

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»

На правах рукописи



Ханазарян Артур Дереникович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ
ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ И
СЛОИСТЫХ ВОЛНОВОДАХ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ
ЭЛЕМЕНТАМИ**

1.1.8 – механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Голуб М.В.

Краснодар

2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УПРУГИХ ВОЛНОВОДОВ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ	16
§1.1. Уравнения движения, граничные и начальные условия	16
§1.2. Граничные условия для упругих метаматериалов и фононных кристаллов	23
2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ	27
§2.1. Моделирование распространения волн в упругих метаматериалах	27
§2.1.1. Метод матриц переноса	27
§2.1.2. Метод спектральных конечных элементов	29
§2.2. Моделирование антиплоских колебаний структур с присоединенным элементом	33
§2.2.1. Постановка задачи	33
§2.2.2. Метод спектральных конечных элементов	35
§2.2.3. Полуаналитический метод конечных элементов	37
§2.3. Моделирование плоских колебаний структур с присоединенным элементом	39
§2.3.1. Постановка задачи	39
§2.3.2. Метод спектральных конечных элементов	42
§2.3.3. Полуаналитический метод конечных элементов	45
§2.4. Интегральный подход	49
3. ГИБРИДНАЯ ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ ..	54
§3.1. Упругий волновод конечной длины с одним присоединенным элементом	54

§3.1.1. Антиплоская задача	54
§3.1.2. Плоская задача первого типа	57
§3.1.3. Плоская задача второго типа	61
§3.2. Упругий волновод с присоединенным элементом	63
§3.3. Периодические структуры (упругие метаматериалы)	65
4. ЧИСЛЕННЫЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ	72
§4.1. Распространение волн в слоистых метаматериалах на основе эластомеров	72
§4.2. Анализ колебаний волновода конечной длины с одним присоединенным элементом	75
§4.2.1. Антиплоская задача	75
§4.2.2. Плоская задача первого типа	83
§4.2.3. Плоская задача второго типа	88
§4.3. Изготовление образцов упругих метаматериалов	90
§4.4. Схема проведения эксперимента	94
§4.5. Упругие метаматериалы с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость	96
§4.6. Упругие метаматериалы в виде пластины с массивом полостей	102
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	107
ЛИТЕРАТУРА	108

ВВЕДЕНИЕ

Контроль надежности основных узлов играет ключевую роль в промышленности, обеспечивая безопасность эксплуатации и контроль качества продукции. Ультразвуковой неразрушающий контроль и мониторинг состояния конструкций, как один из важнейших методов неразрушающего контроля, используют распространяющиеся ультразвуковые волны для обнаружения неоднородностей и дефектов, возникающих в структуре [1–4]. В зависимости от геометрии инспектируемой структуры и типа определяемых дефектов используются различные методы ультразвукового неразрушающего контроля (например, основанные на применении объёмных или бегущих волн). Объёмные волны обычно используются для обнаружения дефектов в объёмных структурах, а также в слоистых структурах достаточно большой толщины. Нормальные моды, среди которых можно выделить поверхностные, псевдо-поверхностные (вытекающие), каналовые волны, а также краевые (кромочные) волны, используются для конструкций с тонкостенными элементами [5–9]. Такое преимущество, как высокая чувствительность бегущих волн к внутренним и поверхностным неоднородностям, широко используется при оценке внутренних повреждений и различных дефектов в пластинах и трубах [10–13], в то время как краевые волны могут быть использованы для эффективного обнаружения повреждений в окрестности краев структур [14, 15].

На практике, для того, чтобы эффективно (например, выборочно) возбудить поверхностные волны или бегущие волны с определенными свойствами, нужно привлекать специальные технические средства, и до сих пор существует проблема, связанная с низкой эффективностью данных подходов [16]. Так, для возбуждения поперечных волн необходимо добиться их эффективного возбуждения, например, путем конвертации мод или спе-

циальной конструкции источника [17, 18]; для многомодовых режимов колебаний многослойных композитов из-за сложных дисперсионных характеристик возникает сложность в обработке и анализе полученных сигналов [19, 20].

В последние десятилетия все большее применение при решении самых разных задач находят метаматериалы (искусственно созданные композитные материалы с периодическим изменением свойств в одном или нескольких направлениях, превосходящие по характеристикам свойства отдельных компонент [21, 22]). В задачах механики и акустики, все больше приложений находят акустические/упругие метаматериалы или фононные кристаллы [23–29]. Благодаря тщательно подобранному дизайну внутренней структуры упругие метаматериалы могут обладать необычными механическими свойствами, которых нет у традиционных материалов, такими как отрицательная рефракция, наличие полных и модовых запрещённых зон, направленное излучение, фокусировка, блокировка колебаний и др., с помощью которых можно управлять распространением упругих волн [30–32].

Развитие технологий ультразвукового неразрушающего контроля выдвинуло такие новые задачи как конвертация (преобразование) различных типов волн [19, 33, 34]. Например, преобразование продольной волны в поперечную и преобразование А-моды волны Лэмба в S-моду или SH-моду и т.п. И именно упругие метаматериалы могут быть полезны для решения этих задач ультразвуковой диагностики. Так, метаматериалы могут быть размещены на пути распространения упругих волн или интегрированы вместе с пьезоэлектрическими преобразователями в единый функциональный блок для создания нового типа источника/приёмника упругих колебаний, не предусматривающих разрушения структуры контролируемых образцов [18, 35].

Разработка метаматериалов невозможна без эффективных средств

моделирования и численного анализа. Для решения соответствующих задач математической физики, описывающих динамическое поведение упругих тел, за последние годы были разработаны различные аналитические, полуаналитические, прямые численные, а также гибридные методы. Для моделирования распространения упругих волн в композитных структурах разработан ряд полуаналитических численных методов: методы, использующие глобальную матрицу жесткости [36], метод матриц переноса [37, 38], полуаналитический метод конечных элементов (ПАМКЭ) (semi-analytical finite element method) [39, 40] и др. Несмотря на то, что полуаналитические методы с небольшими вычислительными затратами позволяют определять дисперсионные характеристики различных волноводов (цилиндрических, анизотропных, пьезоэлектрических, функционально-градиентных и др.), они не могут учитывать наличие локальных неоднородностей, в том числе и для периодических волноводов.

Среди подходов к моделированию распространения и рассеяния волн в многослойных структурах с внутренними неоднородностями можно выделить интегральный подход и метод граничных интегральных уравнений [41–45], в частности, активно развиваемый в последние десятилетия южнороссийской школой механики. В рамках интегрального подхода [46–49], решение представляется через поверхностные интегралы, содержащие фундаментальные решения для всего многослойного волновода, что роднит его с ПАМКЭ и предоставляет ряд преимуществ перед прямыми численными методами. Полуаналитическая природа подхода позволяет также проводить не только численный, но также асимптотический и аналитический параметрический анализ [50, 51], а также эффективно решать обратные задачи [52–54]. Для моделирования слоистых периодических сред с массивами трещин или разрезов также были разработаны полуаналитические методы [55–57].

Для моделирования неоднородных структур с неоднородностями и дефектами сложной формы при наличии пьезоэлектрических элементов можно использовать разновидности метода конечных элементов (МКЭ) [58–62] или метода граничных элементов [63–65]. Широко применяется в последнее время метод конечных элементов высокого порядка точности (МКЭ ВПТ) причем не только для решения волновых задач. В научной литературе он также называется методом спектральных конечных элементов (spectral finite element method или SFEM) или просто методом спектральных элементов (МСЭ) [66–72]. МКЭ ВПТ, основанный на применении интерполяционных полиномов высоких порядков и специальном выборе узлов интегрирования, оказался одним из наиболее эффективных методов решения волновых задач, имеющий при этом более быструю чем МКЭ сходимость [73] и предоставляющий возможность для эффективного распараллеливания вычислений при реализации [61, 74].

Была также разработана и адаптирована для моделирования волновых задач разновидность метода конечных разностей (local interaction simulation approach или LISA) [75, 76], которая может быть легко распараллелена и позволяет описывать рассеяние на локальных неоднородностях [77, 78]. Метод конечного интегрирования для динамических задач теории упругости (elastodynamic finite integration technique – EFIT) представляет собой еще один сеточный численный метод во временной области, также способен моделировать распространение волн в гетерогенных средах [79, 80]. Помимо этого, можно выделить метод граничных масштабируемых конечных элементов (scaled boundary finite-element method - SBFEM), в рамках которого дискретизируется только граница области, что позволяет унаследовать ряд преимуществ МКЭ и метода граничных элементов (МГЭ) [81–83].

Для решения волновых задач в сложных составных структурах в по-

следние десятилетия активно разрабатываются гибридные подходы, в которых можно было бы сочетать преимущества прямых численных и полуаналитических методов. В таких гибридных вычислительных схемах области с неоднородностями произвольных форм, дискретизируются прямыми численными методами, а распространение волн в протяженных слоистых структурах описываются с помощью полуаналитических подходов [84–89]. К примеру, решение в волноводе представляется в виде суперпозиции нормальных мод или с помощью интегрального подхода, тогда как динамическое поведение пьезоактуатора, приклеенного на поверхности пластины описывается посредством МКЭ [88, 90, 91] или поврежденная зона описывается с помощью МКЭ или МГЭ [92, 93].

Тем не менее, практически отсутствуют гибридные вычислительные схемы для моделирования колебаний периодических структур и упругих метаматериалов, которые бы опирались на полуаналитические методы. Основным преимуществом таких гибридных методов является возможность напрямую определять амплитуды упругих волн, распространяющихся в протяженных элементах и тем самым рассчитывать коэффициенты конвертации волновой энергии. Таким образом, задача разработки новых эффективных математических моделей для описания волновых процессов в сложных составных периодических структурах, включающих области с неоднородностями разных типов и форм, а также присоединенные к ним протяженные слоистые волноводы, является актуальной. Создание таких моделей играет важную роль не только при разработке и применении новых конфигураций упругих метаматериалов, но при совершенствовании методов ультразвукового неразрушающего контроля.

Основной **целью** диссертационной работы является теоретическое и экспериментальное исследование распространения волн в упругих метаматериалах и слоистых волноводах с присоединенными элементами, а также

разработка соответствующих механико-математических моделей, их реализация в виде комплексов компьютерных программ и экспериментальная верификация.

Для достижения цели были сформулированы следующие **задачи**:

- 1) разработка эффективных механико-математических и компьютерных моделей, описывающих распространение упругих волн в сложных составных и периодических структурах;
- 2) подготовка экспериментальных образцов упругих метаматериалов и проведение экспериментов;
- 3) экспериментальная верификация разработанных моделей;
- 4) теоретико-экспериментальный анализ распространения упругих волн;
- 5) экспериментальное подтверждение возможности формирования запрещенных зон.

Научная новизна работы определяется следующими основными результатами:

1. Разработана новая полуаналитическая гибридная вычислительная схема и создана на ее основе компьютерная модель для описания распространения упругих волн в протяженных слоистых структурах с соединенными элементами;
2. Разработаны механико-математическая модель и компьютерная модель на основе новой полуаналитической гибридной вычислительной схемы для анализа запрещенных зон и собственных колебаний упругих метаматериалов с протяженными элементами.
3. Были рассмотрены новые типы упругих метаматериалов: метаматериалы с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость, и

метаматериалы в виде пластины с массивом полостей. Впервые проведен теоретико-экспериментальный анализ влияния конфигурации ячеек упругих метаматериалов с полостями на распространение волн и формирование запрещенных и разрешенных зон. Впервые экспериментально подтверждена возможность формирования запрещенных зон для новых типов упругих метаматериалов с полостями.

Теоретическая и практическая значимость работы определяются возможностью их применения в различных областях науки и техники, неразрушающем ультразвуковом контроле и мониторинге конструкций, а также при математическом моделировании упругих метаматериалов.

На разных этапах выполнения настоящее диссертационное исследование было поддержано грантами Российского научного фонда 22-11-00261 «Проектирование и оптимизация новых акустических метаматериалов для фильтрации, фокусировки и конвертации упругих волн», государственными заданиями Минобрнауки России FZEN-2020-0017 «Разработка расчетно-экспериментальных методов диагностики конструкций и определения и мониторинга деградации свойств материалов на основе систем возбуждения и регистрации бегущих волн» и FZEN-2024-0003 «Развитие методов ультразвукового волнового мониторинга тонкостенных конструкций из композитных материалов», Российского фонда фундаментальных исследований 21-51-53014-ГФЕН_а «Разработка эффективных численных и полуаналитических методов для моделирования и анализа динамического поведения слоистых композитных материалов с повреждениями, вызванными ударными нагрузками», 19-41-230012 р_а «Разработка новых конфигураций волноводных структур и акустических метаматериалов на основе диэлектрических эластомеров» и 18-501-12069-ННИО_а «Управление распространением волн в периодических пьезоэлектрических слоистых композитах с электродами и трещинами»), Кубанского научного фонда МФИ-20.1/118

«Разработка методов идентификации интерфейсных расслоений с помощью ультразвуковых волн Лэмба с применением алгоритмов машинного обучения», а также гранта Президента Российской Федерации МК-470.2020.1 «Теоретико-экспериментальное исследование распространения упругих волн, возбуждаемых пьезоэлектрическим преобразователем в многослойном композите в трехмерном случае».

Методология и методы исследования. Для описания волновых полей в протяженных многослойных неповрежденных волноводах используется ПАМКЭ, основанный на применении прямого преобразования Фурье по протяженной пространственной координате и последующей дискретизации с помощью МКЭ ВПТ на компакте размерностью на единицу меньшей, чем размерность пространства исходной задачи, а именно в поперечном сечении волновода. Такой подход позволяет не только эффективно рассчитывать волновые поля, но и проводить модальный анализ за счет явного представления решения в виде суперпозиции нормальных мод. Амплитуды отдельных мод находятся из граничных условий на торцах волновода с помощью проекционных методов Галеркина или коллокаций. Структуры с неоднородностями различных типов и форм моделируются с помощью МКЭ ВПТ, который дает спектральную сходимость решения. Для сопряжения полученных с помощью МКЭ ВПТ и ПАМКЭ решений также используются проекционные методы Галеркина или коллокаций. Распространение упругих волн в периодических составных структурах описывается с использованием теории Флоке-Ляпунова.

На защиту выносятся:

- 1) полуаналитическая гибридная вычислительная схема и разработанная на ее основе компьютерная модель, описывающие динамическое поведение слоистого волновода с присоединенными элементами;

- 2) механико-математическая модель для описания колебаний периодических упругих структур с ячейками, состоящими из слоистого волновода и присоединенных элементов произвольной формы;
- 3) полуаналитическая гибридная вычислительная схема и разработанная на ее основе компьютерная модель, описывающая распространение упругих волн в периодических структурах с ячейками, состоящими из слоистого волновода и присоединенных элементов;
- 4) результаты численного анализа влияния параметров ячеек упругих метаматериалов на распространение волн;
- 5) результаты экспериментальных исследований влияния параметров упругих слоистых метаматериалов с полосовыми полостями на формирование запрещенных зон, включая экспериментальное подтверждение возможности формирования запрещенных зон.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых краевых задач, применением строгих математических методов, сравнением результатов с данными, полученными экспериментально или иными методами, а также сопоставлением с известными результатами других авторов.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертации, были представлены в период с 2020 г. по 2024 г. на 19 международных и всероссийских конференциях. В их числе: International Conference Days on Diffraction (г. Санкт-Петербург, 2020 и 2024 гг.), Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения МИКМУС (г. Москва, 2020), International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (Kitakyushu, Япония, 2021 г.; Surabaya, Индонезия, 2023 г.), Всероссийская школа-конференция

«Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2021—2024), Международная школа-конференция «Комплексный анализ и его приложения» (г. Геленджик, 2021), Третья Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа - 2021» (г. Уфа, 2021 г.), Четвёртая международная научная конференция «Осенние математические чтения в Адыгее» (г. Майкоп, 2021 г.), Всероссийская научно-практическая конференция "Прикладная математика и информатика в современном мире"(г. Краснодар, 2022 г.), XIII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Санкт-Петербург, 2023 г.), I Всероссийская научно-практическая конференция "Математические методы и модели в решении прикладных задач"(г. Краснодар, 2023 г.), XIX Всероссийская научно-техническая конференция Приборостроение в XXI веке Интеграция науки, образования и производства (г. Ижевск, 2023 г.), Third International Conference “Modern Problems in Modeling Materials for Mechanical, Medical and Biological Applications” (г. Ростов-на-Дону, 2023 г.), XXI Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2023 г.), 51 школа-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева (г. Великий Новгород, 2024 г.).

Структура и объем работы. Диссертационная работа общим объёмом 125 страниц имеет следующую структуру: введение, четыре главы, заключение и список литературы, включающий 123 источника. Работа содержит 48 рисунков и 5 таблиц.

В первой главе диссертации изложены теоретические основы динамической теории упругости, необходимые при дальнейшем изложении материала. Даются постановки краевых задач для упругих тел, рассматриваются вариационные формулировки задач для установившихся гармонических плоских и антиплоских колебаний, которые используются при реализации

МКЭ ВПТ и ПАМКЭ. Приводятся граничные условия в рамках теории Флоке-Ляпунова для упругих метаматериалов и фононных кристаллов.

Во **второй главе** рассматриваются численные методы решения волновых задач об установившихся гармонических плоских и антиплоских колебаниях многослойных волноводов и упругих структур конечных размеров. Описывается схема использования метода матриц переноса и МКЭ ВПТ для описания распространения плоских волн в слоистых фононных кристаллах. Представлено решение вспомогательных задач с помощью МКЭ ВПТ и ПАМКЭ для упругих анизотропных тел конечных размеров в антиплоской и плоской постановке. Описаны также вкратце основные идеи интегрального подхода [100–102] и проведено сравнение с МКЭ ВПТ и ПАМКЭ.

В **третьей главе** описывается гибридная вычислительная схема построения решения динамических задач теории упругости для упругого волновода конечной длины с одним присоединенным элементом в плоской и антиплоской постановке. Рассматривается также гибридная вычислительная схема для моделирования дифракции бегущей волны на неоднородности. Кроме того, гибридная схема обобщается на случай колебаний упругих метаматериалов.

В **четвертой главе** проводится численный и экспериментальный анализ волновых процессов в рассматриваемых структурах. Проводится сравнение разработанного гибридного метода с МКЭ. Описывается изготовление образцов упругих метаматериалов с полостями и схема проведения эксперимента. Численно и экспериментально исследуются колебания упругих метаматериалов с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость, и упругих метаматериалов в виде пластины с массивом полостей. Производится экспериментальное подтверждение возможности формирования запрещенных зон для рассматриваемых упругих метаматериалов.

Автор диссертации выражает искреннюю благодарность за поддерж-

ку своей семье, а также научному руководителю М.В. Голубу, что подарил ему творческую нить и вдохновил на исследование волновых задач. Кроме того, автор благодарит профессоров Е.В. Глушкова, Н.В. Глушкову и всех сотрудников Института математики, механики и информатики, в первую очередь А.А. Ерёмину, С.И. Фоменко, О.В. Дорошенко, А.А. Макаренко, К.К. Канищева за ценные советы, плодотворные дискуссии в ходе выполнения работы и замечания к тексту диссертационной работы.

Публикации по теме диссертации. По теме диссертационного исследования опубликовано 12 работ, в том числе 3 статьи [94–96] в рецензируемых изданиях из списка ВАК, 3 статьи [97–99] в прочих изданиях, индексируемых в Web of Science или Scopus, 6 статей – в сборниках трудов конференций.

1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УПРУГИХ ВОЛНОВОДОВ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В данной диссертационной работе изучаются волновые процессы в составных структурах, в общем случае состоящих из анизотропных упругих компонентов. Исключение составляют частные постановки задач в четвертой главе, где рассматривается взаимодействие с пьезоэлектрическим преобразователем, возбуждающим колебания в рассматриваемых структурах. По этой причине в первой главе приводится общий вид уравнений движения и состояния [49]. Для описания динамических свойств упругих многослойных волноводов приводится краткая сводка используемых в дальнейшем соотношений (уравнения движения и граничные условия), а также обсуждается обобщенная (вариационная) постановка краевых задач. Для описания динамики периодических структур приводятся необходимые основные сведения из теории Флоке-Ляпунова [103–105].

§1.1. Уравнения движения, граничные и начальные условия

В декартовой системе координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ рассматривается составное тело, занимающее в начальном состоянии объём V . Пусть на его поверхности $S = \partial V$ приложены поверхностные силы $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, а также имеются объёмные силы $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, под действием которых точки тела $\mathbf{x} \in V$ отклоняются от первоначального положения, заданного в момент времени $t = t_0$. В произвольный момент времени $t > t_0$ положение всех точек описывается вектором перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. В предположении сплошности вектор перемещений \mathbf{u} является непрерывной функцией пространственных координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ и времени t .

Для описания динамического поведения пьезоэлектрического тела в рамках предположения о линейности необходимо в каждой точке \mathbf{x} задать тензор упругих постоянных $C_{ijkl}(\mathbf{x})$, тензор констант пьезоэлектрических напряжений $e_{kij}(\mathbf{x})$, тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ и плотность $\rho(\mathbf{x})$. Динамическое поведение электроупругих тел описывается уравнениями движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + F_i(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

уравнениями состояния

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl}(\mathbf{x}) s_{kl}(\mathbf{x}, t) - e_{ijk}(\mathbf{x}) E_k(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

$$D_i(\mathbf{x}, t) = e_{ikl}(\mathbf{x}) s_{kl}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) E_j(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

и уравнениями электростатики [49]

$$\frac{\partial D_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь F_i — распределение объёмных сил, σ_{ij} — тензор напряжений, s_{ij} — тензор деформаций, E_i — компоненты вектора напряжённости электрического поля, D_i — компоненты вектора электрической индукции. При этом использование тензорной записи предполагает суммирование по одинаковым индексам. Соотношения Коши

$$s_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

связывают компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений, а компоненты вектора напряжённости электрического поля \mathbf{E} выражаются через электрический потенциал ϕ :

$$E_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k}.$$

Начальные условия для всего объёма V полностью определяются заданием перемещений и скоростей точек тела в некоторый начальный момент времени t_0 [49], который обычно для удобства принимают $t_0 = 0$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t_0), \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)}{\partial t} = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t_0). \quad (1.5)$$

Предполагается, что до начального момента времени $t = t_0$ точки тела находились в покое

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Big|_{t \leq t_0} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t \leq t_0} \equiv 0. \quad (1.6)$$

Постановка задачи должна также дополняться механическими граничными условиями, которые выполняются в любой момент времени $t \geq 0$. На всей поверхности тела S в каждый момент времени t должны задаваться либо перемещения (I краевая задача теории упругости — задача Дирихле)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x})p(t), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (1.7)$$

либо напряжения (II краевая задача — задача Неймана)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j(\mathbf{x}) = q_i(\mathbf{x})p(t), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ — нормаль к поверхности S . К граничным условиям смешанного типа (III краевая задача) относятся те, в которых, например, на некоторой части поверхности S_u задаются граничные условия (1.7), а условия (1.8) задаются на поверхности S_τ , причём $S = S_u \cup S_\tau$.

При описании составных тел или тел с неоднородностями, в том числе, упругих метаматериалов, как правило предполагается отсутствие скачков перемещений и напряжений на границах раздела различных сред. При рассмотрении композитных структур, которые получаются путём соединения элементов из различных материалов, можно разбить всю область V на подобласти V_i ($V = \bigcup V_i$), в каждой из которых свойства постоянны. При

этом необходимо задать граничные условия для описания различных типов взаимодействий между компонентами составной структуры.

Наиболее частым условием является идеальный контакт, или жёсткое сцепление сред. Для идеального контакта двух областей, V_1 и V_2 , имеющих общую границу $S_1 = \partial V_1 \cap \partial V_2$, граничные условия на S_1 определяются условиями непрерывности перемещений

$$[[\mathbf{u}(\mathbf{x})]] = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^+} \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) - \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^-} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S_1,$$

а также нормальных и касательных напряжений на границе с выбранной нормалью \mathbf{n}

$$[[\sigma_{ij}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x})]] = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1.$$

Здесь и далее для обозначения скачка используются двойные квадратные скобки.

Нормальные и касательные напряжения, возникающие в упругом теле на некоторой элементарной площадке с нормалью \mathbf{n} , также могут представляться в векторной форме как $\boldsymbol{\tau}_\mathbf{n} = \{\tau_{n1}, \tau_{n2}, \tau_{n3}\}$ ($\tau_{ni} = \sigma_{ij}n_j$).

При установившихся гармонических колебаниях зависимость от времени имеет вид $\cos(\theta(\mathbf{x}) - \omega t)$, где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота установившихся колебаний, f – размерная частота, $\theta(\mathbf{x})$ – сдвиг фазы. В таком случае оказывается удобным перейти к комплексной форме записи вектора перемещений \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}].$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – комплекснозначная амплитуда перемещений \mathbf{u} . С помощью комплексных амплитуд и временного множителя $e^{-i\omega t}$ записываются также и компоненты тензоров напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} , которые характеризуют механическое состояние среды. Все линейные операции над данными величинами сводятся к операциям над их комплексными амплитудами. Такая запись удобна тем, что одновременно описывает амплитуду

и сдвиг фаз и при этом позволяет уйти от временной зависимости, что значительно упрощает запись выражений. В дальнейшем, под \mathbf{u} , σ_{ij} , ε_{ij} и т.д. понимаются комплексные амплитуды соответствующих величин.

В линейной теории упругости в случае гармонических колебаний в условиях отсутствия объёмных сил перемещения, деформация и напряжения связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.9)$$

соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1.10)$$

и геометрическими соотношениями Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.11)$$

Здесь в тензорной записи для производных по координатам используется обозначение $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Уравнения движения (1.9) сводятся к уравнениям Навье-Ляме относительно перемещений \mathbf{u} :

$$\mathcal{L}\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0. \quad (1.12)$$

В анизотропном случае дифференциальный оператор Ляме имеет вид:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} \equiv \frac{1}{2}(C_{ijmn}(u_{m,nj} + u_{n,mj})).$$

В изотропном случае, когда упругие свойства тела одинаковы во всех направлениях, закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (1.13)$$

где $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $\delta = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ — символ Кронекера. λ , μ — упругие модули (константы Ляме), а оператор \mathcal{L} в уравнении движения

(1.9) принимает вид:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} \equiv (\lambda + 2\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u}.$$

На практике нередко встречаются ситуации, когда можно ограничиться только двумерной формулировкой (плоское деформированное состояние). В этом случае предполагается, что геометрия тела и вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ не зависят от одной пространственной координаты. Для определенности пусть это будет координата x_2 (или y в традиционных обозначениях), тогда $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u_1(\mathbf{x}), 0, u_3(\mathbf{x})\}$ и $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$. Также в работе рассматриваются антиплоские установившиеся гармонические колебания, которые описываются уравнением Гельмгольца относительно второй компоненты вектора перемещений u_y :

$$\mu\nabla^2 u_y(\mathbf{x}) + \rho\omega^2 u_y(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.14)$$

В дальнейшем для удобства в случае рассмотрения антиплоских колебаний нижний индекс y компоненты вектора перемещений u_y опускается, а в случае плоских колебаний будет использоваться двумерная формулировка и вектор перемещений будет записываться как

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \{u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)\}.$$

Уравнения (1.9) и (1.14) предполагаются справедливыми в любой точке тела (сильная постановка). Основная идея методов взвешенных невязок, к которым относится МКЭ ВПТ, заключается в отыскании коэффициентов разложения решения рассматриваемого уравнения из условия ортогональности невязки и тестовых функций [61, 67, 106]. Для записи вариационной формулировки в виде равенства нулю проекции невязки вводятся пространства пробных

$$U = \{u | u \in W_2^2(V), u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial V\}$$

и тестовых функций

$$Y = \{v | v \in L_2(V), v(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial V\},$$

где $L_2(V)$ – пространство Лебега, а $W_2^2(V)$ – пространство Соболева. Выбор тестовых функций зависит, кроме прочего, от граничных условий. В результате умножения исходных дифференциальных уравнений на тестовые функции $v_i \in Y$, строится система интегральных соотношений и далее проводится интегрирование по всей области. Применяя первую формулу Грина, вариационные формулировки уравнений движения (1.9) и уравнения Гельмгольца (1.14) можно переписать соответственно в так называемой слабой постановке:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_S \sigma_{ij}(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) n_j d\ell - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dV + \\ + \rho\omega^2 \sum_{i=1}^3 \int_V u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) dV = 0, \quad (1.15)$$

$$\mu \int_V \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) dV - \mu \oint_S v(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} d\ell - \rho\omega^2 \int_V u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dV = 0. \quad (1.16)$$

При этом уже $U \subset W_2^1(V)$ и $Y \subset W_2^1(V)$. Преимущество такого преобразования состоит в том, что слабая постановка исходных дифференциальных уравнений второго порядка содержит только первые производные. Кроме того, некоторые методы взвешенных невязок, например, метод спектральных конечных элементов, требуют преобразования координат. Далее проводится дискретизация уравнений (1.15) и (1.16). Для этого вводится конечномерное подпространство $U^N \subset U$ и приближенное решение $u^N \in U^N$ раскладывается по базису u_k , $k = 1, \dots, N$:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N a_k u_k(\mathbf{x}).$$

Пространство тестовых функций Y может быть уменьшено до конечномерного пространства $Y^N \subset Y$ с базисом v_k , $k = 1, \dots, N$. Таким образом, для определения коэффициентов разложения a_k выписывается система линейных алгебраических уравнений. Такой подход называется методом Петрова–Галёркина, или зачастую просто методом Галёркина [61]. Если базисы u_k и v_k совпадают, то такая модификация метода Петрова–Галёркина называется методом Бубнова–Галёркина.

§1.2. Граничные условия для упругих метаматериалов и фононных кристаллов

В данном диссертационном исследовании большое внимание уделено рассмотрению распространения волн в упругих метаматериалах. Решение задач математической физики для волноводов с периодическим изменением структуры, которыми и являются упругие метаматериалы, требует применения теории Флоке–Ляпунова и рассмотрения соответствующих граничных условий [104, 107], которые и приводятся в данном разделе.

В качестве самого простого типа периодических структур сначала рассматривается слоистый фононный кристалл или упругий метаматериал в виде пакета слоев конечной толщины, расположенных между двумя изотропными упругими полуплоскостями (рис. 1.1). Такая периодическая структура состоит из M упругих элементарных ячеек толщиной H состоящих из L подслоев. В этом случае имеет смысл ввести систему координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ таким образом, чтобы нижняя граница пакета был параллельна оси Ox_2 . Слои конечной толщины $h_n = z_n - z_{n-1}$ занимают области $V^{(n)} = \{|x_2| \leq \infty, z_{n-1} \leq x_1 \leq z_n\}$, а два полупространства ($\{x_1 \leq 0\}$) и ($\{x_1 \geq MH\}$) обозначаются соответственно $V^{(0)}$ и $V^{(ML+1)}$.

На границах раздела слоев $x_1 = z_k$ задаются условия непрерывности

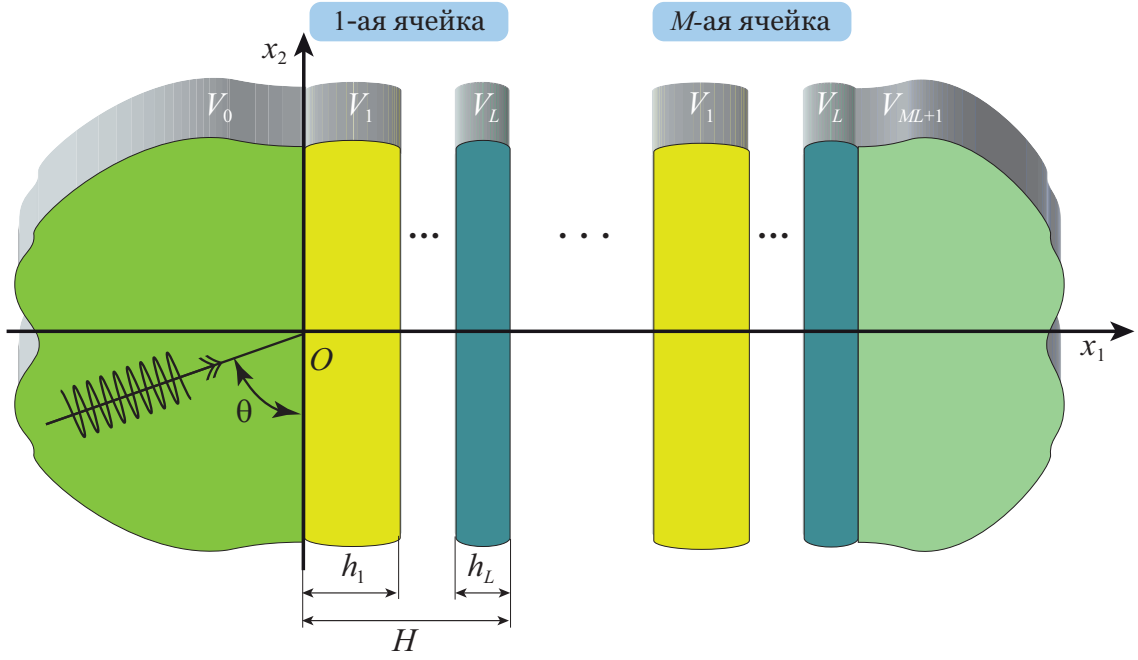


Рисунок 1.1 — Периодическая структура в виде пакета слоев, расположенных между двумя изотропными упругими полуплоскостями

смещений и напряжений

$$[[u_i(\mathbf{x})]] = 0, \quad x_1 = z_k, \quad i = 1, 2, \quad (1.17)$$

$$[[\sigma_{i1}(\mathbf{x})]] = 0, \quad x_1 = z_k, \quad i = 1, 2. \quad (1.18)$$

В случае бесконечного периодического пакета слоев с двухслойной ячейкой, изображенного на рис. 1.2, для описания плоских волн Флоке-Блоха, распространяющихся под углом θ к оси Ox_1 , вводится волновое число ζ и задаются следующие периодические граничные условия:

$$u_i(x_1, d) = u_i(x_1, 0)e^{-i\zeta \cos \theta d}, \quad 0 \leq x_1 \leq H, \quad (1.19)$$

$$u_i(H, x_2) = u_i(0, x_2)e^{-i\zeta \sin \theta H}, \quad 0 \leq x_2 \leq d, \quad (1.20)$$

$$\sigma_{i2}(x_1, d) = \sigma_{i2}(x_1, 0)e^{-i\zeta \cos \theta d}, \quad 0 \leq x_1 \leq H, \quad (1.21)$$

$$\sigma_{i1}(H, x_2) = \sigma_{i1}(0, x_2)e^{-i\zeta \sin \theta H}, \quad 0 \leq x_2 \leq d. \quad (1.22)$$

В случае волноводных структур с периодической организацией, то есть с бесконечным количеством ячеек, в рамках теории Флоке-Ляпунова

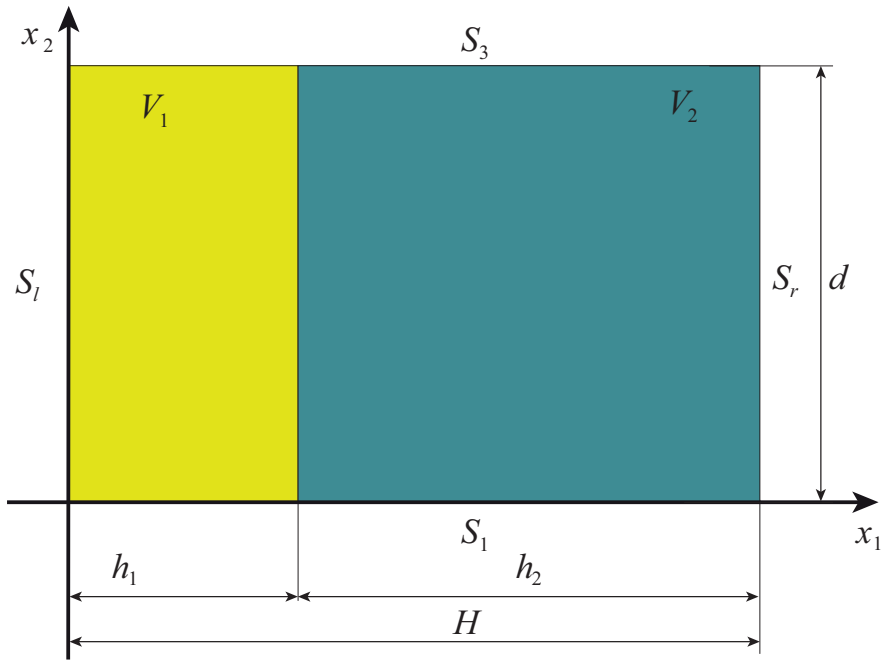


Рисунок 1.2— Ячейка слоистого фононного кристалла

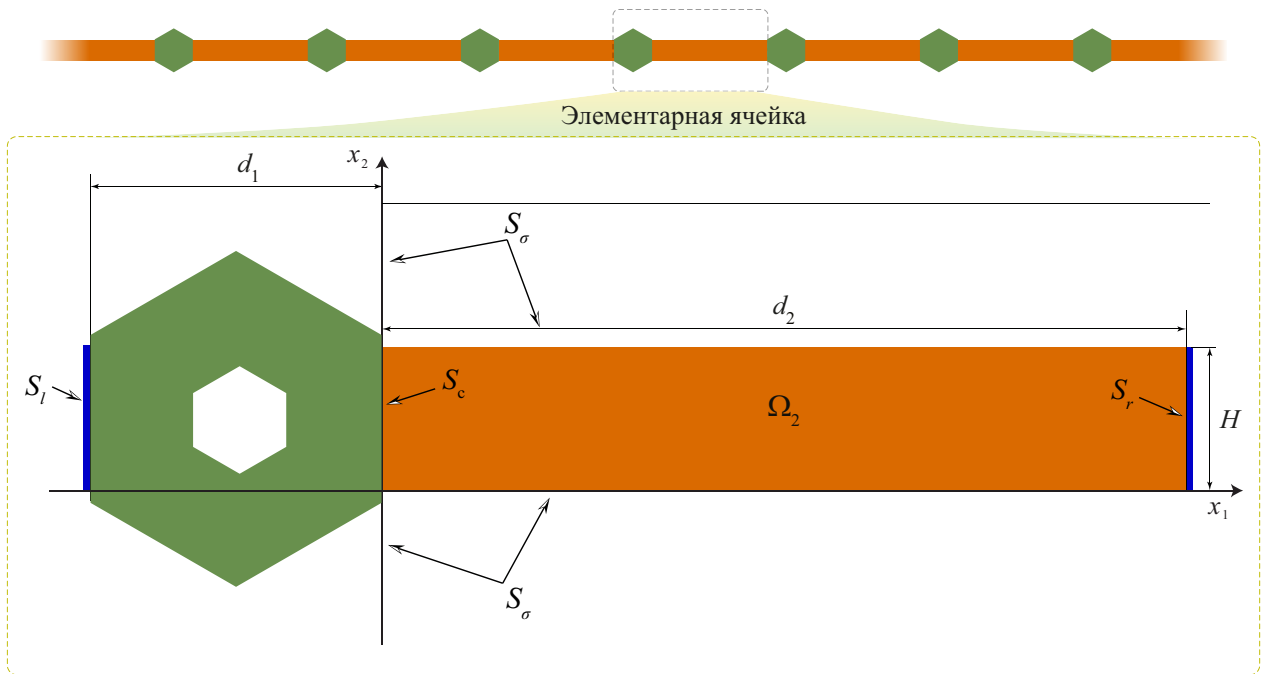


Рисунок 1.3— Геометрия задачи в случае прямоугольной области Ω_1

обычно задаются периодические граничные условия для перемещений и

напряжений.

$$\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x} + \mathbf{L}) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})e^{-i\zeta|\mathbf{L}|}, \quad (1.23)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x} + \mathbf{L})n_j = \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x})n_j e^{-i\zeta|\mathbf{L}|}. \quad (1.24)$$

Для метаматериала с составной ячейкой, схематически изображенного на рис. 1.3, у которого свойства изменяются только в одном направлении ($\mathbf{L} = \{L = d_1 + d_2, 0\}$) периодические граничные условия (1.23)–(1.24) принимают следующий вид:

$$u_i^{(2)}(-d_1, x_2) = u_i^{(1)}(d_2, x_2)e^{-i\zeta L}, \quad x_2 \in [0, H], \quad (1.25)$$

$$\sigma_{i1}^{(2)}(-d_1, x_2) = \sigma_{i1}^{(1)}(d_2, x_2)e^{-i\zeta L}, \quad x_2 \in [0, H]. \quad (1.26)$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ

§2.1. Моделирование распространения волн в упругих метаматериалах

Распространение плоских волн в слоистом фононном кристалле или упругом метатматериале может быть описано как с помощью полуаналитических методов, так и с помощью сеточных численных методов, например, методом спектральных конечных элементов. В данном разделе описываются два подхода к моделированию распространения плоских волн в таких периодических структурах с конечным и бесконечным количеством ячеек. Для периодических структур чаще всего рассматриваются задачи о формировании запрещенных зон и связанных с ними вопросов о взаимосвязи между частотой ω и волновым числом ζ волн, распространяющихся в периодической структуре.

