(x - \xi, z) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (5)$$

Контур Γ почти всюду совпадает с вещественной осью параметра α , отклоняясь от неё при обходе вещественных полюсов элементов Фурье-символа матрицы Грина K . Направление отклонения контура определяется исходя из принципа предельного поглощения.

В осесимметричном случае (краевая задача (3)) интегральное представление решения имеет схожий вид:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} -i \int_{\Gamma^+} (K_{11} Q_r + K_{12} Q_z) J_1(\alpha r) \alpha d\alpha \\ \int_{\Gamma^+} (iK_{21} Q_r + K_{22} Q_z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где K_{mn} , $m, n = 1, 2$ – элементы матрицы K , явный вид которых для рассматриваемой задачи приведен в диссертации.

В параграфе 2.2 приводятся представления решения краевых задач (1), (3) в виде суммы нормальных мод. Для подынтегральной функции интеграла (5), при $|x| > a$, выполняются условия леммы Жордана, что позволяет, в зависимости от значений x , замкнуть контур интегрирования вверх ($x < -a$) или вниз ($x > a$). Для полученного замкнутого интеграла справедлива теорема Коши, которая позволяет представить решения исходной задачи в виде суммы вычетов в полюсах матрицы K :

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^{\pm} \mathbf{u}^{\pm}(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^{-} \mathbf{a}_n^{-}(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & \text{при } x < -a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^{+} \mathbf{a}_n^{+}(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & \text{при } x > a, \end{cases} \quad (7)$$

где $\mathbf{c}_n^{\pm} = \mp i e^{i\zeta_n a} \mathbf{Q}(\mp \zeta_n)$ – константы, $\mathbf{a}_n^{\pm}(z)$ – амплитуды нормальных мод, ζ_n – волновые числа. Аналогичные представления справедливы и для решения осесим-

метричной задачи (6).

Вещественные полюса ζ_n описывают незатухающие волны. В случае слоя со свободными границами данные волны разбиваются на две группы – симметричные и антисимметричные волны Лэмба, которые обозначаются как S_n и A_n , $n = 1, 2, \dots$. Данные моды обеспечивают перенос энергии вправо и влево от источника, а их фазовые и групповые скорости определяются как $c_n = \omega/\zeta_n$ и $v_n = d\omega/d\zeta_n$ соответственно.

Пара мод с комплексными, но не чисто мнимыми, волновыми числами $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ и $\zeta_{n+1} = -\xi_n + i\eta_n$ описывает стоячую волну с экспоненциально убывающей амплитудой $e^{-\eta_n|x|}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Волны с чисто мнимыми волновыми числами $\zeta_n = i\eta_n$ ($\xi = 0$) также имеют экспоненциально убывающую амплитуду с удалением от источника.

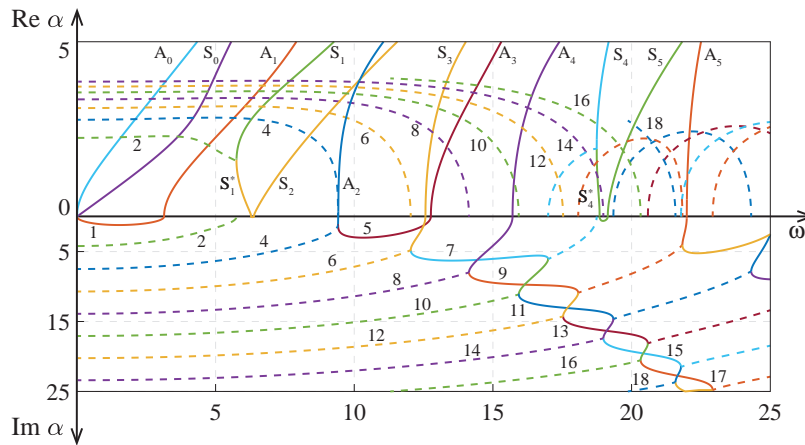


Рисунок 3 – Зависимость вещественной (вверху) и мнимой (внизу) части корней ζ_n от безразмерной круговой частоты; сплошные линии обозначают чисто вещественные или чисто мнимые корни, пунктиром показаны вещественные и мнимые части комплексных корней

Результаты расчета вещественных и комплексных волновых чисел ζ_n в зависимости от круговой частоты ω представлены в *параграфе 2.3* для различных граничных условий на внешних поверхностях слоя. Для задач вида (1) или (3) траектории движения корней дисперсионного уравнения ζ_n показаны на рисунках 3 и 4. В рамках данного параграфа проводятся аналогичные расчеты для слоя с жестко фиксированной нижней границей или контактирующего без трения с жестким нижнем основанием. Дается подробное описание возникающих эффектов для всех случаев, а также указывается наличие двух механизмов трансформации комплексных волновых чисел в вещественные: регулярный — через мнимую ось, и нерегулярный — непосредственный выход на вещественную ось с образованием обратной волны и резонансными явлениями на частотах появления волн Лэмба с нулевой групповой скоростью.

В *параграфе 2.4* приводятся основные формулы для расчета энергии, поступающей в среду от источника и переносимой бегущими волнами на бесконечность.

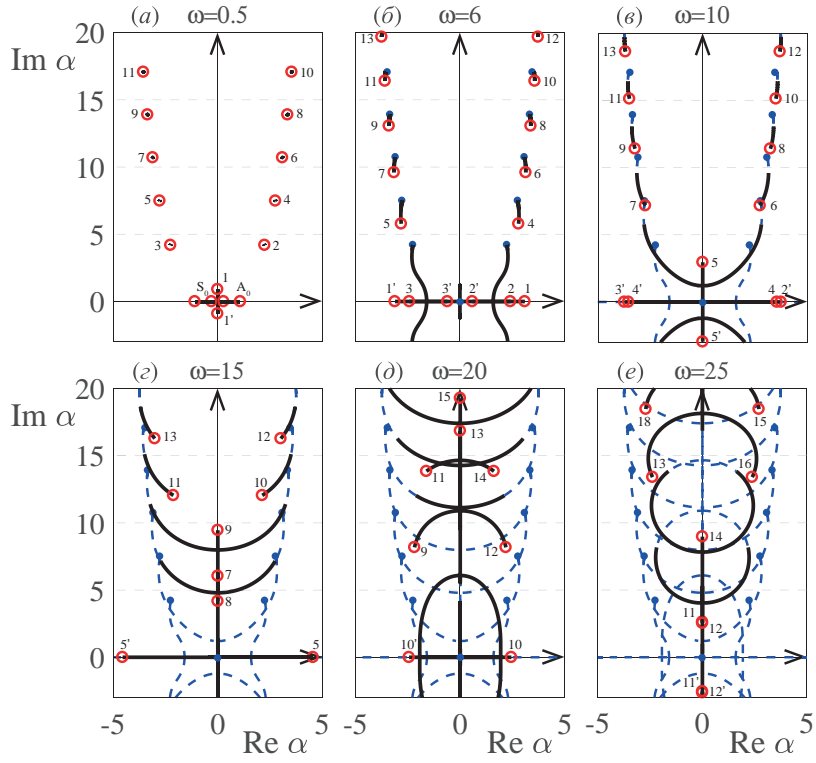


Рисунок 4 – Траектории движения полюсов в комплексной плоскости α в зависимости от частоты ω ; пунктирами указаны траектории движения от начального положения до положения на предыдущем рисунке, сплошными линиями – от положения на предыдущем рисунке до текущего положения на данной частоте, обозначенного кружочками