§2.1.1. Метод матриц переноса

Уравнения движения (1.9) можно переписать в виде

$$\mathbf{B}_2 \frac{d^2}{dx_1^2} \mathbf{U} = \mathbf{B}_1 \frac{d}{dx_1} \mathbf{U} + \mathbf{B}_0 \mathbf{U}, \quad (2.1)$$

где матрицы $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ для анизотропных материалов имеют явное представление [56, 108]. Далее (2.1) можно свести к системе

$$\frac{d}{dx_1} \mathbf{Y} = \mathbf{P} \mathbf{Y} \quad (2.2)$$

относительно

$$\mathbf{Y} = \left\{ u_1, u_2, \frac{du_1}{dx_1}, \frac{du_2}{dx_1} \right\}$$

путем достаточно простых преобразований, где \mathbf{P} можно записать в виде:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Матрицы \mathbf{O}_2 и \mathbf{I}_2 — нулевая и единичная матрицы размера 2×2 соответственно.

Решение системы (2.2) выражается через матрицу $\tilde{\mathbf{M}}$, составленную из собственных векторов \mathbf{P} , и диагональную матрицу

$$\mathbf{E}(x_1) = \exp\{\text{diag}(\{\gamma_1, \dots, \gamma_4\}x_1)\},$$

где γ_i — собственные значения матрицы \mathbf{P} :

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{E}(x_1)\mathbf{c} \quad (2.4)$$

Связь между вектором перемещений \mathbf{U} и вектором состояния $\mathbf{V} = \{u_1, u_2, \sigma_{12}, \sigma_{22}\}$ осуществляется при помощи матрицы \mathbf{S} [109]:

$$\mathbf{V}(x_1) = \mathbf{S}\mathbf{U}(x_1) \quad (2.5)$$

Если положить $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{M}}$, то получим решение относительно вектора состояния:

$$\mathbf{V}(x_1) = \mathbf{M}\mathbf{E}(x_1)\mathbf{c} \quad (2.6)$$

Матрица переноса с границы x_0 по определению выражается следующим образом:

$$\mathbf{V}(h_0 + x_0) = \mathbf{T}\mathbf{V}(x_0) \quad (2.7)$$

Здесь h_0 — толщина ячейки. Используя предыдущие соотношения получим явное представление матрицы переноса для слоя:

$$\mathbf{T}(h_0) = \mathbf{M}\mathbf{E}(h_0)\mathbf{M}^{-1} \quad (2.8)$$

Используя условия непрерывности перемещений и напряжений, можно представить матрицу переноса для пакета слоёв как произведение матриц переноса всех подслоёв, входящих в структуру пакета. Для одной ячейки матрица переноса T_{cell} выглядит следующим образом:

$$\mathbf{T}_{cell}(\kappa, \theta, \omega) = \prod_{i=M}^1 \mathbf{T}_i(h_i) \quad (2.9)$$

В таком случае, можно получить дисперсионное уравнение, которое описывает распространение волн Флоке-Блоха с волновым числом ζ , которые распространяются в периодической структуре с бесконечным числом ячеек [103].

$$\det (\mathbf{T}_{cell}(\zeta, \theta, \omega) - e^{i\zeta \cos \theta d} \mathbf{E}) = 0.$$

§2.1.2. Метод спектральных конечных элементов

Для области $V = V_1 \cup V_2$ из рис. 1.2 рассматривается слабая постановка (1.15) уравнений движения (1.9) вместе с периодическими условиями (1.19)–(1.22).

В рамках МКЭ ВПТ для аппроксимации решения используются интерполяционные полиномы более высоких степеней, в отличие от классического МКЭ, где используются полиномы первого или второго, реже третьего порядков, из-за возрастания осцилляций у границ конечного элемента при использовании полиномов большей степени [110]. При этом в качестве базисных функций используется тензорное произведение соответствующих одномерных базисных функций. Такой подход позволяет добиться спектральной (экспоненциальной) сходимости решения [73], и тем самым существенно сократить количество степеней свободы для оптимизации вычислительных ресурсов.

В настоящей работе в качестве базисных функций для аппроксимации $u_k(\mathbf{x})$ используются интерполяционные полиномы Лагранжа $C^{i_k}(\xi_k^{l_k})$, на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто χ_j [61, 67, 69, 111–113]. Для прямоугольной области $V_1 \cup V_2$ производится разбиение на прямоугольные элементы (на M_1 по оси x_1 и на M_2 по оси x_2):

$$V = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} [x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1}] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} [x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1}].$$

При этом глобальная система координат x_k связана с локальной системой координат $\xi_k^{l_k}$ на каждом элементе l_k соотношениями вида

$$\xi_k^{l_k} = \frac{2x_i - x_k^{l_{k+1}} - x_k^{l_k}}{x_k^{l_{k+1}} - x_k^{l_k}}, \quad x_i = \frac{x_k^{l_{k+1}} - x_k^{l_k}}{2} \xi_k^{l_k} + \frac{x_k^{l_{k+1}} + x_k^{l_k}}{2},$$

$$\frac{d}{dx_k} = S^{l_k} \frac{d}{d\xi_k^{l_k}}, \quad S^{l_k} = \frac{2}{x_k^{l_{k+1}} - x_k^{l_k}}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда решение уравнения (1.9) можно представить в виде

$$u_k(x_1, x_2) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} y_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) =$$

$$= \sum_{I_1=1}^{2G} y^{I_1} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad (2.10)$$

где функция

$$I(k, l_1, l_2, i_1, i_2) = (i_1 - 1)(M_2 N + 1) + (M_2 N + 1)N(l_1 - 1) + N(l_2 - 1) + i_2$$

используется для индексации узлов, а величина $G = (M_1 N + 1)(M_2 N + 1)$ – это общее количество узлов в рассматриваемой области V . В узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто χ_j значения интерполяционных полиномов совпадают с дельта-символом Кронекера

$$C^i(\chi_j) = \delta_{ij},$$

а значения производной вычисляются аналитически [112] и обозначаются

$$\frac{dC^i(\chi_j)}{d\xi} = D_j^i.$$

Для дискретизации уравнения (1.15) применяется проекционный метод Бубнова–Галёркина, согласно которому тестовые функции $v_i^{k'}(\mathbf{x})$ выбираются совпадающими с базисными функциями:

$$v_i^{k'}(\mathbf{x}) = \delta_{k'i} C^{i'_1}(\xi_1^{l'_1}) C^{i'_2}(\xi_2^{l'_2}).$$

Следует отметить, что для определенности необходимо на тестовые функции наложить условия

$$\begin{aligned} v_i^{k'}(x_1, d) &= v_i^{k'}(x_1, 0)e^{-i\zeta \cos \theta d}, & 0 \leq x_1 \leq H, \\ v_i^{k'}(H, x_2) &= v_i^{k'}(0, x_2)e^{-i\zeta \sin \theta H}, & 0 \leq x_2 \leq d, \end{aligned}$$

в которых отражается зависимость от волнового числа волн Флоке-Блоха ζ . В дальнейшем для нумерации тестовых функций используется индекс $I'(k, l'_1, l'_2, i'_1, i'_2)$ таким же образом, как и индекс $I(k, l_1, l_2, i_1, i_2)$.

Интегралы в (1.15) вычисляются с помощью квадратурной формулы Лобатто [69] на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто χ_k :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{N+1} w_k f(\chi_k),$$

точной для многочленов $f(x)$ степени не выше $2N - 1$, совпадающей с формулой трапеций при $N = 1$, а при $N = 2$ – с формулой Симпсона.

При подстановке периодических граничных условий Флоке (1.21) и (1.22) контурный интеграл в (1.15) равен нулю:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial V} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) v_i^{k'*}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) d\ell &= \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_0^H v_i^{k'*}(x_1, 0) (-\sigma_{i2}(x_1, 0) + e^{i\zeta \cos \theta d} \sigma_{i2}(x_1, d)) dx_1 + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_0^d v_i^{k'*}(0, x_2) (-\sigma_{i1}(0, x_2) + e^{i\zeta \sin \theta H} \sigma_{i1}(H, x_2)) dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при приложении некоторой заданной поверхностной нагрузки может быть составлена следующая система линейных алгебраических уравнений (компоненты f^I в правой части описывают эту нагрузку):

$$\sum_{I=1}^{2G} (A_{II} - \omega^2 M_{II}) y^I = f^I. \quad (2.11)$$

Матрицы $A_{I'I}$, $M_{I'I}$ в системе (2.11) вычисляются отдельно. Вклад интегралов по области можно разделить на диагональную матрицу масс

$$M_{I'I} = -\frac{\rho}{S^{l_1} S^{l_2}} \delta_{l'_1 l_1} \delta_{l'_2 l_2} \delta_{kk'} w_{i_1} \delta_{i'_1 i_1} w_{i_2} \delta_{i'_2 i_2}$$

и матрицу жесткости

$$A_{I'I} = \delta_{l'_1 l_1} \delta_{l'_2 l_2} \left(-\frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} w_{i_2} \delta_{i'_2 i_2} C_{k'1k1} \sum_{n=1}^{N+1} w_n D_n^{i'_1} D_n^{i_1} - \frac{S^{l_2}}{S^{l_1}} w_{i_1} \delta_{i'_1 i_1} C_{k'2k2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{r=1}^{N+1} w_n D_n^{i'_2} D_n^{i_2} - \left(C_{k'1k2} D_{i_1}^{i'_1} D_{i_2}^{i_2} w_{i_1} w_{i_2}' + C_{k'2k1} D_{i_1}^{i_1} D_{i_2}^{i'_2} w_{i_1}' w_{i_2} \right) \right).$$

Для удовлетворения периодических граничных условий (1.19)–(1.20) вводится вспомогательная матрица \mathbf{R} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} = \{y_i^I, y_b^I, y_t^I, y_l^I, y_r^I\}^T, \quad \hat{\mathbf{y}} = \{y_i^I, y_b^I, y_l^I\}^T, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R}_{I\tilde{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta \cos \theta d} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E} \\ 0 & 0 & e^{-i\zeta \sin \theta H} \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

где узлы y_i^I соответствуют узлам внутри области V , узлы y_b^I соответствуют узлам на нижней периодической границе S_1 , узлы y_t^I соответствуют узлам на верхней периодической границе S_3 , узлы y_l^I соответствуют узлам на левой периодической границе S_l , узлы y_r^I соответствуют узлам на правой периодической границе S_r , а \tilde{I} – используется для индексации узлов за исключением тех, что соответствуют y_t^I и y_r^I . Аналогично удовлетворяются периодические граничные условия (1.25) для периодических структур с изменением свойств в одном направлении. Тогда система (2.11) запишется в эквивалентной форме относительно $\hat{\mathbf{y}}$:

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathbf{A}}(\zeta) - \omega^2 \widehat{\mathbf{M}}(\zeta)\right) \widehat{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}, \\
\widehat{\mathbf{A}}(\zeta) &= \mathbf{R}^*(\zeta) \mathbf{A} \mathbf{R}(\zeta), \\
\widehat{\mathbf{M}}(\zeta) &= \mathbf{R}^*(\zeta) \mathbf{M} \mathbf{R}(\zeta).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Учитывая (2.14), получается следующее дисперсионное уравнение, связывающее волновое число ζ и частоту ω :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}(\zeta) - \lambda_n \mathbf{E}) &= 0, \\
\mathbf{B}(\zeta) &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(\zeta) \widehat{\mathbf{A}}(\zeta), \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n}.
\end{aligned}$$

§2.2. Моделирование антиплоских колебаний структур с присоединенным элементом

§2.2.1. Постановка задачи

В данном разделе рассматриваются антиплоские установившиеся гармонические колебания составной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. При этом область $\Omega_2 = \{0 \leq x_1 \leq d_2, h_3 \leq x_2 \leq h_3 + h_2\}$ представляет собой протяженную структуру заданной толщины h_2 , а Ω_1 может быть произвольной формы и имеет общую границу S_c с областью Ω_2 . Соответствующая задача теории упругости формулируется в декартовой системе координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$. Установившиеся гармонические колебания в антиплоском случае для каждой из областей Ω_p , $p = 1, 2$ описываются уравнениями Гельмгольца (1.14) относительно перемещений $u^{(p)}(\mathbf{x})$.

Внешняя граница $S = \partial\Omega$ области Ω разбивается на несколько частей $S = S_0 \cup S_u \cup S_\sigma$ в зависимости от типа граничных условий. На границе S_0 задается условие жесткого защемления

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0, \tag{2.15}$$

на границе S_u перемещения приравняются к заданной функции $u_0(\mathbf{x}) \neq 0$

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (2.16)$$

а граница S_σ предполагается свободной от напряжений

$$\mu \frac{du(\mathbf{x})}{dn} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma. \quad (2.17)$$

Согласно закону Гука в антиплоском случае ненулевые компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\sigma_{13} = \mu \frac{du(\mathbf{x})}{dx_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{du(\mathbf{x})}{dx_2}.$$

На внутренней границе $S_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$ задаются граничные условия, обеспечивающие непрерывность вектора перемещений, а также нормальных напряжений

$$u^{(1)}(\mathbf{x}) = u^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mu_1 \frac{du^{(1)}(\mathbf{x})}{dn} = \mu_2 \frac{du^{(2)}(\mathbf{x})}{dn}, \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (2.18)$$

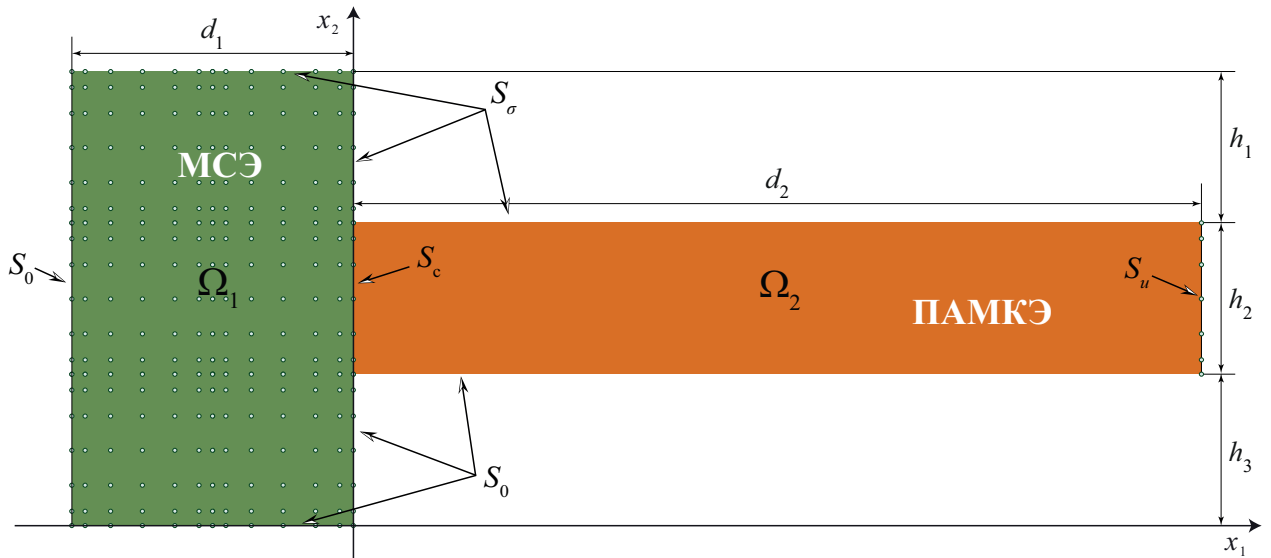


Рисунок 2.1 — Геометрия рассматриваемой задачи для антиплоских колебаний в случае прямоугольной области Ω_1

Пример геометрии задачи, которая рассматривается в данном разделе, приведен на рис. 2.1. Здесь в качестве области Ω_1 без потери общности

рассматривается область прямоугольной формы: $\Omega_1 = [-d_1, 0] \times [0, h_1 + h_2 + h_3]$. В случае областей произвольных форм достаточно стандартной модификации в МКЭ ВПТ [111].

Для построения решения с применением гибридной схемы необходимо сначала рассмотреть решение двух вспомогательных задач для областей Ω_1 и Ω_2 , в которых неизвестная функция перемещений на общей границе S_c предполагается известной, и решение строится соответственно с помощью МКЭ ВПТ и ПАМКЭ. Таким образом, для «сшивки» двух решений на внутренней границе вводится вспомогательная неизвестная функция перемещений:

$$u^{(1)}(\mathbf{x}) = u^{(2)}(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (2.19)$$

§2.2.2. Метод спектральных конечных элементов

Для области Ω_1 рассматривается слабая постановка (1.16) для уравнения Гельмгольца (1.14) вместе с граничными условиями (2.15)–(2.17) на тех границах, которые относятся к Ω_1 , и условием (2.19), где функция перемещений предполагается известной.

В рамках МКЭ ВПТ для аппроксимации $u^{(1)}(\mathbf{x})$ в качестве базисных функций используются интерполяционные полиномы Лагранжа $C^{i_k}(\xi_k^{l_k})$, на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто. Для прямоугольной области Ω_1 , производится разбиение на прямоугольные элементы (на M_1 по оси x_1 и на $M_2 = M_2^1 + M_2^2 + M_2^3$ по оси x_2):

$$\Omega_1 = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} [x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1}] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} [x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1}].$$

При этом глобальная система координат x_k связана с локальной системой координат $\xi_k^{l_k}$ на каждом элементе l_k соотношениями вида

$$\xi_k^{l_k} = \frac{2x_i - x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}, \quad x_i = \frac{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}{2} \xi_k^{l_k} + \frac{x_k^{l_k+1} + x_k^{l_k}}{2},$$

$$\frac{d}{dx_k} = S^{l_k} \frac{d}{d\xi_k^{l_k}}, \quad S^{l_k} = \frac{2}{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда решение уравнения (1.14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x_1, x_2) &= \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} y^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) = \\ &= \sum_{I_1=1}^{G_1} y^{I_1} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где функция

$$I_1(l_1, l_2, i_1, i_2) = (i_1 - 1)(M_2 N + 1) + (M_2 N + 1)N(l_1 - 1) + N(l_2 - 1) + i_2$$

используется для индексации узлов, а величина $G_1 = (M_1 N + 1)(M_2 N + 1)$ – это общее количество узлов в рассматриваемой области Ω_1 .

Для дискретизации уравнения (1.16) применяется проекционный метод Бубнова–Галёркина, согласно которому тестовые функции $v^{(1)}(\mathbf{x})$ выбираются совпадающими с базисными функциями, равными нулю на границе S_0 в соответствии с граничными условиями (2.15):

$$v^{(1)}(x_1, x_2) = C^{i'_1}(\xi_1^{l'_1}) C^{i'_2}(\xi_2^{l'_2}), \quad (2.21)$$

$$v^{(1)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (2.22)$$

При нумерации тестовых функций в дальнейшем для большего удобства используется индекс $I'_1(l'_1, l'_2, i'_1, i'_2)$ таким же образом, как и введенный выше индекс $I_1(l_1, l_2, i_1, i_2)$.

Подставляя (2.20) и (2.21) в (1.16), а также учитывая условие (2.22), можно получить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{I_1=1}^{G_1} A_{I'_1 I_1} y^{I_1} = t^{I'_1},$$

где

$$A_{I'_1 I_1} = \delta_{l'_1 l'_1} \delta_{l'_2 l'_2} \left(\mu_1 \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} w_{i_2} \delta_{i_2 i'_2} \sum_{k=1}^{N+1} w_k D_k^{i_1} D_k^{i'_1} + \mu_1 \frac{S^{l_2}}{S^{l_1}} w_{i_1} \delta_{i_1 i'_1} \sum_{r=1}^{N+1} w_r D_r^{i_2} D_r^{i'_2} - \rho \omega^2 \frac{1}{S^{l_1} S^{l_2}} w_{i_1} \delta_{i_1 i'_1} w_{i_2} \delta_{i_2 i'_2} \right) \quad (2.23)$$

и $t^{I'_1}$ вектор столбец, элементы которого равны нулю, за исключением тех, что соответствуют узлам на границе S_c

$$t^{I'_1} = \begin{cases} q(x_2), & l'_1 = M_1, i'_1 = N + 1, l'_2 \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом условие (2.17) дает нулевой вклад контурного интеграла в (1.16), а для выполнения условия (2.15) необходимо изменить соответствующие строки матрицы

$$\begin{aligned} A_{I'_1(l'_1, 1, i'_1, 1) I_1} &= 0, & A_{I'_1(l'_1, 1, i'_1, 1) I'_1(l'_1, 1, i'_1, 1)} &= 1, \\ A_{I'_1(1, l'_2, 1, i'_2) I_1} &= 0, & A_{I'_1(1, l'_2, 1, i'_2) I'_1(1, l'_2, 1, i'_2)} &= 1. \end{aligned}$$

§2.2.3. Полуаналитический метод конечных элементов

Для области Ω_2 аналогичным образом рассматривается слабая постановка (1.16) уравнения Гельмгольца (1.14) вместе с граничными условиями (2.15)–(2.17) на тех границах, которые относятся к Ω_2 , и условием (2.19). При этом к (1.14), согласно ПАМКЭ, предварительно применяется прямое преобразование Фурье по x_1 с параметром преобразования α . Тогда уравнение (1.16) можно представить как

$$\begin{aligned} \mu_2 \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial v^{(2)}(x_2)}{\partial x_2} dx_2 - \mu_2 v^{(2)}(x_2) \frac{\partial U(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{h_3}^{h_2+h_3} + \\ + (\mu_2 \alpha^2 - \rho \omega^2) \int_{h_3}^{h_2+h_3} U(\alpha, x_2) v^{(2)}(x_2) dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

относительно преобразования Фурье для перемещений:

$$U(\alpha, x_2) = \mathcal{F}_{x_1} [u_2(x_1, x_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1.$$

Имея в виду дальнейшую реализацию гибридной схемы, целесообразно раскладывать Фурье-символ $U(\alpha, x_2)$ и вспомогательную функцию $q(x_2)$ по одним и тем же базисным функциям, т.е.

$$U(\alpha, x_2) = \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^l(\alpha) C^i(\xi^l) = \sum_{I_2=1}^{G_2} \beta^{I_2}(\alpha) C^i(\xi^l), \quad (2.25)$$

$$q(x_2) = \sum_{r=1}^{M_2^2} \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_j^r C^j(\xi^r) = \sum_{I_2=1}^{G_2} \gamma^{I_2} C^j(\xi^r), \quad (2.26)$$

где $I_2(l, i) = N(l - 1) + i$ – одномерная функция для индексации узлов в поперечном сечении волновода, а величина $G_2 = M_2^2 N + 1$ – это общее количество узлов.

Для дискретизации уравнения (2.24) применяется проекционный метод Бубнова–Галёркина, согласно которому тестовые функции $v^{(2)}(\mathbf{x})$ выбираются совпадающими с базисными функциями, удовлетворяющими граничному условию (2.15)

$$v^{(2)}(x_2) = C^{i'}(\xi^{l'}), \quad (2.27)$$

$$v^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (2.28)$$

В дальнейшем индекс $I_2'(l', i')$ используется для нумерации тестовых функций таким же образом, как и индекс $I_2(l, i)$.

Подставляя представления (2.25) и (2.27) в (2.24), а также используя условия (2.17) и (2.28), можно сформулировать дисперсионное уравнение относительно частоты ω :

$$\det(\mathbf{A}(\omega) - \alpha^2 \mathcal{M}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{B}(\omega) - \lambda_n \mathbf{E}) = 0, \quad (2.29)$$

где

$$\mathbf{B}(\omega) = \mathcal{M}^{-1} \mathbf{A}(\omega),$$

$$\alpha_n = \pm \sqrt{\lambda_n},$$

а \mathbf{E} – единичная матрица,

$$A_{I_2' I_2}(\omega) = \delta_{ll'} \left(\mu_2 S^l \sum_{n=1}^{N+1} \omega_n D_n^i D_n^{i'} - \rho \omega^2 \frac{1}{S^l} \omega_{i'} \delta_{ii'} \right),$$

$$\mathcal{M}_{I_2' I_2} = -\mu_2 \frac{1}{S^l} \omega_{i'} \delta_{ll'} \delta_{ii'}.$$

Полученные при решении задачи (2.29) собственные числа α и собственные вектора β используются для построения решения в протяженном волноводе Ω_2 :

$$u^{(2)}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} c_n^m U(\alpha_n^m, x_2, \beta^{nm}) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1)} =$$

$$= \sum_{\tilde{I}_2=1}^{2G_2} c^{\tilde{I}_2} U(\alpha^{\tilde{I}_2}, x_2, \beta^{\tilde{I}_2}) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1)}, \quad x_1^1 = 0, \quad x_1^2 = d_2, \quad (2.30)$$

где $\tilde{I}_2(m, n) = G_2(m-1) + n$. Следует отметить, что для реализации гибридной схемы, по сути, уже достаточно представления (2.30), так как неизвестные значения коэффициентов разложения могут быть найдены подстановкой в граничные условия на торцах волновода с использованием проекционных методов.

§2.3. Моделирование плоских колебаний структур с присоединенным элементом

§2.3.1. Постановка задачи

Рассматриваются плоские установившиеся гармонические колебания составной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. При этом область $\Omega_2 = \{0 \leq x_1 \leq d_2, h_3 \leq x_2 \leq h_3 + h_2\}$ представляет собой протяженный волновод заданной толщины h_2 , а область Ω_1 может быть произвольной формы и имеет общую

границу S_c с областью Ω_2 . Соответствующая задача теории упругости формулируется в декартовой системе координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$. Установившиеся гармонические колебания в плоском случае для каждой из областей Ω_p , $p = 1, 2$ описываются уравнениями движения (1.9) относительно перемещений $u_i^{(p)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$.

Задача первого типа. Внешняя граница $S = \partial\Omega$ области Ω разбивается на несколько частей $S = S_0 \cup S_u \cup S_\sigma$ в зависимости от типа граничных условий. На границе S_0 задается условие жесткого защемления

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad (2.31)$$

на границе S_u перемещения приравняются к константе $u_0 \neq 0$

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) = u_0, \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (2.32)$$

а граница S_σ свободна от нормальных и касательных напряжений

$$\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma. \quad (2.33)$$

На внутренней границе $S_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$ задаются условия на непрерывность перемещений и напряжений

$$[[u(\mathbf{x})]] = 0, \quad [[\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad \mathbf{x} \in S_c, \quad (2.34)$$

Пример геометрии задачи первого типа, которая рассматривается в данном разделе, приведен на рис. 2.2. Здесь в качестве области Ω_1 , как и в предыдущем разделе, без потери общности рассматривается область прямоугольной формы: $\Omega_1 = [-d_1, 0] \times [0, h_1 + h_2 + h_3]$. При описании колебаний областей произвольных форм необходимо выполнение стандартных преобразований, связанных с отображением четырехугольных элементов на квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1]$ [111].

Как и для антиплоской задачи, для построения решения с применением гибридной схемы необходимо сначала рассмотреть решение двух вспомогательных задач для областей Ω_1 и Ω_2 , в которых неизвестная функция

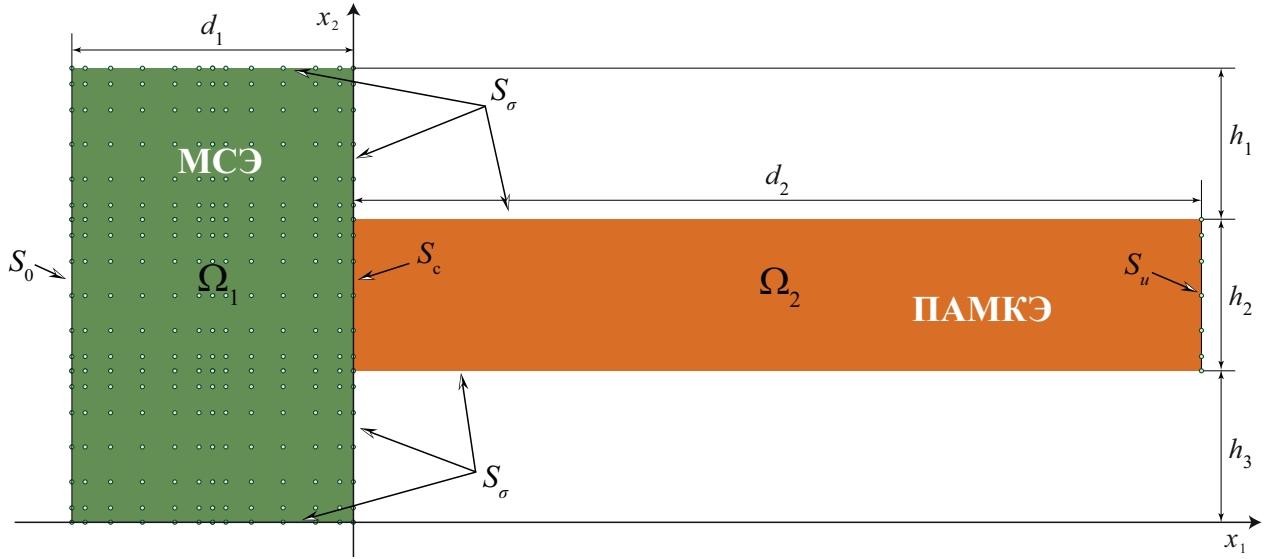


Рисунок 2.2— Геометрия задачи первого типа для плоских колебаний в случае прямоугольной области Ω_1

перемещений на общей границе S_c предполагается известной, и решение строится соответственно с помощью МКЭ ВПТ и ПАМКЭ. Таким образом, для «сшивки» двух решений на внутренней границе вводится вспомогательная функция перемещений, нахождение которой должен обеспечить гибридный метод:

$$u_k^{(1)}(\mathbf{x}) = u_k^{(2)}(\mathbf{x}) = q_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (2.35)$$

Задача второго типа. Внешняя граница $S = \partial\Omega$ области Ω разбивается на несколько частей $S = S_\tau \cup S_\sigma$ в зависимости от типа граничных условий. На границе S_τ напряжения приравниваются к константе $\tau_0 \neq 0$

$$\sigma_{11}^{(2)}(\mathbf{x}) = \sigma_{21}^{(2)}(\mathbf{x}) = \tau_0, \quad \mathbf{x} \in S_\tau, \quad (2.36)$$

а граница S_σ свободна от нормальных и касательных напряжений, как в задаче первого типа. На внутренней границе $S_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$ задаются условия на непрерывность перемещений и напряжений

$$[[u(\mathbf{x})]] = 0, \quad [[\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad \mathbf{x} \in S_c, \quad (2.37)$$

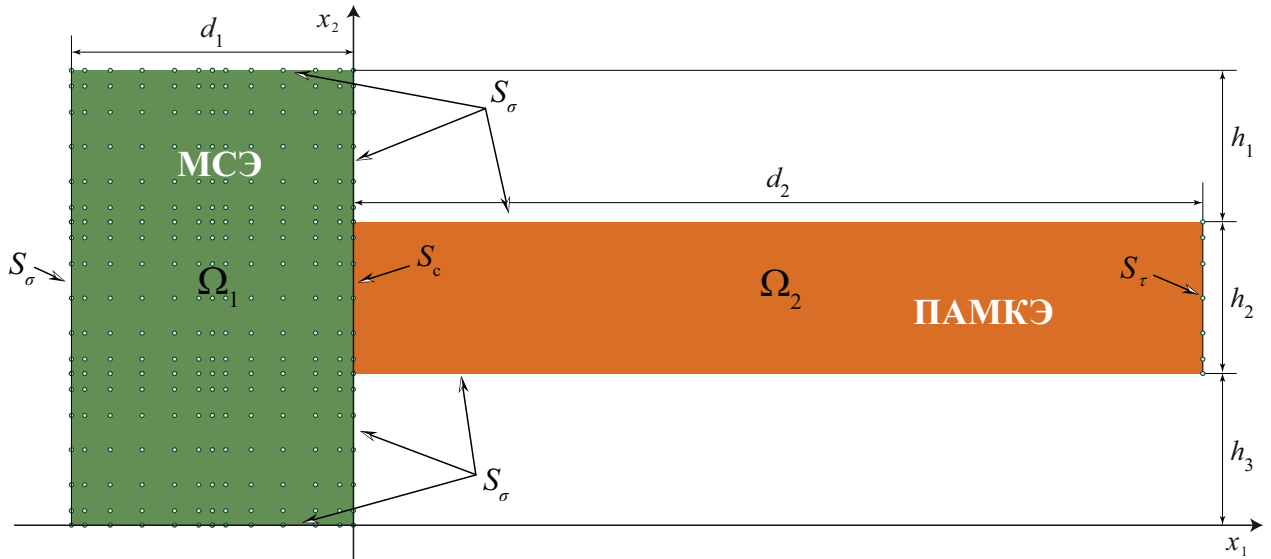


Рисунок 2.3 — Геометрия задачи второго типа для плоских колебаний в случае прямоугольной области Ω_1

Пример геометрии задачи второго типа, которая рассматривается в данном разделе, приведен на рис. 2.3. Как и для задачи первого типа, для построения решения с применением гибридной схемы необходимо сначала рассмотреть решение двух вспомогательных задач для областей Ω_1 и Ω_2 , в которых неизвестная функция напряжений на общей границе S_c предполагается известной, и решение строится соответственно с помощью МКЭ ВПТ и ПАМКЭ. Таким образом, для «сшивки» двух решений на внутренней границе вводится вспомогательная функция напряжений, нахождение которой должен обеспечить гибридный метод:

$$\sigma_{k1}^{(1)}(\mathbf{x}) = \sigma_{k1}^{(2)}(\mathbf{x}) = q_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_c. \quad (2.38)$$

§2.3.2. Метод спектральных конечных элементов

Для области Ω_1 рассматривается слабая постановка (1.15) уравнения движения (1.9) вместе с граничными условиями (2.31)–(2.33) на тех границах, которые относятся к Ω_1 , и условием (2.35), где предполагается извест-

ной вектор-функция, составленная из перемещений или напряжений, для задачи первого или второго типа соответственно.

В рамках МКЭ ВПТ для аппроксимации $u_i^{(1)}(\mathbf{x})$ в качестве базисных функций используются такие же интерполяционные полиномы, как и в случае антиплоских колебаний. Для прямоугольной области Ω_1 , производится аналогичным образом разбиение на прямоугольные элементы (на M_1 по оси x_1 и на $M_2 = M_2^1 + M_2^2 + M_2^3$ по оси x_2):

$$\Omega_1 = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} [x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1}] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} [x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1}].$$

При этом глобальная система координат x_k также связывается с локальной системой координат $\xi_k^{l_k}$ на каждом элементе l_k соотношениями вида:

$$\xi_k^{l_k} = \frac{2x_i - x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}, \quad x_i = \frac{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}{2} \xi_k^{l_k} + \frac{x_k^{l_k+1} + x_k^{l_k}}{2},$$

$$\frac{d}{dx_k} = S^{l_k} \frac{d}{d\xi_k^{l_k}}, \quad S^{l_k} = \frac{2}{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда решение уравнения (1.9) можно представить как

$$u_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} y_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) =$$

$$= \sum_{I_1=1}^{G_1} y_k^{I_1} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad k = 1, 2, \quad (2.39)$$

где функция

$$I_1(k, l_1, l_2, i_1, i_2) = (k-1)G_1 + (i_1-1)(M_2N+1) + (M_2N+1)N(l_1-1) + N(l_2-1) + i_2$$

используется для индексации узлов, а величина $G_1 = (M_1N+1)(M_2N+1)$ — это общее количество узлов для каждой компоненты вектора перемещений.

Для дискретизации уравнения (1.15) применяется проекционный метод Бубнова–Галёркина, согласно которому тестовые функции $v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x})$ берутся совпадающими с базисными функциями

$$v_{k'i}^{(1)}(x_1, x_2) = \delta_{k'i} C^{i_1'}(\xi_1^{l_1'}) C^{i_2'}(\xi_2^{l_2'}), \quad (2.40)$$

которые в соответствии с условием (2.31) в задаче первого типа, на границе S_0 равны нулю:

$$v_{k'i}^{(1)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (2.41)$$

В дальнейшем, для краткости, нумерация тестовых функций проводится с помощью функции $I'_1(k', l'_1, l'_2, i'_1, i'_2)$ по аналогии с $I_1(k, l_1, l_2, i_1, i_2)$.

После подстановки (2.39) и (2.40) в (1.15) и учета условия (2.41) формируется следующая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{I_1=1}^{2G_1} \left(A_{I'_1 I_1} - \omega^2 M_{I'_1 I_1} \right) y^{I_1} = t^{I'_1}, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} A_{I'_1 I_1} = & \delta_{l'_1 l'_1} \delta_{l'_2 l'_2} \left(-C_{k'1k2}^{(1)} w_{i_1} D_{i'_1}^{i'_1} w_{i'_2} D_{i'_2}^{i_2} - C_{k'2k1}^{(1)} w_{i'_1} D_{i'_1}^{i_1} w_{i_2} D_{i_2}^{i'_2} - \right. \\ & \left. - C_{k'1k1}^{(1)} \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} w_{i_2} \delta_{i_2 i'_2} \sum_{k_1=1}^{N+1} w_{k_1} D_{k_1}^{i_1} D_{k_1}^{i'_1} - C_{k'2k2}^{(1)} \frac{S^{l_2}}{S^{l_1}} w_{i_1} \delta_{i_1 i'_1} \sum_{k_2=1}^{N+1} w_{k_2} D_{k_2}^{i_2} D_{k_2}^{i'_2} \right), \quad (2.43) \\ M_{I'_1 I_1} = & -\rho^{(1)} \frac{1}{S^{l_1} S^{l_2}} w_{i_1} w_{i_2} \delta_{kk'} \delta_{i_1 i'_1} \delta_{i_2 i'_2}. \end{aligned}$$

Здесь $t^{I'_1}$ – компоненты вектора столбца, которые равны нулю, за исключением тех, что соответствуют узлам на границе S_c .

В случае задачи первого типа

$$t^{I'_1} = \begin{cases} q_k(x_2), & k = 1, 2, l'_1 = M_1, i'_1 = N + 1, l'_2 \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом условие (2.33) приводит к отсутствию вклада в контурный интеграл в (1.15), а для выполнения условия (2.31) необходимо, чтобы тестовые функции также удовлетворяли (2.31), что приводит к следующим изменениям в матрицах \mathbf{M} и \mathbf{A} :

$$M_{I'_1(k', 1, l'_2, 1, i'_2)I_1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
M_{I'_1(k',1,l'_2,1,i'_2)} I'_1(k',1,l'_2,1,i'_2) &= 1, \\
A_{I'_1(k',1,l'_2,1,i'_2)} I_1 &= 0, \\
A_{I'_1 I'_1(k',1,l'_2,1,i'_2)} &= 0.
\end{aligned}$$

В случае задачи второго типа контурный интеграл в (1.15) дает вклад в правую часть, т.е.

$$t_{I'_1} = \begin{cases} \frac{w_{i'_2}}{S^{l'_2}} q_k(x_2), & k = 1, 2, l'_1 = M_1, i'_1 = N + 1, l'_2 \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а матрицы \mathbf{M} и \mathbf{A} определяются соотношениями (2.43) без необходимости изменения элементов этих матриц, соответствующих узлам на границе S_c .

§2.3.3. Полуаналитический метод конечных элементов

Для области Ω_2 , по аналогии с Ω_1 , рассматривается слабая постановка (1.15) для уравнений движения (1.9) вместе с граничными условиями (2.31)–(2.33) на тех границах, которые относятся к Ω_1 , и условием (2.35), где функция перемещений предполагается известной. При этом к (1.9), согласно ПАМКЭ, предварительно применяется прямое преобразование Фурье по x_1 с параметром преобразования α . Тогда уравнение (1.15) можно представить как

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \left(- C_{i2k2}^{(2)} \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial v_{k'i}^{(2)}(x_2)}{\partial x_2} dx_2 - i\alpha \left(C_{i2k1}^{(2)} + C_{i1k2}^{(2)} \right) \times \right. \\
& \quad \times \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 + C_{i2k2}^{(2)} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} v_{k'i}^{(2)}(x_2) \Big|_{h_3}^{h_2+h_3} - \\
& \quad \left. - \alpha^2 C_{i1k1}^{(2)} \int_{h_3}^{h_2+h_3} U_k(\alpha, x_2) v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 \right) + \\
& \quad + \rho^{(2)} \omega^2 \sum_{i=1}^2 \int_{h_3}^{h_2+h_3} U_i(\alpha, x_2) v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 = 0, \quad (2.44)
\end{aligned}$$

относительно преобразования Фурье для перемещений:

$$U_k(\alpha, x_2) = \mathcal{F}_{x_1} \left[u_k^{(2)}(x_1, x_2) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k^{(2)}(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \quad k = 1, 2.$$

С учетом (1.10) можно переписать граничное условие (2.33) относительно Фурье-символа $U_k(\alpha, x_2)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{i2}^{(2)}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^2 \left(C_{i2k1}^{(2)} \frac{\partial u_k^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + C_{i2k2}^{(2)} \frac{\partial u_k^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(-i\alpha C_{i2k1}^{(2)} U_k(\alpha, x_2) + C_{i2k2}^{(2)} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Подставляя условие (2.45), уравнение (2.44) приводится к виду:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \left(-C_{i2k2}^{(2)} \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial v_{k'i}^{(2)}(x_2)}{\partial x_2} dx_2 + \right. \\ &+ i\alpha C_{i2k1}^{(2)} \left(U_k(\alpha, h_2 + h_3) v_{k'i}^{(2)}(h_2 + h_3) - U_k(\alpha, h_3) v_{k'i}^{(2)}(h_3) \right) - \\ &- i\alpha \left(C_{i2k1}^{(2)} + C_{i1k2}^{(2)} \right) \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U_k(\alpha, x_2)}{\partial x_2} v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 - \\ &\left. - \alpha^2 C_{i1k1}^{(2)} \int_{h_3}^{h_2+h_3} U_k(\alpha, x_2) v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 \right) + \\ &+ \rho^{(2)} \omega^2 \sum_{i=1}^2 \int_{h_3}^{h_2+h_3} U_i(\alpha, x_2) v_{k'i}^{(2)}(x_2) dx_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Поскольку предполагается осуществить «сшивку» решений двух подзадач с помощью гибридной схемы, Фурье-символ $U_k(\alpha, x_2)$ и вспомогательную функцию $q_k(x_2)$ целесообразно разложить по тем же самым базисным функциям:

$$U_k(\alpha, x_2) = \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls}(\alpha) C^s(\xi^l) = \sum_{I_2=1}^{G_2} \beta^{I_2}(\alpha) C^s(\xi^l), \quad k = 1, 2, \quad (2.47)$$

$$q_k(x_2) = \sum_{r=1}^{M_2^2} \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_k^{rj} C^j(\xi^r) = \sum_{I_2=1}^{G_2} \gamma^{I_2} C^j(\xi^r), \quad k = 1, 2, \quad (2.48)$$

где $I_2(k, l, s) = (k-1)G_2 + N(l-1) + s$ используется для индексации узлов в поперечном сечении волновода, а величина $G_2 = M_2^2 N + 1$ – это общее количество узлов для каждой компоненты Фурье-символа $U_k(\alpha, x_2)$ и вспомогательной функции $q_k(x_2)$.

Для дискретизации уравнения (2.46) снова применяется метод Бубнова–Галёркина. Согласно ему тестовые функции $v_{k'i}^{(2)}(x_2)$ берутся совпадающими с базисными функциями:

$$v_{k'i}^{(2)}(x_2) = \delta_{k'i} C^{s'}(\xi^{l'}). \quad (2.49)$$

В дальнейшем индекс $I_2'(k', l', s')$ используется для нумерации тестовых функций таким же образом, как и индекс $I_2(k, l, s)$. С учетом подстановки представлений (2.47) и (2.49) в (2.46), формируется СЛАУ относительно вектора неизвестных β :

$$\sum_{I_2=1}^{2G_2} \left(-K_{I_2'I_2}^0 - i\alpha K_{I_2'I_2}^1 - \alpha^2 K_{I_2'I_2}^2 + \omega^2 \mathcal{M}_{I_2'I_2} \right) \beta^{I_2} = 0, \quad (2.50)$$

где

$$\begin{aligned} K_{I_2'I_2}^0 &= C_{k'2k2}^{(2)} S_l \delta_{ll'} \sum_{n=1}^{N+1} w_n D_n^s D_n^{s'}, \\ K_{I_2'I_2}^1 &= \left(C_{k'2k1}^{(2)} + C_{k'1k2}^{(2)} \right) \delta_{ll'} w_{s'} D_{s'}^s - \\ &\quad - C_{k'2k1}^{(2)} \left(\delta_{sN+1} \delta_{lM_2^2} \delta_{s'N+1} \delta_{l'M_2^2} - \delta_{s1} \delta_{l1} \delta_{s'1} \delta_{l'1} \right), \\ K_{I_2'I_2}^2 &= C_{k'1k1}^{(2)} \frac{1}{S_l} \delta_{ll'} w_s \delta_{ss'}, \\ \mathcal{M}_{I_2'I_2} &= \rho^{(2)} \frac{1}{S_l} \delta_{ll'} w_s \delta_{ss'} \delta_{kk'}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.50) не сводится напрямую к задаче на собственные значения относительно вектора неизвестных β , как в случае антиплоских колебаний, поэтому рассматривается эквивалентная система уже относительно

вектора неизвестных $\mathbf{b} = \{\boldsymbol{\beta}, \lambda\boldsymbol{\beta}\}^T$:

$$(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}_{4G_2 \times 4G_2})\mathbf{b} = 0, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_{2G_2 \times 2G_2} \\ (\mathbf{K}^2)^{-1}(\mathbf{K}^0 - \omega^2\mathcal{M}) & (\mathbf{K}^2)^{-1}\mathbf{K}^1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda = i\alpha$, а \mathbf{E} – единичная матрица соответствующей размерности. Тогда взаимосвязь между волновым числом $\alpha = -i\lambda$ и частотой ω , необходимая для построения различных дисперсионных характеристик волновода, может быть получена из решения характеристического (дисперсионного) уравнения относительно частоты ω .

Собственные числа α и собственные вектора $\boldsymbol{\beta}$, которые получаются при решении задачи (2.51), могут также использоваться для построения соответствующих волновых полей и в протяженном волноводе Ω_2 :

$$\begin{aligned} u_k^{(2)}(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{2G_2} c_n^m U_k(\alpha_n^m, x_2, \beta_k^{nm}) e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1)} = \\ &= \sum_{\tilde{I}_2=1}^{4G_2} c^{\tilde{I}_2} U_k(\alpha^{\tilde{I}_2}, x_2, \beta_k^{\tilde{I}_2}) e^{i\alpha^{\tilde{I}_2}(x_1^m - x_1)}, \quad k = 1, 2, \quad x_1^1 = 0, \quad x_1^2 = d_2, \end{aligned} \quad (2.52)$$

где $\tilde{I}_2(m, n) = 2G_2(m - 1) + n$. Собственные значения α и соответствующие им вектора $\boldsymbol{\beta}$ нумеруются таким образом, что чисто вещественные собственные значения уменьшаются с ростом n : $|\alpha_{n+1}^m| \leq |\alpha_n^m|$, а мнимая часть комплекснозначных увеличивается: $|\text{Im}(\alpha_{n+1}^m)| \geq |\text{Im}(\alpha_n^m)|$. При этом для обеспечения численной устойчивости необходимо, чтобы выполнялись условия: $\text{Im}(\alpha_n^1) \leq 0$ и $\text{Im}(\alpha_n^2) \geq 0$.

Следует также отметить, что для реализации гибридной схемы, по сути, уже достаточно представления (2.52), так как неизвестные значения коэффициентов разложения могут быть найдены подстановкой в граничные условия на торцах волновода с использованием проекционных методов.

§2.4. Интегральный подход

Основные идеи интегрального подхода [100–102] могут быть описаны на примере следующей модельной задачи. Пусть рассматривается задача о действии поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(x)$, приложенной в области S_c на поверхности упругого многослойного волновода толщиной H , изображенного на рис. 2.4. Решение такой задачи можно представить в виде свертки матрицы Грина \mathbf{k} волновода и функции поверхностной нагрузки \mathbf{q} , заданной в области $|x| \leq a$ [47]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{k}(\mathbf{x} - \zeta, z) \mathbf{q}(\zeta) d\zeta. \quad (2.53)$$

Столбцами матрицы Грина являются перемещения, вызванные сосредоточенными поверхностными нагрузками, и удовлетворяющие всем граничным условиям.

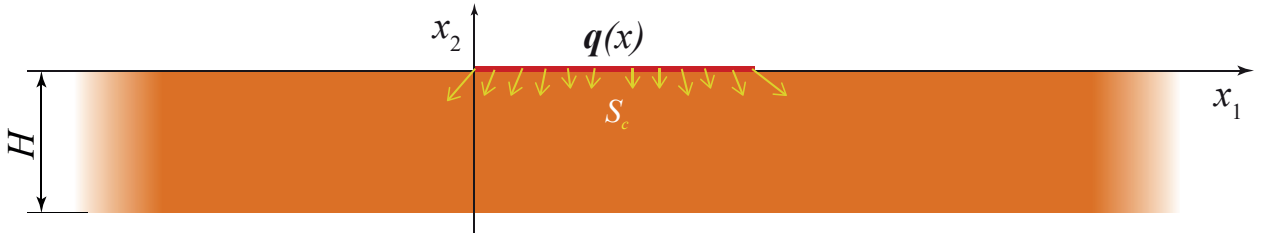


Рисунок 2.4 — Постановка задачи для нагрузки на поверхности слоя

Применяя обратное преобразование Фурье к (2.53), можно с учетом правила преобразования свертки получить следующее соотношение

$$\mathbf{U}(\alpha, z) = \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha), \quad (2.54)$$

где $\mathbf{U}(\alpha, z)$, $\mathbf{K}(\alpha, z)$, $\mathbf{Q}(\alpha)$ – преобразования Фурье \mathbf{u} , \mathbf{k} , \mathbf{q} соответственно. Из соотношений (2.53) и (2.54) получается интегральное представление :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (2.55)$$

Контур интегрирования Γ проходит по вещественной оси комплексной плоскости α , отклоняясь в комплексную плоскость при обходе вещественных особенностей Фурье-символа матрицы Грина \mathbf{K} . Направление обхода особенностей выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [47].

Вид интегрального представления (2.53) позволяет воспользоваться интегральной теоремой Коши и леммой Жордана для точек x , находящихся за пределами области действия поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(x)$, для того, чтобы произвести замыкание контура в соответствии с убыванием экспоненты. Это позволяет представить решение в виде суперпозиции нормальных мод, распространяющихся вправо и влево от места приложения нагрузки $|x| \leq a$.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k^{\pm}(x) e^{\pm i\zeta_k x}, \quad |x - x_0| > a, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{a}_k^{\pm}(z) = \mp i \operatorname{res} \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) \Big|_{\alpha = \mp \zeta_k}.$$

При этом каждое слагаемое здесь является собственным решением рассматриваемых краевых задач, описывающих распространение упругих бегущих волн в многослойных волноводах, которые здесь решаются с помощью интегрального подхода (ИП). При этом сами решения являются собственными формами бегущих упругих волн, а полюса ζ_k соответствуют их волновым числам или точкам непрерывного спектра, где k указывает на номер бегущей моды. Необходимо отметить, что в разделе 2.3.3 задача определения волновых чисел бегущих волн и их собственных форм решалась с помощью ПАМКЭ.

Таким образом, для расчета волновых полей, возникающих в волноводе под действием некоторой поверхностной нагрузки \mathbf{q} необходимо, во-первых, вычислить эту нагрузку и, во-вторых, вычислить матрицу Грина для композитного многослойного волновода. Элементы матрицы Гри-

на упругого слоя могут быть представлены в аналитической форме для изотропного материала и для некоторых классов анизотропии, например для ортотропных материалов [114]. Для многослойных и градиентных сред разработаны численно устойчивые алгоритмы расчета компонент матрицы Грина, см. подробнее [114, 115].

Расчитанные с помощью ПАМКЭ волновые числа α и медленности $s = \alpha/\omega$ для упругого слоя из алюминия толщиной $h_2 = 1$ мм на частоте $f = 10$ МГц сравниваются с аналогичными расчетами с помощью интегрального подхода в таблице 2.1 и на рис. 2.5. Относительная погрешность ε в таблице 2.1 рассчитывалась по формуле:

$$\varepsilon = \frac{|\alpha_{\text{ИП}} - \alpha_{\text{ПАМКЭ}}|}{|\alpha_{\text{ПАМКЭ}}|} \times 100.$$

Таблица 2.1 — Значения волновых чисел для упругого слоя из алюминия толщиной 1 мм при различных значениях спектральных элементов на частоте $f = 10$ МГц

Спектральные элементы	$N = 3,$ $M_2^2 = 1,$ $G_2 = 4$	$N = 5,$ $M_2^2 = 1,$ $G_2 = 6$	$N = 13,$ $M_2^2 = 1,$ $G_2 = 14$	$N = 5,$ $M_2^2 = 2,$ $G_2 = 11$	$N = 4,$ $M_2^2 = 5,$ $G_2 = 21$	$N = 6,$ $M_2^2 = 6,$ $G_2 = 37$
Волновое число α_1^1 , мм ⁻¹ моды A0						
ИП	21,6522					
ПАМКЭ	20,4597	21,1951	21,6522	21,5717	21,6427	21,6522
ε , %	5,83	2,16	$1,18 \cdot 10^{-5}$	0,37	0,04	$7,62 \cdot 10^{-6}$
Волновое число α_2^1 , мм ⁻¹ моды S0						
ИП	21,6429					
ПАМКЭ	20,405	21,0058	21,6429	21,5614	21,6333	21,6429
ε , %	6,07	3,03	$3,25 \cdot 10^{-6}$	0,38	0,04	$7,67 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2.1 демонстрирует хорошее совпадение волновых чисел фундаментальных мод A0 и S0 на частоте $f = 10$ МГц, расчитанных с помо-

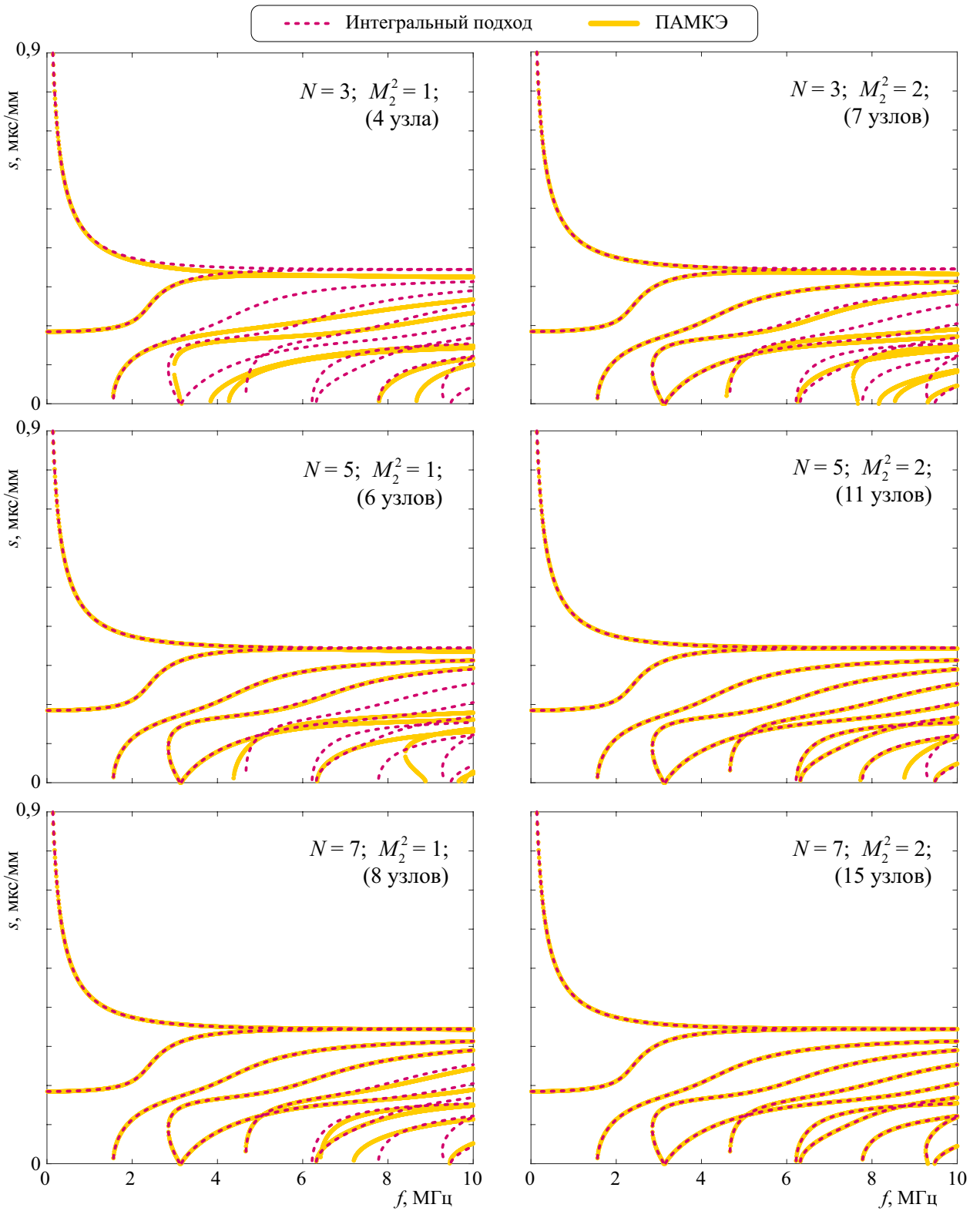


Рисунок 2.5— Медленности, рассчитанные для упругого слоя из алюминия толщиной 1 мм с помощью интегрального подхода и МКЭ ВПТ при различных значениях N

щью интегрального подхода и ПАМКЭ при достаточно высоком порядке интерполяционных полиномов ($N = 13$). Однако можно добиться близкой точности при меньшем порядке интерполяционных полиномов, например, при $N = 7$ и $M_2^2 = 2$ (см. рис. 2.5). Также из рис. 2.5 видно, что для частот до 1 МГц достаточно минимального количества узлов ($N = 3$, $M_2^2 = 1$) для получения результатов, которые хорошо согласуются с результатами, получаемыми с помощью интегрального подхода.

3. ГИБРИДНАЯ ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ

В этой главе описывается разработанная гибридная вычислительная схема на основе МКЭ ВПТ и ПАМКЭ. Важным преимуществом такого гибридного подхода помимо экономии вычислительных ресурсов является возможность напрямую вычислять амплитуды упругих волн, которые распространятся в волноводе и описываются с помощью ПАМКЭ. Кроме того, такая гибридная схема позволяет использовать заданные значения амплитуд отдельных бегущих волн для моделирования дифракции набегающих упругих волн.

§3.1. Упругий волновод конечной длины с одним присоединенным элементом

§3.1.1. Антиплоская задача

Для построения решения задачи (1.14), (2.15)–(2.18) для случая антиплоских колебаний во всей составной области Ω , согласно гибридной схеме, вводится неизвестная функция перемещений на границе S_c . Во второй главе были рассмотрены вспомогательные задачи для МКЭ ВПТ, в которых вводилась неизвестная функция (2.26) на правой границе области Ω_1 . В гибридной схеме решения этих вспомогательных задач используются для построения решения во всей составной области. При этом необходимо обеспечить непрерывность перемещений и напряжений (2.18) на общем интерфейсе S_c . В случае МКЭ ВПТ и области Ω_1 это приводит к изменению соответствующих строк матрицы \mathbf{A} , соответствующих узлам на общей границе S_c :

$$A_{I'_1(M_1, l'_2, N+1, i'_2)I_1} = 0, \quad A_{I'_1(M_1, l'_2, N+1, i'_2)I'_1(M_1, l'_2, N+1, i'_2)} = 1,$$

а также, в соответствии с условием (2.19) к формированию матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ размера $G_1 \times G_2$, обеспечивающей выполнение граничных условий. Ее элементы равны нулю, за исключением тех, которые соответствуют узлам на границе S_c

$$\hat{A}_{I'_1 I'_2} = \begin{cases} 1, & l'_1 = M_1, i'_1 = N + 1, l'_2 \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда можно выписать следующее уравнение относительно векторов $\mathbf{y} = \{y^1, \dots, y^{G_1}\}^T$ и $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma^1, \dots, \gamma^{G_2}\}^T$:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} - \hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}.$$

Для удовлетворения граничным условиям (2.16), (2.18) и (2.19) можно использовать метод Галёркина или метод коллокаций, применение которых и рассматривается далее.

Так как решение в области Ω_2 может быть представлено в виде суммы суперпозиций волн распространяющихся слева-направо и справа-налево, то они обозначаются либо верхним индексом \pm , либо номером $m = \overline{1, 2}$ (знак $+$ соответствует $m = 1$, а знак $-$ эквивалентен использованию $m = 2$).

Метод Галёркина. Используя тестовые функции (2.27), а также подставляя разложения (2.26) и (2.30) в условия (2.16) и (2.19) можно получить соответственно матричные уравнения

$$\mathbf{B}_u^{(1)}\mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_u^{(2)}\mathbf{c}^- - \hat{\mathbf{B}}_u\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{G}_u^{(1)}\mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_u^{(2)}\mathbf{c}^- = \mathbf{g}, \quad (3.2)$$

$$B_{u; I'_2 \tilde{I}'_2}^{(m)} = e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(nm)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{i'} \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right),$$

$$G_{u; I'_2 \tilde{I}'_2}^{(m)} = e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(nm)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{i'} \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right),$$

$$\widehat{B}_{u; I'_2 I_2} = \frac{1}{S^l} w_{i'} \delta_{rl'} \delta_{ji'},$$

$$g_{I'_2} = u_0 \frac{1}{S^l} w_{i'}$$

относительно $\boldsymbol{\gamma}$ и векторов

$$\mathbf{c}^\pm = \{c_1^\pm, \dots, c_{G_2}^\pm\}^T,$$

составленных из амплитуд бегущих волн, распространяющихся в обоих направлениях.

Используя тестовые функции (2.27) для удовлетворения условия непрерывности нормальных напряжений (2.18), можно получить следующее соотношение:

$$\mathbf{B}_\tau \mathbf{y} - \mathbf{B}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$B_{\tau; I'_2 I_1} = \mu_1 \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} D_{N+1}^{i_1} w_{i_2} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 i'},$$

$$B_{\tau; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = \mu_2 (-1)^{m+1} i \sqrt{\lambda_n} e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(nm)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{i'} \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right).$$

Метод коллокаций. Используя в качестве точек коллокации узловые точки $x_2^{I'_2} \in S_c$, $I'_2 = \overline{1, G_2}$, а также разложения (2.26) и (2.30), условия (2.16) и (2.19), с помощью метода коллокаций можно получить систему уравнений вида (3.1)–(3.2), где элементы матриц отличаются от случая применения метода Галёркина:

$$B_{u; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = U(\alpha_n^m, x^{I'_2}, \beta^{nm}) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)},$$

$$G_{u; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = U(\alpha_n^m, x^{I'_2}, \beta^{nm}) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^2)}, \quad (3.4)$$

$$\widehat{B}_{u; I'_2 I_2} = \mathbf{E}_{G_2 \times G_2},$$

$$g_{I'_2} = u_0.$$

Соотношения для матриц, возникающих при удовлетворении граничных условий непрерывности напряжений при использовании тех же точек кол-

локации, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{\tau; I'_2 I_1} &= \mu_1 S^{l_1} D_{N+1}^{i_1} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 i'}, \\ B_{\tau; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} &= \mu_2 U(\alpha_n, x^{I_2}, \beta^{nm}) (-1)^{m+1} i \sqrt{\lambda_n} e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, для составной области Ω формируется система относительно коэффициентов разложений $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и q соответственно в виде (2.20), (2.30) и (2.26)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_u^{(2)} \mathbf{c}^- - \widehat{\mathbf{B}}_u \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_\tau \mathbf{y} - \mathbf{B}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_u^{(2)} \mathbf{c}^- &= \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вид уравнений позволяет «свернуть» и упростить эту систему уравнений для численных расчетов, исключив как минимум коэффициенты разложения для искусственно введенной неизвестной функции перемещений q . В результате вместо первых двух матричных уравнений возникает следующее уравнение:

$$\mathbf{A} \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{A}} (\widehat{\mathbf{B}}_u)^{-1} \left(\mathbf{B}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_u^{(2)} \mathbf{c}^- \right) = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

§3.1.2. Плоская задача первого типа

В плоском случае рассматриваются две задачи. В первом случае вводится неизвестная вектор-функция перемещений на общей границе между двумя областями, а во втором случае отыскиваются неизвестные нормальные и касательные напряжения. Для удобства и по аналогии с задачами Дирихле и Неймана, эти подходы обозначаются гибридными схемами 1-го и 2-го типа соответственно.

Для построения решения рассматриваемой задачи (1.9), (2.31)-(2.34) для плоских колебаний во всей составной области Ω , согласно гибридной схеме 1-го типа в случае МКЭ ВПТ и области Ω_1 , условие на непрерывность перемещений (2.34) приводит к изменению элементов матрицы \mathbf{A} и матрицы \mathbf{M} , соответствующих узлам на границе S_c :

$$A_{I'_1(k', M_1, l'_2, N+1, i'_2)I_1} = 0, \quad A_{I_1 I'_1(k', M_1, l'_2, N+1, i'_2)} = 0,$$

$$M_{I'_1(k', M_1, l'_2, N+1, i'_2)I_1} = 0, \quad M_{I_1 I'_1(k', M_1, l'_2, N+1, i'_2)I'_1(k', M_1, l'_2, N+1, i'_2)} = 1,$$

и, согласно условию (2.35), к формированию матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ размера $2G_1 \times 2G_2$, элементы которой равны нулю, за исключением тех, что также соответствуют узлам на границе S_c :

$$\hat{A}_{I'_1 I_2} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, l'_1 = M_1, i'_1 = N + 1, l'_2 \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда можно выписать матричное уравнение

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} - \hat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

относительно векторов

$$\mathbf{y} = \{y_1^1, \dots, y_1^{G_1}, y_2^1, \dots, y_2^{G_1}\}^T,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1^1, \dots, \gamma_1^{G_2}, \gamma_2^1, \dots, \gamma_2^{G_2}\}^T,$$

которые в сравнении со случаем антиплоских колебаний пополнены значениями второй компоненты вектора перещений.

В области Ω_2 должны выполняться граничные условия (2.32), (2.34) и (2.35) и для этого можно применить метод Галёркина или метод коллокаций.