Количество энергии E_0 , поступающей в среду от некоторого поверхностного источника, расположенного на верхней границе, осредненное за период колебаний $T = 2\pi/\omega$, определяется как интеграл по верхней границе от нормальной компоненты $e_s = (\mathbf{e}, \mathbf{n}) = \omega/2 \operatorname{Im} (u_x \tau_{xz} + u_z \sigma_{zz})$ вектора плотности энергии \mathbf{e} (вектора Умова):

$$E_0 = \int_S e_s(\mathbf{x}) dS = \frac{\omega}{4\pi} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, 0) \mathbf{Q}(\alpha) \mathbf{Q}^*(\alpha^*) d\alpha. \quad (8)$$

Исходя из закона сохранения энергии, количество энергии, уходящее вправо и влево от источника, E^+ и E^- соответственно, через поперечные сечения волновода $x = \pm d$, $-h \leq z \leq 0$ не зависит от d и равно количеству энергии, поступающему в волновод от источника колебаний: $E_0 = E^+ + E^-$. Количество энергии отдельной моды в данных потоках определяется как:

$$E_0 = \sum_{n=1}^{N_r} E_n^{\pm}, \quad E_n^{\pm} = \int_{-h}^0 e_n^{\pm} dz, \quad e_n^{\pm} = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} (\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\tau}_n). \quad (9)$$

Здесь N_r – количество мод с вещественными волновыми числами ζ_n на рассматриваемой частоте ω , \mathbf{u}_n и $\boldsymbol{\tau}_n$ – поля смещений и напряжений моды с номером n , указанные в соотношениях (7).

В **третьей главе** представлены основные методы решения связанных краевых задач о динамическом взаимодействии упругого слоя и пьезокерамических накладок (1) – (4), которые сводятся к решению интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных касательных контактных напряжений (q и q_r) и продольных смещений точек полосового пьезоактуатора

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K_{11}(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = v(x), \quad (10)$$

$$\begin{cases} v'' + \kappa^2 v = b_0 q, \\ v' \Big|_{x=\pm a} = e_0, \end{cases} \quad (11)$$

или радиальных смещений точек кругового пьезоактуатора

$$\frac{-i}{2\pi} \int_{\Gamma^+} K_{11}(\alpha, z) Q_r(\alpha) J_1(\alpha r) \alpha d\alpha = v_r(r), \quad (12)$$

$$\begin{cases} v'' + \frac{1}{r} v' - \frac{1}{r^2} v + \kappa_1^2 v = b_0 q_r, \\ v' + v \frac{\nu_0}{r} \Big|_{r=a} = e_0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение дифференциальных уравнений (11) и (13) $v(x)$ и $v(r)$ подставляется в уравнения связи (10) и (12), которые в конечной форме являются интегральными уравнениями Винера-Хопфа относительно Фурье-символов контактных напряжений $Q(\alpha)$ и $Q_r(\alpha)$. Вид уравнений, как и решения дифференциальных уравнений (11) и (13) приводятся в *параграфе 3.1*.

Численное решение интегральных уравнений Винера-Хопфа строится по схеме Галеркина и приводится в *параграфе 3.2*. В рамках схемы Галеркина применяются различные системы базисных функций и системы проекторов, учитывающие корневые особенности функций $q(x)$ и $q_r(r)$ в крайних точках $x = \pm a$ и $r = a$.

Параграф 3.3 посвящен оценке границ применимости рассматриваемой плечной модели актуатора. Данная оценка осуществляется путем сопоставления численных результатов (например, энергии, поступающей в среду, от пьезоисточника) с двумя другими моделями. В первой из них действие актуатора на упругую подложку аппроксимируется сосредоточенными силами, приложенными к поверхности слоя в граничных точках $x = \pm a$, $r = a$ (несвязная точечно-силовая (pin-force) модель):

$$\tau_{xz}|_{z=0} = q(x) = A[\delta(x - a) - \delta(x + a)], \quad \tau_{rz}|_{z=0} = q_r(r) = A\delta(r - a),$$

где δ – дельта-функция Дирака, A – амплитудный множитель, задающий величину прикладываемых сил. Другая модель, учитывающая (в отличие от первой) нали-

чие связанных электромеханических полей и упругую деформацию самой наклейки – конечно-элементная модель, реализованная при помощи современных пакетов программ. Отток волновой энергии на бесконечность моделируется при помощи идеально согласованных слоев (perfectly matched layers – PML).

Исходя из полученных результатов (например, рисунок 5), все три модели совпадают между собой в двухмодовом диапазоне ($f < 1.55$ МГц), даже при относительно больших поперечных размерах актуатора $h_0 = h/10$. Однако с возбуждением третьей моды и дальнейшим ростом частоты f различие между всеми моделями нарастает (рисунок 5 (а)). При уменьшении относительной толщины актуатора h_0 , результаты полученные в рамках МКЭ и пленочной модели, сближаются и практически совпадают между собой для трехмодового диапазона ($1.55 < f < 2.81$ МГц, рисунок 5 (б)) и далее для пяти и шестимодового диапазонов, $2.81 < f < 4.65$ МГц и $4.65 < f < 6.16$ МГц соответственно (рисунки 5 (в), (г)).

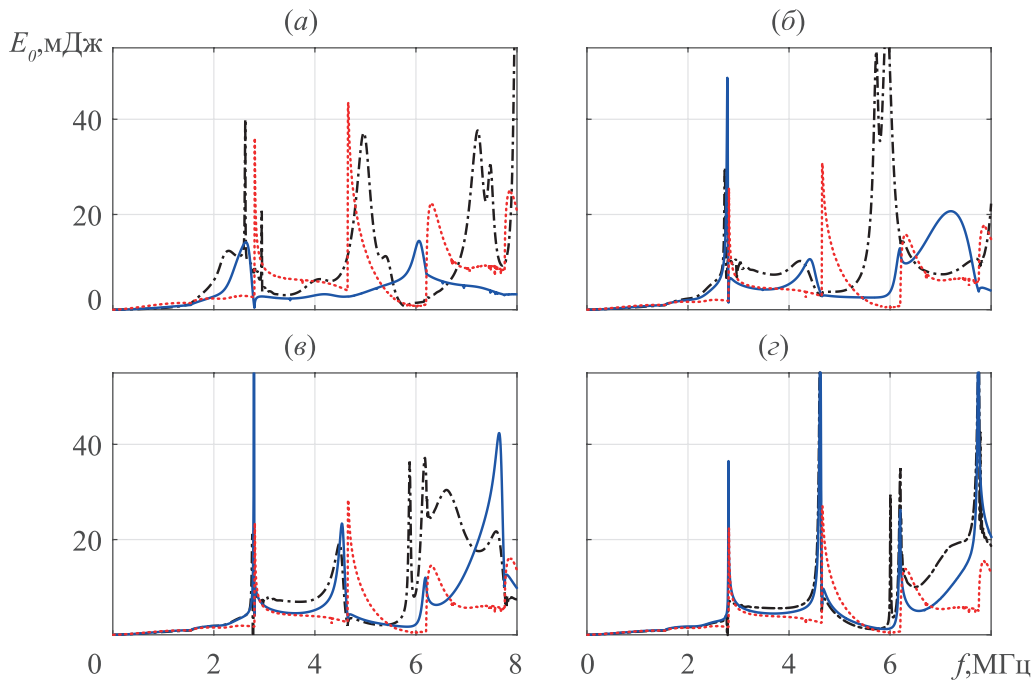


Рисунок 5 – Зависимость энергии E_0 , поступающей в среду от полосовой пьезонаклейки, от частоты f при различных значениях её толщины h_0 ; $h_0 = h/10$ – (а), $h_0 = h/20$ – (б), $h_0 = h/30$ – (в), $h_0 = h/50$ – (г). Синяя сплошная линия – пленочная модель актуатора, красная пунктирная линия – несвязная модель, а черная штрихпунктирная линия – МКЭ