Метод Галёркина. Тестовые функции в виде (2.49), а также подстановка разложений (2.48) и (2.52) в условия (2.32) и (2.35) позволяют с

помощью метода Галёркина получить следующие соотношения:

$$\mathbf{B}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_u^{(2)} \mathbf{c}^- - \widehat{\mathbf{B}}_u \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{G}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_u^{(2)} \mathbf{c}^- = \mathbf{g}, \quad (3.10)$$

$$B_{u; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(nm)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'},$$

$$G_{u; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(nm)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'},$$

$$\widehat{B}_{u; I'_2 I_2} = \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{rl'} \delta_{js'},$$

$$g_{I'_2} = u_0 \frac{1}{S^l} w_{s'}.$$

Аналогично с учетом тестовых функций (2.49) условие непрерывности напряжений на интерфейсе (2.34) представляется в виде:

$$\mathbf{B}_\tau \mathbf{y} - \mathbf{B}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- = \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

$$B_{\tau; I'_2 I_1} = \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \sum_{k=1}^2 \left(C_{i_1 k 1}^{(1)} D_{N+1}^{i_1} \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} w_{s'} \delta_{i_2 s'} + C_{i_1 k 2}^{(1)} \delta_{i_1 N+1} w_{s'} D_{s'}^{i_2} \right),$$

$$B_{\tau; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i_1 k 1}^{(2)} i\alpha_n^m \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right. \\ \left. + C_{i_1 k 2}^{(2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) w_{s'} \delta_{ll'} D_{s'}^s \right) e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \right).$$

Метод коллокаций. Используя в качестве точек коллокации узловые точки $x_2^{I'_2} \in S_c$, $I'_2 = \overline{1, 2G_2}$, а также разложения (2.48) и (2.52), из условий (2.32) и (2.35) с помощью метода коллокаций можно получить систему уравнений вида (3.9)–(3.10), где элементы матриц отличаются от случая применения метода Галёркина:

$$B_{u; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = U_k(\alpha_n^m, x_2^{I'_2}, \beta_k^{nm}) e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)},$$

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{u}; I_2' \tilde{I}_2}^{(m)} &= U_k(\alpha_n^m, x^{I_2'}, \beta_k^{nm}) e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^2)}, \\
\widehat{B}_{\mathbf{u}; I_2' I_2} &= \mathbf{E}_{2G_2 \times 2G_2}, \\
g_{I_2'} &= u_0.
\end{aligned}$$

Соотношения для матриц, возникающих при удовлетворении граничных условий непрерывности напряжений на интерфейсе (2.34) при использовании тех же точек коллокации, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
B_{\tau; I_2' I_1} &= \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \sum_{k=1}^2 \left(C_{i_1 k 1}^{(1)} S^{l_1} D_{N+1}^{i_1} \delta_{i_2 s'} + C_{i_1 k 2}^{(1)} \delta_{i_1 N+1} S^{l_2} D_{s'}^{i_2} \right), \\
B_{\tau; I_2' \tilde{I}_2}^{(m)} &= \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i_1 k 1}^{(2)} i\alpha_n^m \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right. \\
&\quad \left. + C_{i_1 k 2}^{(2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) S^l D_{s'}^s \delta_{ll'} \right) \right) e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^1)}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

В результате для составной области Ω в случае гибридного подхода к решению для плоских колебаний формируется СЛАУ относительно коэффициентов разложений $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ и q_k соответственно, в виде (2.39), (2.52) и (2.48), или в краткой записи:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{B}_{\mathbf{u}}^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_{\mathbf{u}}^{(2)} \mathbf{c}^- - \widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{B}_{\tau} \mathbf{y} - \mathbf{B}_{\tau}^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_{\tau}^{(2)} \mathbf{c}^- &= \mathbf{0} \\
\mathbf{G}_{\mathbf{u}}^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_{\mathbf{u}}^{(2)} \mathbf{c}^- &= \mathbf{g}.
\end{aligned}$$

Вид уравнений позволяет «свернуть» и упростить эту систему уравнений для численных расчетов путем исключения коэффициентов разложения для искусственно введенной неизвестной функции перемещений q_k . В результате вместо первых двух матричных уравнений возникает следующее уравнение:

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{A}} (\widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{u}})^{-1} \left(\mathbf{B}_{\mathbf{u}}^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_{\mathbf{u}}^{(2)} \mathbf{c}^- \right) = \mathbf{0}.$$

§3.1.3. Плоская задача второго типа

Для построения решения задачи (1.9), (2.36)–(2.37) для плоских колебаний составной области Ω в смысле применения МКЭ ВПТ в области Ω_1 условие на непрерывность напряжений (2.37) не приводит к изменению элементов матрицы \mathbf{A} и матрицы \mathbf{M} , соответствующих узлам на границе S_c . Тем не менее, это условие дает ненулевой вклад контурного интеграла в (1.15), что в свою очередь, согласно условию (2.35), приводит к формированию матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ размера $2G_1 \times 2G_2$:

$$\hat{A}_{I'_1 I'_2} = \frac{1}{S_{I'_2}} w_{i'_2} \delta_{i'_1 N+1} \delta_{l'_1 M_1} \delta_{r l'_2} \delta_{j i'_2}.$$

В результате можно записать следующее матричное уравнение:

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} + \hat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

В области Ω_2 должны выполняться граничные условия (2.36), (2.37) и (2.38) и для этого можно применить метод Галёркина или метод коллокаций.

Метод Галёркина. Тестовые функции в виде (2.49) и разложение (2.48) позволяют получить для условий (2.36) и (2.38) с помощью метода Галёркина следующие соотношения:

$$\mathbf{B}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- - \hat{\mathbf{B}}_\tau \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{G}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- = \mathbf{g}, \quad (3.15)$$

$$B_{\tau; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i1k1}^{(2)} i \alpha_n^m \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right. \\ \left. + C_{i1k2}^{(2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) w_{s'} \delta_{ll'} D_s^s \right) \right) e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)},$$

$$G_{\tau; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i1k1}^{(2)} i \alpha_n^m \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right.$$

$$+C_{i1k2}^{(2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) w_{s'} \delta_{ll'} D_{s'}^s \right) e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)}$$

$$\widehat{B}_{\tau; I_2' I_2} = \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{r'l'} \delta_{j s'},$$

$$g_{I_2'} = \tau_0 \frac{1}{S^l} w_{s'}.$$

Аналогично с учетом тестовых функций (2.49) условие непрерывности перемещений на интерфейсе (2.37) представляется в виде:

$$\mathbf{B}_u \mathbf{y} - \mathbf{B}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_u^{(2)} \mathbf{c}^- = \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

$$B_{u; I_2' I_1} = \frac{1}{S^{l_2}} w_{s'} \delta_{i_1 N+1} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 s'},$$

$$B_{u; I_2' \tilde{I}_2}^{(m)} = e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(nm)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'}.$$

Метод коллокаций. Используя в качестве точек коллокации узловые точки $x_2^{I_2'} \in S_c$, $I_2' = \overline{1, 2G_2}$, а также разложение (2.48), для условий (2.36) и (2.38) с помощью метода коллокаций можно получить систему уравнений вида (3.14)–(3.15), где элементы матриц отличаются от случая применения метода Галёркина. А именно,

$$B_{\tau; I_2' \tilde{I}_2}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i1k1}^{(2)} i\alpha_n^m e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right. \\ \left. + C_{i1k2}^{(2)} e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) S^l D_{s'}^s \delta_{ll'} \right) \right),$$

$$G_{\tau; I_2' \tilde{I}_2}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i1k1}^{(2)} i\alpha_n^m e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right. \\ \left. + C_{i1k2}^{(2)} e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) S^l D_{s'}^s \delta_{ll'} \right) \right),$$

$$\widehat{B}_{\tau; I_2' I_2} = \mathbf{E}_{2G_2 \times 2G_2},$$

$$g_{I_2'} = \tau_0.$$

Соотношения для матриц, возникающих при удовлетворении граничных условий непрерывности перемещений на интерфейсе (2.37) при использовании тех же точек коллокации, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{u}; I_2' I_1} &= \delta_{i_1 N+1} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 s'}, \\ B_{\mathbf{u}; I_2' \tilde{I}_2}^{(m)} &= U_k(\alpha_n^m, x^{I_2'}, \beta_k^{nm}) e^{i\alpha_n^m(x_1^m - x_1^1)}. \end{aligned}$$

В результате для составной области Ω в случае гибридного подхода к построению решения плоской задачи 2-го типа формируется СЛАУ относительно коэффициентов разложений $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ и q_k соответственно, в виде (2.39), (2.52) и (2.48), или в краткой записи:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- - \widehat{\mathbf{B}}_\tau \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_\mathbf{u} \mathbf{y} - \mathbf{B}_\mathbf{u}^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_\mathbf{u}^{(2)} \mathbf{c}^- &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- &= \mathbf{g}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Вид уравнений позволяет «свернуть» и упростить эту систему уравнений для численных расчетов путем исключения коэффициентов разложения для искусственно введенной неизвестной функции перемещений q_k . В результате вместо первых двух матричных уравнений возникает следующее уравнение:

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{A}} (\widehat{\mathbf{B}}_\tau)^{-1} (\mathbf{B}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^-) = \mathbf{0}. \tag{3.18}$$

§3.2. Упругий волновод с присоединенным элементом

Принцип моделирования рассеяния бегущей упругой волны на неоднородности в области Ω_1 , можно продемонстрировать на примере задачи второго типа. В этом случае достаточно задать значения амплитуд упругих бегущих волн, распространяющихся в справа-налево, т.е. значения \mathbf{c}^- .

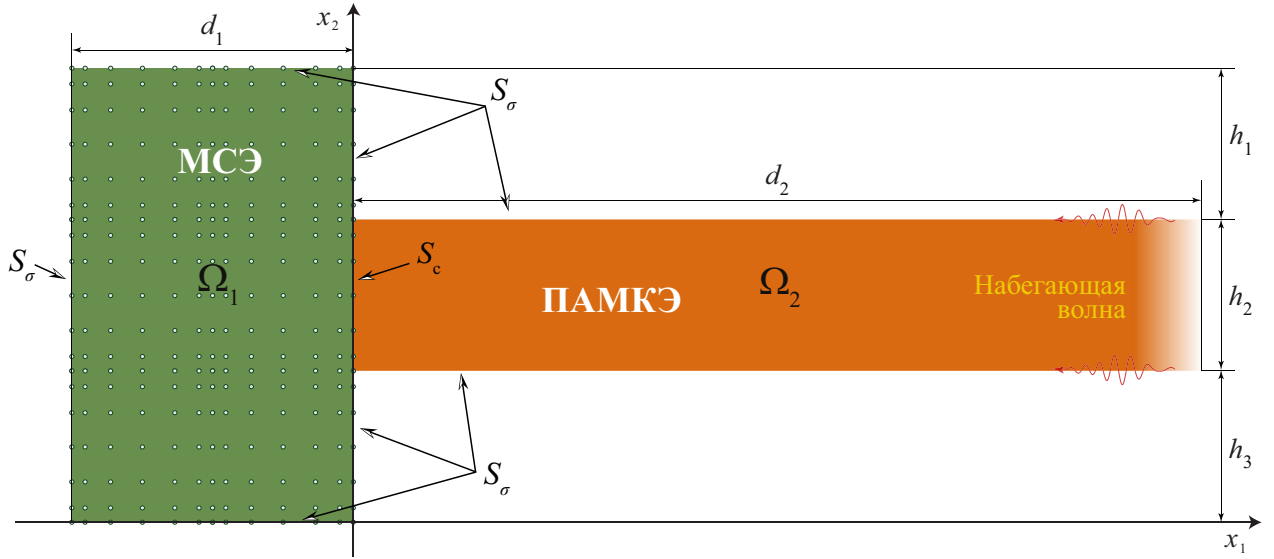


Рисунок 3.1 — Геометрия задачи для плоских колебаний в случае дифракции набегающей волны

Если выбран номер набегающей моды l , что нетрудно сделать в упорядоченном массиве волновых чисел α_n^2 , то можно определить элементы вектора следующим образом: $c_n^- = \delta_{nl}$.

В результате подстановки известных значений вектора в матричные соотношения (3.14)–(3.16) можно переписать их в виде

$$\mathbf{B}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_u \mathbf{y} = -\mathbf{B}_u^{(2)} \mathbf{c}^-, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{G}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ = -\mathbf{G}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^-, \quad (3.20)$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_\tau \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{B}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ = \mathbf{B}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^-, \quad (3.21)$$

что вместе с неизменным уравнением (3.13) дает полную систему уравнений для построения решения задачи о рассеянии набегающей волны.

При этом могут быть вычислены коэффициенты трансформации энергии падающей волны в волны других типов

$$\eta_k = E_k^+ / E_l^-,$$

как отношение количества энергии E_k^+ , переносимой отраженной волной k -го типа, к количеству энергии E_l^- , переносимой падающей волной. Значение

энергии, осредненное за период колебаний и переносимое упругой волной при гармонических колебаниях через сечение волновода

$$E_k^\pm = \int_{h_3}^{h_3+h_2} e_1^{(k)}(a^\pm, x_2) dx_2,$$

вычисляется с помощью вектора плотности энергии Умова [116, 117]

$$e_j = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} (\sigma_{1j} u_1^* + \sigma_{2j} u_2^*).$$

При этом волновые поля для отдельной моды $\mathbf{u}^{(n)}$ с номером n вычисляются, используя соотношения (2.52), где единственным ненулевым значением остается c_n^m , а значения $a^\pm \gg 1$ выбирается $a^+ < a^- < x_1^2$.

§3.3. Периодические структуры (упругие метаматериалы)

В данном разделе рассматривается обобщение разработанной гибридной схемы на случай плоских установившихся гармонических колебаний периодической структуры. Ячейка периодической структуры представляется в виде составной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Пример геометрии задачи, которая рассматривается в данном разделе, приведен на рис. 3.2.

Перемещения, а также нормальные и касательные напряжения на границах S_l и S_r связаны периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned} u_k^{(2)}(d_2, x_2) &= u_k^{(1)}(-d_1, x_2) e^{-i\zeta(d_1+d_2)}, & h_3 \leq x_2 \leq h_2 + h_3, \\ \sigma_{k1}^{(2)}(d_2, x_2) &= \sigma_{k1}^{(1)}(-d_1, x_2) e^{-i\zeta(d_1+d_2)}, & h_3 \leq x_2 \leq h_2 + h_3, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где ζ – волновое число. Помимо \mathbf{q} , заданной на границе S_c , для решения поставленной задачи математической физики на границе S_l вводится также вспомогательная неизвестная вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, составленная из касательных и нормальных напряжений $f_k(\mathbf{x})$:

$$\sigma_{k1}^{(1)}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_l. \quad (3.23)$$

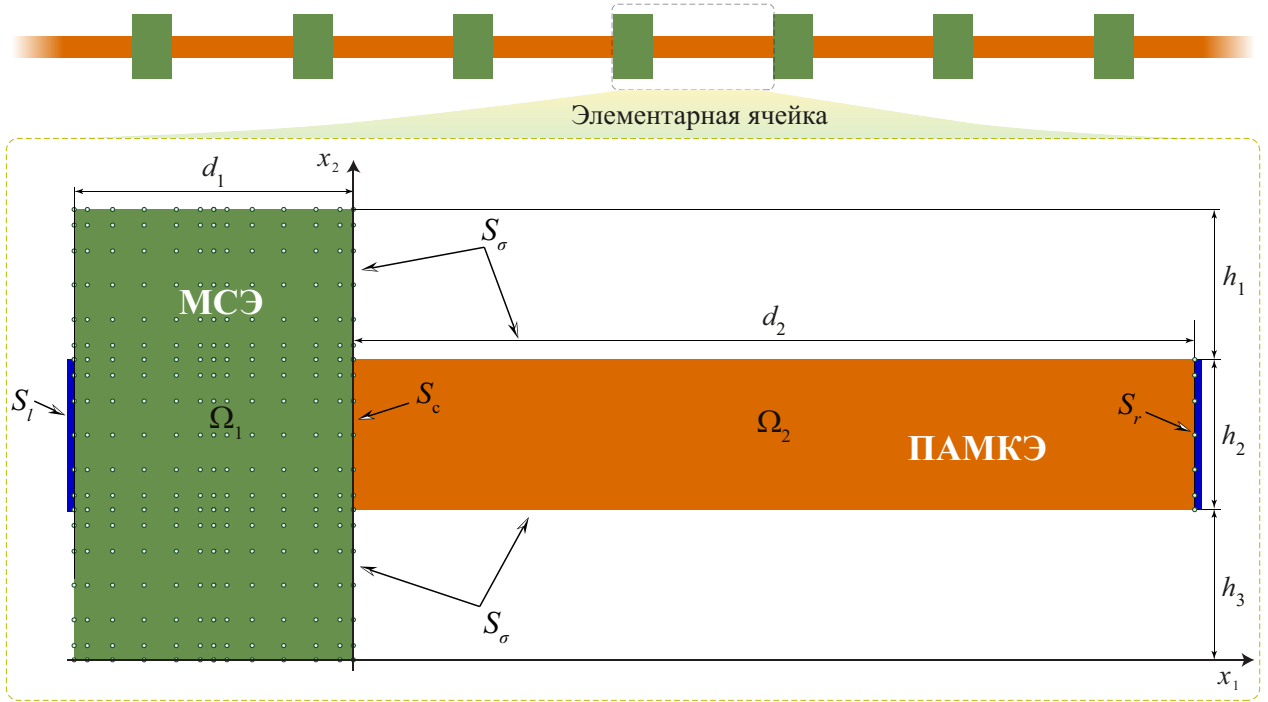


Рисунок 3.2—Геометрия ячейки упругого метаматериала в случае прямоугольной области Ω_1

Остальные граничные условия вводятся как и при решении задачи второго типа об установившихся плоских гармонических колебаниях, которая рассматривается в разделе 3.1.3.

Поскольку предполагается осуществить «сшивку» решений двух подзадач с помощью гибридной схемы, вспомогательные функции напряжений $q_k(x_2)$ на границе S_c и $f_k(x_2)$ на границе S_l целесообразно разложить по тем же самым базисным функциям, что фигурируют в МКЭ ВПТ:

$$q_k(x_2) = \sum_{r_1=1}^{M_2^2} \sum_{j_1=1}^{N+1} \gamma_k^{r_1 j_1} C^{j_1}(\xi_1^r) = \sum_{I_2=1}^{G_2} \gamma^{I_2} C^{j_1}(\xi_1^r), \quad k = 1, 2, \quad (3.24)$$

$$f_k(x_2) = \sum_{r_2=1}^{M_2^2} \sum_{j_2=1}^{N+1} \eta_k^{r_2 j_2} C^{j_2}(\xi^{r_2}) = \sum_{I_2=1}^{2G_2} \eta^{I_2} C^{j_2}(\xi^{r_2}), \quad k = 1, 2. \quad (3.25)$$

Согласно гибридной схеме 2-го типа в случае МКЭ ВПТ и области Ω_1 , условия на напряжения (2.37) и (3.23) не приводят к изменению элементов

матрицы \mathbf{A} и матрицы \mathbf{M} , соответствующих узлам на границах S_c и S_l . Тем не менее, это условие дает ненулевой вклад контурного интеграла в (1.15), что в свою очередь, согласно условиям (2.37) и (3.23), приводит к матричному уравнению

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} + \widehat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} - \widetilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

$$\widehat{A}_{I'_1 I_2} = \frac{1}{S^{l_2}} w_{i'_2} \delta_{i'_1 N+1} \delta_{l'_1 M_1} \delta_{r_1 l'_2} \delta_{j_1 i'_2},$$

$$\widetilde{A}_{I'_1 I_2} = \frac{1}{S^{l_2}} w_{i'_2} \delta_{i'_1 N+1} \delta_{l'_1 M_1} \delta_{r_2 l'_2} \delta_{j_2 i'_2}.$$

Здесь матрицы $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$ имеют размер $2G_1 \times 2G_2$. Для удовлетворения граничным условиям (3.22), (2.37) и (2.38) далее применяется метод Галёркина или метод коллокаций.

Метод Галёркина. Используя тестовые функции в виде (2.49) и разложения (3.24) и (3.25), можно получить для условия (2.38) на границе S_c и условия (3.22), заданного на границе S_r , с помощью метода Галёркина следующие соотношения:

$$\mathbf{B}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- - \widehat{\mathbf{B}}_\tau \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{G}_\tau^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_\tau^{(2)} \mathbf{c}^- - e^{-i\zeta(d_1+d_2)} \widetilde{\mathbf{B}}_\tau \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

$$B_{\tau; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i_1 k 1}^{(2)} i \alpha_n^m e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right. \\ \left. + C_{i_1 k 2}^{(2)} e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) w_{s'} \delta_{ll'} D_s^s \right) \right),$$

$$G_{\tau; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i_1 k 1}^{(2)} i \alpha_n^m e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right. \\ \left. + C_{i_1 k 2}^{(2)} e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) w_{s'} \delta_{ll'} D_s^s \right) \right),$$

$$\begin{aligned}\widehat{B}_{\tau; I'_2 I_2} &= \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{r_1 l'} \delta_{j_1 s'}, \\ \widetilde{B}_{\tau; I'_2 I_2} &= \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{r_2 l'} \delta_{j_2 s'}.\end{aligned}$$

С учетом тестовых функций (2.49), условие непрерывности перемещений на интерфейсе (2.37) представляется в виде:

$$\mathbf{B}_u \mathbf{y} - \mathbf{B}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_u^{(2)} \mathbf{c}^- = \mathbf{0}, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}B_{u; I'_2 I_1} &= \frac{1}{S^{l_2}} w_{s'} \delta_{i_1 N+1} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 s'}, \\ B_{u; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} &= e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(nm)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'}.\end{aligned}$$

Аналогично, используя тестовые функции (2.49), периодические граничные условия на перемещения (3.22) приводят с соотношениям:

$$\mathbf{D}_u \mathbf{y} - e^{i\zeta(d_1+d_2)} \left(\mathbf{D}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{D}_u^{(2)} \mathbf{c}^- \right) = \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}D_{u; I'_2 I_1} &= \frac{1}{S^{l_2}} w_{s'} \delta_{i_1 1} \delta_{l_1 1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 s'}, \\ D_{u; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} &= e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)} \sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_{k'}^{ls(nm)}(\alpha) \frac{1}{S^l} w_{s'} \delta_{ll'} \delta_{ss'}.\end{aligned}$$

Метод коллокаций. Используя в качестве точек коллокации узловые точки $x_2^{I'_2} \in S_c$, $I'_2 = \overline{1, 2G_2}$, а также разложения (3.24) и (3.25), для условия (2.38) на границе S_c и условия на напряжения (3.22) на границе S_r с помощью метода коллокаций можно получить систему уравнений вида (3.27)–(3.28), где элементы матриц отличаются от аналогичных матриц, полученных в случае применения метода Галёркина:

$$\begin{aligned}B_{\tau; I'_2 \tilde{I}_2}^{(m)} &= \sum_{k=1}^2 \left(- C_{i_1 k 1}^{(2)} i \alpha_n^m e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) \delta_{ss'} \delta_{ll'} \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_{i_1 k 2}^{(2)} e^{i\alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{ls(n)}(\alpha) S^l D_s^s \delta_{ll'} \right) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{\tau; I_2 \tilde{I}_2}^{(m)} &= \sum_{k=1}^2 \left(-C_{i_1 k 1}^{(2)} i \alpha_n^m e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{l s(n)}(\alpha) \delta_{s s'} \delta_{l l'} \right) + \right. \\
&\quad \left. + C_{i_1 k 2}^{(2)} e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{s=1}^{N+1} \beta_k^{l s(n)}(\alpha) S^l D_s^s \delta_{l l'} \right) \right), \\
\widehat{B}_{\tau; I_2 I_2} &= \mathbf{E}_{2G_2 \times 2G_2}, \\
\widetilde{B}_{\tau; I_2 I_2} &= \mathbf{E}_{2G_2 \times 2G_2}.
\end{aligned}$$

Соотношения для матриц, возникающих при удовлетворении граничных условий непрерывности перемещений на интерфейсе (2.37) при использовании тех же точек коллокации, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
B_{u; I_2 I_1} &= \delta_{i_1 N+1} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 s'}, \\
B_{u; I_2 \tilde{I}_2}^{(m)} &= U_k(\alpha_n^m, x^{I_2'}, \beta_k^{nm}) e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^1)}.
\end{aligned}$$

Аналогично подставляя представления в периодическое условие на перемещения (3.22) несложно получить уравнения:

$$\begin{aligned}
D_{u; I_2 I_1} &= \delta_{i_1 1} \delta_{l_1 1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 s'}, \\
D_{u; I_2 \tilde{I}_2}^{(m)} &= U_k(\alpha_n^m, x^{I_2'}, \beta_k^{nm}) e^{i \alpha_n^m (x_1^m - x_1^2)}.
\end{aligned}$$

В результате для составной области Ω в случае гибридного подхода к решению формируется СЛАУ относительно коэффициентов разложений $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, q_k и f_k соответственно, в виде (2.39), (2.52), (3.24) и (3.25), или в краткой матричной записи:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} + \widehat{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma} - \widetilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{B}_{\tau}^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{B}_{\tau}^{(2)} \mathbf{c}^- - \widehat{\mathbf{B}}_{\tau} \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{G}_{\tau}^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{G}_{\tau}^{(2)} \mathbf{c}^- - e^{-i \zeta (d_1 + d_2)} \widetilde{\mathbf{B}}_{\tau} \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{B}_u \mathbf{y} - \mathbf{B}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ - \mathbf{B}_u^{(2)} \mathbf{c}^- &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{D}_u \mathbf{y} - e^{i \zeta (d_1 + d_2)} \left(\mathbf{D}_u^{(1)} \mathbf{c}^+ + \mathbf{D}_u^{(2)} \mathbf{c}^- \right) &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Определитель этой системы можно было бы использовать для нахождения дисперсионных соотношений между частотой и волновым числом ζ , однако при достаточно больших размерностях матриц найти корни этого уравнения численно крайне затруднительно. Возможным решением этой проблемы с вычислением определителя является сведение к проблеме нахождения собственных значений и векторов

$$(\mathbf{B}(\omega) - \lambda \mathbf{E}_{4G_2 \times 4G_2}) \mathbf{c} = 0 \quad (3.31)$$

относительно коэффициентов разложения

$$\mathbf{c} = \{c_1^+, \dots, c_{2G_1}^+, c_1^-, \dots, c_{2G_1}^-\}^T.$$

Действительно, формулировку задачи в таком виде можно получить последовательно исключая в (3.3), векторы $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и \mathbf{y} . При этом формируемые матрицы зависят от частоты

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\omega) &= \mathbf{J}^{-1}(\omega) \mathbf{H}(\omega), \quad \lambda = e^{-i\zeta(d_1+d_2)}, \\ \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_u(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \widehat{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{B}}_\tau)^{-1} (\mathbf{B}_\tau^{(1)} + \mathbf{B}_\tau^{(2)}) + (\mathbf{B}_u^{(1)} + \mathbf{B}_u^{(2)}) \\ -\mathbf{D}_u(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \widehat{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{B}}_\tau)^{-1} (\mathbf{B}_\tau^{(1)} + \mathbf{B}_\tau^{(2)}) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_u(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{B}}_\tau)^{-1} (\mathbf{G}_\tau^{(1)} + \mathbf{G}_\tau^{(2)}) \\ (\mathbf{D}_u^{(1)} + \mathbf{D}_u^{(2)}) - \mathbf{D}_u(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{B}}_\tau)^{-1} (\mathbf{G}_\tau^{(1)} + \mathbf{G}_\tau^{(2)}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

В зависимости от значения частоты ω изменяется набор собственных векторов и чисел задачи (3.31), которые соответствуют собственным формам колебаний и волновым числам различных мод типа Флоке-Блоха. По определенным при решении (3.31) собственным векторам \mathbf{c} нетрудно построить решение во всей области, воспользовавшись следующим соотношением:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \widehat{\mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{B}}_\tau)^{-1} (\mathbf{B}_\tau^{(1)} + \mathbf{B}_\tau^{(2)}) + \end{pmatrix}$$

$$+e^{i\zeta(d_1+d_2)}(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{B}}_\tau)^{-1}\left(\mathbf{G}_\tau^{(1)} + \mathbf{G}_\tau^{(2)}\right)\mathbf{c},$$

Для численного контроля можно также использовать соотношения

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{B}^{31})^{-1}\mathbf{B}^1\mathbf{c},$$

$$\boldsymbol{\eta} = e^{i\zeta(d_1+d_2)}(\mathbf{B}^{32})^{-1}\mathbf{B}^2\mathbf{c}.$$

4. ЧИСЛЕННЫЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Компьютерная реализация полуаналитического гибридного метода была выполнена в пакете прикладных программ MATLAB. Результаты, полученные с помощью реализованного гибридного метода, сравниваются с МКЭ (COMSOL Multiphysics). В конечноэлементном пакете COMSOL использовались полиномы пятой степени (Quintic Lagrange discretization). Все расчеты проводились на стационарном компьютере с 6-ядерным центральным процессором AMD Ryzen 5 5600G и с 16Гб оперативной памяти.

§4.1. Распространение волн в слоистых метаматериалах на основе эластомеров

В исследовании [118] было изучено влияние характеристик слоистого фононного кристалла со слоями из эластомеров, состояние которых определяется неогуковской деформацией, на распространение сдвиговых волн. Для сравнения и верификации численных подходов представленных во второй главе, элементы которых используются в настоящей работе, было выполнено сравнение с результатами из работы [118].

Согласно [118] предполагалось условие плоской деформации с приложенной макроскопической деформацией растяжения (степень растяжения обозначается через s) вдоль слоев. Это приводит к тому, что присутствует лишь восемь ненулевых компонент тензора упругих модулей, который не имеет в таком случае симметрии:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= \lambda + (1 + 1/s)\mu, & C_{1212} &= s^2\mu, & C_{2121} &= \mu/s; \\ C_{1221} &= C_{2112} = \mu, & C_{1122} &= C_{2211} = \lambda, & C_{2222} &= \lambda + (1 + s^2)\mu. \end{aligned}$$

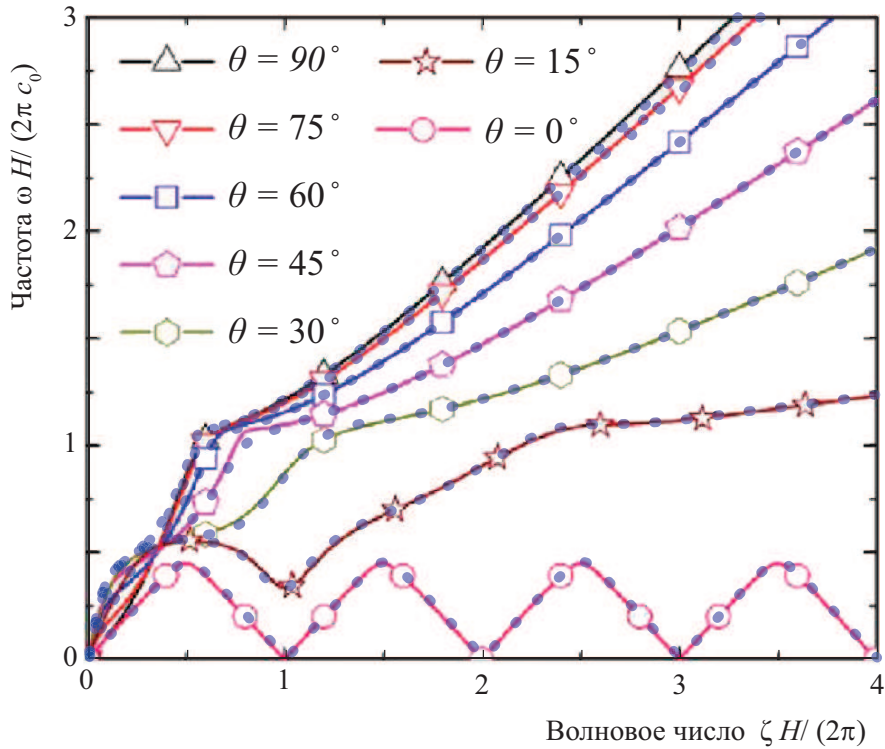


Рисунок 4.1 — Сравнение дисперсионных кривых волн Флоке-Блоха для разных углов падения плоской волны, представленных в работе [118] (маркеры и сплошные линии) с МКЭ ВПТ и методом матриц переноса (пунктирные линии)

Рассматривается двухслойный упругий метаматериал или фоновый кристалл, составленный из двух различных эластомеров:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= 500 \text{ ГПа}, \quad \mu^{(1)} = 500 \text{ МПа}, \quad \rho^{(1)} = 1000 \text{ кг/м}^3; \\ \lambda^{(2)} &= 5 \text{ ГПа}, \quad \mu^{(2)} = 5 \text{ МПа}, \quad \rho^{(2)} = 1000 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Результаты сравнения указанных двух методов, а именно, метода матриц переноса и МКЭ ВПТ с расчетами, представленными в [118] приведены на рис. 4.1. На этом рисунке изображены дисперсионные кривые для разных углов падения плоской волны на слоистый фоновый кристалл ($s = 1$), полученные в [118], изображены сплошными линиями с маркерами, а пунктирными линиями обозначены дисперсионные кривые, полученные с помощью методов, описанных в данном диссертационном исследовании. При этом важно отметить, что метод матриц переноса и МКЭ ВПТ дают очень

близкие друг к другу результаты.

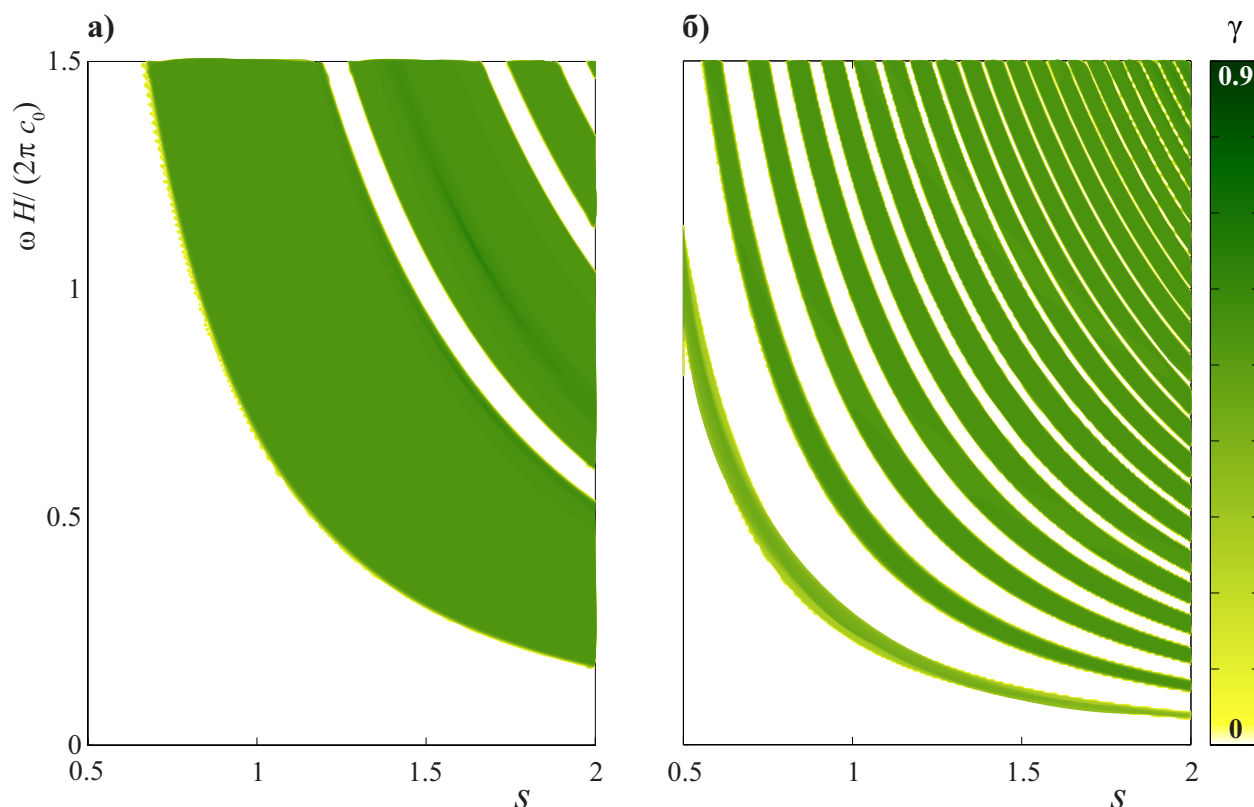


Рисунок 4.2—Фактор локализации $\gamma(\omega, s)$ для разных соотношений толщин слоев: а) – $h_1/H = 0,2$, б) – $h_1/H = 0,8$

Продемонстрировать влияние удлинения эластомера при растяжении в s раз, которое влечет также изменение относительной толщины слоев на запрещенные и разрешенные зоны можно с помощью фактора локализации γ [109]. На рис. 4.2 приведена зависимость фактора локализации от параметра s , а также круговой частоты падающей под нормальным углом на слоистый метаматериал плоской волны. На графике поверхностей, изображенных на рис. 4.2, темные и белые зоны соответствуют запрещенным и разрешенным зонам. При растяжении s происходит смещение запрещенных зон в область более низких частот, тогда как при утолщении первого слоя, в котором волны распространяются с большей скоростью, запрещенные зоны сужаются и располагаются ближе друг к другу.