В осесимметричном случае (краевые задачи (3), (4)) проводились аналогичные расчеты энергии E_0 для всех трех моделей, а также полей смещений в ближней зоне актуатора. Как и в плоской задаче, при уменьшении относительных поперечных размеров наклейки связанные модели совпадают между собой, а несвязная модель совпадает с ними лишь в низкочастотном диапазоне.

Исходя из формул (8) и (9), в параграфе 3.4 приводятся результаты расчета (на основе несвязной и пленочной модели актуатора) количества энергии,

поступающей в волновод от пьезонакладок, а также её распределение по модам. На рисунке 6 отображена зависимость общей энергии кругового пьезоактуатора E_0 от частоты f и размера области контакта a для обеих моделей. Характерное чередование минимумов и максимумов энергии E_0 (темных и светлых полос) для обеих моделей связано с чередованием минимумов и максимумов функций $Q(\alpha)$ и $Q_r(\alpha)$, входящих в соответствующие выражения для расчета энергии (8). Результаты указанных моделей совпадают между собой в низкочастотном (двумодовом) диапазоне $f < 1.8$ МГц не только качественно, но и количественно. Это подтверждает ценность использования несвязной модели в данном диапазоне при практической оценке эффективности генерации фундаментальных мод A_0 и S_0 . Однако, с ростом частоты и/или размера актуатора различия нарастают, хотя и картина чередования полос остаётся схожей. Использование несвязных моделей в высокочастотных диапазонах может привести к некорректному выбору центральных частот, что отразится на эффективности зондирования.

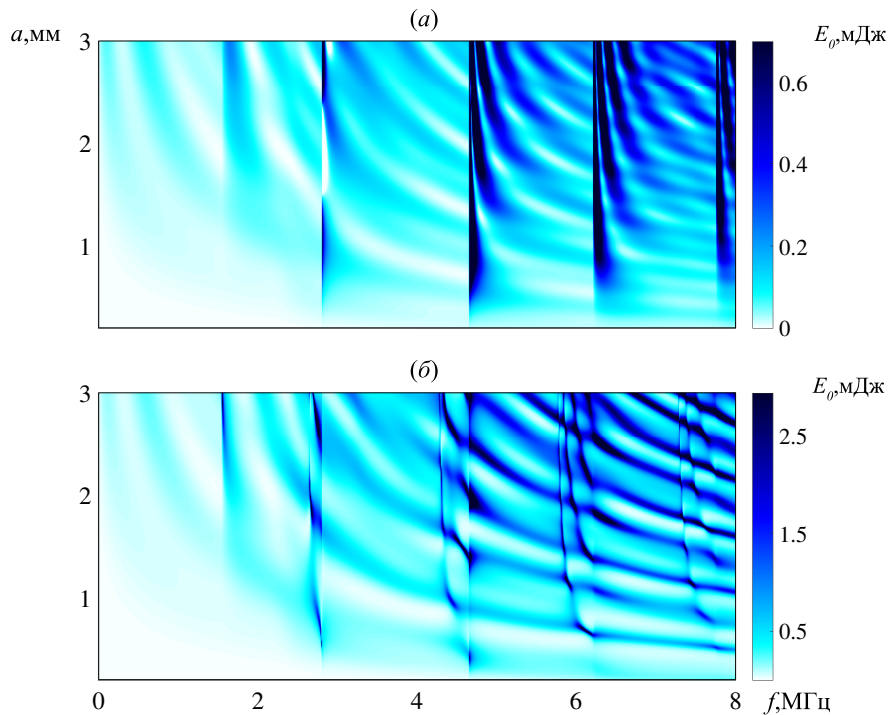


Рисунок 6 – Зависимость энергии кругового пьезоактуатора E_0 от частоты f и размера области контакта a для несвязной модели, (а), и пленочной модели актуатора (б)

В многомодовом диапазоне возникает сложная для интерпретации волновая картина, поэтому при проектировании систем волнового мониторинга стараются подобрать такие параметры пьезоисточника, при которых обеспечивается возбуждение одной доминирующей моды. В основном, в качестве такой моды используется одна из фундаментальных волн Лэмба A_0 или S_0 . На рисунке 7 отображена зависимость доли $\eta_n = E_n/E_0$ энергии данных мод (A_0 – (а), S_0 – (б)) от частоты f и полуширины накладки a . В двухмодовом диапазоне $0 < f < 1.8$ МГц картина темных и светлых полос, указывающих на максимальную и минимальную

долю энергии одной из этих мод, выглядит как негативное изображение картины распределения энергии для другой моды. Для более высоких частот большая часть энергии пьезоисточника идет на возбуждение высших мод. Однако и в многомодовом диапазоне наблюдаются темные пятна, указывающие на возможность возбуждения одной доминирующей фундаментальной моды при данных значениях пары (a, f) .

В случае полосового пьезоактуатора получены аналогичные результаты, как для значений общей энергии E_0 , так и для значений долей η_m мод A_0 и S_0 .

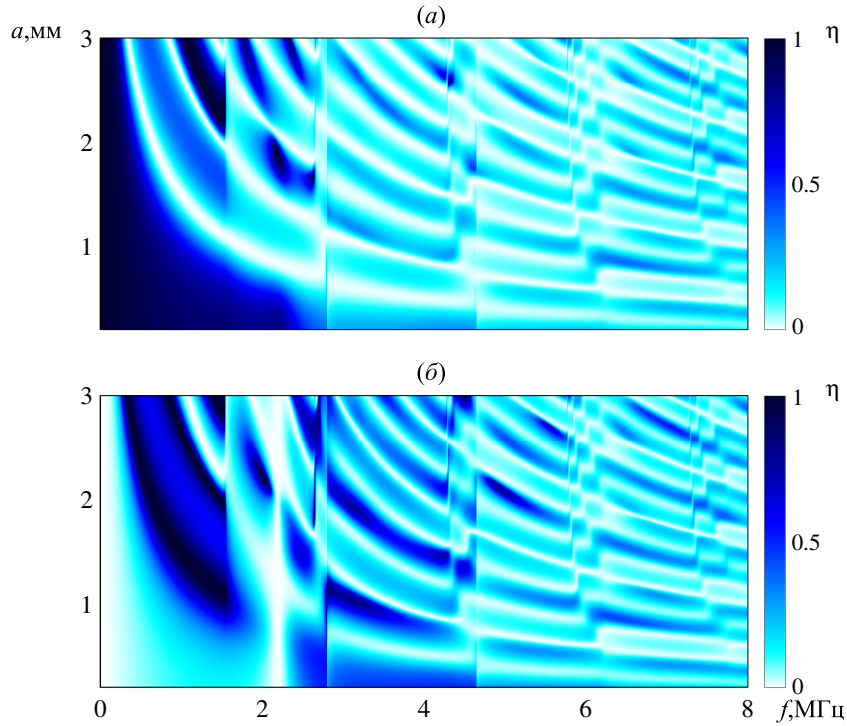


Рисунок 7 – Доля энергии фундаментальных мод A_0 (а) и S_0 (б) в общем потоке волновой энергии, поступающей от кругового пьезоактуатора в упругий слой