§4.2. Анализ колебаний волновода конечной длины с одним присоединенным элементом

Основные характеристики рассматриваемой в данном разделе составной структуры, включая свойства материалов и геометрические размеры, приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Свойства материалов и геометрические параметры структуры

Область	Материал	Параметры Ламе, ГПа	ρ_i , кг/м ³	d_i , мм	h_1 , мм	h_2 , мм	h_3 , мм
Ω_1	Сталь	$\lambda = 104, 4; \mu = 80$	7850	1	1	1	1
Ω_2	Алюминий	$\lambda = 55, 5; \mu = 26.1$	2700	10	–	1	–

§4.2.1. Антиплоская задача

Для проверки выполнения граничных условий при $u_0 = 1$ мкм на внутренней границе S_c составной области Ω рассматривались относительные погрешности выполнения условий непрерывности перемещений и напряжений (2.18) в норме пространства Лебега L_1 :

$$\varepsilon_u = \frac{\|u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})\|_{L_1(S_c)}}{\|u_1(\mathbf{x})\|_{L_1(S_c)}}, \quad \varepsilon_\sigma = \frac{\|\mu_1 \frac{du_1(\mathbf{x})}{dn} - \mu_2 \frac{du_2(\mathbf{x})}{dn}\|_{L_1(S_c)}}{\|\mu_1 \frac{du_1(\mathbf{x})}{dn}\|_{L_1(S_c)}}. \quad (4.1)$$

При этом было произведено сравнение метода Галёркина и метода коллокаций, причем в методе коллокаций для определения коэффициентов разложения вспомогательной функции участвовали как узлы Гаусса–Лежандра–Лобатто (УГЛЛ), так и равномерно распределенные точки (РРТ). Результаты (относительная погрешность ε_u для перемещений и напряжений ε_σ на интерфейсе), вычисленные на двух частотах 1 и 5 МГц приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2— Относительная погрешность перемещений и напряжений на интерфейсе на частотах 1 и 5 МГц

Проекционный метод	$N = 4$	$N = 6$	$N = 4$	$N = 6$
	$M_1 = 2$	$M_1 = 6$	$M_1 = 10$	$M_1 = 10$
	$M_2^2 = 2$	$M_2^2 = 6$	$M_2^2 = 10$	$M_2^2 = 10$
$\varepsilon_u, 1 \text{ МГц}$				
Метод Галёркина	$3,52 \cdot 10^{-15}$	$6,96 \cdot 10^{-15}$	$1,07 \cdot 10^{-14}$	$1,02 \cdot 10^{-14}$
Коллокаций (УГЛЛ)	$4,07 \cdot 10^{-15}$	$5,39 \cdot 10^{-15}$	$1,07 \cdot 10^{-14}$	$1,18 \cdot 10^{-14}$
Коллокаций (РРТ)	0,1158	0,055	0,0265	0,0333
$\varepsilon_\sigma, 1 \text{ МГц}$				
Метод Галёркина	$2,5 \cdot 10^{-16}$	$4,13 \cdot 10^{-15}$	$1,41 \cdot 10^{-15}$	$2,42 \cdot 10^{-15}$
Коллокаций (УГЛЛ)	$5,72 \cdot 10^{-16}$	$2,67 \cdot 10^{-15}$	$1,19 \cdot 10^{-15}$	$2,32 \cdot 10^{-15}$
Коллокаций (РРТ)	0,0357	0,0241	0,0102	0,0177
$\varepsilon_u, 5 \text{ МГц}$				
Метод Галёркина	$1,89 \cdot 10^{-15}$	$5,32 \cdot 10^{-15}$	$3,22 \cdot 10^{-15}$	$6,29 \cdot 10^{-15}$
Коллокаций (УГЛЛ)	$9,71 \cdot 10^{-16}$	$3,25 \cdot 10^{-15}$	$4,67 \cdot 10^{-15}$	$7,78 \cdot 10^{-15}$
Коллокаций (РРТ)	0,1194	0,04	0,0202	0,0253
$\varepsilon_\sigma, 5 \text{ МГц}$				
Метод Галёркина	$3,69 \cdot 10^{-16}$	$2,84 \cdot 10^{-15}$	$9,41 \cdot 10^{-16}$	$1,52 \cdot 10^{-15}$
Коллокаций (УГЛЛ)	$1,96 \cdot 10^{-16}$	$1,75 \cdot 10^{-15}$	$7,94 \cdot 10^{-16}$	$1,5 \cdot 10^{-15}$
Коллокаций (РРТ)	0,0231	0,0131	0,0057	0,0094

Результаты, представленные в таблице 4.2, показывают, что метод коллокаций, при условии использования УГЛЛ, сопоставим по точности с методом Галёркина.

Были рассчитаны напряжения $\sigma_{23}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_\sigma$ для того, чтобы проверить удовлетворяет ли решение граничному условию (2.17), предполагающему отсутствие напряжений на внешней границе S_σ области Ω_2 при $N = 6, M_1 = M_2^2 = 10$. Результаты расчетов сравнивались с МКЭ и при-

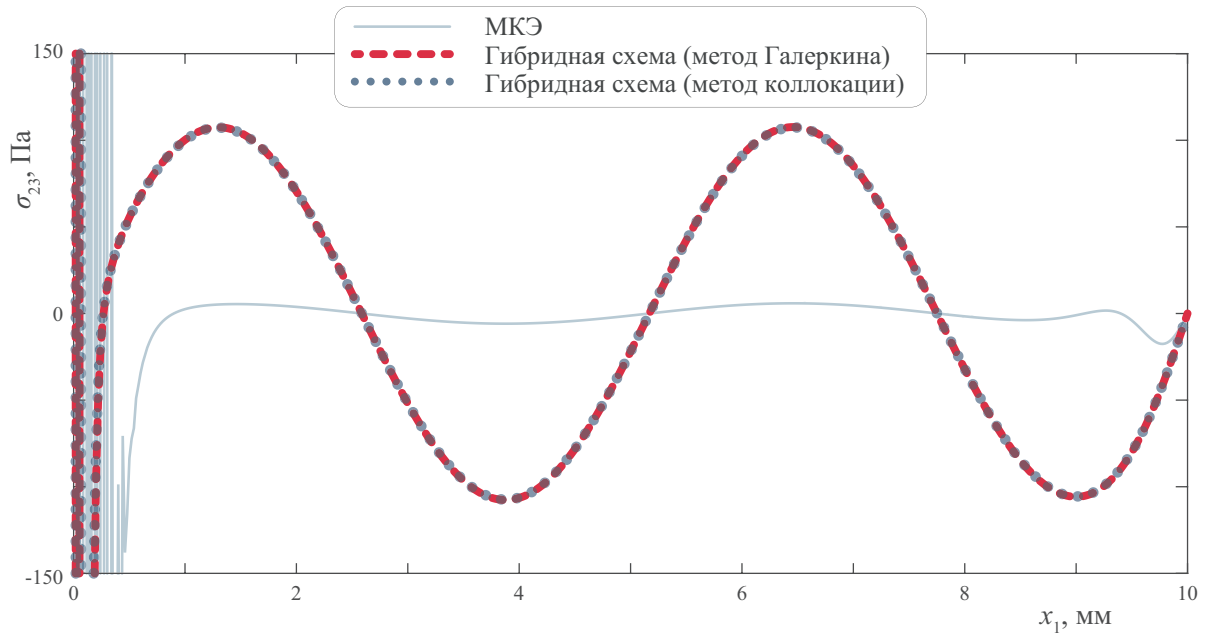


Рисунок 4.3 — Напряжения $\sigma_{23}(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (сплошная кривая) и гибридной схемы (пунктирные линии) при $f = 1$ МГц

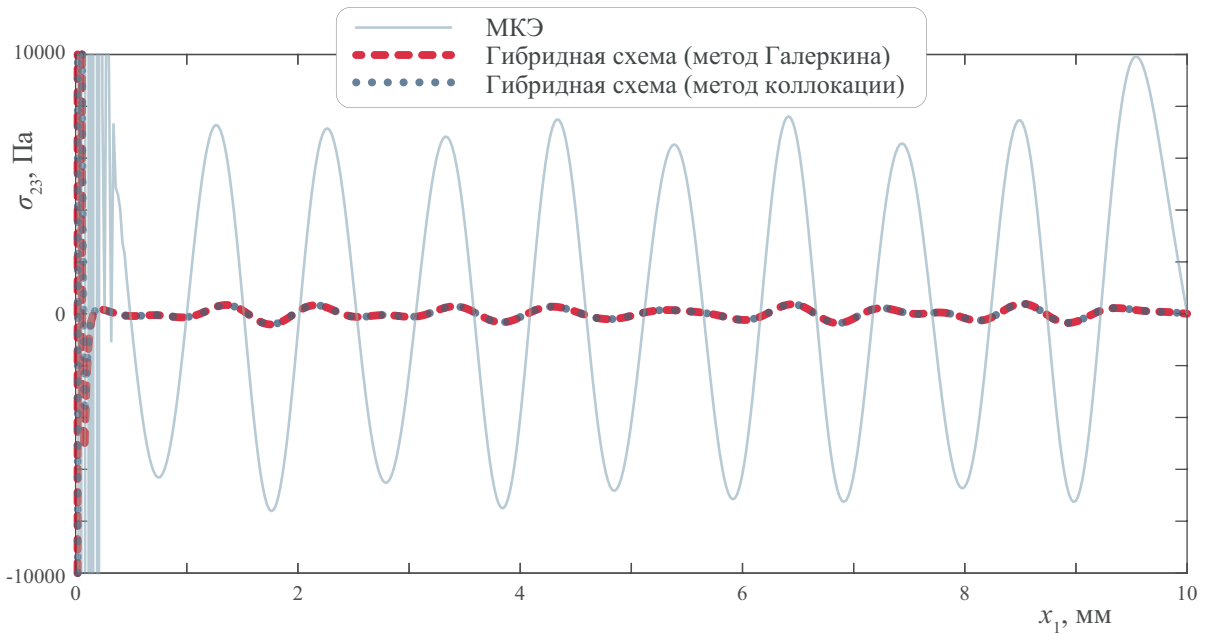


Рисунок 4.4 — Напряжения $\sigma_{23}(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (сплошная кривая) и гибридной схемы (пунктирные линии) при $f = 5$ МГц

ведены на рис. 4.3–4.4. Следует отметить, что максимальные напряжения превышают 3 ГПа (в области Ω_1) и 1 ГПа (в области Ω_2) как для 1 МГц, так и для 5 МГц. Данные графики иллюстрируют тот факт, что с ростом частоты точность выполнения граничных условий (2.17) в МКЭ падает при том же количестве степеней свободы, оставаясь примерно такой же для гибридного метода.

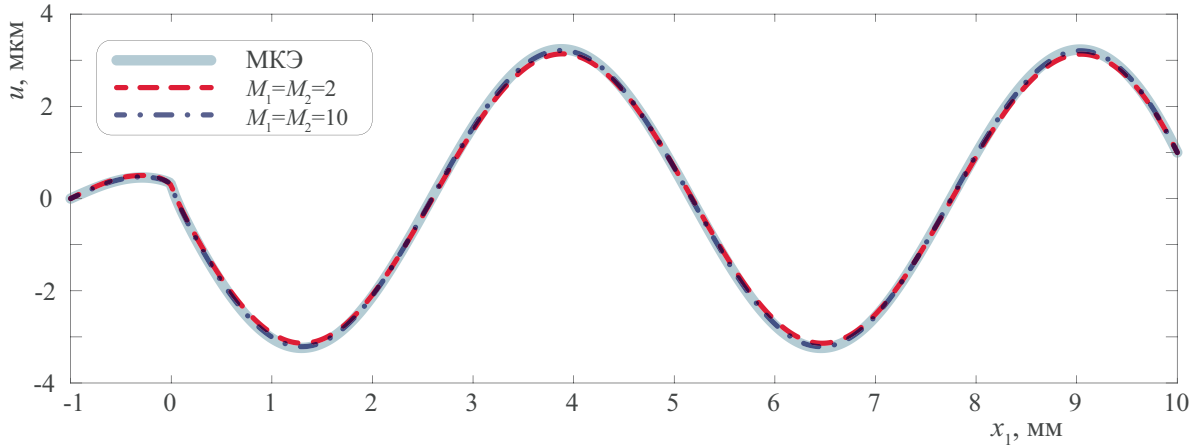


Рисунок 4.5— Перемещения $u(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (сплошная кривая) и гибридной схемы (пунктирная и штрихпунктирная линии) при $f = 1$ МГц

Для анализа эффективности и точности разработанной гибридной схемы были рассчитаны перемещения $u(x_1, h_3 + h_2)$, $x_1 \in [-d_1, d_2]$ и касательные напряжения $\sigma_{13}(x_1, h_3 + h_2)$, $x_1 \in [0, d_2]$ при $N = 4$ и разном количестве спектральных конечных элементов в МКЭ ВПТ (см. рис. 4.5–4.8), а также выполнено сравнение с результатами, получаемыми с помощью конечноэлементного пакета COMSOL. Некоторые результаты сравнения даны в таблице 4.2 и приведены на рис. 4.3–4.4. В целом, анализ показал, что метод Галёркина и метод коллокаций дают практически одинаковые результаты (относительная погрешность не более 10^{-7}), поэтому в дальнейшем приводятся только результаты, полученные путём применения метода Галёркина.

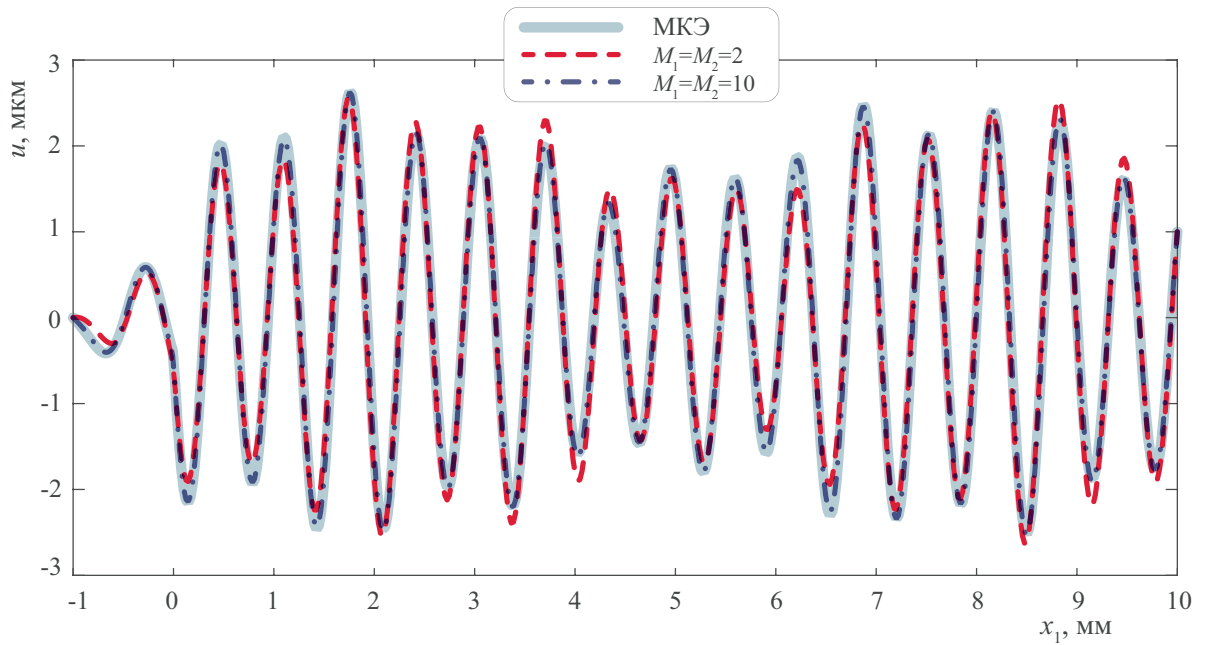


Рисунок 4.6— Перемещения $u(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (сплошная кривая) и гибридной схемы (пунктирная и штрихпунктирная линии) при $f = 5$ МГц

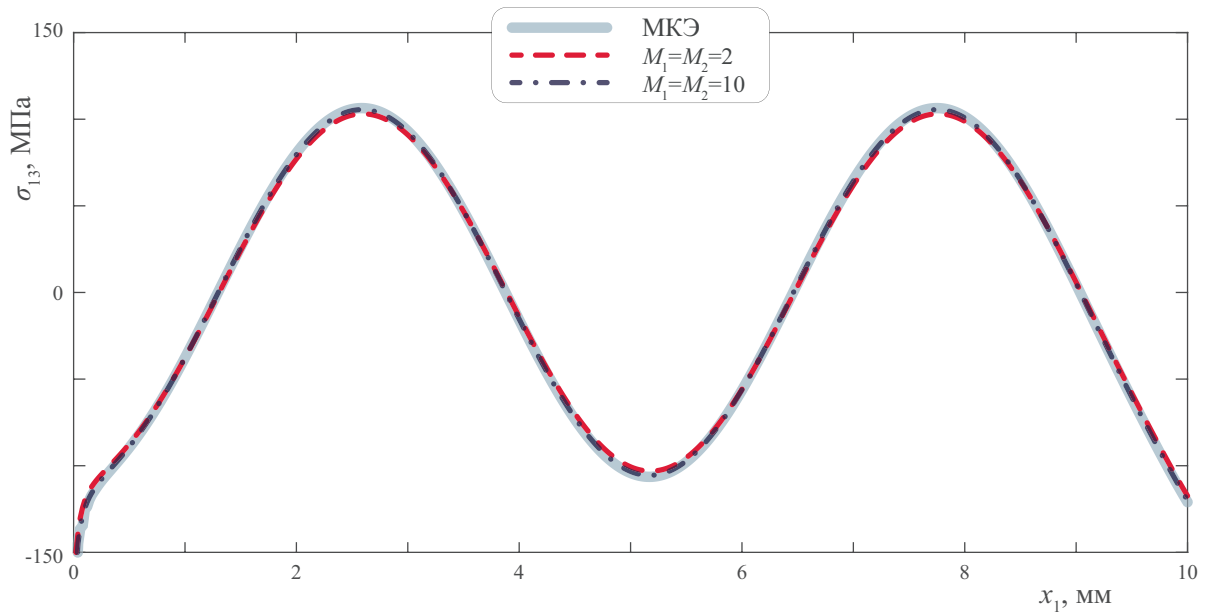


Рисунок 4.7— Напряжения $\sigma_{13}(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (сплошная кривая) и гибридной схемы (пунктирная и штрихпунктирная линии) при $f = 1$ МГц

На рис. 4.9–4.10 изображены перемещения $u(x_1, x_2)$ во всей составной области Ω , вычисленные с помощью гибридной схемы при $N = 4, M_1 =$

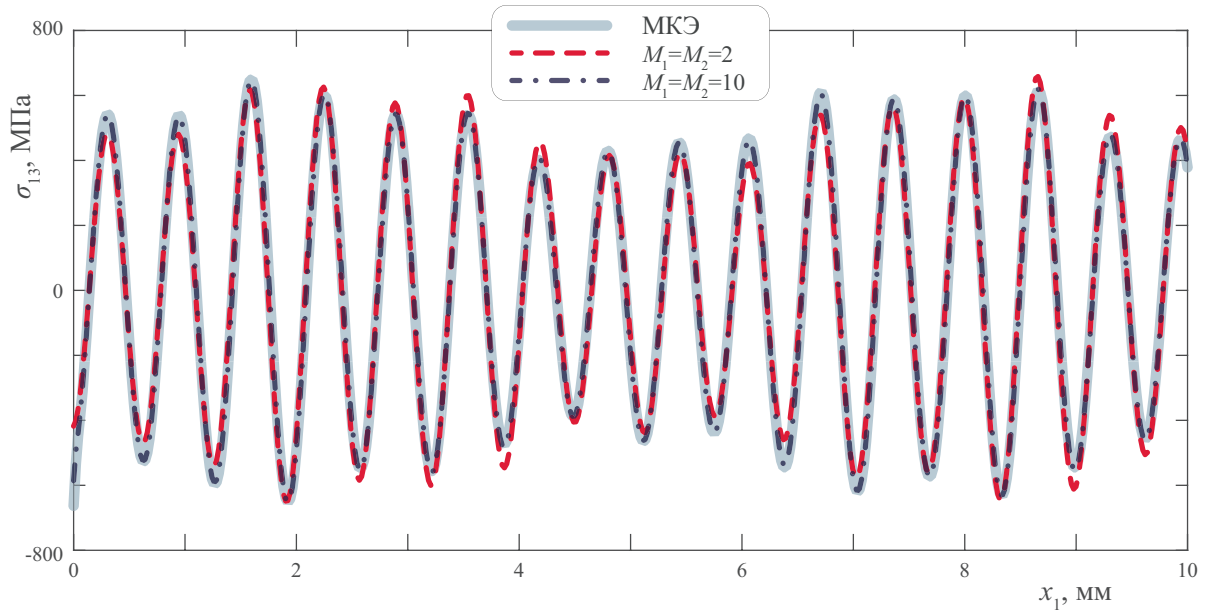


Рисунок 4.8 — Напряжения $\sigma_{13}(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (сплошная кривая) и гибридной схемы (пунктирная и штрихпунктирная линии) при $f = 5$ МГц

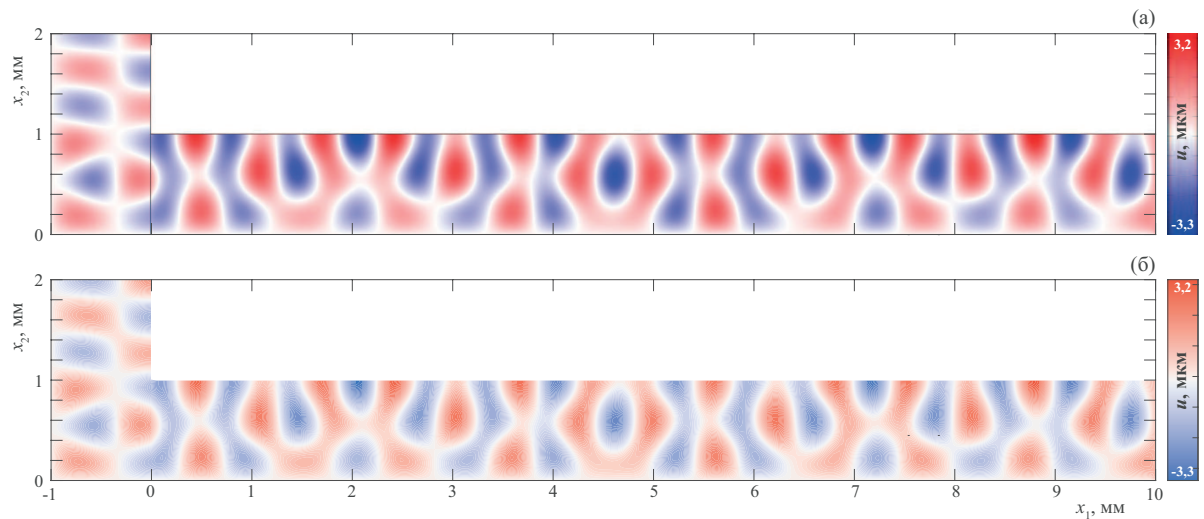


Рисунок 4.9 — Перемещения $u(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 0$ мм

$M_2^2 = 10$ (рис. 4.9б–4.10б) и с помощью МКЭ (рис. 4.9а–4.10а) для $f = 5$ МГц. Для большей наглядности приведены результаты для разных размеров области Ω_1 : представлены результаты для $h_3 = 0$ мм и $h_3 = 1$ мм. Такие же расчеты проводились и в случае, когда область Ω_2 состояла уже из трех

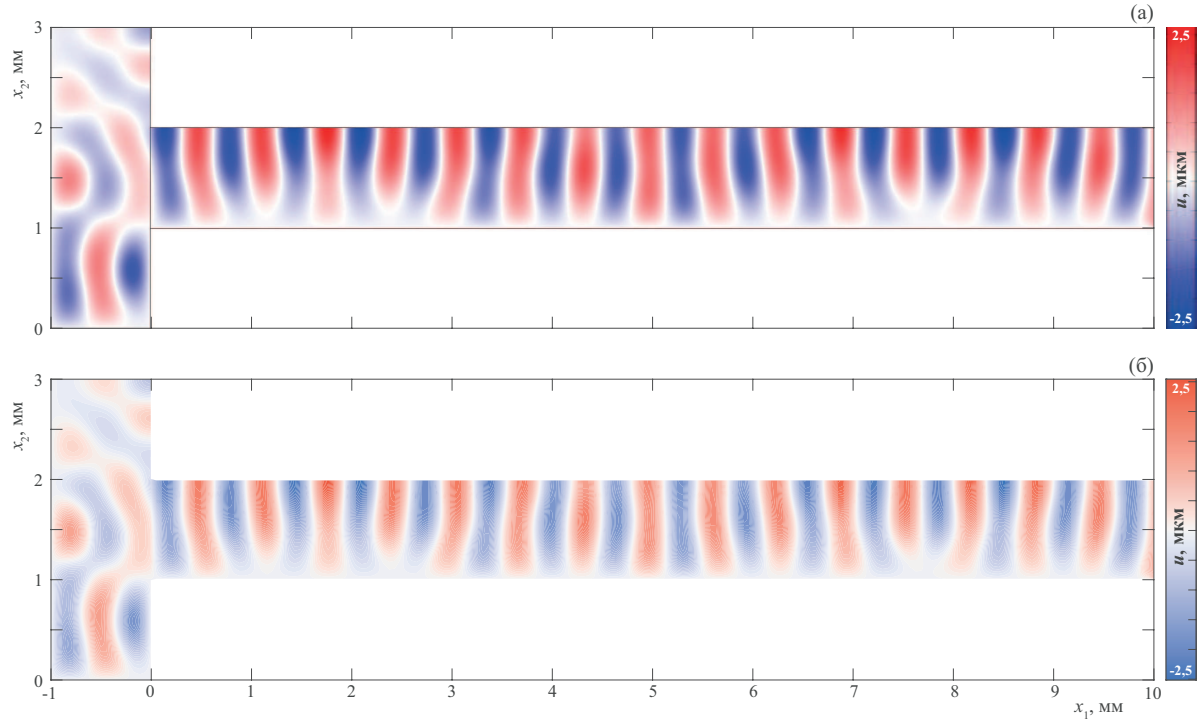


Рисунок 4.10 — Перемещения $u(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц

слоев одинаковой толщины $h_2/3$ (алюминий, сталь, алюминий) (рис. 4.11). Можно видеть хорошее совпадение с МКЭ.

Для исследования сходимости разработанного и представленного в диссертационном исследовании гибридной вычислительной схемы целесообразно рассмотреть относительную погрешность для перемещений $u^*(x_1, h_3 + h_2)$ и $u(x_1, h_3 + h_2)$ при $x_1 \in [-d_1, d_2]$ в норме L_1 , полученных с использованием МКЭ на «мелкой» сетке, которое, хотя и не является точным, но его с известными ограничениями можно использовать как эталонное, и гибридной схемы соответственно

$$\varepsilon = \frac{\|u(x_1, h_3 + h_2) - u^*(x_1, h_3 + h_2)\|_{L_1}}{\|u^*(x_1, h_3 + h_2)\|_{L_1}}, \quad x_1 \in [-d_1, d_2]. \quad (4.2)$$

На рис. 4.12 представлены результаты расчета погрешности ε при $N = 4$ и разным количестве элементов с использованием метода Галёркина и метода коллокаций. Можно наблюдать уменьшение относительной

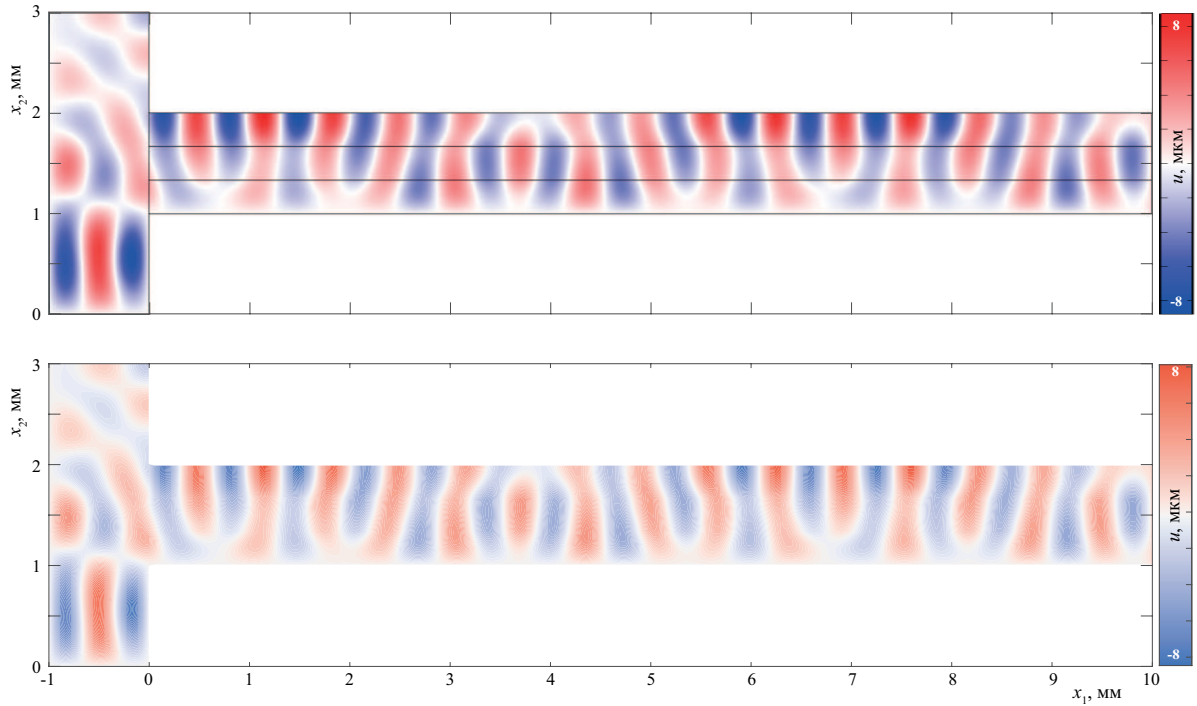


Рисунок 4.11 — Перемещения $u(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц в случае трехслойного протяженного волновода

погрешности расчета на основе гибридного метода с увеличением количества спектральных элементов для разных частот в случае применения как метода Галёркина, так и метода коллокаций, что свидетельствует о сходимости метода с ростом количества элементов/узлов.

Таблица 4.3 — Вычислительное время для $f = 1$ МГц (в секундах)

Проекционный метод	$N = 4$	$N = 6$	$N = 4$	$N = 6$
	$M_1 = 2$	$M_1 = 6$	$M_1 = 10$	$M_1 = 10$
	$M_2^2 = 2$	$M_2^2 = 6$	$M_2^2 = 10$	$M_2^2 = 10$
Метод Галёркина	0,06	0,26	2,35	20,14
Коллокаций	0,14	0,83	3,87	23,31

В таблице 4.3 приведено время, требуемое для решения системы размерности $G_1 + 2G_2 \times G_1 + 2G_2$, а в таблице 4.4 представлены числа обу-

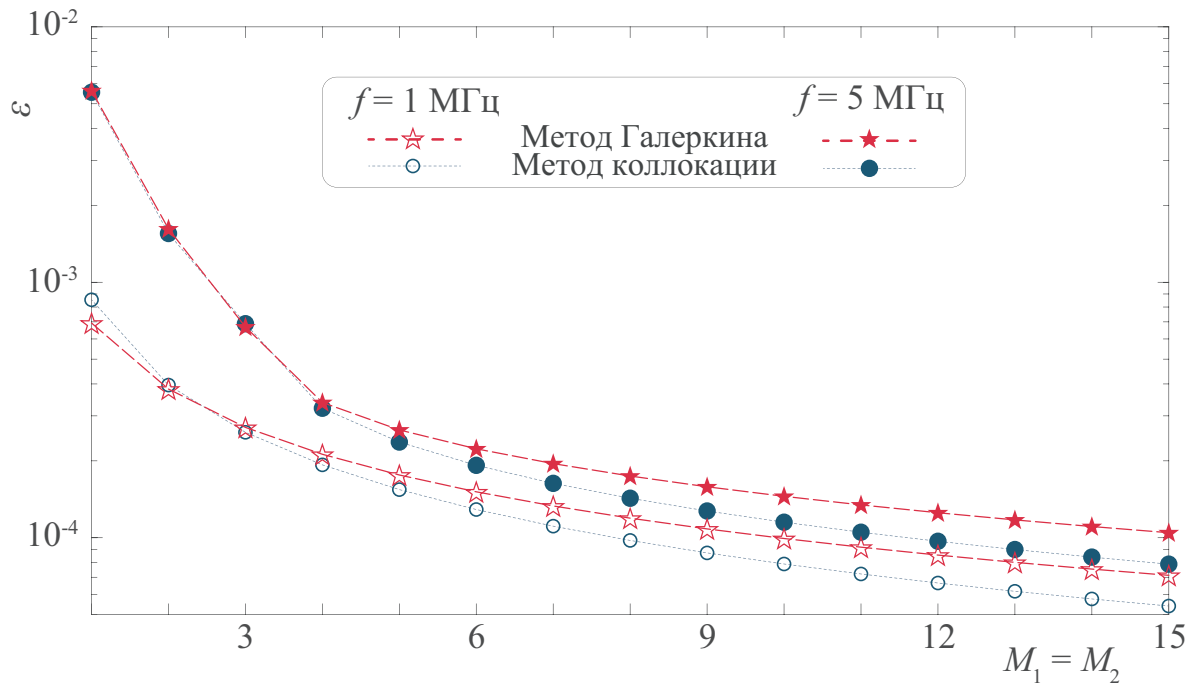


Рисунок 4.12— Относительная погрешность ε для метода Галёркина и метода коллокации

словленности возникающих матриц в левой части системы линейных алгебраических уравнений в случае метода Галёркина и метода коллокаций для составной области Ω при разном количестве элементов. Например, для $N = 4, M_1 = M_2^2 = 2$ и $N = 6, M_1 = M_2^2 = 6$ размерность системы равна 243×243 и 4107×4107 соответственно. При этом в МКЭ при расчетах количество степеней свободы было равно 17841, а время счета составило около 2 секунд. Можно видеть, что метод Галёркина дает возможность сэкономить вычислительные ресурсы и при этом получить число обусловленности ниже, чем в методе коллокаций.

§4.2.2. Плоская задача первого типа

Основные характеристики исследуемой составной структуры в случае плоских колебаний приведены в таблице 4.1. Задаваемые на границе S_u перемещения были приняты равными $u_0 = 1$ мм.

Таблица 4.4— Число обусловленности матрицы СЛАУ для $f = 1$ 1 МГц

Проекционный метод	$N = 4$	$N = 6$	$N = 4$	$N = 6$
	$M_1 = 2$	$M_1 = 6$	$M_1 = 10$	$M_1 = 10$
	$M_2^2 = 2$	$M_2^2 = 6$	$M_2^2 = 10$	$M_2^2 = 10$
Метод Галёркина	$2,87 \cdot 10^4$	$6,51 \cdot 10^5$	$5,46 \cdot 10^5$	$1,74 \cdot 10^6$
Коллокаций	$1,67 \cdot 10^5$	$1,66 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^7$	$7,48 \cdot 10^7$

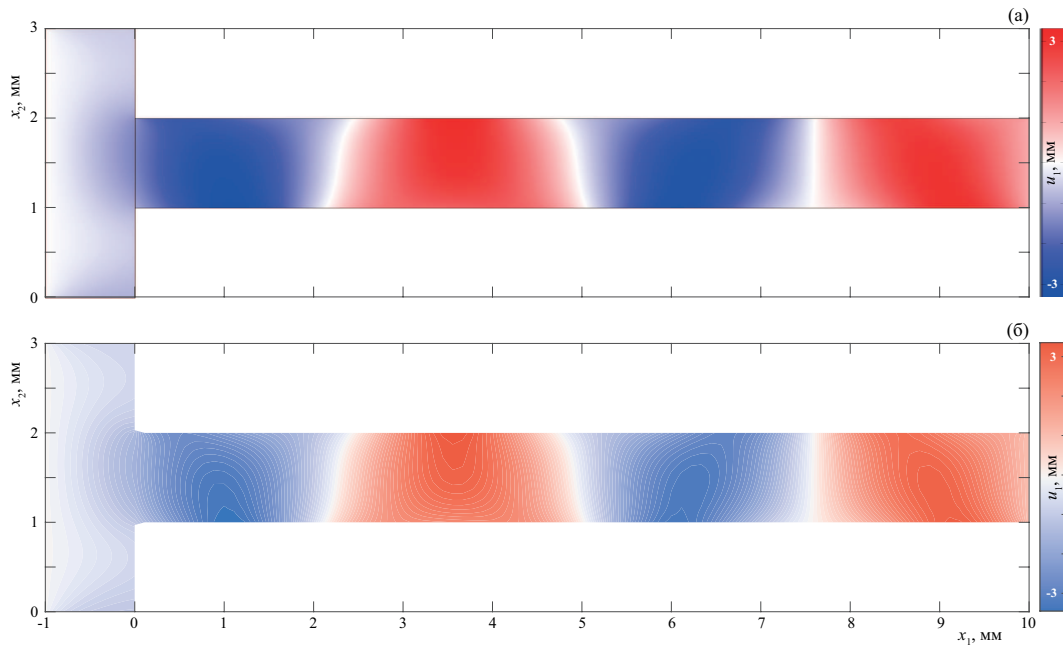


Рисунок 4.13— Перемещения $u_1(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

На рис. 4.13–4.16 изображены перемещения u_1 , u_2 , а на рис. 4.17–4.19 напряжения σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} во всей составной области Ω , вычисленные с помощью гибридной схемы при $N = 7$, $M_1 = M_2^2 = 4$ (рис. 4.13б–4.16б и 4.17б–4.19б) и с помощью МКЭ (рис. 4.13а–4.16а и 4.17а–4.19а) для $f = 5$ МГц. Можно видеть хорошее совпадение с результатов с МКЭ.

Для исследования сходимости гибридного метода вводятся и вычисляются относительные погрешности модулей векторов перемещений $|\mathbf{u}|$ и

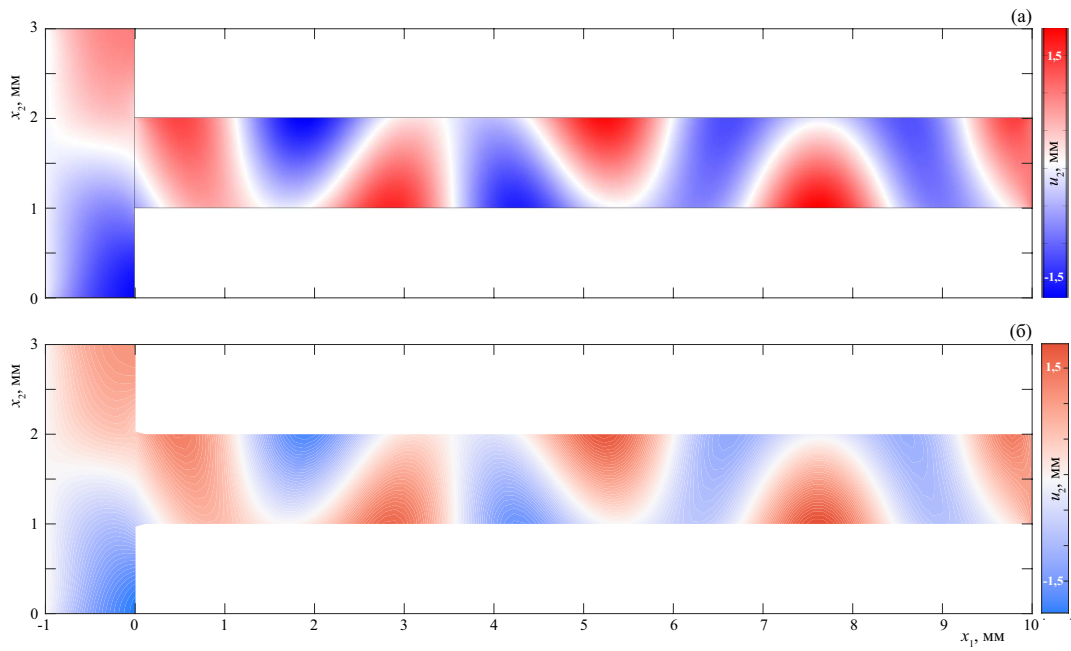


Рисунок 4.14—Перемещения $u_2(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

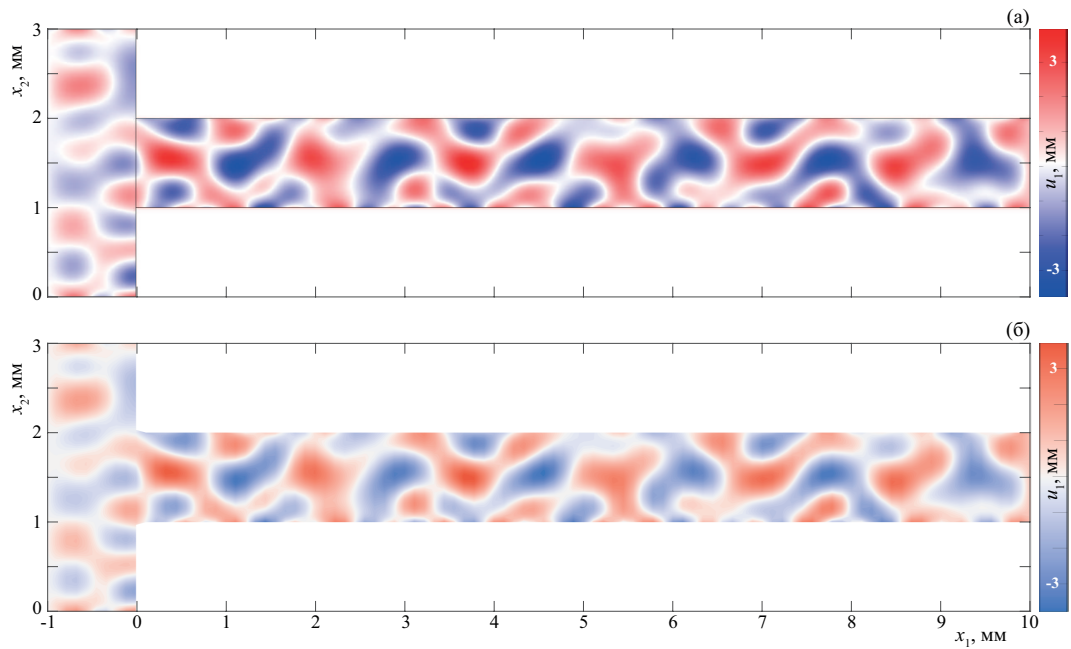


Рисунок 4.15—Перемещения $u_1(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

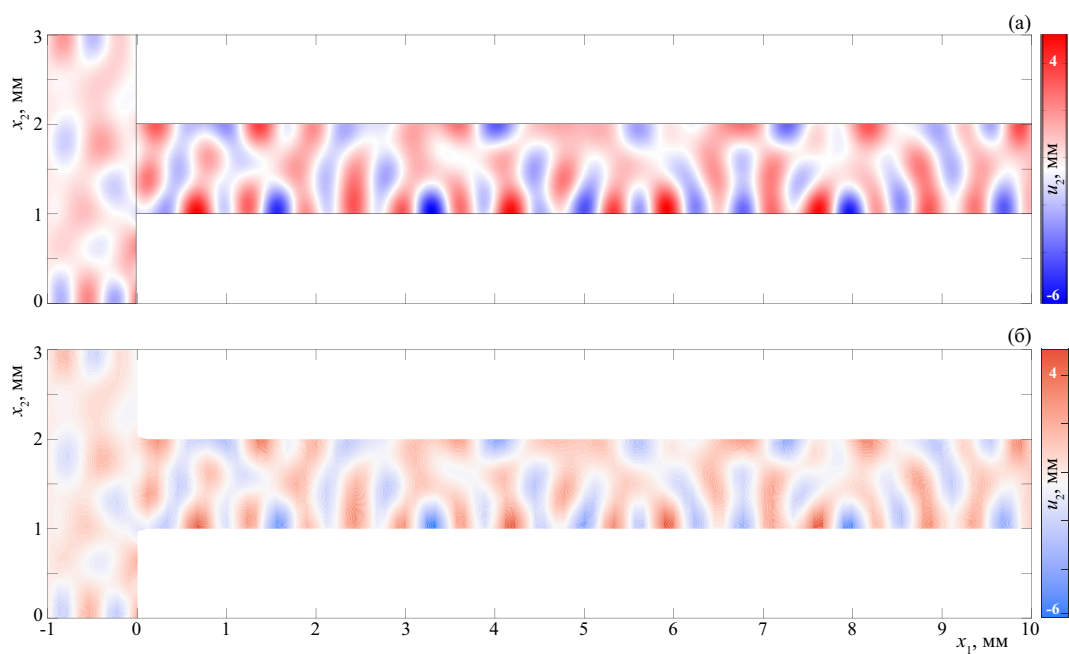


Рисунок 4.16 — Перемещения $u_2(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

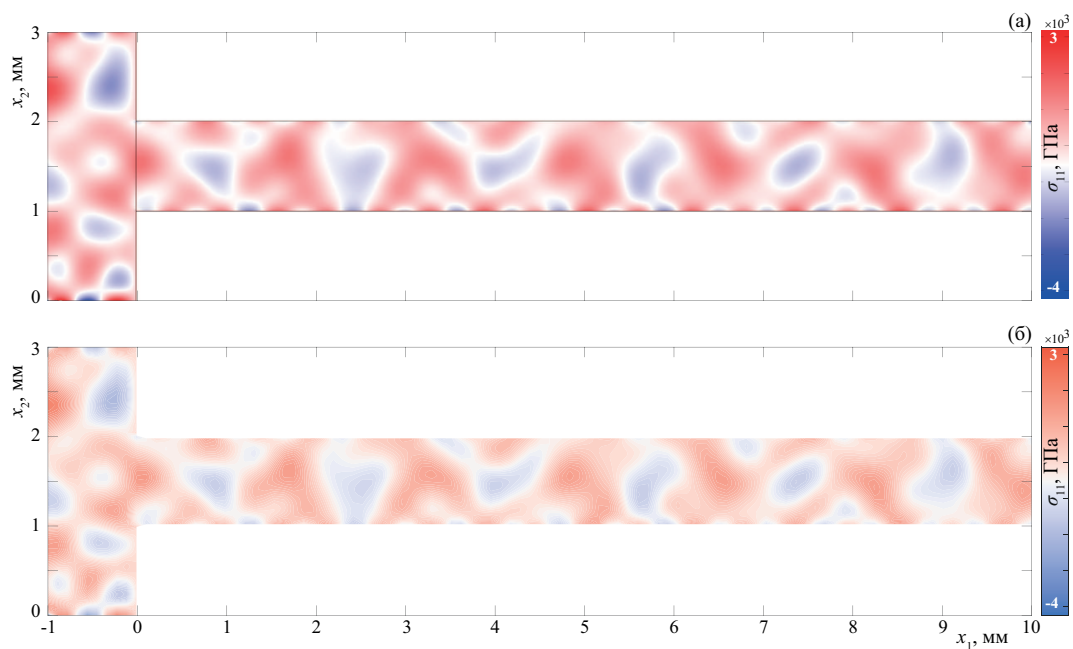


Рисунок 4.17 — Напряжения $\sigma_{11}(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

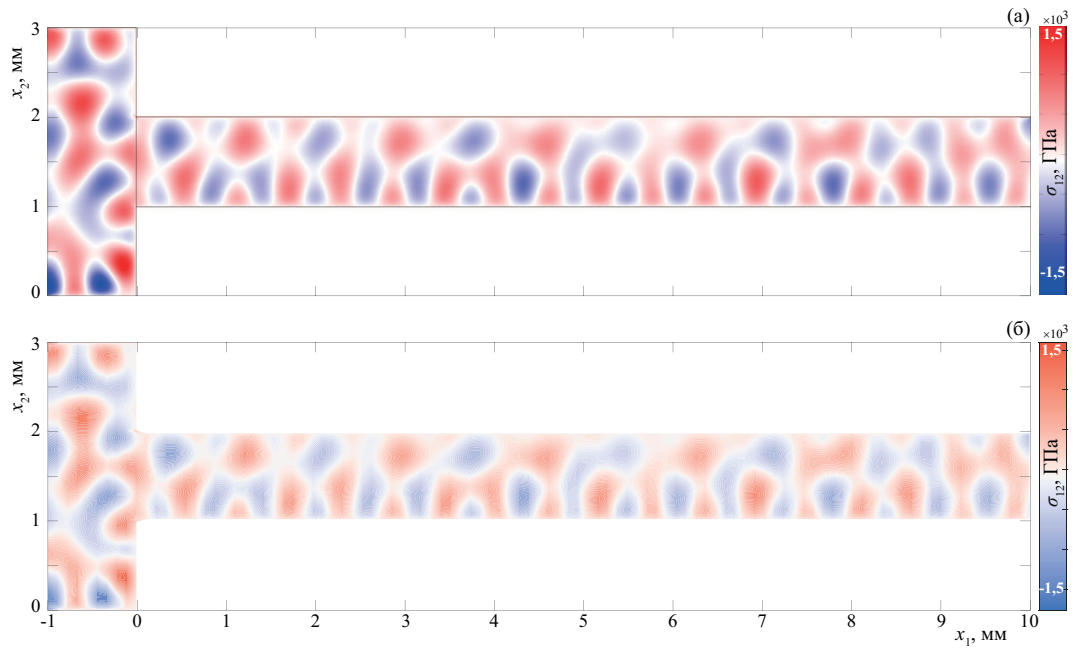


Рисунок 4.18 — Напряжения $\sigma_{12}(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

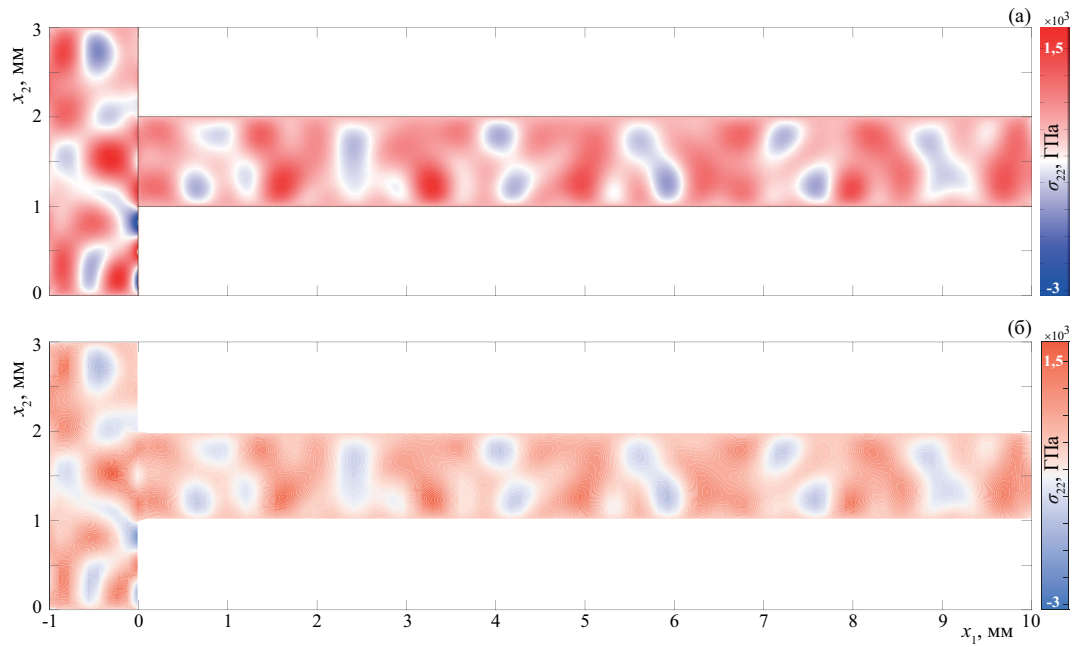


Рисунок 4.19 — Напряжения $\sigma_{22}(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

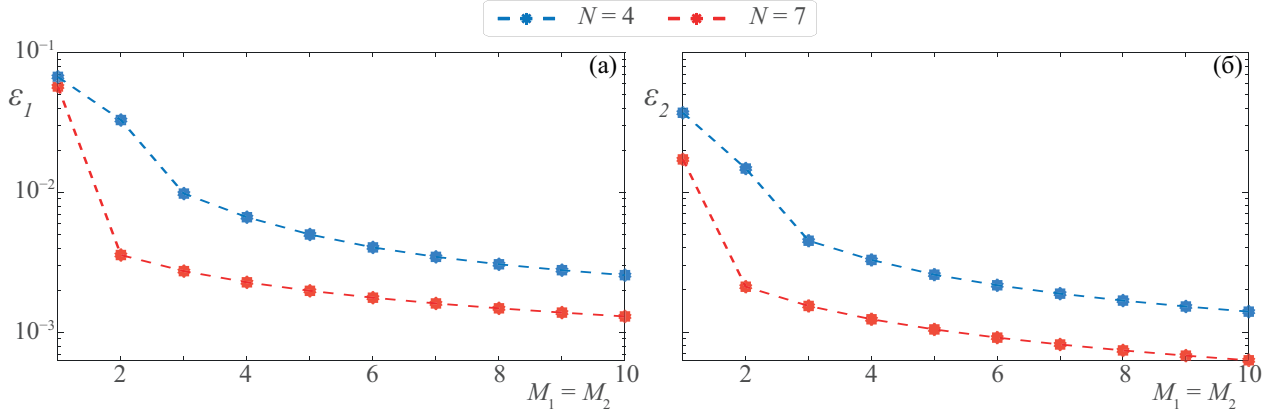


Рисунок 4.20 — Относительные погрешности гибридной схемы ε_p , рассчитанные в области Ω_1 (а) и области Ω_2 (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

$|\mathbf{u}_{comsol}|$ в норме пространства L_1 , полученных, соответственно, с использованием гибридной схемы и МКЭ на «мелкой» сетке для области Ω_p :

$$\varepsilon_p = \frac{\| |\mathbf{u}| - |\mathbf{u}_{comsol}| \|_{L_1(\Omega_p)}}{\| |\mathbf{u}_{comsol}| \|_{L_1(\Omega_p)}}. \quad (4.3)$$

На рис. 4.20 видно уменьшение относительной погрешности расчета на основе гибридной схемы с увеличением количества спектральных элементов при $N = 4$ и $N = 7$.

§4.2.3. Плоская задача второго типа

Предложенный полуаналитический гибридный метод, описанный в главе 3.1.3 был применен к решению плоской задачи второго типа для упругой конструкции из стали (левая подобласть Ω_1) и алюминия (правая подобласть Ω_2). Численные примеры, приведенные ниже, получены для $h_1 = 3$ мм, $d_1 = 1$ мм, $h_2 = 1$ мм, $d_2 = 10$ мм. Напряжения на границе S_7 были заданы: $\tau_0 = 10$ Па. Параметры материала, использованные в расчетах, приведены в таблице 4.1.

Для численного анализа был выбран порядок интерполяционных полиномов Лагранжа $N = 7$, а количество элементов $M_1 = M_2 = 1$. Для

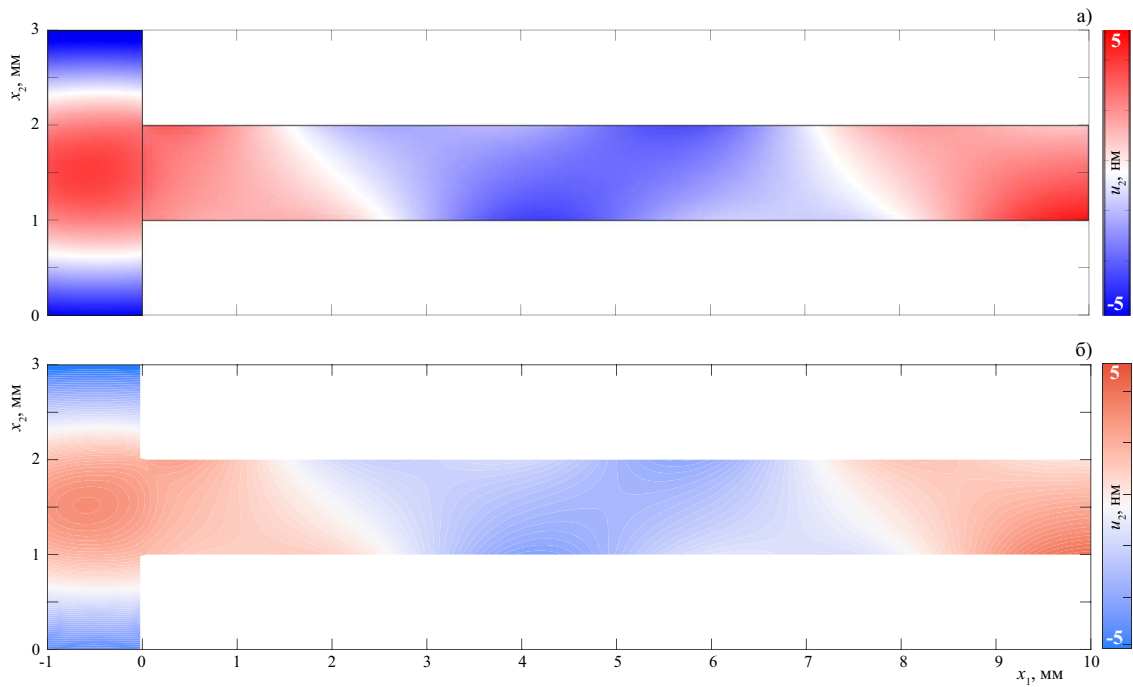


Рисунок 4.21— Амплитуды горизонтальных перемещений $|u_1(x_1, x_2)|$ в составной структуре, вычисленные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 500$ кГц.

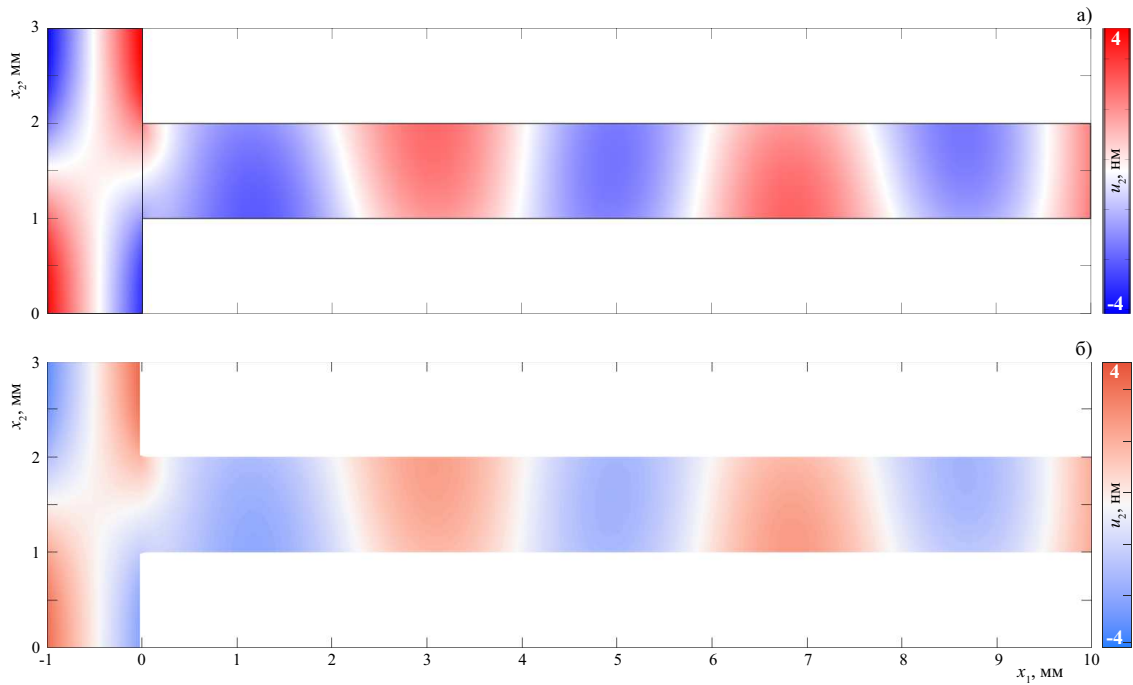


Рисунок 4.22— Амплитуды вертикальных перемещений $|u_2(x_1, x_2)|$ в составной структуре, вычисленные с помощью МКЭ (а) и гибридной схемы (б) при $f = 500$ кГц.

проверки предложенного нового гибридного численного метода та же краевая задача была решена с помощью коммерческого конечно-элементного программного обеспечения (COMSOL Multiphysics) с дискретизацией с помощью полиномов Лагранжа 5-го порядка в модуле Solid Mechanics. Результаты сравнения приведены на рис. 4.21–4.22, где сравниваются вертикальные и горизонтальные смещения. При проведении расчетов с помощью МКЭ в частотной области было использовано 1083 элемента (дискретизация Quartic Lagrange в приближении механики твердого тела) с 55432 степенями свободы. Наблюдается хорошее совпадение с МКЭ.

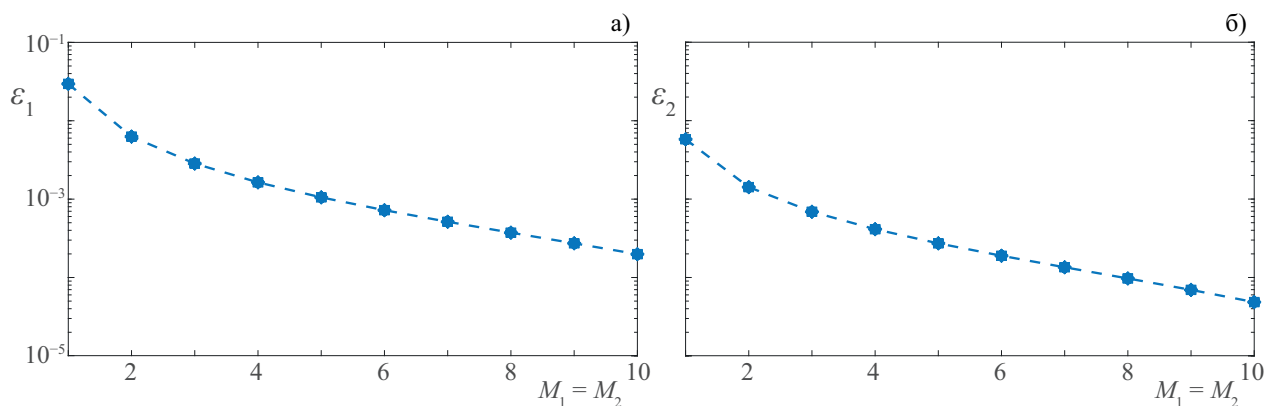


Рисунок 4.23 — Относительные погрешности гибридной схемы ε_p , рассчитанные в области Ω_1 (а) и области Ω_2 (б) при $f = 1$ МГц и $h_3 = 1$ мм

Рис. 4.23 демонстрирует уменьшение относительной погрешности рассчитанной по формуле (4.3) также, как в разделе 4.2.2, для разработанного численного метода на основе гибридной схемы при увеличении количества спектральных элементов при $N = 4$.

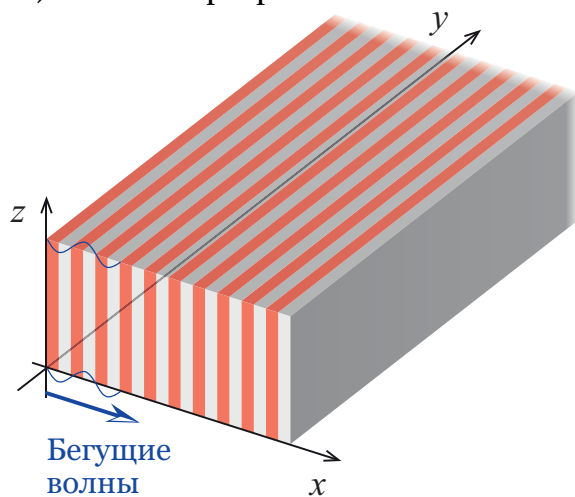
§4.3. Изготовление образцов упругих метаматериалов

Экспериментальные образцы упругого метаматериала были изготовлены с использованием 3D-принтера с двумя экструдерами (Raise 3D E2),

благодаря чему в рамках одной печати можно использовать два различных пластика одновременно. Таким образом, разнородные компоненты метаматериала не нужно склеивать, так как они сплавятся во время печати благодаря нагретому экструдеру.

При изготовлении различных образцов рассматривались и использовались три типа пластика: ABS-пластик, PLA-пластик и PETG-пластик с плотностями соответственно 1003 кг/м^3 , 1182 кг/м^3 и 1231 кг/м^3 . Было использовано предположение об изотропности материалов, что достигалось укладкой слоев $0^\circ/45^\circ/135^\circ/90^\circ$. Для PLA модуль Юнга $E = 4,4 \text{ ГПа}$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, а для ABS модуль Юнга $E = 1,5 \text{ ГПа}$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,38$ [119–121]. Печать выполнялась на поверхности закалённого стекла, подогретого до $110 \text{ }^\circ\text{C}$, температура сопла для ABS и PETG составляла $250 \text{ }^\circ\text{C}$, высота напечатанного слоя составляет $0,2 \text{ мм}$, а диаметр сопла – $0,4 \text{ мм}$. Таким образом, при печати более термостойкий ABS-пластик вплавляется в менее термостойкий PETG.

а) УММ без разрезов



б) УММ с краевыми разрезами

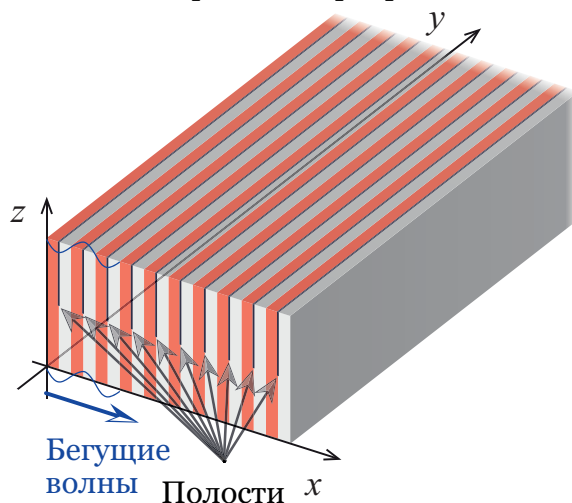


Рисунок 4.24— Концепция упругого слоистого метаматериала с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость

Был изготовлен многослойный упругий метаматериал (УММ) с двух-

слоистой ячейкой, содержащей интерфейсную полость. Концепция рассматриваемого упругого метаматериала показана на рис. 4.24. Здесь декартовая система координат $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ введена таким образом, что ось Ox ортогональна границам раздела элементарных ячеек и внешним границам метаматериала, а оси Oz и Oy параллельны границам раздела. Рассматривается распространение упругих волн вдоль оси Oz , в то время как предполагается, что упругая структура метаматериала бесконечна вдоль оси Oy . В таком случае в подобных структурах распространяются только два вида нормальных мод (симметричные и антисимметричные, распространяющиеся вдоль направления оси z). Кроме того, в метаматериале имеется массив межфазных трещиноподобных пустот (одна пустота в каждой элементарной ячейке).

Изготовленные образцы метаматериала имеют 8 элементарных ячеек длиной 50 мм и шириной 20 мм (рис. 4.25), а полости располагаются в подслое из ABS-пластика либо в центре элементарной ячейки, как на рис. 4.25 (б, в), либо на краю, как на рис. 4.25 (г, д). Толщины подслоев изготовленных образцов с центральными и краевыми пустотами составляют $h_A = 3,15$ мм (PLA), $h_B = 2,85$ мм (ABS) и $h_A = 3,2$ мм (PLA), $h_B = 2,9$ мм (ABS) соответственно, а длины пустот $d = 10$ мм и $d = 9,7$ мм соответственно. Для получения эталонного спектра пропускания был также изготовлен однородный образец, изготовленный только из ABS-пластика.

Геометрия образца упругого метаматериала в виде пластины с массивом полостей приведена на рис. 4.26. Декартовы координаты $\{x, y, z\}$ введены таким образом, чтобы ось Oz была ортогональна свободным от напряжения внешним границам, тогда как упругие волны распространяются вдоль оси Ox . Начало координат связано с краем пьезоактуатора. Рассматривается периодический массив полостей толщиной h и длины w , расположенных на расстоянии s друг от друга.