Четвертая глава посвящена описанию гибридной численно-аналитической схемы решения задач дифракции. Схема подробно описывается на примере скалярной модельной задачи для акустического волновода (*параграф 4.1*). В данной задаче рассматривается процесс распространения и дифракции волны $p_0(\mathbf{x}) = a_0(z)e^{i\zeta_0 x}$ в акустическом волноводе $D = D_1 \cup D_2^\pm$, который состоит из ограниченной области D_1 , содержащей в себе неоднородности (выемки, полости, включения, трещины, источники колебаний, изменение толщины волновода и т.д.), и внешних однородных полуполос постоянной толщины h : $-h \leq z \leq 0$ при $a \leq |x| \leq +\infty$ (рисунок 8 (а)). Комплексная амплитуда установившихся гармонических колебаний $p(\mathbf{x})$ удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца. На нижней горизонтальной границе D задается условие Дирихле $p = 0$, а на верхней границе – Неймана $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$. В рамках модельной задачи на верхней границе $z = 0$ предполагается нарушение однородности граничных условий – $p = 0$ при $x \in [-a, a]$ (рисунок 8 (б)).

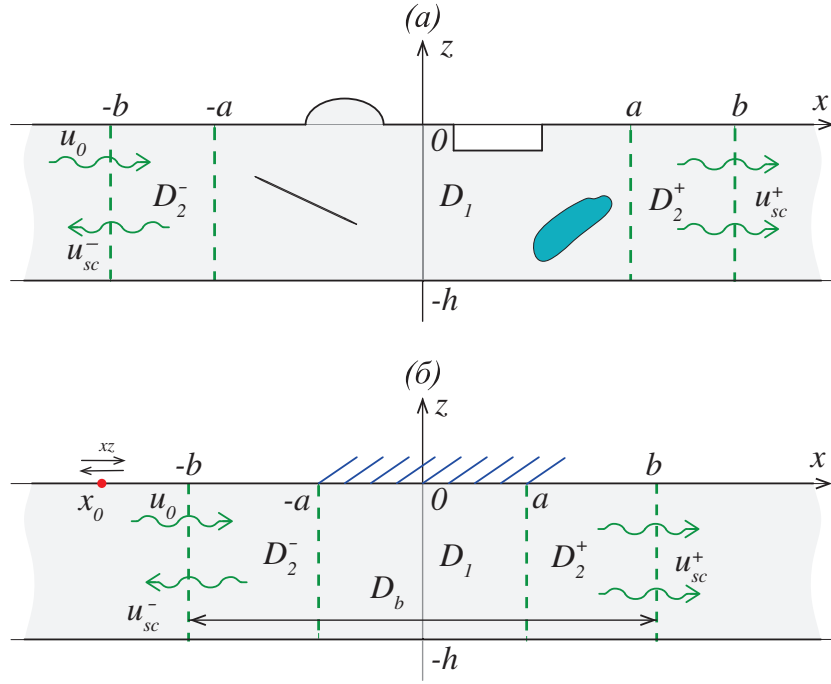


Рисунок 8 – (а) – полосовой волновод с препятствиями различных типов, локализованными в области $D_1: |x| < a$, (б) – геометрия модельной задачи с поверхностным препятствием; область конечно-элементной аппроксимации – $D_b: |x| \leq b$

В результате дифракции падающей волны p_0 на неоднородностях области D_1 возникает рассеянное поле p_{sc} , которое в областях D_2^\pm можно представить в виде разложения по нормальным модам с неизвестными коэффициентами c_n^\pm . Во внутренней области D_1 решение строится методом конечных элементов, для чего в дополнение к условиям на верхней и нижней границах необходимо задать граничные условия и на ее боковых торцах. На любых вертикальных отрезках $x = \pm b$, $-h \leq z \leq 0$, $b > a$ волновое поле можно записать с точностью до бесконечного набора неизвестных констант c_n^\pm :

$$p = p_0 + p_{sc}, \quad p_{sc}(\pm b, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\pm a_n(z) e^{i\zeta_n r}, \quad r = b - a, \quad (14)$$

где $a_n(z) = \cos l_n z$ – собственная форма, $\zeta_n = \sqrt{\kappa^2 - l_n^2}$ – волновое число, $l_n = \pi(n - 1/2)/h$ – константа, а $n = 1, 2, \dots$ – номер моды.

Для определения неизвестных констант c_n^\pm формулируются вспомогательные МКЭ-задачи с известными условиями на торцах, соответствующими собственным формам $a_n(z)$. При этом необходимо ограничиться конечным числом таких задач N . Данный параметр определяется исходя из требуемой точности и области МКЭ-дискретизации D_b . Обычно данное число определяется следующим образом: $N = N_r + 2$, где N_r – число вещественных волновых чисел ζ_n . Как и в упругом случае, вещественным корням ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N_r$ соответствуют бегущие волны $a_n e^{\pm i\zeta_n(x \mp a)}$, распространяющиеся по волноводу D_2 вправо и влево от обла-

сти дифракции D_1 без затухания, в то время как амплитуда нормальных мод, соответствующих комплексным корням, экспоненциально убывает с расстоянием: $|a_n e^{\pm i\zeta_n(x \mp a)}| \sim O(e^{-\text{Im} \zeta_n(|x| - a)})$, $|x| - a \rightarrow \infty$.

Во всем волноводе D искомое решение $p(\mathbf{x})$ аппроксимируется функцией $p_N(\mathbf{x})$:

$$p(\mathbf{x}) \approx p_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_0(\mathbf{x}) + p_{\text{sc},N}^-(\mathbf{x}), & x \leq -b, \\ p_F(\mathbf{x}), & |x| \leq b, \\ p_{\text{sc},N}^+(\mathbf{x}), & x \geq b, \end{cases} \quad (15)$$

в которой $p_{\text{sc},N}^\pm = \sum_{n=1}^N c_n^\pm a_n(z) e^{i\zeta_n x}$ – конечные суммы, аппроксимирующие рассеянное поле p_{sc} вне области D_b , $p_F(\mathbf{x}) = p_{F,0}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N [c_n^+ p_{F,n}^+(\mathbf{x}) + c_n^- p_{F,n}^-(\mathbf{x})]$ – сумма МКЭ-решений внутри области D_b . Условия на искусственных внутренних границах $x = \pm b$ формулируются так, чтобы выполнялось условие непрерывности искомого решения (14) - (15):

$$\begin{aligned} p_{F,0}(-b, z) &= p_0(-b, z), & p_{F,n}^+(-b, z) &= 0, & p_{F,n}^-(-b, z) &= a_n^-(z) e^{i\zeta_n r}, \\ p_{F,0}(b, z) &= 0, & p_{F,n}^+(b, z) &= a_n^+(z) e^{i\zeta_n r}, & p_{F,n}^-(b, z) &= 0, \\ & & -h \leq z \leq 0, & & n &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения неизвестных коэффициентов c_n^\pm на искомую функцию $p_N(\mathbf{x})$ накладывается дополнительное условие непрерывности производной суммарного поля $\partial(p_0 + p_{\text{sc}})/\partial x = \partial p_F/\partial x$ при $x = \pm b$, дискретизация которого может быть проведена различными способами. В рассматриваемом случае удобно воспользоваться методом Галеркина. В качестве проекторов выступают нормальные моды $a_m^\pm(z) = \cos l_m z$, обладающие свойством ортогональности относительно скалярного произведения в L_2 , что в конечном счете приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно констант c_n^\pm :

$$A\mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad A = D + B, \quad (17)$$

где D – диагональная матрица, B – блочная матрица.

Сформулированная схема обобщается на случай упругих волноводов в параграфе 4.2 (рисунок 8 (б)). В целом она остается той же, что и в скалярном случае. Отличия связаны с другим представлением волнового поля во внешних областях и граничных условий на вертикальных границах. Условия на торцах для МКЭ-решений $u_{F,0}$, $u_{F,n}^\pm$, $n = 1, 2, \dots, N$ в данном случае имеют вид:

$$\begin{pmatrix} u_{F,0} \\ \tau_{F,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,x} \\ \tau_{0,xz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^+ \\ \tau_{F,n}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^- \\ \tau_{F,n}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,x}^-(z) \\ b_{n,z}^-(z) \end{pmatrix} e^{i\zeta_n r}, \quad x = -b,$$

$$\begin{pmatrix} u_{F,0} \\ \tau_{F,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^+ \\ \tau_{F,n}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,x}^+(z) \\ b_{n,z}^+(z) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{F,n}^- \\ \tau_{F,n}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\zeta_n r}, \quad x = b.$$

Здесь $u_{0,x}$, $\tau_{0,xz}$ – продольная компонента вектора смещений и вторая компонента вектора напряжений на площадке, параллельной оси Oz набегающей волны \mathbf{u}_0 , а $\mathbf{a}_n^\pm = (a_{n,x}^\pm, a_{n,z}^\pm)^\top$ и $\mathbf{b}_n^\pm = (b_{n,x}^\pm, b_{n,z}^\pm)^\top$ – амплитуды моды с номером n для векторов смещений (7) и напряжений соответственно.

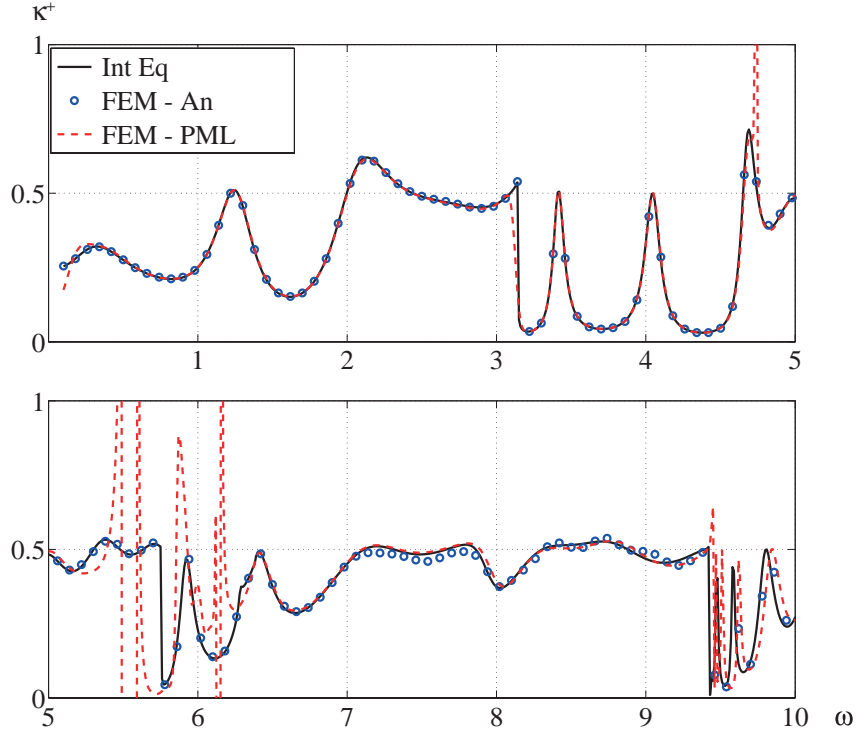


Рисунок 9 – Частотная зависимость коэффициента прохождения $\kappa^+(\omega)$: точное решение (сплошная линия), FEM-PML (пунктир) и FEM-An (маркеры)

Подобные граничные условия для численных решений, как и в скалярном случае, автоматически обеспечивают непрерывность первой компоненты u_N вектора смещений \mathbf{u}_N и второй компоненты τ_N соответствующего вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_N$ суммарного искомого решения. Условия непрерывности для оставшихся компонент – вертикальных смещений w_N и нормальных напряжений σ_N используются для определения коэффициентов разложения c_n^\pm . Первое из них домножается на $b_{m,z}$, а второе на $a_{m,x}$, вычитается из первого и интегрируется по z в соответствии с соотношением ортогональности:

$$(a_{m,x}, b_{n,x}) - (b_{m,z}, a_{n,z}) = 0, \quad n \neq m, \quad (f, g) = \int_{-h}^0 f(z)g(z)dz.$$

В результате возникает система вида (17).

Для проверки применимости и точности предлагаемой схемы была выбрана тестовая задача дифракции бегущей волны на препятствии (жесткая фиксация горизонтальных смещений на верхней поверхности в области $|x| < a$, рисунок 8 (б)) в упругом слое (*параграф 4.3*). Ее полуаналитическое решение, полученное на основе сведения к интегральному уравнению (называемое Int Eq в дальнейшем), в пределах различимой погрешности можно считать точным. Кроме того, для оценки сравнительной эффективности гибридной схемы проводилось сопоставление с МКЭ-результатами, полученными для ограниченных областей, выделенных из рассматриваемой бесконечной полосы с помощью поглощающих граничных условий PML пакета Comsol Multiphysics. В дальнейшем для краткости данный подход называется FEM-PML, а предлагаемая численно-аналитическая схема – FEM-An.

Сопоставление результатов, полученных тремя указанными способами во всем рассматриваемом частотном диапазоне, иллюстрируется графиком частотной зависимости коэффициента прохождения $\kappa^+ = E^+/E_0$ (рисунок 9), где E^+ и E_0 рассчитываются исходя из формул (9). Результаты FEM-An совпадают с точными (Int Eq) во всем частотном диапазоне. FEM-PML отклоняется от двух других моделей в диапазоне возбуждения обратных волн и его окрестностях, что связано с реализацией поглощающих слоев PML в пакете Comsol Multiphysics.