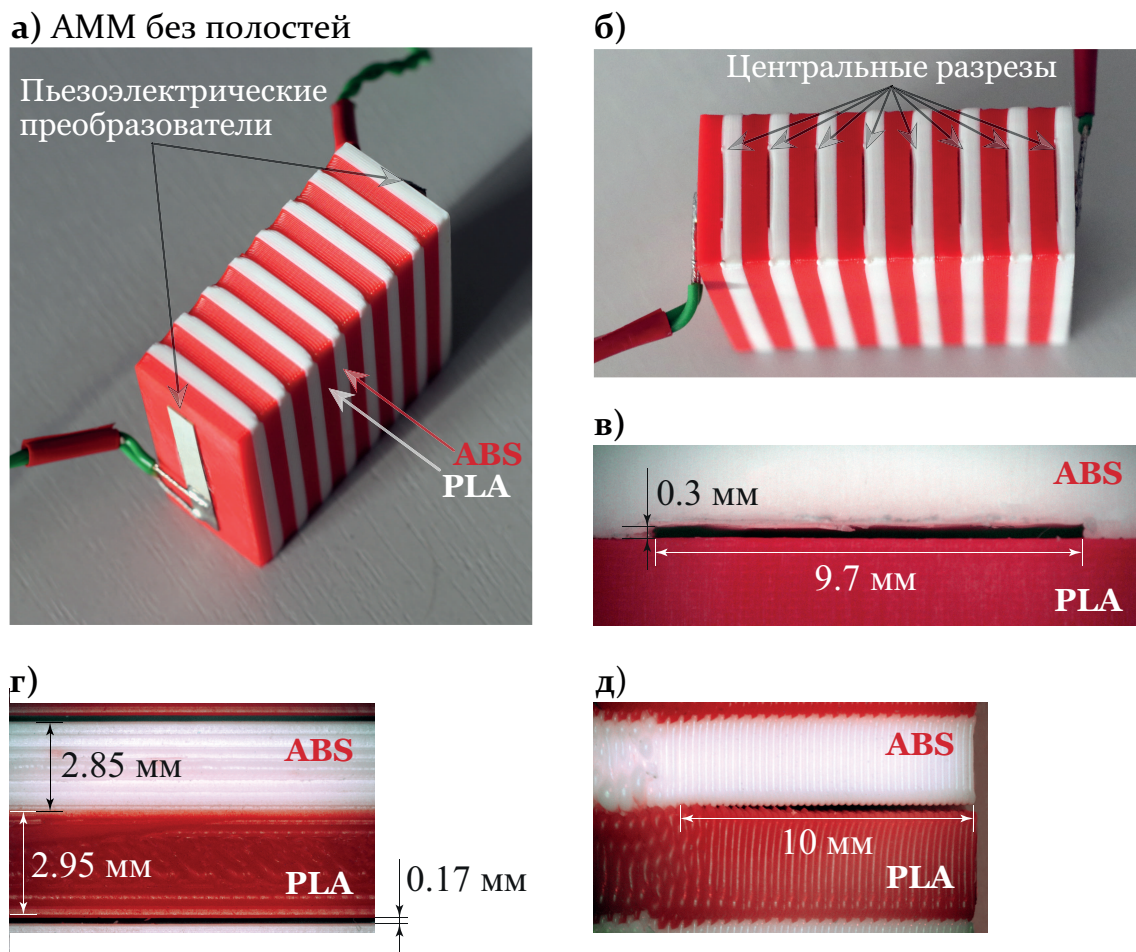


Рисунок 4.25 — Образец упругого метаматериала с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость

Фотографии исследуемых образцов упругого метаматериала в виде пластины с массивом полостей приведены на рис. 4.27. Длина образца составляет 155 мм, ширина 55 мм, высота $H = 6$ мм. Образцы содержат массив из 21-ой полости. В случае двухслойного метаматериала ширины подслоев ABS и PETG составляют соответственно $d_1 = 2,8$ мм и $d_2 = 3,1$ мм. Образцы содержат массив из 21-ой полости. Размеры полостей составляют $3 \times 55 \times 0,4$ мм³, а расстояние между полостями – 4 мм. Однако размеры немного отличаются в случае однородного образца - ширина полости $w = 3,25$ мм, а расстояние между полостями $s = 3,85$ мм. Полости были внедрены в ABS-пластик, который более предпочтителен для печати

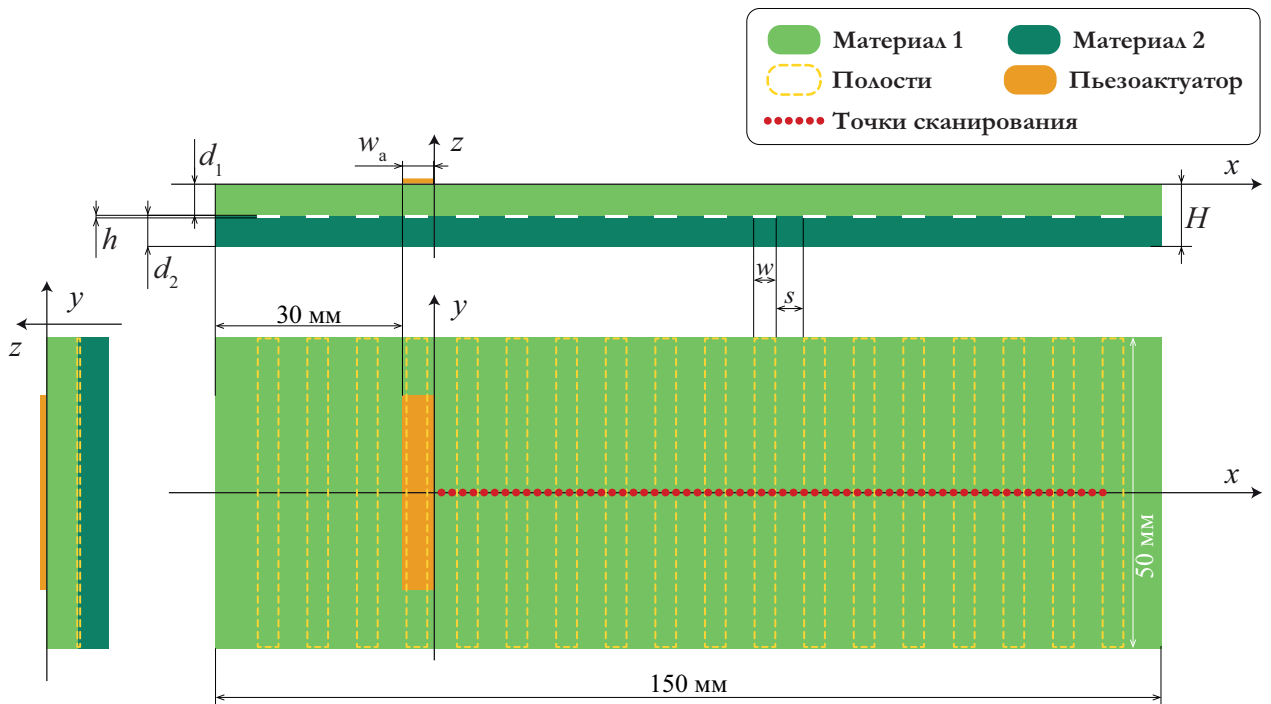
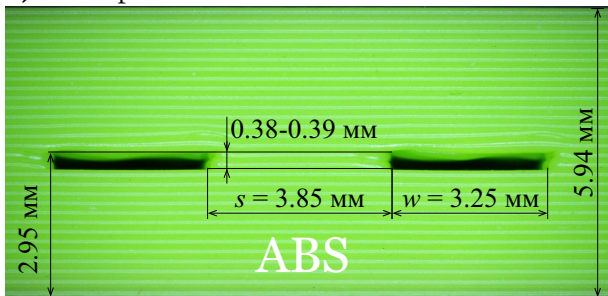


Рисунок 4.26 — Геометрия образца упругого метаматериала в виде пластины с массивом полостей

а) Однородный



б) Слоистый

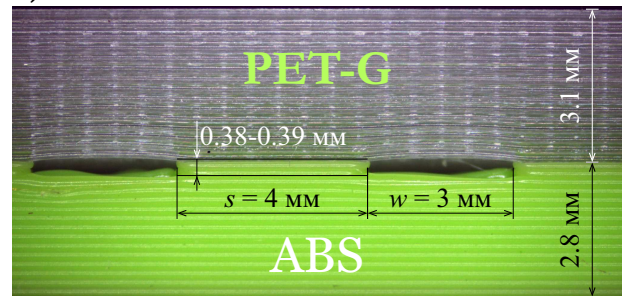


Рисунок 4.27 — Фотографии исследуемых образцов упругого метаматериала в виде пластины с массивом полостей: а) однородного и б) слоистого

тонких прямоугольных полостей по сравнению с PETG.

§4.4. Схема проведения эксперимента

Упругие волны, распространяющиеся в образцах, изготовленных с использованием аддитивных технологий, возбуждались и измерялись прямо-

угольными пьезоэлектрическими преобразователями, приклеенными цианоакрилатным клеем к поверхности упругого метаматериала. Пьезоэлементы изготовлены из материала PIC 155 и имеют размеры $5 \times 0,2 \times 40$ мм³ либо $10 \times 0,345 \times 40$ мм³. Сигнал пьезоэлектрического датчика измеряется осциллографом Picoscope 5442D. Также скорости вертикальной компоненты вектора скорости на поверхности образцов измерялись дистанционно с помощью сканирующего лазерного доплеровского виброметра Polytec PSV-500-NV с лазером HeNe с длиной волны 633 нм методом В-сканирования с длиной линии сканирования не менее 80 мм. Измерения проводились при частоте дискретизации 10 МГц с фильтрацией нижних частот 1 МГц, введенной с помощью программного обеспечения виброметра.

Для возбуждения в образце механических колебаний использовался генератор произвольных сигналов Tektronix AFG 3021B с амплитудой $V_0 = 10$ В, который перед подачей на пьезоэлемент усиливался внешним высокочастотным усилителем АКТАКОМ АВА-1745, благодаря чему получалось более высокое выходное напряжение (около 100–150 В).

На пьезоэлемент подавался сигнал в виде импульсной нестационарной нагрузки $p(t)$. Измерения повторялись 10000 раз, после чего анализировался усредненный сигнал. Использовались два вида функции входного напряжения. Во-первых, применялся прямоугольный импульс длиной β с:

$$p(t) = V_0 \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \beta, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

который имеет широкий частотный спектр. В качестве сигнала с сосредоточенным спектром в окрестности заданной частоты использовалось $N_c = 5$ периодов косинуса с окном Ханна и центральной частотой f_0 , задаваемый следующим отношением:

$$p(t) = V_0 \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi f_0 t}{N_c}\right) \right), \quad 0 < t < \frac{N_c}{f_0}. \quad (4.4)$$

§4.5. Упругие метаматериалы с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость

В данном разделе рассматривается распространение волн в упругих метаматериалах с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость или без неё, см. рис. 4.24 и 4.25. На рис. 4.28–4.30 изображены действительная и мнимая части рассчитанных волновых чисел для частот до 150 кГц. Запрещенные зоны для симметричных и антисимметричных бегущих волн отмечены прямоугольниками.

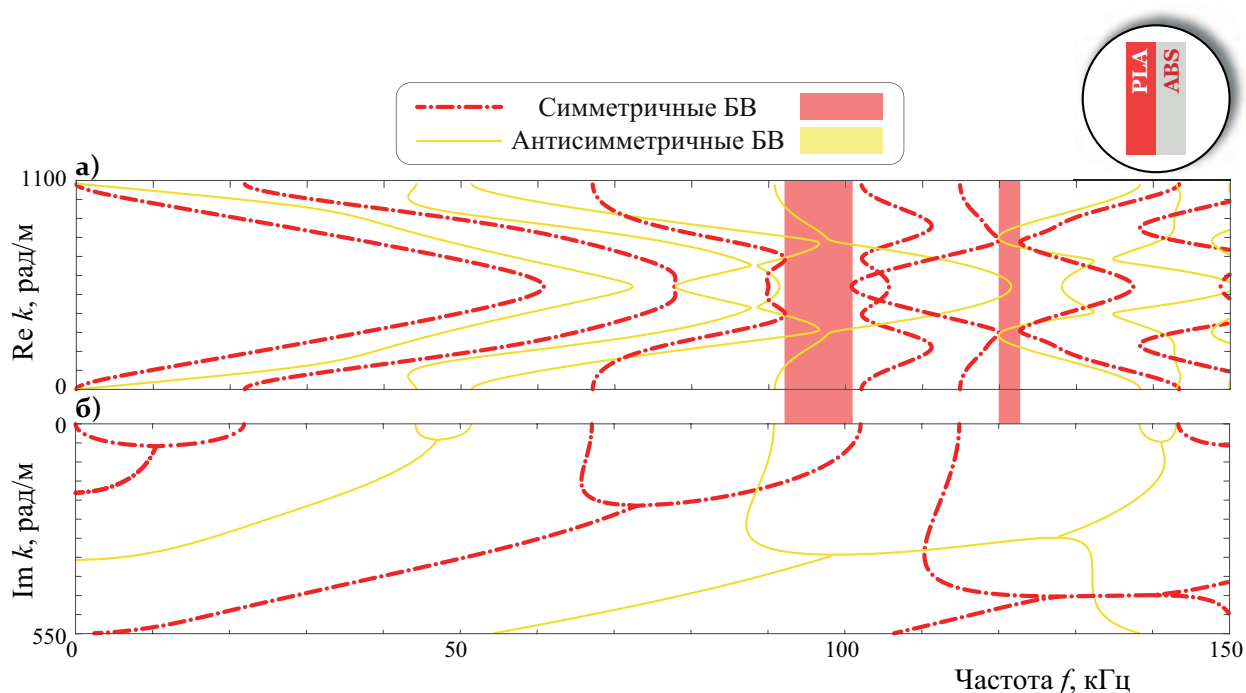


Рисунок 4.28 — Действительная (а) и мнимая части (б) волновых чисел симметричных и антисимметричных бегущих волн, распространяющихся в упругом метаматериале без пустот

На рис. 4.28 можно видеть, что для симметричных бегущих волн в упругом метаматериале без пустот наблюдаются только две запрещенные зоны, тогда как антисимметричные бегущие волны распространяются без затухания для всех частот в диапазоне до 150 кГц. Запрещенные зоны для упругого метаматериала с краевыми пустотами относительно узкие: самая

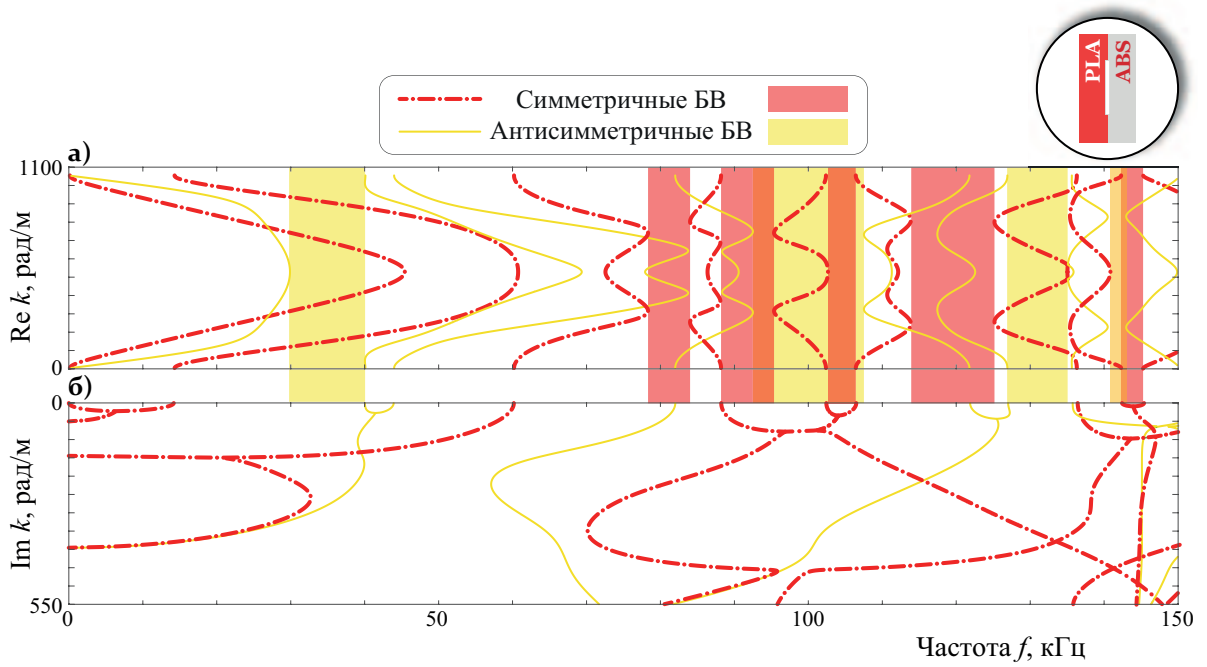


Рисунок 4.29 — Действительная (а) и мнимая (б) части волновых чисел симметричных и антисимметричных бегущих волн, распространяющихся в упругом метаматериале с центральными пустотами

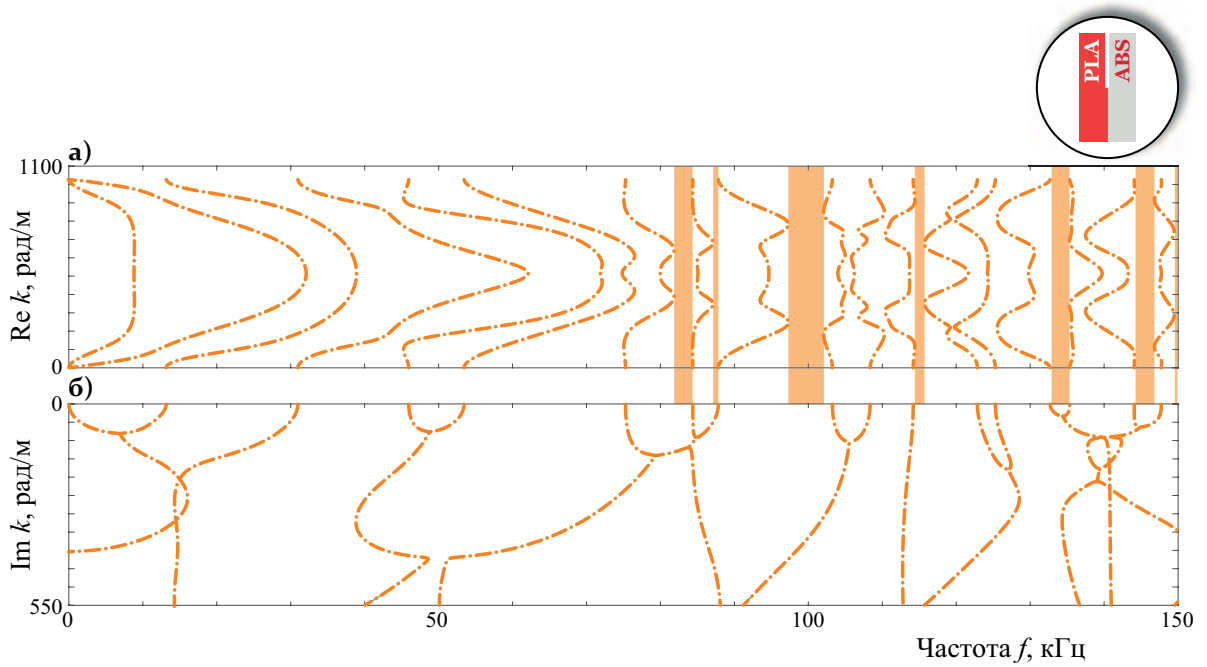


Рисунок 4.30 — Действительная (а) и мнимая (б) части волновых чисел бегущих волн, распространяющихся в упругом метаматериале с краевыми пустотами

широкая полоса второй запрещенной зоны около частоты 100 кГц имеет ширину около 5 кГц.

Введение центральных пустот (рис. 4.29) увеличивает количество запрещенных зон и индуцирует их для антисимметричных бегущих волн, что может быть объяснено локальными резонансами, вызванными наличием дополнительных рассеивателей, т.е. пустот.

Для экспериментальной проверки блокирующих свойств рассматриваемого вида метаматериала с пустотами используется коэффициент прохождения. Для получения коэффициента прохождения по отношению к частоте f используется спектр сигнала, вычисленный как преобразование Фурье измеренного сигнала $s(t)$:

$$\eta^+(f) = \frac{1}{S_{\text{norm}}} \int_0^T s(t) e^{-2\pi i f t} dt, \quad (4.5)$$

где $S_{\text{norm}} = 10^3$ был использован для нормализации спектра сигнала. Теоретически предсказанное значение коэффициента прохождения вычисляется непосредственно как напряжение, вычисленное для заданной частоты f с помощью следующего соотношения:

$$\gamma^+(f) = \phi_s(f). \quad (4.6)$$

На рис. 4.31–4.33 представлены расчеты коэффициентов прохождения, измеренные с помощью пьезоэлектрического датчика (сенсора) $\eta^+(f)$ (пунктирные линии) и теоретически предсказанные $\gamma^+(f)$ (сплошные линии) для PLA/ABS упругого метаматериала с пустотами и без. В качестве контрольного уровня изображены тонкие линии, показывающие спектры прохождения для однородного волновода, изготовленного из ABS-пластика.

Однородные полосы одного цвета демонстрируют частотные диапазоны, в которых наблюдается низкое прохождение упругих волн. Пороговые значения были выбраны для различения частотных диапазонов, в которых

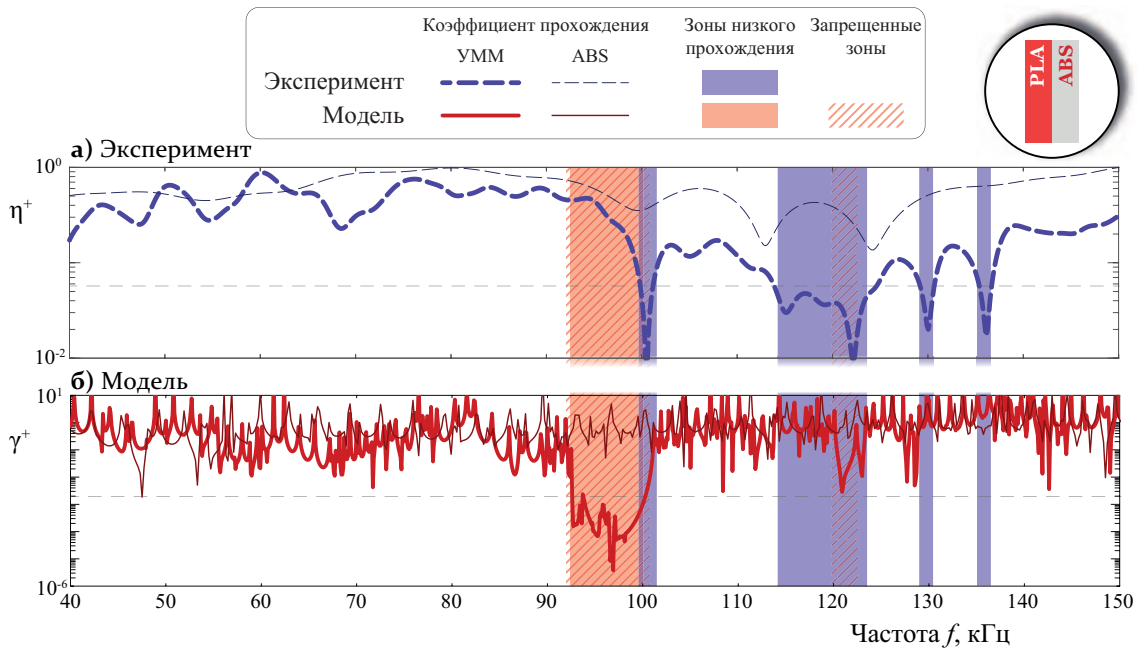


Рисунок 4.31 — Экспериментальный (а) и теоретический (б) коэффициенты прохождения $\eta^+(f)$ и $\gamma^+(f)$, а также соответствующие запрещенные зоны для упругого метаматериала без пустот

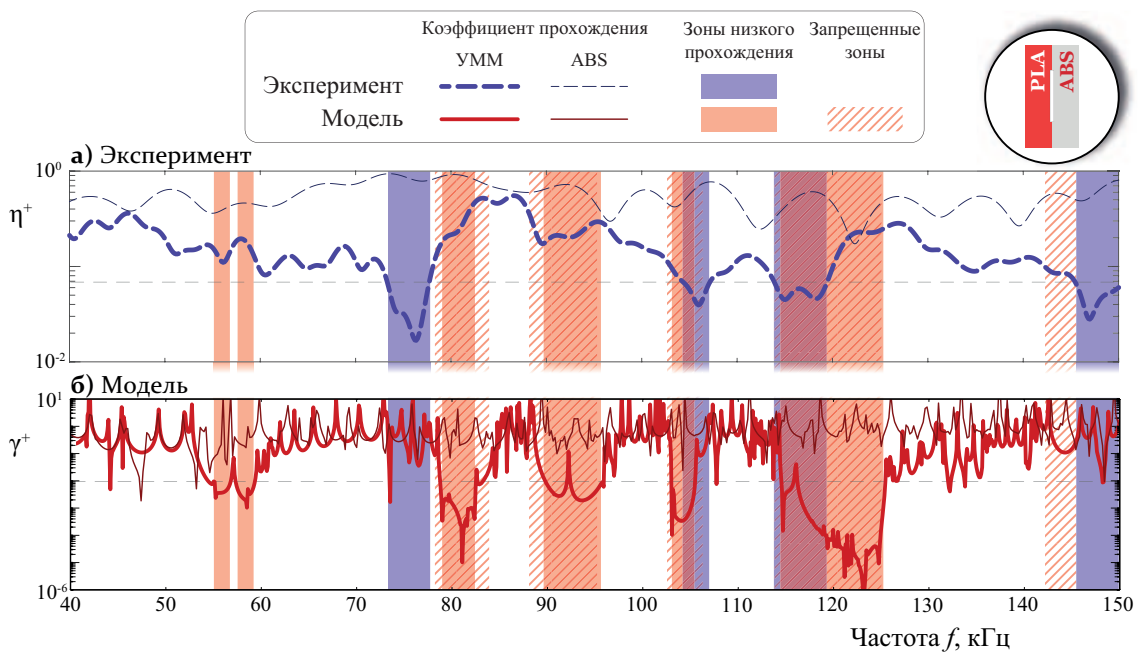


Рисунок 4.32 — Экспериментальный (а) и теоретический (б) коэффициенты прохождения $\eta^+(f)$ и $\gamma^+(f)$, а также соответствующие запрещенные зоны для упругого метаматериала с центральными пустотами

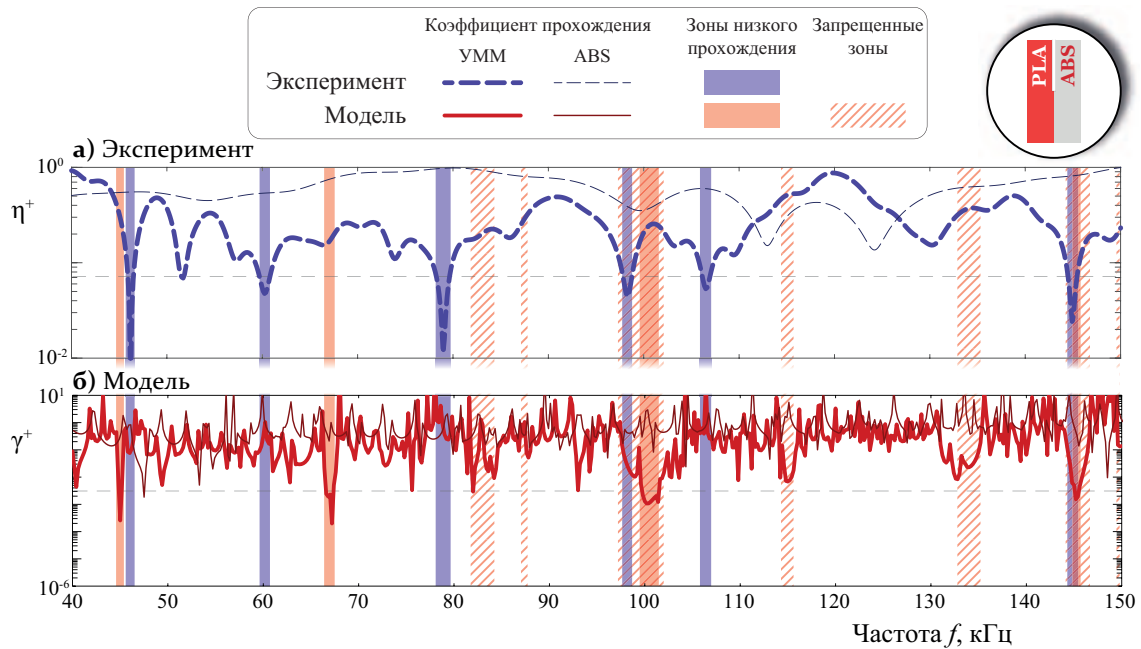


Рисунок 4.33 — Экспериментальный (а) и теоретический (б) коэффициенты прохождения $\eta^+(f)$ и $\gamma^+(f)$, а также соответствующие запрещенные зоны для упругого метаматериала с краевыми пустотами

наблюдается достаточное затухание распространяющейся бегущей волны. Значения были выбраны таким образом, чтобы иметь по меньшей мере 10-кратное и 1000-кратное уменьшение амплитуды коэффициентов прохождения, полученных экспериментально и теоретически соответственно. Заштрихованные зоны показывают теоретические запрещенные зоны, которые также показаны на рис. 4.28–4.29.

Примеры сигналов, измеренных сенсором, показаны на рис. 4.34(а) для всех четырех образцов. Преобразования Фурье этих сигналов показаны на рис. 4.34(б), на котором также видно, что узкие частотные диапазоны низкого уровня коэффициента прохождения не связаны с формой входного сигнала. Относительно небольшие провалы в экспериментально полученных коэффициентах прохождения $\eta^+(f)$ видны для трех образцов, но они не наблюдаются для однородного ABS-пластика. Провалы не очень глубокие из-за относительно небольшого количества элементарных ячеек.

Запрещенные зоны также наблюдаются на графиках коэффициентов прохождения $\gamma^+(f)$, вычисленных с помощью математической модели.

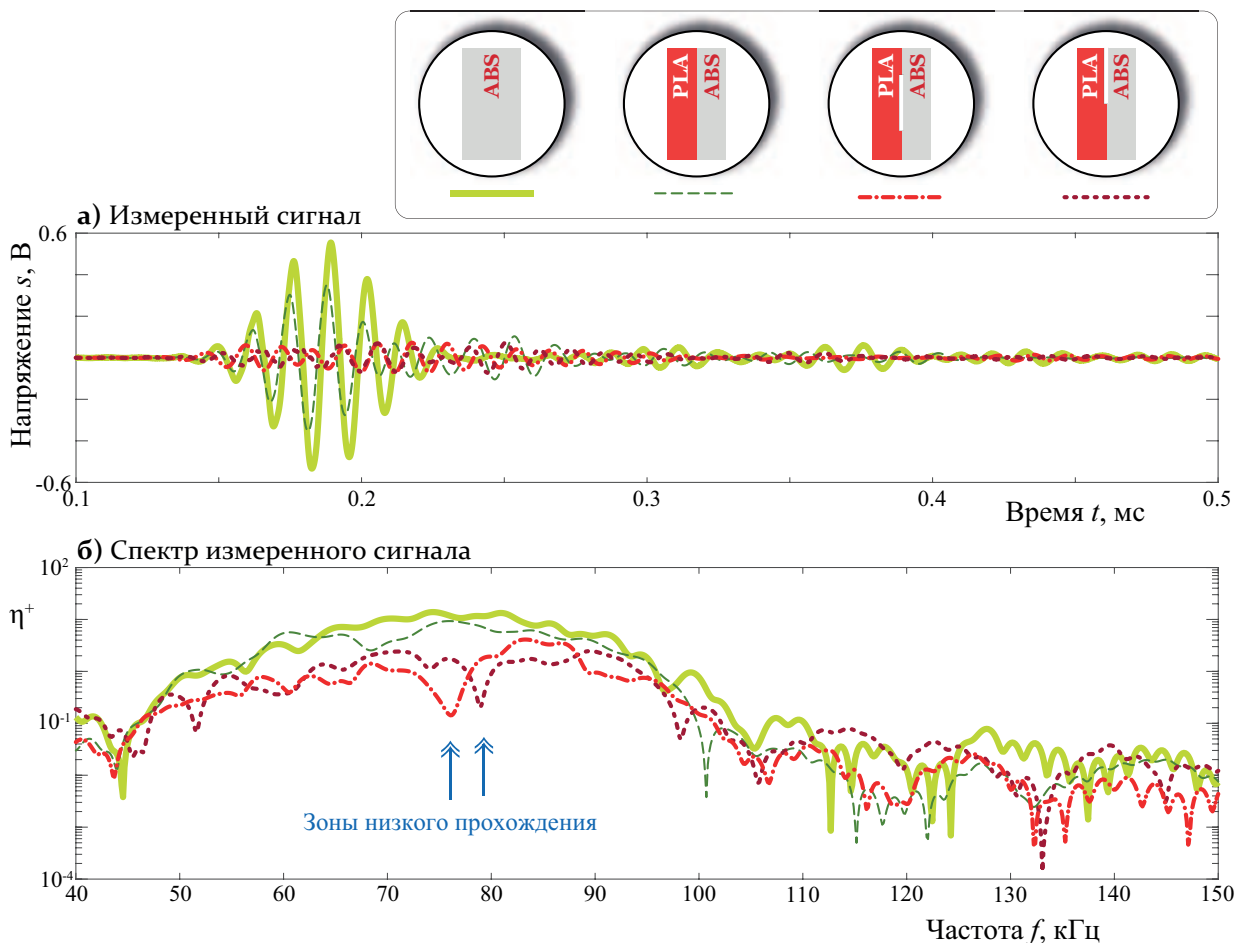


Рисунок 4.34— Измеренные сигналы $s(t)$ и спектры $\eta^+(f)$

Хотя результаты сравнения теоретических и экспериментальных данных не демонстрируют идеального совпадения, можно наблюдать соответствие между зонами локальных минимумов, отнесенных к запрещенным зонам, оцененных по теоретическим и экспериментальным коэффициентам прохождения. Расхождение, по-видимому, связано с тем, что упругие модули компонентов образцов метаматериалов отличаются от литературных данных [119–121]. Кроме того, можно заключить, что даже комбинация различных пластмасс с относительно схожими свойствами материала позволяет обеспечить формирование достаточно широких запрещенных зон.

§4.6. Упругие метаматериалы в виде пластины с массивом полостей

В данном разделе рассматривается распространение волн в упругих метаматериалах в виде пластины с массивом полостей, см. рис. 4.26 и 4.27. Бегущие волны возбуждаются пьезоэлектрическим преобразователем, закрепленным на поверхности изготовленного образца. Вертикальные компоненты вектора скоростей $v(x, 0, 0, t)$ измеряются на поверхности образцов вдоль линии, обозначенной красной пунктирной линией на рис. 4.26.

Полученные сигналы в точках сканирования дополнительно обрабатываются методом матричного пучка, что позволяет установить связь между волновыми числами k упругих бегущих волн и частотой f . Полученные медленности $s(f)$ и затухания $\mu(f)$ показаны на рисунках 4.35 и 4.36 для образца из ABS и двухкомпонентного слоистого образца из ABS и PET-G.

Коэффициент прохождения может быть рассчитан путем применения преобразования Фурье к амплитудам вертикальных компонент вектора скоростей $v(x, 0, 0, t)$, измеренным на поверхности образца:

$$\gamma^+(f) = \int_{l_0} V(x, f) dx / \int_{l_{\text{end}}} V(x, f) dx, \quad (4.7)$$

Здесь $V(x, f)$ – преобразование Фурье $v(x, 0, 0, t)$, а точки с координатами l_0 и l_{end} , лежащие на линии сканирования, определяют область сканирования вблизи пьезоактуатора. Несмотря на естественную вязкость, свойственную использованным пластикам, наблюдается существенное затухание в некоторых частотных диапазонах. Можно наблюдать резкое увеличение затухания одной из обнаруженных мод в выделенных диапазонах. Таким образом, рассматриваемые частоты можно оценить как запрещенные зоны, где наблюдается существенное перераспределение энергии упругих бегущих волн в разных частях (близких и удаленных от источника) многослойного упругого метаматериала.