Пятая глава посвящена изучению дифракции упругих волн на различных препятствиях (эллиптическая полость, прямоугольная выемка, упругие включения и другие). В рамках *параграфа 5.1* рассматривается приложение гибридной численно-аналитической схемы к изучению резонансных явлений в слоистых структурах, а именно, эффекта ловушечных колебаний или ловушечных мод. Данный эффект проявляется как резкое резонансное блокирование одиночным препятствием (коэффициент прохождения на данных частотах близок к нулю) падающего волнового поля на определенных частотах. В нестационарном поле ловушечные колебания локализуются в окрестности препятствия, что подтверждается экспериментальными измерениями волновых полей поверхности с помощью лазерного виброметра (*Еремин А.А., 2015-2017*).

Значения резонансных частот определяются размерами, формой и материальными свойствами рассеивателя, поэтому изучение закономерностей их появления и движения вблизи вещественной оси при варьировании параметров препятствия создает основу для разработки алгоритмов оценки потенциальной опасности скрытых дефектов по резонансным характеристикам рассеяния зондирующих сигналов (метод резонансной идентификации). Это позволяет повысить разрешающую способность SHM-систем активного волнового мониторинга тонкостенных конструкций из композитных материалов ультразвуковыми бегущими волнами.

В качестве примера на рисунке 10 приводится расчет коэффициента прохождения κ^+ для задачи о дифракции набегающих волн A_0 (а) и S_0 (б) на эллипти-

ческой полости. В качестве дополнительной проверки корректности полученных результатов проводится сопоставление с результатами других моделей, а именно, с методом слоистых элементов (Laminate element method – LEM). В рамках данного подхода отраженное волновое поле строится в виде разложения по фундаментальным решениям для конкретных слоистых структур (в данном случае для упругой полосы; Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Еремин А.А., 2009). Комплексные частоты ловушечных мод $\omega_n = 2\pi f_n$ (в рамках гибридной численно-аналитической схемы) хорошо аппроксимируются корнями характеристического уравнения $\det A(\omega_n) = 0$, где A – матрицы системы (17), и имеют следующие значения в рассматриваемом случае:

$$\omega_1 = 0.71 - 0.02i, \quad \omega_2 = 1.53 - 0.01i, \quad \omega_3 = 2.17 - 0.01i, \quad \omega_4 = 2.554 - 0.0008i.$$

Полученные значения корней хорошо согласуются с локальными минимумами значений коэффициента прохождения κ^+ .

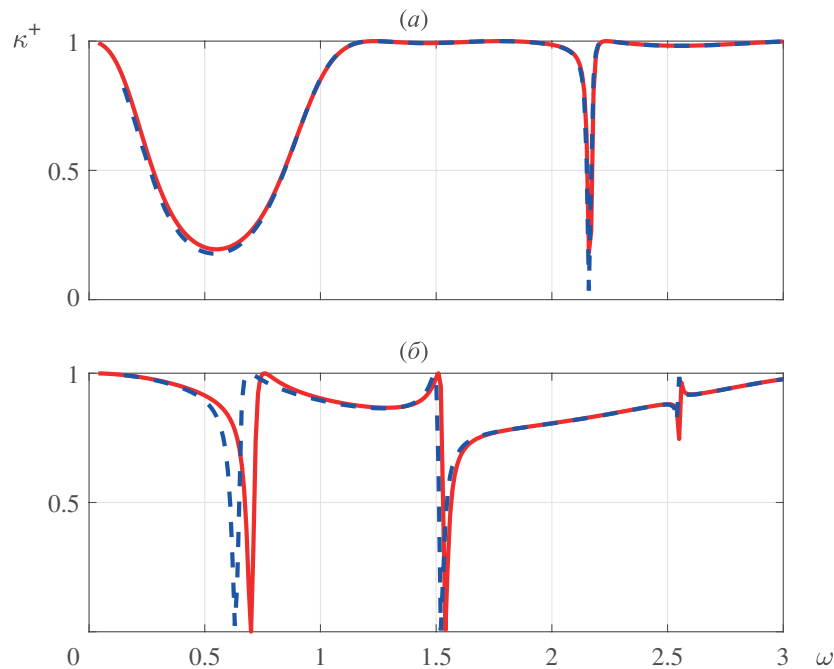


Рисунок 10 – Коэффициент прохождения для задачи о дифракции набегающих волн A_0 (а) и S_0 (б) об эллиптическую полость с горизонтальной $a = 1$ и вертикальной $b = 0.2$ полуосями, расположенную в центре волновода $z_c = -0.5$; красная сплошная линия – FEM-An, синяя пунктирная линия – LEM

Аналогичные расчеты проводились для задач дифракции падающих волн A_0 и S_0 на прямоугольной выемке (рисунок 11 (а)) или на упругом квадратном включении. В последнем случае варьируются свойства материала включения или глубина погружения в слой h_1 (рисунок 11 (б)). В целом, в рассмотренных случаях, справедливы аналогичные выводы, однако, для прямоугольной выемки резонансные частоты совпадают не с локальными минимумами, а с локальными максима-

мами коэффициента прохождения ($\kappa^+ \approx 1$).

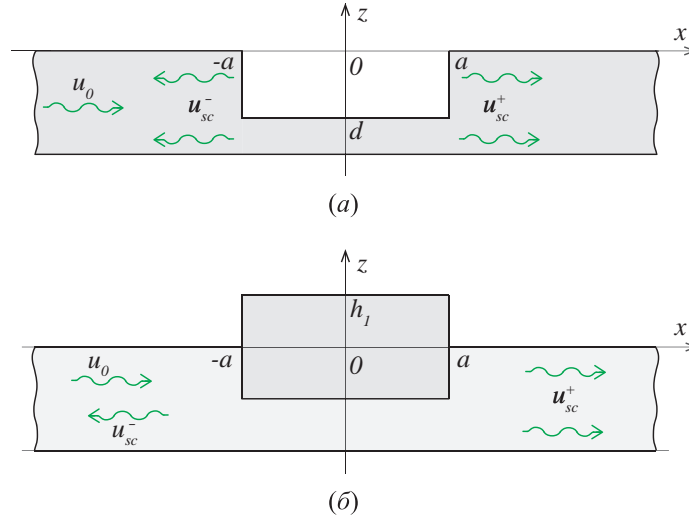


Рисунок 11 – Прямоугольная выемка $2a \times d$ – (а); упругое включение размером $2a \times 2d$, выступающее над волноводом на h_1 – (б)

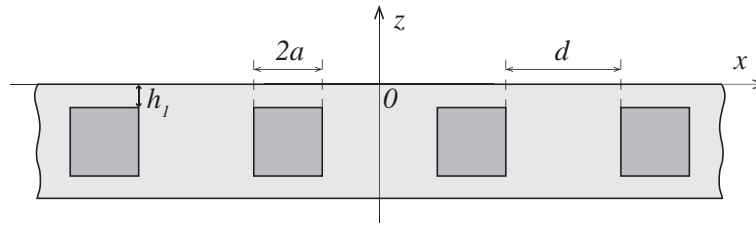


Рисунок 12 – Полосовой волновод со множественными упругими квадратными включениями $2a \times 2a$, равноудаленными друг от друга на расстоянии d