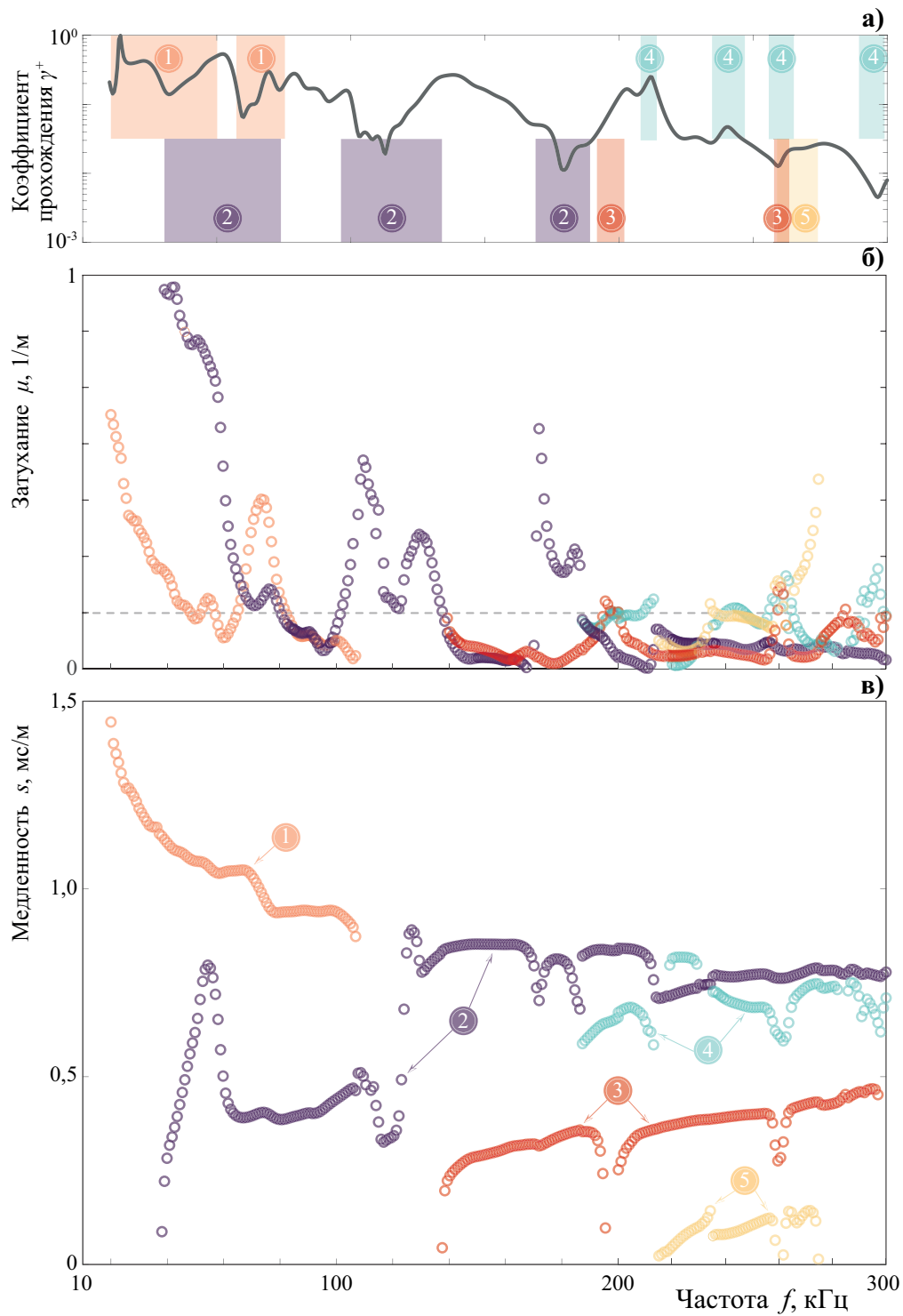


Рисунок 4.35—Коэффициенты прохождения $R(f)$ (а), затухание $\mu(f)$ (б) и медленности $s(f)$ (с), полученные с помощью метода матричного пучка для образца, изготовленного из ABS

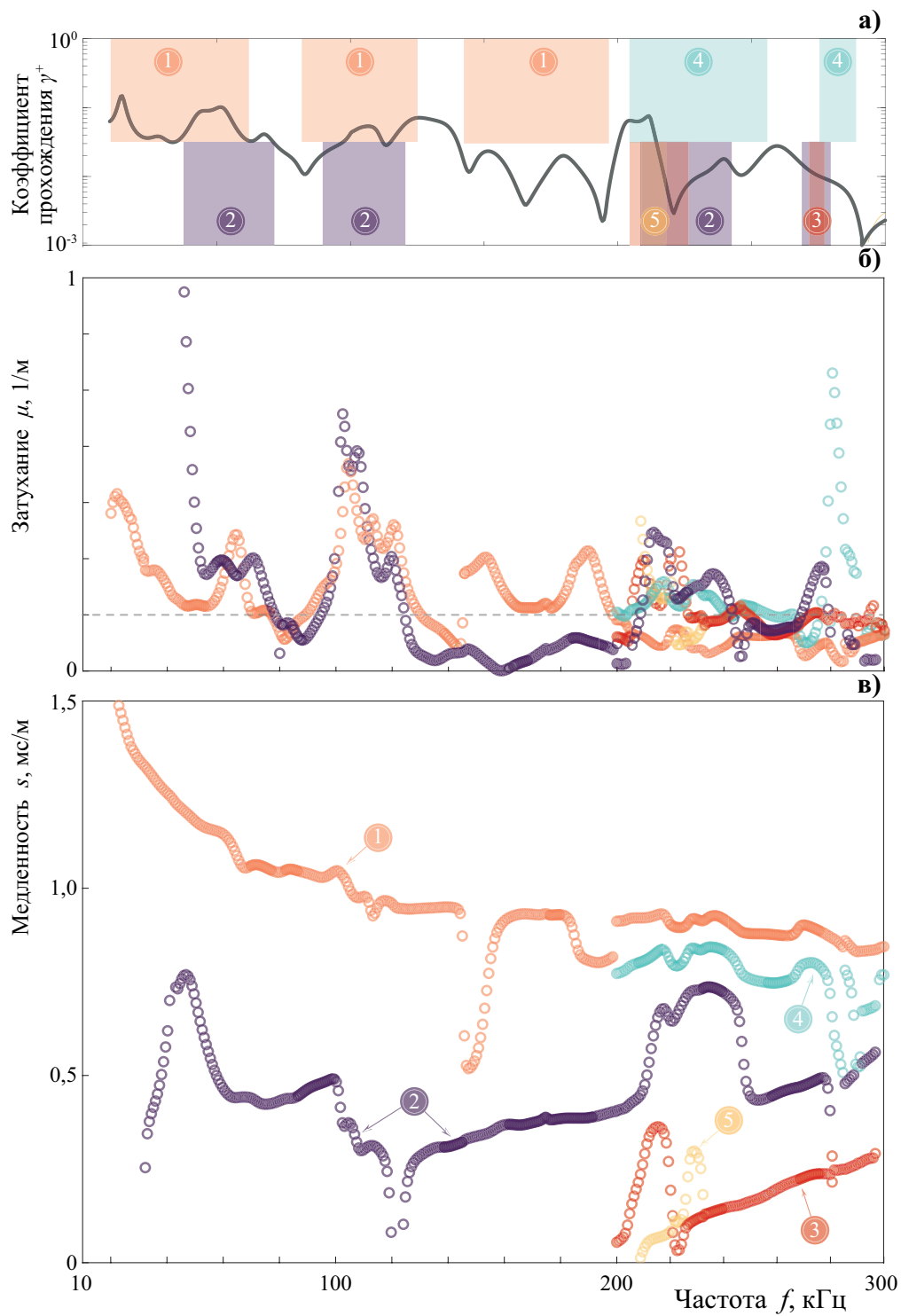


Рисунок 4.36 — Коэффициенты прохождения $R(f)$ (а), затухание $\mu(f)$ (б) и медленности $s(f)$ (в), полученные с помощью метода матричного пучка для образца, изготовленного из ABS и PETG

Для определения характеристик упругого метаматериала с наиболее широкой запрещенной зоной была сформулирована и решена оптимизационная задача для однослойного упругого метаматериала из ABS с геометрией образца, представленного на рис. 4.27. С учетом точности используемого 3D-принтера ширина полости w и расстояние между ними s варьируются для достижения наиболее широкой запрещенной зоны. Диапазон изменения параметров s и w варьировался в пределах от 2 мм до 4 мм.

Для повышения точности моделирования с помощью методики [122, 123] были определены значения упругих модулей пластика. Используя дополнительный образец в виде однородной пластины толщиной 2.92 мм, были определены модуль Юнга 2.49 ГПа, коэффициент Пуассона 0.37 и плотность 981 кг/м³, которые соответствуют имеющимся в литературе диапазонам свойств материала.

На этапе определения запрещенной зоны в качестве целевой функции использовалась сумма коэффициентов прохождения $\gamma^+(f)$, рассчитанная для пары параметров (s, w) на основе разработанных механико-математических моделей:

$$\arg \max_{s,w} \left(\arg \max_{\Delta f} \{ \Delta f(s, w) : \forall f \in [f_0, f_0 + \Delta f], \gamma^+(s, w, f) \leq \tilde{\gamma} \} \right).$$

В результате было найдено два оптимальных сочетания ($s = 2, 1$ мм и $w = 3, 5$ мм) и ($s = 4, 3$ мм и $w = 2, 6$ мм), обеспечивающие наиболее широкую запрещенную зону в 14 кГц.

Так как при изготовлении образцов с более широкой полостью более высока вероятность обвалов внутри пустот, то был изготовлен образец метаматериала с шириной полости $s = 2, 1$ мм и расстоянием между полостями $w = 3, 5$ мм. С использованием пьезоактуатора и лазерной доплеровской виброметрии были получены амплитуды колебаний на поверхности и путем применения преобразования Фурье вычислены экспериментальные значения

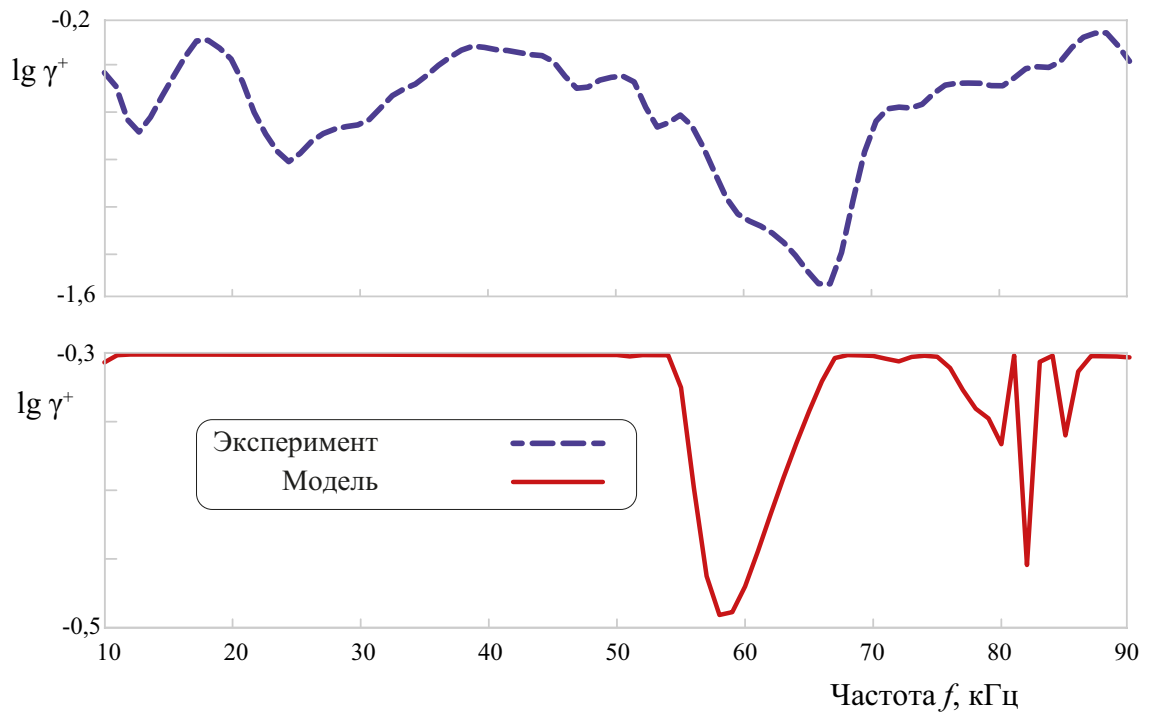


Рисунок 4.37— Коэффициенты прохождения $\gamma^+(f)$ для однослойного упругого метаматериала из ABS с массивом полостей, полученные численно (а) и экспериментально (б) для $s = 2,1$ мм и $w = 3,5$ мм

коэффициента прохождения. На рис. 4.37 приведены графики коэффициента прохождения $\gamma^+(f)$, полученные из численно и экспериментально для $s = 2,1$ мм и $w = 3,5$ мм. Можно увидеть, что расположение запрещенной зоны достаточно хорошо соответствует предсказанным численным значениям. Хотя экспериментальные оценки дают большее значение в 18 кГц для запрещенной зоны (в численных расчетах получился диапазон в 14 кГц), можно заключить, что данный вид метаматериала обеспечивает достаточно широкие запрещенные зоны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При проведении диссертационного исследования были получены следующие основные результаты:

1. Разработаны механико-математические модели, описывающие динамическое поведение многослойного волновода с присоединенными элементами, а также упругого метаматериала с ячейками, состоящими из слоистого волновода и присоединенных элементов в общем случае произвольной формы.
2. Предложена оригинальная гибридная вычислительная схема, сочетающая преимущества ПАМКЭ и МКЭ ВПТ, и на ее основе разработаны компьютерные модели, позволяющие проводить численный анализ запрещенных зон и собственных колебаний упругих метаматериалов с протяженными элементами.
3. Проведен численный и экспериментальный анализ влияния параметров ячеек упругих слоистых метаматериалов с массивом полостей, определены оптимальные параметры полостей для достижения максимального диапазона запрещенных зон.
4. Впервые выполнена экспериментальная верификация явления формирования запрещенной зоны для двух новых типов упругих метаматериалов: метаматериалов с двухслойной ячейкой, содержащей интерфейсную полость, и метаматериалов в виде пластин с массивом полостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Giurgiutiu, V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors. Second edition / V. Giurgiutiu. — Elsevier Academic Press, 2014. — 1012 p.
2. Shm using guided waves - recent activities and advances in germany / I. Mueller, J. Moll, K. Tschöke [et al.] // International Workshop on Structural Health Monitoring IWSHM. — 2019.
3. A review of piezoelectric material-based structural control and health monitoring techniques for engineering structures: Challenges and opportunities / A. Aabid, B. Parveez, M. A. Raheman [et al.] // Actuators. — 2021. — Vol. 10, № 5.
4. A review of signal processing techniques for ultrasonic guided wave testing / A. R. Diogo, B. Moreira, C. A. J. Gouveia, J. M. R. S. Tavares // Metals. — 2022. — Vol. 12, № 6.
5. Викторов, И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И. А. Викторов. — М.: Наука, 1966. — 320 с.
6. Achenbach, J. D. Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach. — North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1973. — 440 p.
7. Гринченко, В. Г. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Г. Гринченко, В. В. Мелешко. — Киев: Наукова Думка, 1981. — 284 с.
8. Александров, В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. — М.: Наука, 1983. — 488 с.

9. Lamb waves dispersion curves for diamond based piezoelectric layered structure / B. P. Sorokin, G. M. Kvashnin, A. V. Telichko [et al.] // Applied Physics Letters. — 2016. — Vol. 108, № 11. — 113501 p.
10. The reflection of guided waves from notches in pipes: a guide for interpreting corrosion measurements / A. Demma, P. Cawley, M. Lowe [et al.] // NDT & E International. — 2004. — Vol. 37, № 3. — P. 167 – 180.
11. Velichko, A. Post-processing of guided wave array data for high resolution pipe inspection / A. Velichko, P. Wilcox // Journal of the Acoustical Society of America. — 2009. — Vol. 126, № 6. — P. 2973–2982.
12. Pohl, J. Shm of cfrp-structures with impedance spectroscopy and lamb waves / J. Pohl, G. Mook // International Journal of Mechanics and Materials in Design. — 2010. — Vol. 6, № 1. — P. 53–62.
13. Structural adhesive bonding characterization using guided lamb waves and the vertical modes / C. Gauthier, M. E.-C. El-Kettania, J. Galy [et al.] // International Journal of Adhesion & Adhesives. — 2020. — Vol. 98, № 102467. — P. 1–6.
14. Wilde, M. V. Experimental observation of theoretically predicted spectrum of edge waves in a thick elastic plate with facets / M. V. Wilde, M. V. Golub, A. A. Eremin // Ultrasonics. — 2019. — Vol. 98. — P. 88–93.
15. Damage detection with the fundamental mode of edge waves / J. M. Hughes, M. Mohabuth, A. Khanna [et al.] // Structural Health Monitoring. — 2021. — Vol. 20, № 1. — P. 74–83.
16. Chai, Y. Full mode-converting transmission between longitudinal and

- bending waves in plates and beams / Y. Chai, X. Yang, Y. Li // Journal of Sound and Vibration. — 2023. — Vol. 564. — 117890 p.
17. Miao, H. Shear horizontal wave transducers for structural health monitoring and nondestructive testing: A review / H. Miao, F. Li // Ultrasonics. — 2021. — Vol. 114. — 106355 p.
 18. Elastic waves excitation and focusing by a piezoelectric transducer with intermediate layered elastic metamaterials with and without periodic arrays of interfacial voids / M. V. Golub, S. I. Fomenko, P. E. Usov, A. A. Eremin // Sensors. — 2023. — Vol. 23, № 24.
 19. Total conversion between the longitudinal and transverse waves by an ultrathin elastic metamaterial plate with u-shaped slits / Y. Guo, F. Liu, Q. Du, P. Peng // Applied Physics Express. — 2022. — Vol. 15, № 12.
 20. Yang, X. Metamaterial with anisotropic mass density for full mode-converting transmission of elastic waves in the ultralow frequency range / X. Yang, Y. Chai, Y. Li // AIP Advances. — 2021. — 12. — Vol. 11, № 12. — 125205 p.
 21. Веселаго, В. Волны в метаматериалах: их роль в современной физике / В. Веселаго // Успехи физических наук. — 2011. — Т. 181, № 11. — С. 1201–1205.
 22. 3d metamaterials / M. Kadic, G. W. Milton, M. v. Hecke, M. Wegener // Nature Reviews Physics. — 2019. — Vol. 1, № 3. — P. 198–210.
 23. Acoustic band structure of periodic elastic composites / M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani // Physics Review Letters. — 1993. — Vol. 71. — P. 2022–2025.

24. Application of elastic metamaterials/meta-structures in civil engineering: A review / N. Contreras, X. Zhang, H. Hao, F. Hernandez // Composite Structures. — 2024. — Vol. 327.
25. Emerging topics in nanophononics and elastic, acoustic, and mechanical metamaterials: an overview / A. Krushynska, D. Torrent, A. Aragon [et al.] // Nanophotonics. — 2023. — Vol. 12, № 4. — P. 659–686.
26. Active control topological valley modes in metamaterial plates / J. Zhou, J. Zhang, J. Chang [et al.] // Crystals. — 2023. — Vol. 13, № 6.
27. Intelligent on-demand design of phononic metamaterials / Y. Jin, L. He, Z. Wen [et al.] // Nanophotonics. — 2022. — Vol. 11, № 3. — P. 439–460.
28. Zhao, S. High-transmission acoustic self-focusing and directional cloaking in a graded perforated metal slab / S. Zhao, Y. Wang, C. Zhang // Scientific Reports. — 2017. — Vol. 7, № 4368.
29. Remizov, M. Y. Three-dimensional one-mode penetration of elastic waves through a doubly periodic array of cracks / M. Y. Remizov, M. A. Sumbatyan // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2018. — Vol. 23, № 4. — P. 636–650.
30. Liu, J. A review of acoustic metamaterials and phononic crystals / J. Liu, H. Guo, T. Wang // Crystals. — 2020. — Vol. 10, № 4. — 305 p.
31. Design of acoustic/elastic phase gradient metasurfaces: principles, functional elements, tunability, and coding / A.-L. Chen, Y.-S. Wang, Y.-F. Wang [et al.] // Applied Mechanics Reviews. — 2022. — Vol. 74, № 2.

32. Kanev, N. Resonant metasurfaces with a tangential impedance / N. Kanev // *Acoustics*. — 2022. — Vol. 4, № 4. — P. 903–914.
33. Mode conversion of Lamb waves in a composite phononic crystal plate: Numerical analysis and experimental validation / T. Ding, A. Song, C. Sun [et al.] // *Journal of Applied Physics*. — 2022. — 12. — Vol. 132, № 22. — 225103 p.
34. Hedayatrasa, S. 3d intra-cellular wave dynamics in a phononic plate with ultra-wide bandgap: attenuation, resonance and mode conversion / S. Hedayatrasa, M. Kersemans // *Smart Materials and Structures*. — 2022. — feb. — Vol. 31, № 3. — 035010 p.
35. Metamaterial based piezoelectric acoustic energy harvesting: Electromechanical coupled modeling and experimental validation / H. Xiao, T. Li, L. Zhang [et al.] // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2023. — Vol. 185. — 109808 p.
36. Obenchain, M. B. Producing accurate wave propagation time histories using the global matrix method / M. B. Obenchain, C. Cesnik // *Smart Materials and Structures*. — 2013. — Vol. 22, № 12. — 125024 p.
37. Tango, G. J. Global matrix formulation of wave phenomena in plane layered media / G. J. Tango, M. F. Werby, H. Schmidt // *Mathematical Modelling*. — 1987. — Vol. 8. — P. 450–456.
38. Lowe, M. J. S. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media / M. J. S. Lowe // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. — 1995. — Vol. 42, № 4. — P. 525–542.

39. Nelson, R. B. Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders / R. B. Nelson, S. B. Dong, R. D. Kalra // Journal of Sound and Vibration. — 1971. — Vol. 18, № 3. — P. 429–444.
40. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section / I. Bartoli, A. Marzani, F. L. d. Scalea, E. Viola // Journal of Sound and Vibration. — 2006. — Vol. 295, № 3-5. — P. 685–707.
41. Капцов, А. О рассеянии плоской трещиной нормально падающей продольной гармонической волны / А. Капцов, Е. Шифрин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 1986. — Т. 6. — С. 106–112.
42. Shifrin, E. I. Analytical-numerical solution of elliptical interface crack problem / E. I. Shifrin, B. Brank, G. Surace // International Journal of Fracture. — 1998. — Vol. 94, N 3. — Pp. 201–215.
43. Глушков, Е. В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60, № 2. — С. 282–289.
44. Boström, A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation / A. Boström // Applied Mechanics Reviews. — 2003. — Vol. 56. — P. 383–405.
45. Seismic Wave Propagation in Non-Homogeneous Elastic Media by Boundary Elements. Solid Mechanics and Its Applications / G. D. Manolis, P. S. Dineva, T. V. Rangelov, F. Wuttke. — Springer, Cham, 2017. — Vol. 240.

46. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. А. Александров, В. А. Бабешко. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
47. Ворович, И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
48. Бабешко, В. А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. — М.: Наука, 1989. — 344 р.
49. Ворович, И. И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И. И. Ворович, В. А. Бабешко, О. Пряхина. — М.: Научный мир, 1999. — 246 с.
50. Vatulyan, A. O. Numerical and asymptotic solution of the problem of oscillations of an inhomogeneous waveguide with an annular crack of finite width / A. O. Vatulyan, V. O. Yurov // *Acoustical Physics*. — 2020. — Vol. 66. — P. 441–448.
51. Аналитическое решение задачи о дискообразной трещине в функционально-градиентном пространстве / С. М. Айзикович, В. М. Александров, И. С. Трубчик, Л. И. Кренев // *Доклады Академии наук*. — 2009. — Т. 424, № 2. — С. 185–189.
52. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 224 с.
53. Идентификация трещиноподобных дефектов в упругих элементах конструкций на основе эволюционных алгоритмов / А. А. Краснощеков,

- Б. Соболев, А. Соловьев, А. Черпаков // Дефектоскопия. — 2011. — Т. 6. — С. 67–75.
54. Ватульян, А. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел / А. Ватульян, В. Дударев // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — Т. 5(3). — С. 259–264.
55. Elastic wave propagation, scattering and localization in layered phononic crystals with arrays of strip-like cracks / M. V. Golub, O. V. Doroshenko, S. I. Fomenko [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2021. — Vol. 212. — P. 1–22.
56. Band-gap and pass-band classification for oblique waves propagating in a three-dimensional layered functionally graded piezoelectric phononic crystal / S. I. Fomenko, M. V. Golub, A. Chen [et al.] // Journal of Sound and Vibration. — 2019. — Vol. 439. — P. 219–240.
57. Golub, M. V. In-plane time-harmonic elastic wave motion and resonance phenomena in a layered phononic crystal with periodic cracks / M. V. Golub, C. Zhang // Journal of Acoustical Society of America. — 2015. — Vol. 137, № 1. — P. 238–252.
58. Домашенкина, Т. Конечно-элементный анализ фокусирующего ультразвукового пьезоизлучателя в режиме установившихся колебаний / Т. Домашенкина, А. В. Наседкин, А. Рыбьянец // Известия Южного Федерального университета. Технические науки. — 2010. — Т. 6. — С. 174–179.
59. Наседкин, А. Конечноэлементное моделирование пористых термоупругих композитов с учетом микроструктуры / А. Наседкин, А. Наседкина,

- В. Ремизов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7(1). — С. 100–109.
60. Соловьев, А. Конечно-элементное моделирование пьезоэлектрического устройства накопления энергии на основе кантилевера / А. Соловьев, Л. Зьюнг // Вестник Донского Государственного Технического университета. — 2014. — Т. 14, № 1(76). — С. 169–179.
61. Левин, В. А. Нелинейная вычислительная механика прочности / В. А. Левин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 454 с.
62. Finite element modeling and experimental characterization of piezoceramic frequency steerable acoustic transducers / M. Mohammadgholiha, A. Palermo, N. Testoni [et al.] // IEEE Sensors Journal. — 2022. — Vol. 22, № 14. — P. 13958–13970.
63. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — М.: Мир, 1987. — 524 с.
64. Баженов, В. Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В. Г. Баженов, Л. А. Игумнов. монография. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 352 р.
65. Westlund, J. Elastic wave scattering by a rectangular crack near a non-planar back surface / J. Westlund, A. Boström // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2012. — Vol. 36. — P. 1189–1198.
66. Priolo, E. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques / E. Priolo, J. M. Carlione, G. Seriani // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1994. — Vol. 95(2). — P. 681 – 693.

67. Komatitsch, D. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation / D. Komatitsch, J. Tromp // Geophysical Journal International. — 1999. — Vol. 139, № 3. — P. 806–822.
68. The spectral element method for elastic wave equations application to 2-D and 3-D seismic problems / D. Komatitsch, J.-P. Vilotte, R. Vai [et al.] // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 45, № 9. — P. 1139–1164.
69. Guided Waves in Structures for SHM The Time-Domain Spectral Element Method / W. Ostachowicz, P. Kudela, M. Krawczuk, A. Zak. — John Wiley & Sons, Ltd., Publication, 2012. — 350 p.
70. The implementation of spectral element method in a cae system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes / D. Konovalov, A. Vershinin, K. Zingerman, V. Levin // Modelling and Simulation in Engineering. — 2017. — Vol. 2017, № 1. — 1797561 p.
71. Spectral extended finite element method for band structure calculations in phononic crystals / E. B. Chin, A. A. Mokhtari, A. Srivastava, N. Sukumar // Journal of Computational Physics. — 2021. — Vol. 427. — 110066 p.
72. Numerical simulation of the bending of a layered beam with prestressed layer under finite strains using the spectral element method / V. Levin, K. Zingerman, A. Vershinin, D. Konovalov // Mathematics and Mechanics of Complex Systems. — 2022. — Vol. 10, № 1. — P. 85–102.
73. Bernardi, C. Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques / C. Bernardi, Y. Maday. — Springer-Verlag, 1992.

74. Kudela, P. Parallel implementation of spectral element method for Lamb wave propagation modeling / P. Kudela // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2016. — Vol. 106, № 6. — P. 413–429.
75. Connection machine simulation of ultrasonic wave propagation in materials. II: The two-dimensional case / P. P. Delsanto, R. S. Schechter, H. H. Chaskelis [et al.] // Wave Motion. — 1994. — Vol. 20, № 4. — P. 295 – 314.
76. Delsanto, P. P. Connection machine simulation of ultrasonic wave propagation in materials III: The three-dimensional case / P. P. Delsanto, R. S. Schechter, R. B. Mignogna // Wave Motion. — 1997. — Vol. 26, № 4. — P. 329 – 339.
77. Lee, B. C. Modelling of lamb waves for damage detection in metallic structures: Part II. wave interactions with damage / B. C. Lee, W. J. Staszewski // Smart Materials and Structures. — 2003. — Vol. 12. — P. 815–824.
78. Gpu-based local interaction simulation approach for simplified temperature effect modelling in lamb wave propagation used for damage detection / P. Kijanka, R. Radeckij, P. Packo [et al.] // Smart Materials and Structures. — 2013. — Vol. 22, № 3. — 035014 p.
79. Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT - elastodynamic finite integration technique / P. Fellingner, R. Marklein, K. J. Langenberg, S. Klaholz // Wave Motion. — 1995. — Vol. 21, № 1. — P. 47–66.
80. Schubert, F. Numerical time-domain modeling of linear and nonlinear

- ultrasonic wave propagation using finite integration techniques-theory and applications / F. Schubert // *Ultrasonics*. — 2004. — Vol. 42, № 1. — P. 221–229.
81. Wolf, J. P. The scaled boundary finite-element method - a primer: derivations / J. P. Wolf, C. Song // *Computers & Structures*. — 2000. — Vol. 78, № 1-3. — P. 191–210.
82. Gravenkamp, H. Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method / H. Gravenkamp, C. Birk, C. Song // *Journal of Computational Physics*. — 2015. — Vol. 295. — P. 438–455.
83. Three-dimensional dynamic fracture analysis using scaled boundary finite element method: A time-domain method / X. Jiang, H. Zhong, D. Li [et al.] // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2022. — Vol. 139. — P. 32–45.
84. Vivar-Perez, J. M. Analytical and higher order finite element hybrid approach for an efficient simulation of ultrasonic guided waves I: 2D-analysis / J. M. Vivar-Perez, S. Duczek, U. Gabbert // *Smart Structures and Systems*. — 2014. — Vol. 13, № 4. — P. 587–614.
85. Lisitsa, V. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation / V. Lisitsa, V. Tcheverda, C. Botter // *Journal of Computational Physics*. — 2016. — Vol. 311. — P. 142–157.
86. Glushkov, E. V. Hybrid numerical-analytical scheme for calculating elastic wave diffraction in locally inhomogeneous waveguides / E. V. Glushkov,

- N. V. Glushkova, A. A. Evdokimov // *Acoustical Physics*. — 2018. — Vol. 64, № 1. — P. 1–9.
87. Malik, M. K. Transient ultrasonic guided wave simulation in layered composite structures using a hybrid wave and finite element scheme / M. K. Malik, D. Chronopoulos, G. Tanner // *Composite Structures*. — 2020. — Vol. 246. — 112376 p.
88. Golub, M. V. Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure / M. V. Golub, A. N. Shpak // *Applied Mathematical Modelling*. — 2019. — Vol. 65. — P. 234–255.
89. Semi-analytical hybrid approach for modelling guided wave-based shm system for a laminate with multiple delaminations and surface-mounted inhomogeneities / M. V. Golub, S. I. Fomenko, A. N. Shpak [et al.] // *Applied Mathematical Modelling*. — 2023. — Vol. 120. — P. 812–832.
90. Moulin, E. Modeling of lamb waves generated by integrated transducers in composite plates using a coupled finite element - normal modes expansion method / E. Moulin, J. Assaad, C. Delebarre // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 2000. — Vol. 107(1). — P. 87–94.
91. Gresil, M. Time-domain hybrid global-local prediction of guided waves interaction with damage / M. Gresil, V. Giurgiutiu // *Key Engineering Materials*. — 2013. — Vol. 558. — P. 116–127.
92. Casadei, F. Multiscale finite element analysis of elastic wave scattering from localized defects / F. Casadei, J. J. Rimoli, M. Ruzzene // *Finite Elements in Analysis and Design*. — 2014. — Vol. 88. — P. 1 – 15.

93. Shen, Y. Combined analytical FEM approach for efficient simulation of lamb wave damage detection / Y. Shen, V. Giurgiutiu // *Ultrasonics*. — 2016. — Vol. 69. — P. 116 – 128.
94. Ханазарян А. Д., Голуб М. В. Гибридный метод для моделирования антиплоских колебаний слоистых волноводов с присоединенными элементами / А. Д. Ханазарян, М. В. Голуб // *Вычислительная механика сплошных сред*. — 2023. — Т. 16, № 1. — С. 101–114.
95. Ханазарян А. Д. Гибридный полуаналитический метод моделирования плоских колебаний слоистых волноводов с присоединенными элементами // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. — 2024. — Т. 21, № 2. — С. 46–61.
96. Golub, M. V. Design, manufacturing, experimental and theoretical study of elastic wave propagation in multilayered acoustic metamaterial with interfacial crack-like voids / M. V. Golub, I. A. Moroz, Y. Wang, A. D. Khanazaryan, K. K. Kanishchev, E. A. Okoneshnikova, A. N. Shpak, S. A. Mareev, C. Zhang // *Acoustics*. — 2023. — Vol. 5, no. 1. — P. 122–135.
97. Golub M. V. Experimental investigation of band-gaps in two-layered acoustic metamaterials with arrays of strip-like cracks / M. V. Golub, A. D. Khanazaryan, K. K. Kanishchev, I. A. Moroz, O. V. Doroshenko, S. I. Fomenko // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications*. — 2024. — Vol. 41. — P. 180–187.
98. Fomenko S. I. Numerical methods for simulation elastic wave propagation in layered periodic elastomer composites / S. I. Fomenko, M. V. Golub,

- A. D. Khanazaryan, A. N. Shpak // *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications*. — 2021. — Vol. 23. — P. 261–271.
99. 3D mathematical model for the simulation of piezo-induced guided waves in an elongated plate-like structure / A. N. Shpak, M. V. Golub, S. A. Glinkova, A. D. Khanazaryan // *Proceedings of the Days on Diffraction*. — 2020. — P. 171–176.
100. Babeshko, V. A. Dynamics of inhomogeneous linear-elastic media (in Russian) / V. A. Babeshko, E. V. Glushkov, J. F. Zinchenko. — Nauka, Moscow, 1989.
101. Глушков, Е. В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. — Краснодар: Кубанский государственный университет, 1990. — 72 с.
102. Глушков, Е. В. Интегральные преобразования и волновые процессы / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. — Краснодар: Кубанский государственный университет, 2017. — 201 с.
103. Bloch, F. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern / F. Bloch // *Zeitschrift für Physik*. — 1929. — Vol. 52, № 7-8. — P. 555–600.
104. Якубович, В. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. Якубович, В. Старжинский. — М: Наука, 1972. — 718 р.
105. A tutorial survey on waves propagating in periodic media: Electronic, photonic and phononic crystals. perception of the bloch theorem in both real and fourier domains / J. Gazalet, S. Dupont, J. Kastelik, Q. Rolland // *Wave Motion*. — 2013. — Vol. 50. — P. 619–654.

106. Vosse, F. N. Spectral Element Methods: Theory and Applications / F. N. Vosse, P. D. Minev. EUT report. — Eindhoven University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, 1996.
107. Дьяконов, М. Дифракция сдвиговых волн на бесконечной и конечной периодических системах разрезов в упругом слое / М. Дьяконов, Ю. Устинов // Акустический журнал. — 1997. — Т. 43, № 2. — С. 176–181.
108. An advanced boundary integral equation method for wave propagation analysis in a layered piezoelectric phononic crystal with a crack or an electrode / S. I. Fomenko, M. V. Golub, O. V. Doroshenko [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2021. — Vol. 447.
109. Фоменко, С. Численно устойчивый метод определения волновых полей и запрещенных зон в слоистых фононных кристаллах / С. Фоменко, М. Голуб, А. Александров // Вычислительная механика сплошных сред. — 2017. — Т. 10, № 3. — С. 235–244.
110. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 320 с.
111. Бубенчиков, А. М. Математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов / А. М. Бубенчиков, В. С. Попонин, В. Н. Мельникова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2008. — Т. 3, № 4. — С. 70–76.
112. Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных

- элементов высокого порядка точности / М. В. Голуб, А. Н. Шпак, И. Бюте, К.-П. Фритцен // Вычислительная механика сплошных сред. — 2015. — Т. 8, № 4. — С. 397–407.
113. Spectral element method for elastic and acoustic waves in frequency domain / L. Shi, Y. Zhou, J.-M. Wang [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2016. — Vol. 327. — P. 19–38.
114. Глушков, Е. В. Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, А. С. Кривонос // Прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 74, № 3. — С. 419–432.
115. Glushkov, E. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites / E. Glushkov, N. Glushkova, A. Eremin // Journal of the Acoustical Society of America. — 2011. — Vol. 129, № 5. — P. 2923–2934.
116. Киселев, А. П. Поток энергии упругих волн / А. П. Киселев // Записки научного семинара ЛОМИ. — 1979. — Т. 89. — С. 120–123.
117. Глушков, Е. В. Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве / Е. В. Глушков // Прикладная математика и механика. — 1983. — Т. 47, № 1. — С. 70–75.
118. Oblique shear wave propagation in finitely deformed layered composites / J. Li, V. Slesarenko, P. I. Galich, S. Rudykh // Mechanics Research Communications. — 2018. — Vol. 87. — P. 21–28.
119. Isotropic and anisotropic elasticity and yielding of 3d printed material /

- R. Zou, Y. Xia, S. Liu [et al.] // Composites Part B: Engineering. — 2016. — Vol. 99. — P. 506–513.
120. Dhaliwal, G. S. Four point flexural response of acrylonitrile-butadiene-styrene / G. S. Dhaliwal, M. A. Dundar // Journal of Composites Science. — 2020. — Vol. 4, № 2.
121. Mirkhalaf, S. M. The mechanical behavior of polylactic acid (PLA) films: fabrication, experiments and modelling / S. M. Mirkhalaf, M. Fagerström // Mechanics of Time-Dependent Materials. — 2021. — Vol. 25. — P. 119–131.
122. Probing elastic properties of nanowire-based structures / L. Lu, E. Charron, E. Glushkov [et al.] // Applied Physics Letters. — 2018. — Vol. 113, № 16. — 161903 p.
123. Improved unsupervised learning method for material properties identification based on mode separation of ultrasonic guided wave / M. V. Golub, O. V. Doroshenko, M. A. Arsenov [et al.] // Computation. — 2022. — Vol. 10, № 6. — 93 p.