Параграф 5.2 посвящен изучению волноводов со множественными локальными неоднородностями. В *подпараграфе 5.2.1* приводятся результаты расчета коэффициента прохождения κ^+ волн A_0 и S_0 , падающих на множественные квадратные упругие включения частично заглубленные или полностью погруженные в волновод и равноудаленные друг от друга (рисунок 12). При расчете зависимости κ^+ от круговой частоты ω , общий диапазон частот $\omega \in (0, 7)$ разбивается на несколько групп подынтервалов (рисунок 13). В первой группе коэффициент прохождения близок к нулю $\kappa^+ \approx 0$, (подынтервалы в таком случае называются зонами запираения), а во второй группе, наоборот, коэффициент отличен от нуля (подынтервалы называются зонами прохождения). В рассматриваемом примере (рисунок 13) зонами запираения являются интервалы: $D_b = (1.91, 2.46) \cup (3.71, 4.44) \cup (4.94, 5.41) \cup (5.81, 6.13) \cup (6.2, 6.266) \cup (6.87, 6.95)$, а зонами прохождения – $D_p = (0, 7) \setminus D_b$.

На некоторых частотах наблюдаются пики коэффициента прохождения. Данные пики совпадают с вещественными частями соответствующих резонансных частот ω_n . Причем количество резонансных частот в интервалах прохождения равно количеству препятствий минус один: $N - 1$.

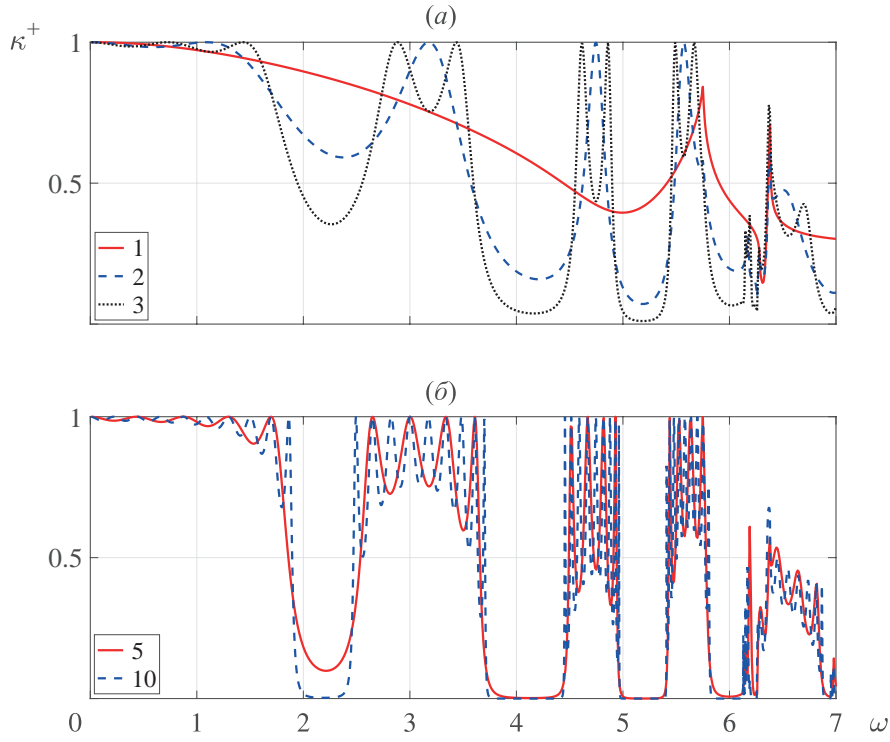


Рисунок 13 – Коэффициент прохождения $\kappa^+(\omega)$ для различного числа (указанного в легенде) упругих квадратных включений, расположенных в центре волновода равноудаленными друг от друга; в качестве набегающей волны рассматривается фундаментальная мода S_0

В *подпараграфе 5.2.2* предлагается модификация гибридной численно-аналитической схемы для волноводов со множественными неоднородностями (рисунок 14), расположенными в областях D_1, D_3, \dots, D_{M-1} и разделенными протяженными зонами однородности D_0, D_2, \dots, D_M . Модификация формулируется для акустического волновода. Общее решение $p(\mathbf{x})$ в таком случае имеет вид:

$$p(\mathbf{x}) = p_{0,A} + p_{1,F} + p_{2,A} + p_{3,F} + \dots + p_{i,F} + \dots + p_{M-1,F} + p_{M,A}, \quad (18)$$

где $p_{0,A}, p_{2,A}, \dots, p_{M,A}$ аналитические решения в протяженных областях однородности D_0, D_2, \dots, D_M , а $p_{1,F}, p_{3,F}, \dots, p_{M-1,F}$ – конечно-элементные решения в зонах с препятствиями или источниками колебаний. Аналитические решения представимы в виде суммы мод с неизвестными коэффициентами $\mathbf{c} = (c_1^{(1)}, \dots, c_N^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_N^{(M)})^T$ и схожи с представлениями (14). МКЭ-решения в областях формулируется в виде суммы базисных решений, схожих с $p_F(\mathbf{x})$ из выражения (15). Граничные условия для МКЭ-решений, как и ранее, формулируется из условия непрерывности функции $p(\mathbf{x})$ на искусственных вертикальных границах $x = x_0, x_1, \dots, x_M$, а неизвестные константы определяются из условия непрерывности производной $\partial p(\mathbf{x})/\partial x$. Дискретизация последнего проводится в рамках метода Галеркина, что приводит к системе вида (17), однако с более сложной структурой матрицы A .

В **шестой главе** формулируются и рассматриваются краевые задачи для встроенных (погруженных) акустических (*параграф 6.2*) или упругих (*параграф*

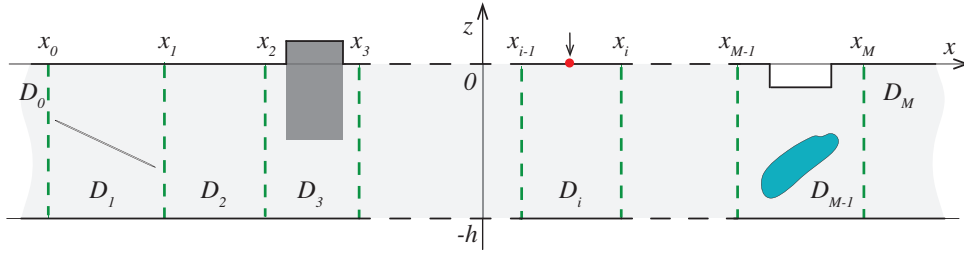


Рисунок 14 – Полосовой волновод с препятствиями различных типов, локализованными в областях D_1, D_3, \dots, D_{M-1} ; области D_0, D_2, \dots, D_M считаются однородными

6.3) волноводов (2.5-мерные задачи, рисунок 15). Приводится обзор существующих подходов к решению данных задач (*параграф 6.1*). В качестве модельной рассматривается задача о колебаниях акустического слоя со встроенным волноводом, возбуждаемых источником, расположенным на поверхности в области $\Omega = \{\mathbf{x} : x \in [-d_1, d_1], y \in [-d_2, d_2], z = 0\}$ (рисунок 15). Комплексная амплитуда установившихся гармонических колебаний удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца в каждой из областей, а на внешних границах задаются условия Дирихле. На внутренних границах областей V_1 и V_2 предполагаются условия непрерывности давлений $p_n, n = 1, 2$.

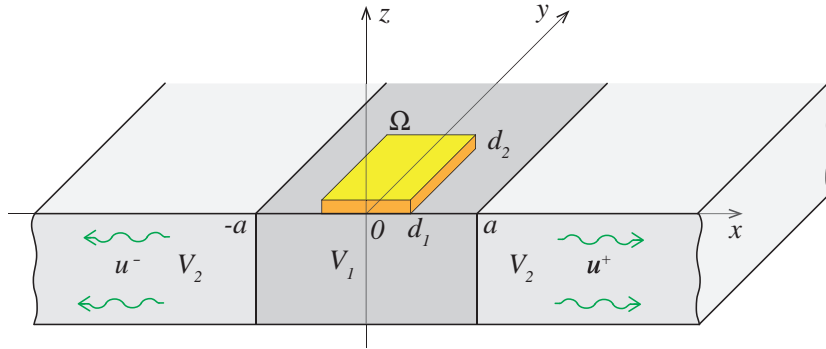


Рисунок 15 – Геометрия модельной задачи для слоя со встроенным квадратным волноводом и поверхностным источником гармонических колебаний

Геометрия задачи позволяет применить преобразование Фурье по y к уравнениям и граничным условиям, что приводит к следующей краевой задаче:

$$\Delta \hat{p}_n(x, z) + \beta_n^2 \hat{p}_n(x, z) = 0, \quad \mathbf{x} \in \hat{V}_n, \quad n = 1, 2. \quad (19)$$

$$\hat{p}_1|_{z=0} = \begin{cases} Q_0(x), & x \in [-d_1, d_1] = \hat{\Omega}, \\ 0, & x \notin \hat{\Omega}, \end{cases} \quad (20)$$

$$\hat{p}_2|_{z=0} = 0,$$

$$\hat{p}_n|_{z=-h} = 0, \quad n = 1, 2,$$

где \hat{V}_n – сечение трехмерных областей V_1 и V_2 плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxz , $\hat{p}_n = \mathcal{F}_y[p_n]$ и $Q_0(x) = \mathcal{F}_y[q_0]$ – преобразование Фурье

от давления и внешней нагрузки соответственно, $\beta_n^2 = \kappa_n^2 - \alpha_2^2$, а α_2 – параметр преобразования Фурье.

Полученные уравнения (19) и граничные условия (20) по форме совпадают с соответствующими уравнениями для плоских задач дифракции. Основное отличие здесь только в появлении волновых чисел β_n вместо κ_n . Поэтому для численного решения этой краевой задачи может применяться гибридная численно-аналитическая схема или МКЭ с PML. Как и в случае ловушечных мод, волновые числа ζ_n для вытекающих волн определяются как корни уравнения $\det A(\zeta_n) = 0$, где A – матрица системы (17).

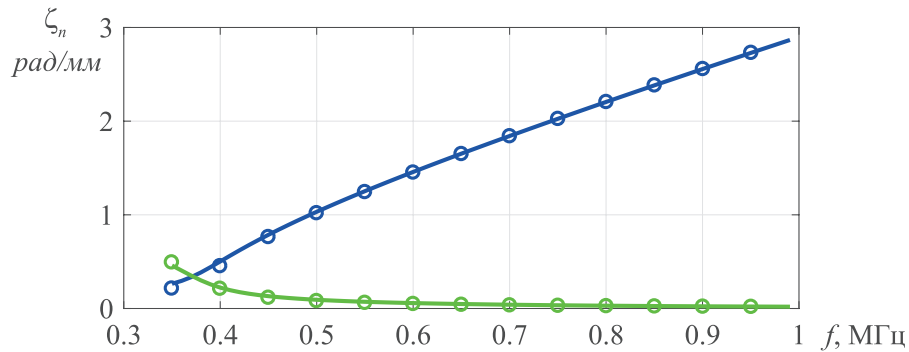


Рисунок 16 – Зависимость ближайшего к вещественной оси волнового числа ζ от частоты f для встроенного акустического волновода. Сплошными линиями обозначены численные результаты, полученные в рамках гибридной схемы, маркерами – МКЭ с идеально согласованными слоями; синие линии и маркеры – вещественная часть ζ , а мнимая часть – зеленые маркеры и линия

На рисунке 16 представлена зависимость ближайшего к вещественной оси (на низких частотах) волнового числа ζ вытекающей моды. В целом, результаты МКЭ с PML совпадают с гибридной численно-аналитической схемой, однако, при малых частотах наблюдается расхождение, которое уменьшается с ростом частоты.

В **заключении** приводятся основные результаты, полученные в рамках выполнения работы, указывается список опубликованных работ.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, входящих в Перечень ВАК Минобрнауки России и индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus:

1. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акустический журнал. – 2018. – Т. 64. – № 1. – С. 3-12.

Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Hybrid Numerical-Analytical Scheme for Calculating Elastic Wave Diffraction in Locally Inhomogeneous Waveguides // Acoustical Physics. – 2018. – Vol. 64. – № 1. – P. 3-12.

2. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Распределение энергии пьезоактуатора между бегущими волнами, возбуждаемыми в упругом слое // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56. – № 6. – С. 84-93.

Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Distribution of the energy of a piezoelectric actuator between traveling waves excited in an elastic layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2015. – Vol. 56. – № 6. – P. 84-93.

Статьи в изданиях, входящих в Перечень ВАК Минобрнауки России:

3. Евдокимов А.А. Распределение и движение корней дисперсионного уравнения для волн Лэмба в комплексной плоскости // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2017. – № 3. – С. 30-37.

Статьи в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus:

4. Glushkov E.V. Guided wave generation in laminated elastic substrates with piezoelectrical coatings and patches / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Evdokimov, Ch. Zhang. // Physics Procedia. – 2015. – Vol. 70. – P. 945-948.

5. Glushkov E.V. Ultrasonic Guided Wave Characterization and Inspection of Laminate Fiber-Reinforced Composite Plates / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, A.A. Eremin, A.A. Evdokimov et al. // Springer Proceedings of International Conference on Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications, PHENMA 2015. – Azov, 2016. – Vol. 175. – P. 449-457.

Прочие публикации:

6. Глушков Е.В. Волновой неразрушающий контроль скрытых дефектов и очагов коррозии в слоистых металлополимерных материалах / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Ерёмин, А.А. Евдокимов. // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. – Ростов-на-Дону, 2013. – С. 149-153.

7. Глушков Е.В. Распределение энергии поверхностного источника между волнами Лэмба / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Евдокимов, С.И. Фоменко. // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XVII междунар. конф. – Ростов-на-Дону, 2014. – С. 137-141.

8. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Моделирование распространения бегущих волн в структурах с локальными неоднородностями на основе гибридной численно-аналитической схемы // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XVIII междунар. конф. – Ростов-на-Дону, 2016. – С. 150-154.

ЕВДОКИМОВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

**ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В
ПРОТЯЖЕННЫХ СМАРТ- СТРУКТУРАХ С АКТИВНЫМИ
ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ**

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук