

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Кубанский государственный университет»  
(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

*На правах рукописи*



**Уафа Самир Баширович**

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИКИ ТРЕЩИН  
НОВОГО ТИПА В ПРОБЛЕМАХ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАУК  
О ЗЕМЛЕ**

Специальность 1.1.8 –механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация  
на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор,  
академик РАН Бабешко Владимир Андреевич

Краснодар  
2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 О ТЕОРИИ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА.....	13
1.1 Стартовые землетрясения, вызываемые вертикальными воздействиями на литосферные плиты, и свойства разломов как трещин нового типа .....	13
1.2 О стартовом землетрясении в пространственном варианте.....	37
2 ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА В ПРОБЛЕМЕ ПРОЧНОСТИ ПОДШИПНИКОВЫХ ПАР.....	47
2.1 О трещинах нового типа в подшипниках.....	47
2.2 О смазываемых подшипниках с трещинами нового типа .....	60
3 ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА В СРЕДАХ С ДЕФЕКТНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ.....	70
3.1 О трещинах нового типа в предоползневых структурах.....	70
3.2 О предвестниках сейсмичности при трещине нового типа разного раствора берегов.....	91
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	107
Список литературы .....	108

## ВВЕДЕНИЕ

В инженерной практике вопросы прочности и разрушения объектов, строений и конструкций, выполненных из различных материалов, являются одними из главенствующих приоритетов. Решению различных проблем прочности и разрушения посвятили свои исследования академики С.М. Айзикович, В.И. Арнольд, В.А. Бабешко, А.К. Беляев, А.О. Ватульян, И.И. Ворович, И.Г. Горячева, В.В. Калинин, В.И. Кейлис-Борок, В.И. Колесников, Г.И. Марчук, В.П. Матвеев, Н.Ф. Морозов; А.Л. Собисевич и др.; профессора О.А. Беляк, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, И.М. Дунаев, В.И. Ерофеев, Л.А. Игумнова, В.А. Крысько, А.Д. Полянин, А.Н. Соловьев, Т.В. Суворова и др.

Существенные результаты при исследовании смешанных краевых задач и теории трещин получили С.М. Айзикович, В.М. Александров, Б.Д. Аннин, Н.Х. Арутюнян, А.В. Белоконь, А.О. Ватульян, И.И. Ворович, Б.М. Глинский, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, Р.В. Гольдштейн, А.Г. Горшков, И.Г. Горячева, И.М. Дунаев, Д.А. Индейцев, В.В. Калинин, В.И. Колесников, А.М. Кривцов, В.А. Крысько, А.В. Манжиров, В.П. Матвеев, Н.Ф. Морозов, В.И. Моссаковский, С.М. Мхитарян, В.В. Панасюк, А.Д. Полянин, Г.Я. Попов, О.Д. Пряхина, В.С. Саркисян, М.В. Сильников, А.В. Смирнова, Т.В. Суворова, Д.В. Тарлаковский, Л.А. Фильштинский, Г.П. Черепанов и другие.

Вопросы концентрации напряжений в деформируемых телах при наличии дефектов были глубоко изучены в работах С.М. Айзиковича, В.Г. Баженова, И.И. Воровича, Е.В. Глушкова, Н.В. Глушковой, И.Г. Горячевой, А.Н. Гузя, И.М. Дунаева, В.А. Еремеева, Л.М. Зубова, Л.А. Игумнова, Д.А. Индейцева, В.В. Калинин, Д.М. Климова, А.М. Кривцова, Л.П. Лебедева, В.П. Матвеев, Н.Ф. Морозова, А.В. Наседкина, В.В. Новожилова, И.Ф. Образцова, Б.Е. Победри, А.Ф. Резчикова, М.Г. Селезнева, Ю.А. Устинова, В.И. Феодосьева, К.В. Фролова, Е.И. Шемякина, Ю.Г. Яновского и др. Различные вопросы инициирования разрушения в хрупких материалах с трещинами рассмотрены А.М. Кривцовым;

В.И. Дунаевым исследовались энергетические условия разрушения твердых тел; С.М. Айзиковичем получены аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред.

Проблеме прогнозирования землетрясений и техногенных катастроф посвятили свои работы В.В. Адушкин, А.О. Глико, В.Б. Заалишвили, Л.В. Канторович, В.И. Кейлис-Борок, Б.В. Костров, С.В. Медведев, В.Н. Родионов, М.А. Садовский, А.Л. Собисевич, В.И. Уломов, Ю.К. Чернов, А.Ю. Чернов, А. Ben-Menahem, J.D. Byerlee, J.H. Dieterich, С. Marone, J.R. Rice и другие учёные.

Значительный вклад в исследование динамики земной коры внесли К. Аки, А.С. Алексеев, В.Б. Заалишвили, В.В. Кузнецов, А.В. Николаев, В.Ф. Писаренко, П. Ричардс, В.Н. Родионов, У.Ф. Саваренский, Л.Е. Собисевич и А.Л. Собисевич. Они получили важные результаты в области развития методов моделирования и мониторинга сейсмоопасных участков земной коры.

Важное место в исследовании прочности и разрушения отводится исследованию возможности возникновения и развития трещин. Именно они являются предшественниками разрушения конструкций.

Теория трещин, развитая английским ученым Гриффитсом (1920 г.), создавалась для материалов, имеющих определенные механические характеристики, и являлась объектом описываемых уравнениями линейной теории упругости. По словам Гриффитса, трещина описывается геометрически как результат сжатия с боков панели, содержащей эллиптическое отверстие до сближения противоположных границ эллипса. Верхняя и нижняя границы эллипса превращаются в вершины трещины. Очевидно, что такая трещина имеет гладкую границу, в том числе в ее вершинах. Несмотря на значительное отличие геометрии трещин Гриффитса от реально наблюдаемых в эксперименте, теория была принята к использованию в инженерной практике. Имеющаяся гладкость границ в вершинах трещин объяснялась тем, что на микроуровне, а именно атомарном, граница является такой. Теория трещин Гриффитса оказывалась удобной, поскольку позволяла достаточно просто формировать и исследовать

граничные задачи о воздействии на берега трещины различных нагрузок. Кроме этого, достаточно просто формировался критерий разрушения трещины, состоящий в росте коэффициента концентрации напряжений, учитывающего механические параметры материалов и характер нагружения берегов.

Развитая Гриффитсом теория широко применяется в инженерной практике и в настоящее время. Инженеры и ученые достаточно успешно приспособились к применению теории Гриффитса. И хотя еще во времена Гриффитса был упрек расхождения теории с экспериментом, он объяснял более раннее разрушение трещины в эксперименте тем, что в них имеются еще и микротрещины, не учитываемые его теорией. С учетом этого расхождения инженеры приспособились использовать трещины Гриффитса, вводя поправочные коэффициенты. В результате около ста лет весьма успешно используется теория трещин Гриффитса практически во всех областях, где имеет место разрушение, связанное с образованием трещин и особых рекламаций не поступает. Кроме одной: ряд ученых во главе с американским механиком Райсом [2] предприняли попытку дать объяснение сейсмическим событиям - землетрясениям на основании теории Гриффитса. Разломы литосферных плит рассматривались как трещины Гриффитса, и считалось, что землетрясение происходило при росте коэффициента интенсивности.

Эта теория с появлением высокоточных ГЛОНАСС/GPS приемников привела к полному беспорядку в предвестниках сейсмичности. В тех местах, где по теории Гриффитса не может произойти землетрясение, когда плиты сближаются, но не взаимодействуют, оно всё равно происходит. Численные методы оказались несостоятельными в выявлении причины расхождений. В зоне между литосферными плитами возникают напряжения, но их свойства и особенности оказалось невозможно изучить численными методами. И только создание теории блочных элементов, позволяющих точно описывать свойства решений граничных задач о сближении литосферных плит, позволило обнаружить причину расхождений. Методом блочного элемента в результате точного решения граничной задачи о сближении литосферных плит было доказано, что

возникающие концентрации контактных напряжений под литосферными плитами в зоне сближения стремятся к сингулярности, что и означает землетрясение [3, 4]. Оно возникает до начала взаимодействия литосферных плит торцами. Известно, что результат взаимодействия литосферных плит торцами приводит к коровому землетрясению, сопровождающемуся изгибом поверхности. Стартовое землетрясение позволяет вычислить теоретически подвижки поверхности Земли в зоне эпицентров землетрясений. Найденные подвижки Земли в зонах землетрясений затем рассчитывались теоретически и в 80% показали, что это были стартовые землетрясения, но не коровые. Таким образом, разлом, формируемый сближающимися литосферными плитами в своей вершине, формирует зону разрушения. Сопоставляя ее с моделью Гриффитса о сжатии панели с эллипсом, можно видеть, что возникающий разлом представляет объект - трещину, формируемую сжатием с боков панели с прямоугольным отверстием [5]. Эта трещина имеет не гладкую, как в случае Гриффитса, а кусочно-гладкую границу и имеет иной механизм разрушения, чем трещины Гриффитса.

Создателями теории трещин нового типа ни в коем случае не отвергается теория трещин Гриффитса, которая нашла и продолжает находить широкое применение в разных областях. Трещины нового типа рассматриваются как незамеченный ранее еще один механизм разрушения материалов, дополняющий трещины Гриффитса и более точно описывающий некоторые процессы разрушения среды.

Исследованию их свойств и применению в некоторых областях посвящена вынесенная на обсуждение диссертация.

### **Основной целью работы является**

1. Исследование и использование теории трещин нового типа при их возникновении в инженерной практике, в частности, в подшипниках с дефектами и в науках о Земле.

2. Постановка задач и построение исходных данных для возможного и конкретного применения теории трещин нового типа, тестирования их появления

в изделиях инженерной практики и решения проблем в области геофизики и сейсмологии.

3. Изучение механических свойств и особенностей решения граничных задач с трещинами нового типа, возможность их применения в средах сложных реологий.

4. Развитие способов исследования трещин нового типа в разных областях, поиск возможности решения круга проблем, связанных с возникновением трещин нового типа, а также способов тестирования их наличия.

**Личное участие автора состоит** в разработке, анализе и проверке направлений теоретических и прикладных исследований в области теории трещин нового типа. В связи с новизной исследования работа включает как результаты проведения аналитических исследований в областях математики и механики тел с дефектами, так и разработку методов оценки состояния изделий и объектов механики деформируемых тел, содержащих в качестве дефектов трещины нового типа. Особое внимание уделено поиску способов идентификации трещин нового типа среди скрытых дефектов в структурах, объектах и изделиях из деформируемых материалов.

**Научная новизна работы.** В диссертации впервые представлено строгое математическое исследование построения трещин нового типа с применением недавно разработанного нового математического метода блочного элемента.

**Новыми** являются следующие результаты

1. Разработана модель трещины нового типа по аналогии с трещиной Гриффитса и обосновано механическое и математическое отличие этих моделей трещин.

2. Описан и изучен новый в теории дефектов механизм разрушения среды, отличающийся от механизма разрушения трещин Гриффитса.

3. Исследовано поведения трещин нового типа в задачах сейсмологии.

4. Исследовано поведение трещин нового типа в задачах инженерной практики – в задачах оценки прочностных свойств подшипников.

5. Исследовано поведение трещин нового типа в задачах инженерной геологии – в задачах анализа предоползневого состояния среды.

6. Исследовано поведение объектов при наличии трещин нового типа с разными характеристиками в задачах прочности и разрушения при наличии вибрации.

**Теоретическая и практическая значимость диссертации.** В теории прочности трещины нового типа могут возникать во всех случаях в изделиях и объектах из деформируемых материалов, где возникают дефекты.

В диссертации впервые комплексно изложены теоретические и прикладные аспекты теории и приложений трещин нового типа.

Рассмотрен ряд практических задач, связанных с ресурсами защищенности подшипников с дефектами в виде трещин нового типа и в предоползневых образованиях, удерживаемых от растекания саркофагом с дефектом.

Выявлен новый тип предвестника землетрясения, который может проявиться в случае трещины с достаточно удаленными берегами.

**Полнота изложения материала.** Представленные в диссертации материалы изложены с достаточной полнотой, доступной ученым, инженерам и аспирантам с механическим или математическим образованием, а также студентам старших курсов специальности 1.1.8.

**Методология и методы исследования.** В процессе исследования применены математические методы высокого уровня, метод блочного элемента, внешняя алгебра, факторизационные методы, интегральные уравнения и контактные задачи, специально модифицированные для исследования трещин нового типа.

#### **Положения, выносимые на защиту**

1) построенные модели трещин нового типа и их сопоставление с трещинами Гриффитса.

2) результаты исследования прочностных свойств подшипников при наличии дефектов в виде трещин нового типа и некоторые способы тестирования их появления.



3) результаты исследования состояния предползневой структуры, имеющей покрывающий саркофаг с дефектом в виде трещины нового типа.

4) результаты исследования существования возможного предвестника землетрясения в разломе-трещине с удаленными берегами.

**Достоверность и обоснованность результатов диссертации** следует из применения в процессе исследования строго обоснованных математических методов: метода блочного элемента, теории контактных задач, факторизационных методов, а также наличия практических примеров, подтверждающих справедливость теории.

**Ценность научных работ** определяется тем, что после незначительной адаптации результаты могут применяться для исследования процессов и явлений как природных, так и техногенных систем, в проблеме оценки сейсмичности для выявления предвестников землетрясений, в инженерной практике для обеспечения надежности технических объектов и т.п.

**Апробация и реализация результатов диссертации.** Основные результаты исследований, выполненные по теме диссертации, были представлены в период 2017 г. по 2024 г. на 16 международных и всероссийских конференциях. В их числе: Международная научная конференция «Марчуковские научные чтения-2017» (г. Новосибирск, 2017 г.); Международные конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС) (республика Крым, г. Алушта, 2017, 2019, 2020, 2021 гг.; Краснодарский край, пос. Дивноморский, 2023 г.); Международные конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (республика Крым, г. Алушта, 2018 г.; г. Москва, 2020, 2022 гг.); Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (г. Москва, 2018–2024 гг.); на XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (г. Санкт-Петербург, 2023 г.).

Отдельные результаты диссертации были получены в ходе выполнения работ в качестве исполнителя в следующих проектах: инициативные гранты РФФИ № 17-08-00323\_a «Исследование влияния множественности полостей в

материалах и горных выработках на прочностные свойства конструкций» (рук. Евдокимова О.В., 2017–2019 гг.), № 18-08-00465\_а «Исследование нового механизма разрушения материалов, дополняющего подход Гриффица–Ирвина» (рук. Бабешко О.М., 2018–2020 гг.); региональные гранты РФФИ и администрации Краснодарского края № 19-41-230004 р\_юг «Метод блочного элемента в блочных структурах оползневых процессов» (рук. Бабешко В.А., 2019–2020 гг.), № 19-41-230003 р\_юг «Исследование механизмов возбуждения цунами стартовыми землетрясениями» (рук. Евдокимова О.В., 2019–2020 гг.); грант РФФИ № 22-21-00129 «Разработка теории контактных задач с деформируемыми штампами на основе метода блочного элемента» (рук. Евдокимова О.В., 2022–2023 гг.).

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа общим объемом 121 страница имеет следующую структуру: введение, три главы, заключение и список литературы, включающий 95 источников, список публикаций диссертанта. Работа содержит 26 рисунков.

**В первой главе в параграфе 1.1** кратко изложена история обнаружения трещин нового типа как дополнений к трещинам Гриффитса. Дается краткое изложение метода блочного элемента. Приводится строгий математический вывод решения граничной задачи о сближении литосферных плит, моделируемых пластинами Кирхгофа, и описание разломов как трещин нового типа;

**в параграфе 1.2** приводится строгий математический вывод уравнений о сближении литосферных плит, моделируемых уравнениями Ламе, в антиплоской постановке.

**Во второй главе в параграфе 2.1** излагается исследование поведения подшипниковой пары, состоящей из деформируемого цилиндрического подшипника и деформируемого основания. Предполагается, что основание имеет защитное покрытие, и это покрытие приобрело дефект в виде трещины нового типа, вертикально расположенной к поверхности покрытия.

Для упрощения постановки задачи, поскольку исследование касается только локальной зоны расположения трещины, задача рассматривается для случая

отображения цилиндрического основания на слой, содержащий защитное покрытие с дефектом. Поскольку воздействие осуществляется напряжениями, описываемыми трехмерными векторами, задача рассматривается в пространственном варианте. Покрытие описывается пластинами Кирхгофа.

Методом блочного элемента проблема сводится к исследованию системы функциональных уравнений. Следует заметить, что рассматриваемая задача по своей постановке близка к граничной задаче о субдукционных процессах, возникающих при проникновении морских литосферных плит под континентальные;

**в параграфе 2.2** задача для подшипниковой пары сводится к функциональным уравнениям методом блочного элемента в предположении, что подшипник смазываемый. Это вызывает дополнительное вертикальное воздействие, но понижает горизонтальное. Дается исследование решения рассматриваемой задачи в этой постановке.

**В третьей главе параграфе 3.1** рассматривается задача о состоянии объекта, представляющего текучую массу, удерживаемую от растекания саркофагом, представляющим деформируемую оболочку. Изучается вопрос для случая, когда оболочка саркофага приобрела дефект в виде трещины нового типа. Выявляются условия безопасного и критического состояния такой блочной структуры. Задача сведена к анализу одномерного интегрального уравнения с разностным ядром.

Исследуется вопрос влияния скрытых дефектов, описываемых трещинами нового типа. Рассматриваются в неограниченном плоском покрытии дефекты неограниченного, полуограниченного и конечной протяженности. Проблема сводится к исследованию одномерного интегрального уравнения, с помощью которого можно получить требуемые результаты по состоянию пластины с дефектами;

**в параграфе 3.2** рассматривается задача о гармоническом во времени поведении двух деформируемых полубесконечных штампов, лежащих на деформируемом основании. Предполагается, что штампы сближаются

параллельными торцами таким образом, что формируют трещину, как с удаленными берегами, так и со сближающимися. Деформируемый материал штампов имеет простую реологию, описываемую уравнением Гельмгольца. Для рассмотрения случаев деформируемых штампов сложных реологий можно применять созданный новый универсальный метод моделирования. Он позволяет решения векторных граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих материалы сложных реологий, представлять разложенными по решениям отдельных скалярных граничных задач. Строится высокоточное решение граничной задачи, позволяющее получить дисперсионное уравнение, описывающее резонансные частоты. Существование резонансных частот для деформируемых штампов было предсказано в работах И.И. Воровича. Этот результат может выступать в качестве теста трещины с удаленными берегами.

**Личный вклад соискателя.** Основные научные результаты диссертационного исследования содержатся в работах из списка публикаций диссертанта [2, 4, 6, 10–13, 15, 16, 18] и получены автором совместно с В.А. Бабешко. Постановку задачи и общее руководство исследованием осуществлял В.А. Бабешко.

**Публикации по теме диссертации.** Результаты исследований соискателя достаточно полно изложены в 46 научных публикациях, в том числе в 22 научных статьях в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученых степеней; из них 9 статей в изданиях, индексируемых в библиографических и реферативных базах данных RSCI, Web of Science и Scopus.

**Благодарности.** Диссертант благодарит научного руководителя за интересные поставленные задачи и идеи по подходам к их решению, а также за совместную работу в исследованиях.

## 1 О ТЕОРИИ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА

### 1.1 Стартовые землетрясения, вызываемые вертикальными воздействиями на литосферные плиты, и свойства разломов как трещин нового типа

Важную роль в теории прочности и разрушения материалов и конструкций, а также в областях электроники, радиофизики, экологии, геофизики играют такие механические объекты, как трещины. Они встречаются в практике с давних времен. Однако систематизация этих механических объектов началась с 1920 г., когда английский ученый Алан Арнольд Гриффитс (1893–1963) опубликовал свою статью [1]. Он ввел понятие энергии трещинообразования, под которой понимал мгновенно возникающий в среде объект типа полости.

Происходит релаксация напряжений и объект, релаксирующий напряжения, сам может разрушаться в связи с концентрацией напряжений в вершинах трещины. Были введены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины, превышение которых должно приводить к разрушению материала. Однако теоретические и экспериментальные результаты сильно отличались. На практике разрушение происходило раньше теоретического прогноза. Гриффитс объяснял это тем, что экспериментальные трещины содержат еще и не поддающиеся учету микротрещины. Модель его трещины он представлял как эллиптическую полость в пластине, сжимаемую с боков до тех пор, пока боковые стороны не сблизятся (см. рисунок 1).

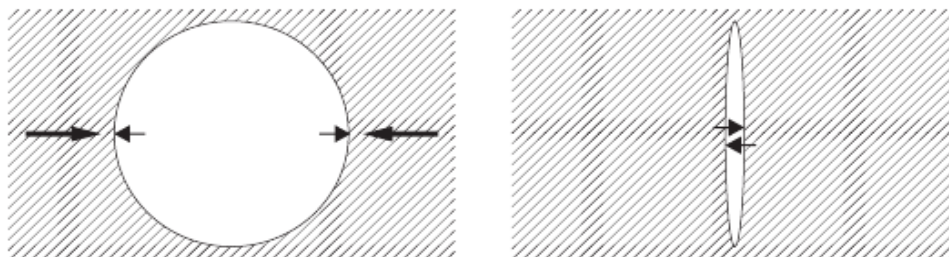


Рисунок 1 – Модель образования трещин Гриффитса

В результате получалась узкая полость, имеющая гладкую границу и разрушающая материал в своих вершинах. Более ста лет модель трещин Гриффитса оставалась одним из главных объектов, описывающих разрушение хрупких тел. Ее жизнеспособность объясняется как средством описания физического процесса, так и возможностью формулировать представление трещин Гриффитса математически, с помощью интегральных уравнений.

Однако в ряде приложений трещины Гриффитса так и не смогли утвердиться. Речь идет о сейсмологии. Попытки описания процессов разрушения разломов литосферных плит моделями трещин Гриффитса, предпринимаемые профессором Гарвардского университета Джоном Райсом, профессорами Норд-Вестерн университета Джейм Ахенбахом, Леоном Киром, а также учеными других стран, не принесли успеха.

**В данной главе** изложена причина, по которой без предварительной подготовки прямые численные методы оказываются несостоятельными в решении поставленных целей диссертации, построении трещин нового типа, и обоснована необходимость и актуальность предварительных фундаментальных исследований проблемы. Кратко излагается роль ученых, работы которых, указали вектор направления исследования, выполненного в работе. Кратко излагается новый математический аппарат исследования, метод блочного элемента, в совершенствовании и применении которого принимал участие диссертант.

Демонстрируется применение нового математического аппарата, метода блочного элемента на упрощенной задаче сейсмологии для контактной задачи с деформируемыми штампами.

Демонстрируются практические примеры, подтверждающие эквивалентность теоретических расчетов исследований и реальных подвижек поверхности Земли в зонах эпицентров землетрясений.

1. Причина, приведшая к необходимости поиска новых методов исследования в сейсмологии, которые касаются также и некоторых направлений в других науках, состоит в том, что сейсмологи, использовавшие численные

методы, моделировали сближение литосферных плит и обнаруживали рост напряжений в зоне их сближения (см. рисунок 2).

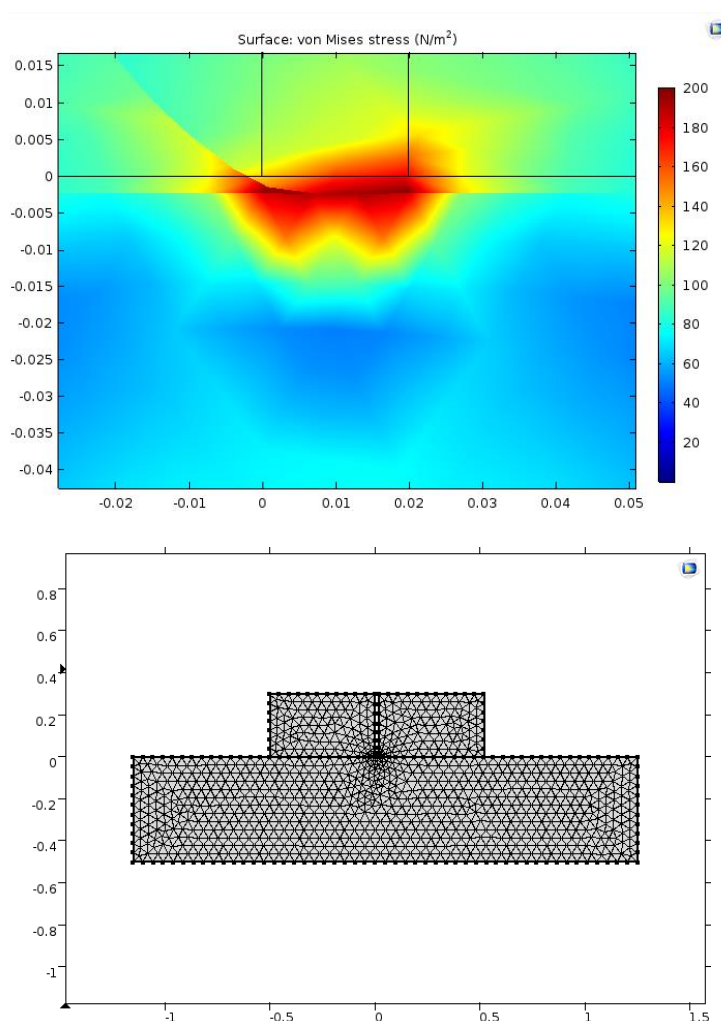


Рисунок 2 – Нарастание концентрации контактных напряжений под сближающимися торцами литосферными плитами. Численный расчет

Было видно, что при сближении литосферных плит происходит рост контактных напряжений, но насколько значительно они растут, никто не интересовался, поскольку компьютеры зависали. Существовало мнение, что землетрясения возникают в коре Земли после того, как литосферные плиты, сблизившись, начнут взаимным воздействием деформировать и разрушать их, вызывая коровое землетрясение.

Это мнение опровергли ученые КубГУ и ЮНЦ РАН, опубликовав в 2016 г. работы, в которых представили выявленный ими механический объект – трещины нового типа (см. рисунок 3).

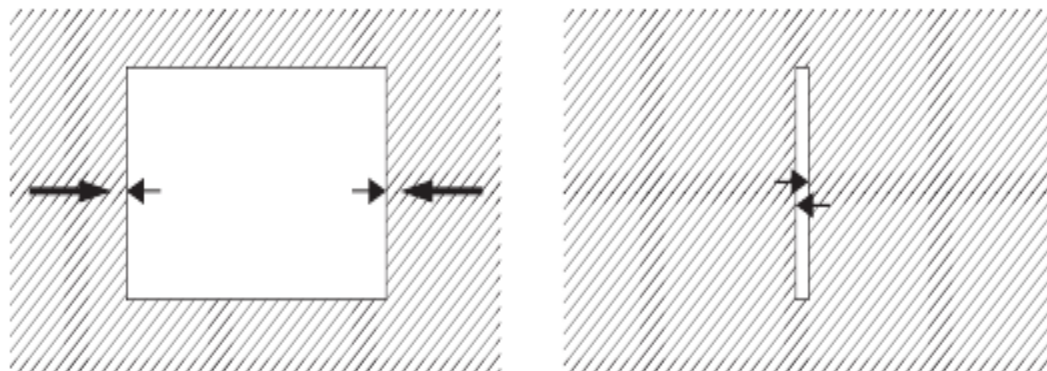


Рисунок 3 – Модель образования трещин нового типа

Трещины нового типа стали результатом применения методов механики для прогноза землетрясений, к чему призывал директор института физики Земли РАН СССР академик Г.А. Гамбурцев: «Изыскание методов прогноза времени землетрясений следует направить в первую очередь в сторону поиска механических предвестников землетрясений. Такие поиски могут быть успешными только в том случае, если они будут основываться на глубоком изучении всех деталей механизма быстрых и медленных движений блоков земной коры сейсмоактивных районов». Преемник Г.А. Гамбурцева академик М.А. Садовский высказал утверждение о невозможности прогноза землетрясений, основываясь лишь на слоистом строении коры Земли, необходимо учитывать и реально существующие блочные модели. Именно эти рекомендации положены в основу разработанного в Кубанском госуниверситете и Южном научном центре РАН нового подхода, включающего два главных момента в исследовании сейсмичности:

1) предложен метод решения контактных задач с деформируемыми штампами, имитирующими гранитные литосферные плиты, движущиеся по границе Конрада по базальтовому основанию.



2) разработан метод блочного элемента, позволяющий точно, без погрешностей, в отличие от других подходов, решать граничные задачи для дифференциальных уравнений в блочных структурах.

Как показали дальнейшие исследования, прозорливость великих ученых полностью подтвердилась. Ученые КубГУ и ЮНЦ РАН, создав в 2009 г. метод блочного элемента и решив точно контактные задачи с деформируемым штампом, доказали следующее: до того, как литосферные плиты дистанцированы, концентрации контактных напряжений на краях такие же, как и в случае жестких штампов (см. рисунок 4).

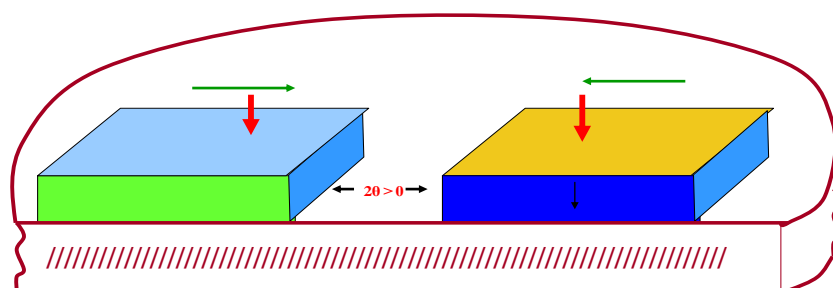


Рисунок 4 – До сближения литосферных плит землетрясения нет

Когда расстояние между штампами исчезает, но плиты не взаимодействуют между собой, концентрация контактных напряжений в зоне сближения становится сингулярной, вызывая разрушения как основания, так и углов плит. Это вызывает новый тип землетрясений, ранее не описанных и названных стартовыми, поскольку происходят до коровых землетрясений (см. рисунок 5).

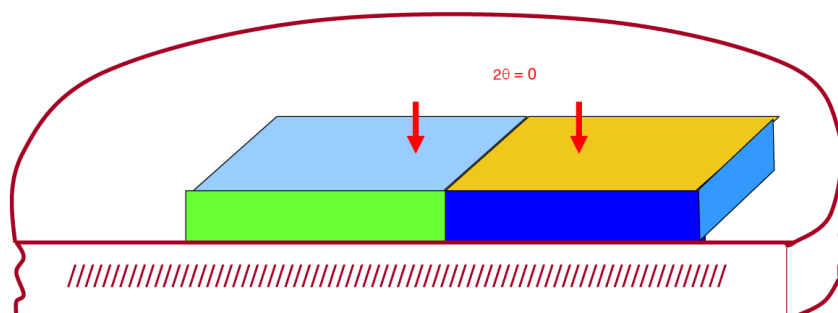


Рисунок 5 – При сближении, литосферных плит возникает стартовое землетрясение

Таким образом, по характеру приближений берегов тектонических разломов можно прогнозировать место, а зная скорость движения – время, и возможную магнитуду события.

Оказалось возможным по значениям разных типов концентраций контактных напряжений теоретически рассчитывать поведение поверхности Земли в зонах эпицентров по формуле

$$\int_{-a}^a k(x-\xi)g(\xi)d\xi = f(x), \quad |x| \leq a, \quad |a| \leq \infty.$$

Слева вносим напряжение  $g(\xi)$ , вычисляем подвижку поверхности  $f(x)$ , а затем находим примеры реальных землетрясений.

Каждому типу концентраций соответствуют примеры, приведенные ниже на рисунках 6а, 7а, 8а; модели подвижек поверхности Земли на рисунках 6б, 7б, 8б; реальные подвижки поверхности Земли в эпицентре землетрясения демонстрируют рисунки 6в, 6г, 7в, 8в.

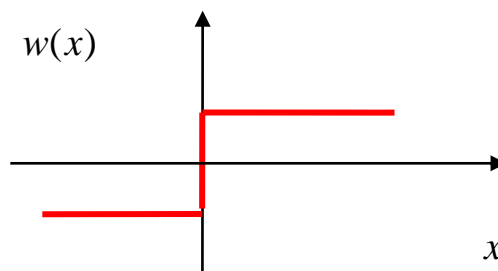
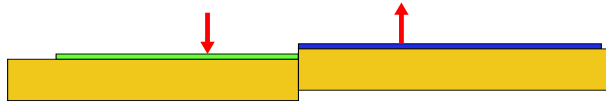


Рисунок 6а – Теоретический расчет. Поведение поверхности слоя  $w(x)$  при действии сингулярных контактных напряжений  $q(x) = x^{-1}$



$$g_{3\lambda}(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1}$$

Рисунок 6б – Модель подвижки поверхности при действии контактных напряжений  $\sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1}$

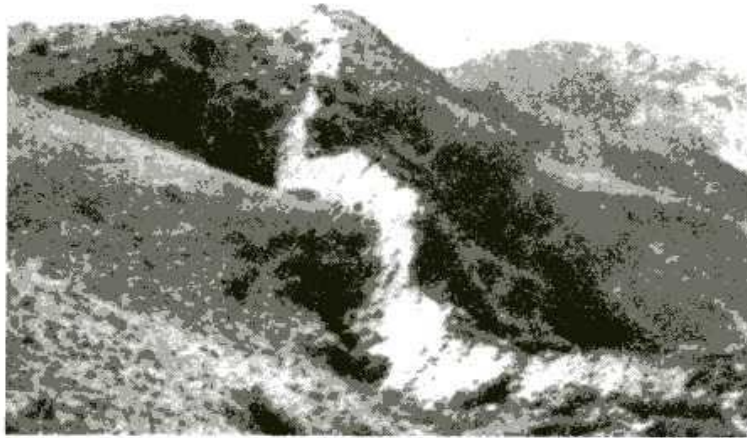


Рисунок 6в – Реальное событие. Вертикальный сброс. Уступ вдоль разлома в Квикесе (Перуанские Анды), образовавшийся во время Анкашского землетрясения 1946 г.



Рисунок 6г – Уступ разлома в зоне максимального взброса на участке между Спитаком и селом Гехасар 07.12.1988 г.

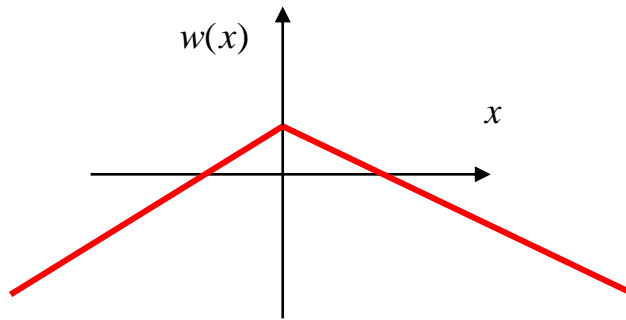
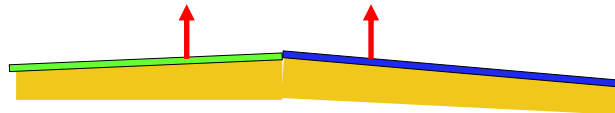


Рисунок 7а – Теоретический расчет. Поведение поверхности слоя  $w(x)$  при действии логарифмических контактных напряжений  $q(x) = C \ln|\varepsilon x|$



$$g_{3\lambda}(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2) \ln|x_2|$$

Рисунок 7б – Модель подвижки поверхности при действии контактных напряжений



Рисунок 7в – Реальное событие. Трещина, вспоровшая земную поверхность при землетрясении в Кум-Даге (Туркмения) 1983 г.

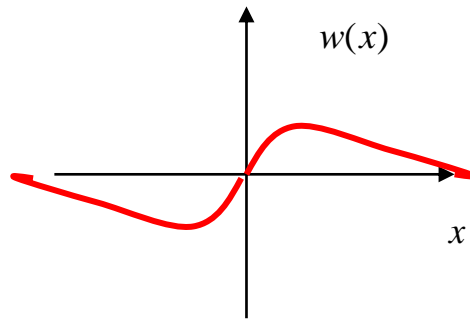


Рисунок 8а – Теоретический расчет. Поведение поверхности слоя  $w(x)$  при действии разнонаправленных ступенчатых контактных напряжений  $q(x) = \text{sgn } x$



$$g_{3a}(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_{4a}(x_1, x_2) \text{sgn } x_2$$

Рисунок 8б – Модель подвижки поверхности при действии контактных напряжений  $\sigma_{4r}(x_1, x_2) \text{sgn } x_2$

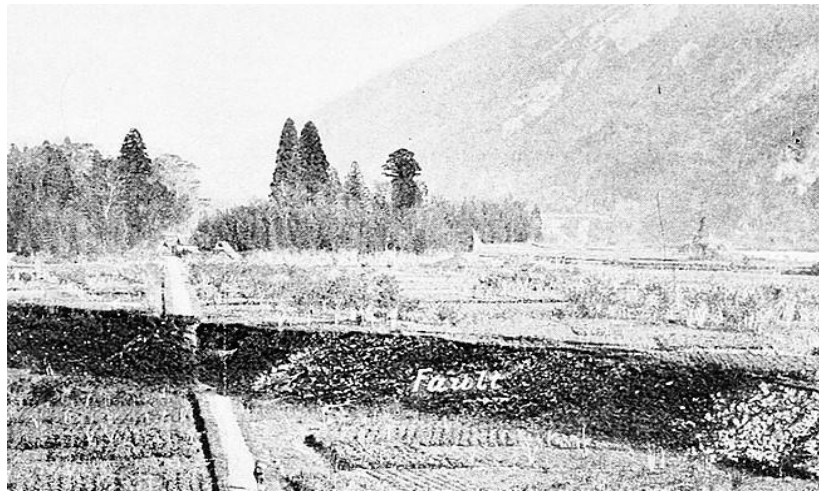


Рисунок 8в – Реальное событие. Сброс, образовавшийся 20 октября 1891г. в Центральной Японии при землетрясении в Мини-Овари

Трещины нового типа представляют собой разломы, формируемые несблизившимися торцами литосферных плит (см. рисунок 9).

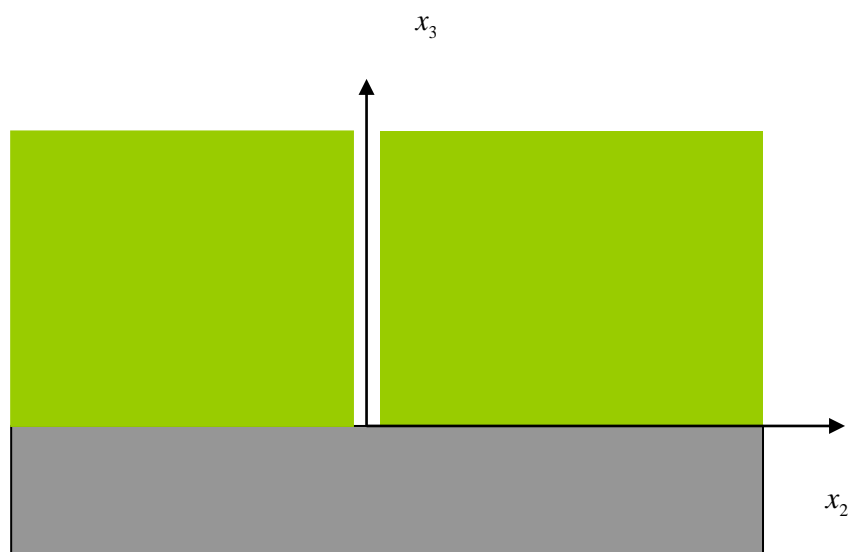


Рисунок 9 – Антиплоская задача о трещине в трехмерной упругой среде

Разрушение среды трещиной нового типа происходит в связи с сингулярной концентрацией контактных напряжений на краях разлома с углами (см. рисунок 9а).

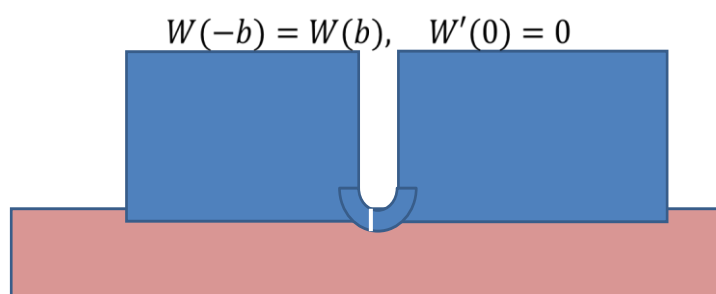


Рисунок 9а – Модель, имеющая только гладкие границы

Одна из моделей разрушения среды трещиной Гриффитса, имеющей только гладкие границы (см. рисунок 9а), происходит в два этапа. Вначале разрывается сплошность границы, имеющей поверхностное натяжение металлов. Образуется трещина нового типа, которая затем разрушается. В результате теоретическое

разрушение трещин Гриффитса оказывается поздним и более приближенным к эксперименту.

В связи с проблемами оценки сейсмичности в регионе ученые Кубанского госуниверситета, следуя рекомендациям директоров Института физики Земли АН СССР академиков Г.А. Гамбурцева и М.А. Садовского, призывавших для моделирования прогноза землетрясений применять механику с изучением быстрых и медленных подвижек литосферных плит и учитывать блочное строение коры Земли, начали эти исследования. Факторизационными методами удалось развить теорию блочных элементов, топологических объектов, требующих для своего описания математики высокого уровня. Их особенность – точное удовлетворение дифференциальным уравнениям граничных задач. Проблема сближения литосферных плит торцами, решаемая методом блочного элемента, позволила обнаружить новый механизм разрушения среды, который ранее оставался без внимания. Хотя численные методы показывали, что в зоне сближения литосферных плит нарастают контактные напряжения, но до применения метода блочного элемента никто не знал, что они являются сингулярными. Таким образом, среда будет разрушаться раньше, чем литосферные плиты начнут давить торцами одна на другую, только сблизившись.

Так был обнаружен новый тип землетрясений, ранее не описанных и названных стартовыми. Разломы, формируемые сблизившимися торцами литосферными плитами, формируют полость, названную трещиной нового типа, имеющую свою вершину и разрушающуюся иначе, чем трещина Гриффитса, способу. Если трещина Гриффитса разрушается вследствие разрыва гладкой границы, то трещина нового типа разрушается в результате сингулярной концентрации контактных напряжений в зоне сближения торцов. В отличие от формирования модели трещины Гриффитса с помощью сжатия с боков эллиптической полости в пластине, модель трещины нового типа формируется сжатием с боков прямоугольной полости до сближения сторон. Таким образом, граница трещины нового типа будет кусочно-гладкой, имеющей соседствующие угловые точки. Если трещина Гриффитса формируется как разрыв среды

концентрацией энергии хлопком, то трещина нового типа формируется возникающей конфигурацией блочных элементов, приводящей к разрушению среды описанным выше методом. Следовательно, основой моделей для возникновения трещин нового типа служат процессы возникновения полостей, моделируемых блочными элементами. Поскольку блочные элементы играют решающую роль в исследовании трещин нового типа, далее кратко изложим теорию метода блочного элемента.

### **Метод блочного элемента**

Причиной создания теории и метода блочного элемента [6], позволившего обнаружить трещины нового типа [5], послужило стремление получить более точные решения граничных задач в неклассических, особенно смешанных средах. Активно развиваемые и играющие огромную роль в самых разных областях численные методы, сеточные, конечного элемента, граничного элемента и другие, априорно обладают некоторыми недостатками. Один из них состоит в замене производных от функций конечными разностями. Второй – большая сложность эффективного решения граничных задач в неограниченных областях. В работах [3, 4] развиты и усовершенствованы теория и методы решения граничных задач этим подходом.

При создании теории блочного элемента потребовались математические методы высокого уровня – топологии, внешней алгебры, теории функций многих комплексных переменных, факторизации матриц-функций. Выполнение всех операций при использовании метода блочного элемента к граничным задачам требует выполнения определенных, иногда технически громоздких действий. Как правило, окончательные результаты вносят полную ясность в исследуемую проблему. Далее на примере граничной задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, представлена схема применения метода блочного элемента в выпуклой трехмерной области. В выпуклой трехмерной области  $\Omega$  рассматривается граничная задача вида [6]



$$K(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P A_{spmnk} \varphi_{p, x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = 0,$$

$$A_{spmnk} = \text{const}, \quad \varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_P\}, \quad s = 1, 2, \dots, P,$$

$$\varphi = \{\varphi_s\}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{K_1} \sum_{p=1}^P B_{spmnk} \varphi_{p, x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = f_s,$$

$$s = 1, 2, \dots, s_0 < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K,$$

$$\|\varphi\|_s^2 = \sum \|\varphi_r\|_s^2, \quad \|\varphi_r\|_s^2 = \iint \int_{-\infty}^{\infty} |F\varphi_r|^2 (1 + |\alpha|)^{2s} d\alpha, \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

$$F\varphi_r = \int_{-\infty}^{\infty} \iint \varphi_r(x) e^{i\langle \alpha, x \rangle} dx, \quad \varphi_r = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \iint F\varphi_r e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha.$$

Дифференциальные уравнения преобразованием Фурье сводятся к функциональному уравнению

$$\Phi_n(\alpha) = \iiint_{\Omega} \varphi_n(x) e^{i\langle \alpha, x \rangle} d\mathbf{x} \equiv F\varphi_n, \quad \Phi_m = F\varphi_m,$$

$$\mathbf{K}(\alpha)\Phi = \iint_{\partial\Omega} \omega, \quad \mathbf{K}(\alpha) \equiv -\mathbf{K}(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \|k_{nm}(\alpha)\|.$$

Построение в функциональном уравнении внешних форм

$$\omega = \{\omega_s\}, \quad s = 1, 2, \dots, P,$$

$$\begin{aligned}
\omega_s &= P_{12s} dx_1 \wedge dx_2 + P_{13s} dx_1 \wedge dx_3 + P_{23s} dx_2 \wedge dx_3; \\
dx_1 \wedge dx_2 &= dx_1^1 dx_2^2 - dx_1^2 dx_2^1; \\
dx_1 \wedge dx_3 &= dx_1^1 dx_3^3 - dx_1^3 dx_3^1; \\
dx_2 \wedge dx_3 &= dx_2^2 dx_3^3 - dx_2^3 dx_3^2; \\
x_1 &= \{x_1^1, x_1^2, x_1^3\}; \\
x_2 &= \{x_2^1, x_2^2, x_2^3\}.
\end{aligned}$$

Компоненты внешних форм, показаны первого члена справа

$$P_{12s} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P A_{spmnk} (-i\alpha_1)^m (-i\alpha_2)^n \sum_{p_3=1}^k (-i\alpha_3)^{p_3-1} \varphi_{p_3}^{(k-p_3)} e^{i\langle \alpha x \rangle}.$$

Внесение в представление внешних форм значений решения и его производных, взятых из граничных условий. Факторизация коэффициента матрицы-функции функционального уравнения

$$\mathbf{K}(\alpha_3^v) = \mathbf{K}(\alpha_3^v, +) \mathbf{K}(\alpha_3^v, -) \mathbf{K}_r(\alpha_3^v),$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \|\| K_{km}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \|\| \equiv \left\| \begin{array}{cccc} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{array} \right\|,$$

$$k, m = 1, 2, \dots, N.$$

Факторизация коэффициента матрицы-функции функционального уравнения

$$\mathbf{K}_-(\alpha_n) \equiv \mathbf{P}_m^{-1} = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & -R_{1m} \Phi_{m-}(\alpha_n) & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 \\ & & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_{m-}(\alpha_n) & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -R_{Nm} \Phi_{m-}(\alpha_n) & & 1 \end{array} \right\|,$$

$$\mathbf{K}_+(\alpha_n) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{P}_m \equiv \left\| \begin{array}{cccccc} K_{11} & K_{12} & \dots & \sum_{p=1}^N K_{1p} R_{pm} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & & \sum_{p=1}^N K_{2p} R_{pm} & & K_{2N} \\ & & \dots & \dots & & \dots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & \sum_{p=1}^N K_{mp} R_{pm} & \dots & K_{mN} \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & \sum_{p=1}^N K_{Np} R_{pm} & & K_{NN} \end{array} \right\|,$$

$$R_{pm}(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^N \frac{D_{ps}(m, u_n) K_{sm}(u_n) du_n}{D_m(u_n) \Phi_{m-}(u_n) (u_n - \alpha_n)},$$

$$p = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, N,$$

$$R_{mm}(\alpha_n) = \Phi_{m-}^{-1}(\alpha_n), \quad \alpha_n \in \lambda_-,$$

$$\Phi_{p\pm}(\alpha_n) = \gamma_p(\alpha_n) \prod_{s=1}^{S_p} \left( 1 - \frac{\alpha_n}{z_{sp}^{\mp}} \right) e^{\frac{\alpha_n}{z_{sp}^{\mp}}}, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad S_p \leq \infty.$$

Определение из функционального уравнения общего представления решения

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\alpha)\Phi &= \iint_{\partial\Omega} \omega, \\ \mathbf{K}(\alpha_3^v, +)\mathbf{K}(\alpha_3^v, -)\mathbf{K}_r(\alpha_3^v)\Phi &= \iint_{\partial\Omega} \omega, \\ \Phi &= \mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v)\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v, -)\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v, +)\iint_{\partial\Omega} \omega.\end{aligned}$$

Применим обращения Фурье для нахождения решения

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \iint \Phi(\alpha) e^{-i\langle \alpha x \rangle} d\alpha, \\ \varphi(x^v) &= \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_r^{-1}(\alpha_3^v)\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v, -)\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^v, +)\iint_{\partial\Omega} \omega e^{-i\langle \alpha_3^v, x_3^v \rangle} d\alpha_1^v d\alpha_2^v d\alpha_3^v.\end{aligned}$$

**Автоморфизм многообразия.** Для обращения вектора решения в ноль вне области задания граничной задачи, т.е. вне носителя, строится система псевдодифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\lim(\alpha_n^v - z_{n-}^v)\mathbf{K}^{-1}(\alpha_n^v, +)\iint_{\partial\Omega} \omega &= 0, \\ \alpha_n^v &\rightarrow z_{n-}^v, \\ \sum_{n=1}^N S_{mn}^0(\alpha_1^v, \alpha_2^v, \alpha_{3\tau}^{v-})\iint_{\partial\Omega} \sum_{\sigma} [\varepsilon_{\sigma} \omega_n^{-}(\alpha_1^v, \alpha_2^v, \alpha_{3\tau}^{v-})] &= 0.\end{aligned}$$

Решение системы псевдодифференциальных уравнений

$$\mathbf{g} + \mathbf{Lg} = \mathbf{B}_1 \mathbf{f}.$$

Представление решения краевой задачи для выпуклой области

$$\begin{aligned}
\varphi(x^\nu) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu)} \left[ K_r^{-1} \left( i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) \Gamma_+ (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu) \mathbf{K}^{-1} (z_{s+}^\nu, +) \mathbf{e}^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu} - \right. \\
&\quad \left. - K_r^{-1} \left( i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) \mathbf{K}^{-1} (z_{s-}^\nu, -) \Gamma_- (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s-}^\nu) \mathbf{e}^{-iz_{s-}^\nu x_3^\nu} \right] d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu, \\
\left[ \iint \omega \right] &= L_+ + L_-, L_\pm (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu) e^{-i\alpha_3^\nu x_3^\nu} \rightarrow 0, \quad \text{Im } \alpha_3^\nu \rightarrow \pm\infty, \\
\mathbf{T}_\pm (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s\pm}^\nu) &= 2\pi i \lim \mathbf{K}^{-1} (\alpha_3^\nu, \mp) L_\pm (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu) (\alpha_3^\nu - z_{s\pm}^\nu).
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned}
z_{s+}^\nu, \quad \text{Im } z_{s+}^\nu > 0, \quad z_{s-}^\nu, \quad \text{Im } z_{s-}^\nu < 0, \quad s\pm = 1, 2, \dots, G_\pm, \\
\mathbf{K}(\alpha_3^\nu) &= \mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -) \mathbf{K}_r(\alpha_3^\nu), \quad K(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu), \\
S_{mp}(\alpha_3^\nu) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\mp} \sum_{s=1}^N \frac{Q_{ps}(u_3) M_{sm}(u_3) du_3}{Q(u_3) K(u_3) (u_3 - \alpha_3^\nu)} - \left( \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \right) \frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)}, \\
m &\neq p, \\
\frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)} &= \frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q(\alpha_3^\nu) K(\alpha_3^\nu)} + \sum_n \frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q'(\xi_n^\nu) K(\xi_n^\nu) (\xi_n^\nu - \alpha_3^\nu)}, \\
S_{mm}(\alpha_3^\nu) &= K^{-1}(\alpha_3^\nu), \quad \alpha_3^\nu \in \lambda_\mp, \\
Z_{mp}(\alpha_3^\nu) &= \sum_{s=1}^N Q_{ps}(\alpha_3^\nu) M_{sm}(\alpha_3^\nu),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -) = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} & \cdots & S_{mN} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{array} \right\|.$$

**Стартовые землетрясения и свойства разломов  
как трещин нового типа**

В случае наличия вертикальных воздействий на литосферные плиты (см. рисунок 4) уравнение Кирхгофа для фрагментов  $b$  покрытия,  $b = \lambda, r$ , занимающих области  $\Omega_b$  с границами  $\partial\Omega_b$ , при вертикальных статических воздействиях напряжением  $t_{3b}$  сверху и  $g_{3b}$  снизу имеет вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b} \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1} \left( \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3},$$

$$Q_b = -D_{b2} \left( \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H \partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H}{\mu}.$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся плиты, имеет вид

$$u_{3m}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \sum_{n=1}^2 \iint_{\Omega_n} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) g_{3n}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad x_1, x_2 \in \Omega_m, \quad m = \lambda, r, \theta,$$

$$\Omega_\lambda (|x_1| \leq \infty; \quad x_2 \leq -\theta), \quad \Omega_r (|x_1| \leq \infty; \quad \theta \leq x_2), \quad \Omega_\theta (|x_1| \leq \infty; \quad -\theta \leq x_2 \leq \theta), \quad n = \lambda, r.$$

Здесь  $M_b$  и  $Q_b$  – изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат  $x_1 o x_2$ ;  $h_b$  – толщины пластин;  $H$  – размерный параметр подложки, например, толщина слоя;  $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$  – двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Обозначения заимствованы из работ [3, 4]. Функциональные уравнения граничной задачи можно представить в виде

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} = - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (1.1)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}), \quad b = \lambda, r.$$

Здесь  $\omega_b$  – участвующие в представлении внешние формы, имеющие вид

$$\omega_b = e^{i(\alpha, x)} \left\{ - \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right] dx_1 + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \right\}, \quad b = \lambda, r.$$

Вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи с учетом принятых обозначений можем представить для пластин  $b = \lambda, r$  в виде

$$X^+ - \left\{ -\frac{M_1^+}{M_2^-} Y^- e^{-i2\alpha_2\theta} \right\}^+ = \left\{ \frac{1}{M_2^-} \Phi e^{-i\alpha_2\theta} \right\}^+,$$

$$Y^- + \left\{ \frac{M_2^-}{M_1^+} X^+ e^{i2\alpha_2\theta} \right\}^- = \left\{ \frac{1}{M_1^+} \Phi e^{i\alpha_2\theta} \right\}^-,$$

$$M_1 = M_1^+ M_1^-, \quad M_2 = M_2^+ M_2^-,$$

$$M_2^+ G^+ = X^+, \quad M_1^- G^- = Y^-.$$

Для случая  $\theta > 0$  контактные напряжения, определенные методом Винера–Хопфа, имеют вид

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &= \sigma_{1\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 < -\theta, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &= \sigma_{1r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 > \theta, \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{1b}(x_1, x_2)$ ,  $b = \lambda, r$  непрерывные по обеим координатам функции для достаточно гладких  $t_{3b}$ ,  $b = \lambda, r$  [3,4].

Обращение второго уравнения при  $\theta = 0$  строится традиционным методом Винера–Хопфа [3, 4] и приводит при  $x_2 \rightarrow 0$  к следующим свойствам решений

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4\lambda}(x_1, x_2)\operatorname{sgn} x_2, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2r}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3r}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4r}(x_1, x_2)\operatorname{sgn} x_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функции  $\sigma_{nb}(x_1, x_2)$ ,  $b = \lambda, r$ ;  $n = 2, 3$  непрерывны по обоим параметрам.

Исходя из того, что соотношения (1.2) доказывают обнаружение нового типа землетрясения, дадим описание его закономерностей.

1. При  $\theta > 0$  плиты воздействуют на подложку как обычные штампы с прямыми у границ углами [3, 4] (см. рисунок 4). Если края обламываются, то особенности по краям исчезают. Это может вызывать слабое землетрясение.

2. Когда плиты сблизилась,  $\theta = 0$ , но не слились (см. рисунок 5), сохраняя заданные на торцах граничные условия, то возникают в зоне между ними особенности  $x_2^{-1}$  и  $\ln|x_2|$ ,  $\operatorname{sgn} x_2$ .

На основе анализа причин, вызывающих стартовые землетрясения и возникновение скрытых дефектов, был выявлен факт существования нового, ранее не описанного по своим прочностным свойствам разлома литосферных плит, имеющего форму трещины нового типа.



Таким образом, были обнаружены трещины нового типа при исследовании стартовых землетрясений. Оказалось, что эти трещины обладают ранее не описанными свойствами.

В плоских задачах теории упругости трещины Гриффитса характеризуются тем, что их границы являются гладкими (см. рисунок 1).

Новый тип трещин обладает кусочно-гладкой границей и представляет собой полость – трещину.

Обнаруженные трещины нового типа имеют кусочно-гладкую границу в форме прямоугольника (см. рисунок 3).

Показано, что в случае правильного выбора функциональных пространств при решении граничных задач для нового типа трещин, они действительно оказываются дополняющими трещины Гриффитса и вносят определенный вклад в теорию прочности и разрушения материалов.

При исследовании выяснилось, что трещины нового типа имеют иной механизм разрушения, чем трещины Гриффитса, и, тем самым дополняют его.

Выявлены различия в описании условий разрушения трещинами материалов. Для трещин Гриффитса разрушение определяется величиной коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины, в случае трещин нового типа разрушение происходит по причине роста концентраций напряжений, вплоть до сингулярных.

Построенная Гриффитсом теория трещин [1], в дальнейшем усовершенствованная Ирвиным [7], получила и продолжает получать развитие в ряде работ отечественных и зарубежных ученых [8–21]. Среди них следует отметить работу [8], в которой исследовалась физическая сторона проблемы трещин, а также работу [9], где представлена строгая математическая теория этих объектов, открывшая путь к многочисленным приложениям. В условиях оправданно кажущегося исчерпания теоретических проблем в теории трещин, при изучении скрытых дефектов в материалах и разломов литосферных плит в сейсмологии [3, 4] пришлось столкнуться с ситуацией, которая никак не вкладывалась в теорию трещин Гриффитса, хотя и казалась происходящей из нее.

Именно в граничных задачах, описывающих поведение скрытых дефектов в материалах с покрытиями, а также геофизические процессы в зоне разломов литосферных плит [3, 4], было выявлено возникновение сингулярных концентраций контактных напряжений при сближении плит, что приводит к стартовым землетрясениям (см рисунки 4, 5). То же относится и к скрытым дефектам. В этих граничных задачах изучалось напряженно-деформированное состояние блочной структуры, состоящей из трех блоков: двух двумерных, моделируемых полубесконечными пластинами Кирхгофа, которые без трения лежали на третьем, моделируемом трехмерным упругим слоем. Внешнее воздействие осуществлялось вертикальными усилиями, действующими на плиты, включающими и их вес [3, 4].

При вертикальных воздействиях на литосферные плиты концентрация контактных напряжений на поверхности упругого основания под краями каждой из сблизившихся плит была получена в виде (1.2) [3, 4].

Полученные концентрации контактных напряжений позволили теоретически вычислять сдвиги поверхности Земли для каждой из составляющих, входящих в формулу (1.2). Они продемонстрированы на рисунках 6а, 7а, 8а. Эти сдвиги представлены моделями подвижек поверхности Земли, данными на рисунках 6б, 7б, 8б. Рисунки 6в, 6г, 7в, 8в иллюстрируют последствия реально произошедших землетрясений. Из них можно заключить, что эти землетрясения имеют тип стартовых.

При расширении постановок граничных задач с целью охвата всех типов граничных условий, диктуемых различными типами внешних воздействий на блочные структуры, вновь было обнаружено устойчивое возникновение сингулярных концентраций напряжений в зонах контактов блочных элементов, в том числе и в касательных составляющих векторов контактных напряжений. Это дало повод для поиска единой причины, приводящей к описанным явлениям. Было высказано предположение, что причина состоит в специфике взаимодействия двумерного объекта – покрытия в форме пластины Кирхгофа с трехмерным основанием. Однако представленное далее рассмотрение задачи для

трехмерных покрытий, заменивших двумерные на трехмерном основании (см. рисунок 9), показало, что и в этом случае возникает сингулярная составляющая в контактных напряжениях в зоне взаимодействия сблизившихся, но не слипшихся блочных элементов. Объяснение этому феномену, приводящему к однотипным проявлениям свойств контактных напряжений, независимо от характера нагружения полностью сблизившихся, но не слипшихся блочных элементов, может быть дано, если предположить существование в зоне сблизившихся блочных элементов нового типа трещины. Ранее это не удавалось сделать в связи с отсутствием теории блочных структур и метода блочного элемента, с помощью которых удалось их обнаружить и проводить дальнейшие исследования.

Построение трещин Гриффитса с гладкой границей детально описано в [1] (см. рисунок 1, который взят из работ Гриффитса). Это достигается путем виртуального деформирования полости в форме эллипса или окружности до сближения противоположных границ полушарий фигур. В случае трещины нового типа рассматривается прямоугольная полость, боковые стороны которой сближаются (см. рисунок 3). Данный тип трещин, имеющих в плоской задаче вид полости в упругой среде в результате извлечения прямолинейного отрезка, ранее уже изучался [8]. Отмеченные трещины детально исследовались методом интеграла Сохоцкого в энергетических пространствах в работах [8, 9]. Было показано, что концентрация напряжений при приближении к вершинам трещин нарастает в зависимости от расстояния  $\delta$  до границы трещины в виде  $\delta^{-1/2}$ .

Введение названия «трещины нового типа» продиктовано необходимостью дистанцироваться от изучавшегося типа трещин той же геометрии в связи с тем, что последние исследуются в неэнергетических пространствах медленно растущих обобщенных функций, диктуемых спецификой корректно поставленных механических задач. Заметим, что построение неэнергетических собственных функций в области, имеющей полость с угловой точкой, детально исследовано Н.Ф. Морозовым в фундаментальной монографии [9]. Определенные требованием выбора иного функционального пространства новые трещины

получаются как предел последовательности полостей с негладкой границей, например, прямоугольных, при сближении боковых сторон (см. рисунок 2), для которых исследование осуществляется в энергетических пространствах, но предельное решение его покидает. Это означает формирование из полостей с негладкой границей уже полостей-трещин в виде прямолинейного отрезка, способных разрушить среду или изменить ее реологию в некоторой упругой зоне, содержащей неэнергетическую составляющую концентрации контактных напряжений.

### **О некоторых свойствах трещин нового типа**

Контактные напряжения под блочными элементами имеют степенную особенность. В случае отсутствия расстояния между берегами трещин контактные напряжения приобретают сингулярную особенность [3, 4].

Наличие сингулярности свидетельствует о разрушении блоков в зоне контакта берегов трещины или основания, или перехода среды в пластическое состояние. Эта составляющая исчезает, если параметры граничной задаче, включая и параметры внешних воздействий, такие, что коэффициент при сингулярной особенности в контактных напряжениях равен в (1.2) нулю. Известно, что механическая система с большей возможностью разрушения менее устойчива, нежели с меньшей, и стремится к последней. Поэтому при наличии сингулярной особенности в контактных напряжениях, трещина нового типа не устойчива, что приводит к разрушению зоны ее вершины, в итоге либо разрушается вся среда, либо при разрушении происходит ее трансформация в трещину без нулевого угла, то есть в трещину Гриффитса. В том же случае, если у трещины нового типа сингулярная составляющая отсутствует, то трещина нового типа становится устойчивой до тех пор, пока параметры среды или внешнего воздействия не приведут к возникновению сингулярной составляющей в среде в вершине трещины нового типа.

Трещины нового типа хорошо известны в строительстве, где употребляют термин «играющий фундамент», когда он треснул, так как возникает трещина

нового типа. В сейсмологии трещины нового типа вызывают стартовые землетрясения. Такие же процессы разрушения имеют место в материалах с треснувшими покрытиями, когда свойства материалов и внешние воздействия формируют в контактных напряжениях сингулярные особенности.

Для ответа на вопрос о возможном возникновении трещин Гриффитса только в случае контакта трехмерного основания с двумерными плитами был исследован случай антиплоской задачи для трехмерного уравнения Ламе, когда основание принято в виде слоя, а штампы – трехмерные квадранты с параллельными торцами.

## **1.2 О стартовом землетрясении в пространственном варианте**

В параграфе изучается контактная задача о поведении двух полубесконечных трехмерных литосферных плит в условиях вибрации, находящихся на деформируемом основании в виде деформируемого слоя (см. рисунок 9). Предполагается, что у плит параллельные вертикальные границы и на слое они имеют два положения: когда между торцами присутствует некоторое расстояние, и когда его нет. Контактным задачам посвящено большое число публикаций в отечественной и зарубежной литературе [22–45]. Однако контактные задачи с деформируемым штампом исследовались лишь численными методами в ограниченном числе работ [38].

Исследуется антиплоская граничная задача в предположении, что на торцы литосферных плит действуют гармонические во времени с некоторой одинаковой частотой напряжения, параллельные одной из осей координат. Граничная задача, сформулированная для трехблочной структуры, исследуется методом блочного элемента, алгоритм которого требует выполнения для блочной структуры операций внешней формы, внешнего анализа и построения фактор-топологии. Задача сводится к исследованию функциональных уравнений, решения которых являются контактными напряжениями. Исследованы концентрации контактных

напряжений, свидетельствующие о возможности возникновения стартового землетрясения при сблизившихся литосферных плитах.

В работах [44, 45] рассматривалась блочная структура, состоящая из трех блоков – основания, моделированного пространственными уравнениями теории упругости, и литосферных плит, моделируемых трехмерными деформируемыми объектами. В качестве основания принималось деформируемое полупространство. В настоящей работе в этой же постановке рассматривается случай моделирования основания трехмерным деформируемым слоем, более точно отражающим реальное строение коры Земли. Следует отметить, что существует много различных подходов исследования граничных задач о поведении сложных деформируемых конструкций как блочных структур [22–45], в том числе топологическими методами [46–52]. Однако подход, представленный в работах [44, 45] является, по-видимому, первым, перенесенным на трехмерные области.

**Метод исследования.** Исследуем на примере антиплоской граничной задачи теории упругости, в которой все три блока описываются пространственными уравнениями теории упругости, влияния трехмерности всех объектов блочной структуры на характер концентрации напряжений в зоне сближения всех блоков.

Будем считать, что на поверхности основания находятся две литосферные плиты, описываемые уравнениями линейной теории упругости. Для избегания появления кратных корней оператора граничной задачи, т. е. возникновения резонансов, считаем, что плиты гармонически колеблются по временному закону  $e^{-i\omega t}$  с очень малой частотой вдоль оси  $ox_1$ , направленной от наблюдателя перпендикулярно плоскости наблюдения, представляющего сечение основания и литосферных плит. Это всегда можно сделать, варьируя рядом параметров граничной задачи. В таком состоянии, не взаимодействуя друг с другом, блоки будут рассматриваться в двух позициях – удаленных на конечное расстояние и полностью сблизившихся. Задача будет антиплоской, если все перемещения,

напряжения и геометрия тел в сечении не зависят от координаты  $x_1$ . Тогда уравнения Ламе упрощаются. Обозначив через  $u_\lambda$ ,  $u_r$ ,  $u_h$  перемещения левой, правой литосферных плит и основания соответственно, определяющие уравнения граничной задачи для рассматриваемой трехблочной структуры можно записать в виде

$$\begin{aligned}
(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + \rho_\lambda \mu_\lambda^{-1} \partial_{tt}) u_\lambda(x_2, x_3, t) &= 0, \\
(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + \rho_r \mu_r^{-1} \partial_{tt}) u_r(x_2, x_3, t) &= 0, \\
(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + \rho_h \mu_h^{-1} \partial_{tt}) u_h(x_2, x_3, t) &= 0, \\
\sigma_{\lambda x_1 x_3} &= \mu_\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_3}, \quad \sigma_{r x_1 x_3} = \mu_r \frac{\partial u_r}{\partial x_3}, \quad \sigma_{\lambda x_1 x_2} = \mu_\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2}, \\
\sigma_{r x_1 x_2} &= \mu_r \frac{\partial u_r}{\partial x_2}, \quad \sigma_{h x_1 x_3} = \mu_h \frac{\partial u_h}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Отыскивая гармонические во времени решения нестационарных задач, при условии, что заданные граничные условия каждого блока содержат временной множитель  $e^{-i\omega t}$  и, применив этот множитель как к перемещениям (1.3), так и к напряжениям, приходим к граничным задачам в каждом блоке вида

$$\begin{aligned}
(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + p_\lambda^2) u_\lambda(x_2, x_3) &= 0, \quad \Omega_\lambda (|x_1| \leq \infty, \quad -\infty \leq x_2 \leq b_1, \quad 0 \leq x_3 \leq \infty), \\
(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + p_r^2) u_r(x_2, x_3) &= 0, \quad \Omega_r (|x_1| \leq \infty, \quad b_2 \leq x_2 \leq \infty), \\
(\partial_{x_2x_2} + \partial_{x_3x_3} + p_h^2) u_h(x_2, x_3) &= 0, \quad \Omega_h (|x_1| \leq \infty, \quad |x_2| \leq \infty, \quad -c \leq x_3 \leq 0), \\
p_\lambda^2 &= \rho_\lambda \omega^2 \mu_\lambda^{-1}, \quad p_r^2 = \rho_r \omega^2 \mu_r^{-1}, \quad p_h^2 = \rho_h \omega^2 \mu_h^{-1}.
\end{aligned}$$

Считаем, что на границах  $\partial\Omega_\lambda$ ,  $\partial\Omega_r$ ,  $\partial\Omega_h$  задаются напряжения в форме

$$\begin{aligned}
\sigma_{\lambda x_1 x_3} &= \mu_\lambda f_{\lambda 2}(x_2), \quad \sigma_{r x_1 x_3} = \mu_r f_{r 2}(x_2), \quad \sigma_{\lambda x_1 x_2} = \mu_\lambda f_{\lambda 1}(x_3), \\
\sigma_{r x_1 x_2} &= \mu_r f_{r 1}(x_3), \quad \sigma_{h x_1 x_3} = \mu_h f_{h 1}(x_2).
\end{aligned}$$

Тогда граничные условия для перемещений принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2} &= f_{\lambda 1}(x_3), \quad x_2 = b_1, \quad 0 \leq x_3 \leq \infty; \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_3} &= f_{\lambda 2}(x_2), \quad x_3 = 0, \quad -\infty \leq x_2 \leq b_1; \\ \frac{\partial u_r}{\partial x_2} &= f_{r 1}(x_3), \quad x_2 = b_2, \quad 0 \leq x_3 \leq \infty; \\ \frac{\partial u_r}{\partial x_3} &= f_{r 2}(x_2), \quad x_3 = 0, \quad b_2 \leq x_2 \leq \infty; \\ \frac{\partial u_h}{\partial x_3} &= f_{h 1}(x_2), \quad x_3 = 0, \quad -\infty \leq x_2 \leq \infty; \\ u_h &= 0, \quad x_3 = -c, \quad -\infty \leq x_2 \leq \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, в бесконечно удаленных точках каждого блока должны выполняться условия излучения, которые обеспечиваются положениями соответствующих контуров интегрирования в представлениях решений [44, 45].

Литосферные плиты имеют большую толщину, которая принята бесконечной при изучении зоны контакта плит с основанием. Здесь приняты следующие обозначения:  $\omega$  – частота колебания внешней нагрузки на литосферные плиты;  $\sigma_{\lambda x_3}$ ,  $\sigma_{rx_3}$ ,  $\sigma_{hx_3}$  – касательные напряжения, возникающие на нижней границе левой и правой литосферных плит соответственно, а последнее – касательные напряжения возникающие на верхней границе основания, направленные вдоль оси  $ox_1$ ;  $\sigma_{\lambda x_2}$ ,  $\sigma_{rx_2}$  – касательные напряжения, действующие вдоль оси  $ox_1$  на боковые границы левой и правой литосферных плит соответственно;  $\mu_\lambda$ ,  $\mu_r$ ,  $\mu_h$  – модули сдвига материалов левой, правой литосферных плит и основания соответственно, а  $\rho_\lambda$ ,  $\rho_r$ ,  $\rho_h$  – в таком же сочетании плотности материалов объектов.

Трехблочную структуру рассматриваем в двух состояниях: первое – в предположении наличия расстояния  $2\theta$  между боковыми границами литосферных



плит, второе – в предположении его отсутствия. Исследуем граничную задачу методом блочного элемента. Для этого, индуцировав эвклидовым пространством в каждом блоке топологию, погружаем в нее граничную задачу. Применением двумерного преобразования Фурье получаем функциональные уравнения для каждого блока как для многообразия с краем. Средствами внешней алгебры вводим внешние формы для каждого блока, имеющие вид

$$\omega_\lambda = F_{1\lambda}(\alpha_3)e^{i(\alpha_2 b_1)} - i\alpha_2 u_\lambda(b_1, \alpha_3)e^{i(\alpha_2 b_1)} - F_{2\lambda}(\alpha_2) + i\alpha_3 u_\lambda(\alpha_2, 0),$$

$$\omega_r = -F_{1r}(\alpha_3)e^{i(\alpha_2 b_2)} + i\alpha_2 u_r(b_2, \alpha_3)e^{i(\alpha_2 b_2)} - F_{2r}(\alpha_2) + i\alpha_3 u_r(\alpha_2, 0),$$

$$\omega_h = \frac{\partial u_h(\alpha_2, 0)}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_h(\alpha_2, 0) - \frac{\partial u_h(\alpha_2, -c)}{\partial x_3} e^{-i(\alpha_3 c)} + i\alpha_3 u_h(\alpha_2, -c)e^{-i(\alpha_3 c)}, \quad u_h(\alpha_2, -c) = 0,$$

$$\omega_h = F_{2h}(\alpha_2) - i\alpha_3 u_h(\alpha_2, 0) - \frac{\partial u_h(\alpha_2, -c)}{\partial x_3} e^{-i(\alpha_3 c)},$$

$$F_{sb}(\alpha_k) = \mathbf{F}_1(\alpha_k) f_{sb}(x_k), \quad s = 1, 2, 3, \quad b = \lambda, r, h,$$

Здесь  $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_2, \alpha_3)$  и  $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_k)$ ,  $k = 2, 3$  – двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно.

Далее используем алгоритм внешнего анализа [44, 45], позволяющий построить псевдодифференциальные уравнения граничных задач для каждого блока. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
& F_{1\lambda}(\alpha_3)e^{i(\alpha_{2\lambda}b_1)} - i\alpha_{2\lambda}u_\lambda(b_1, \alpha_3)e^{i(\alpha_{2\lambda}b_1)} - F_{2\lambda}(\alpha_{2\lambda-}) + i\alpha_3u_\lambda(\alpha_{2\lambda-}, 0) = 0, \\
& F_{1\lambda}(\alpha_{3\lambda+})e^{i(\alpha_2b_1)} - i\alpha_2u_\lambda(b_1, \alpha_{3\lambda+})e^{i(\alpha_2b_1)} - F_{2\lambda}(\alpha_2) + i\alpha_{3\lambda+}u_\lambda(\alpha_2, 0) = 0, \\
& -F_{1r}(\alpha_3)e^{i(\alpha_{2r}b_2)} + i\alpha_{2r}u_r(b_2, \alpha_3)e^{i(\alpha_{2r}b_2)} - F_{2r}(\alpha_{2r+}) + i\alpha_3u_r(\alpha_{2r+}, 0) = 0, \\
& -F_{1r}(\alpha_{3r+})e^{i(\alpha_2b_2)} + i\alpha_2u_r(b_2, \alpha_{3r+})e^{i(\alpha_2b_2)} - F_{2r}(\alpha_2) + i\alpha_{3r+}u_r(\alpha_2, 0) = 0, \\
& F_{2h}(\alpha_2) - i\alpha_{3h+}u_h(\alpha_2, 0) - \frac{\partial u_h(\alpha_2, -c)}{\partial x_3} e^{-i(\alpha_{3h+c})} = 0, \\
& F_{2h}(\alpha_2) - i\alpha_{3h-}u_h(\alpha_2, 0) - \frac{\partial u_h(\alpha_2, -c)}{\partial x_3} e^{-i(\alpha_{3h-c})} = 0, \\
& \alpha_{2\lambda-} = -i\sqrt{\alpha_3^2 + p_\lambda^2}, \quad \alpha_{3\lambda+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + p_\lambda^2}, \\
& \alpha_{2r+} = i\sqrt{\alpha_3^2 + p_r^2}, \quad \alpha_{3r+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + p_r^2}, \\
& \alpha_{3h-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 + p_h^2}, \quad \alpha_{3h+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + p_h^2}, \\
& F_{sb}(\alpha_k) = \mathbf{F}_1(\alpha_k)f_{sb}(x_k), \quad s=1,2,3, \quad b=\lambda, r, h.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Разрезы на римановой поверхности в (1.4) выбираются исходя из требования регулярности функций в нижней для минуса и в верхней для плюса полуплоскостях.

Обратив псевдодифференциальные уравнения, получаем интегральное представление решения для каждого блока в форме упакованных блочных элементов. Эти решения представимы в форме

$$\begin{aligned}
u_\lambda(x_2, x_3) &= \mathbf{F}_2^{-1}(x_2, x_3) \frac{\omega_\lambda(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p_\lambda^2)}, \\
\omega_\lambda &= \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{2\lambda-}}\right) e^{i(\alpha_2b_1)} \left\langle F_{1\lambda}(\alpha_3) - F_{1\lambda}(\alpha_{3\lambda+}) \frac{\alpha_3}{\alpha_{3\lambda+}} \right\rangle + \\
&+ \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_{3\lambda+}} - 1\right) \left\langle F_{2\lambda}(\alpha_2) - F_{2\lambda}(\alpha_{2\lambda-}) e^{-i(\alpha_{2\lambda}b_1)} e^{i(\alpha_2b_1)} \frac{\alpha_2}{\alpha_{2\lambda-}} \right\rangle,
\end{aligned}$$

$$u_r(x_2, x_3) = \mathbf{F}_2^{-1}(x_2, x_3) \frac{\omega_r(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p_r^2)},$$

$$\omega_r = \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_{2r+}} - 1 \right] e^{i(\alpha_2 b_2)} \langle F_{1r}(\alpha_3) - F_{1r}(\alpha_{3r+}) \rangle +$$

$$+ \left[ \frac{\alpha_3}{\alpha_{3r+}} - 1 \right] \left\langle F_{2r}(\alpha_2) - F_{2r}(\alpha_{2r+}) e^{i(\alpha_2 b_2)} e^{i(\alpha_{2r+} b_2)} \frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}} \right\rangle,$$

$$u_h(x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_h(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p_h^2)} e^{-i(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} d\alpha_2 d\alpha_3,$$

$$\omega_h(\alpha_2, \alpha_3) = F_{2h}(\alpha_2) \left[ 1 - i\alpha_3 \frac{\sin \alpha_{3h+} c}{\alpha_{3h+} \cos \alpha_{3h+} c} - \frac{1}{\cos \alpha_{3h+} c} e^{-i(\alpha_3 c)} \right].$$

Контуры в двойных интегралах обращений Фурье выбираются из требования обхода вещественных нулей по принципу предельного поглощения Мандельштама [53].

Дальнейшее построение решения для блочной структуры в целом включает применение гомеоморфизмов, требуемых для сопряжения блочных элементов, что достигается введением фактор-топологических пространств.

Эта процедура достаточно детально описана в работах [54, 55, 56]. В результате ее применения для блочных структур при  $\theta > 0$  и  $\theta = 0$  получаем два уравнения типа Винера – Хопфа вида

$$K_1(\alpha_2)F_2^+(\alpha_2) + K_2(\alpha_2)F_2^-(\alpha_2) + U_0(\alpha_2, 0) = \alpha_2 G_{1b}(\alpha_2) + G_{2b}(\alpha_2), \quad \theta > 0,$$

$$K_1(\alpha_2)F_2^+(\alpha_2) + K_2(\alpha_2)F_2^-(\alpha_2) = \alpha_2 G_{10}(\alpha_2) + G_{20}(\alpha_2), \quad \theta = 0,$$

$$K_1(\alpha_2) = \frac{\sin \alpha_{3h+} c}{\alpha_{3h+} \cos \alpha_{3h+} c} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2 + p_r^2}}, \quad K_2(\alpha_2) = \frac{\sin \alpha_{3h+} c}{\alpha_{3h+} \cos \alpha_{3h+} c} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2 + p_\lambda^2}}.$$

Здесь приняты обозначения

$$F_{2\lambda}(\alpha_2) = F_2^-(\alpha_2), \quad F_{2r}(\alpha_2) = F_2^+(\alpha_2), \quad F_{2h}(\alpha_2) = F_2^-(\alpha_2) + F_2^+(\alpha_2),$$

$$\begin{aligned}
G_{1b}(\alpha_2) &= -\frac{e^{i(\alpha_2 b_1)}}{2\pi\alpha_{3\lambda+}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha_{2\lambda} b_1)} F_{2\lambda}(\alpha_{2\lambda-})}{\alpha_{2\lambda-}(\alpha_3 - \alpha_{3\lambda-})} d\alpha_3 - \frac{e^{i(\alpha_2 b_2)}}{2\pi\alpha_{3r+}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha_{2r+} b_2)} F_{2r}(\alpha_{2r+})}{\alpha_{2r+}(\alpha_3 - \alpha_{3r-})} d\alpha_3, \\
G_{2b}(\alpha_2) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha_2 b_1)} \langle \alpha_{3\lambda+} F_{1\lambda}(\alpha_3) - \alpha_3 F_{1\lambda}(\alpha_{3\lambda+}) \rangle}{\alpha_{2\lambda-} \alpha_{3\lambda+} (\alpha_2 - \alpha_{2\lambda+})} d\alpha_3 + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha_2 b_2)} \langle \alpha_{3r+} F_{1r}(\alpha_3) - \alpha_3 F_{1r}(\alpha_{3r+}) \rangle}{\alpha_{2r+} \alpha_{3r+} (\alpha_2 - \alpha_{2r-})} d\alpha_3, \\
G_{1b}(-\alpha_2) &= G_{1b}(\alpha_2), \quad G_{1b}(\alpha_2) = c_1 \alpha_2^{-2} + O(|\alpha_2|^{-3}), \quad |\alpha_2| \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

$U_0(\alpha_2, 0)$  – преобразование Фурье функции, описывающей поведение поверхности основания, свободной от контакта с блоками.

Функции  $G_{10}(\alpha_2)$ ,  $G_{20}(\alpha_2)$  получаются из  $G_{1b}(\alpha_2)$ ,  $G_{2b}(\alpha_2)$  при  $b_1 = b_2 = 0$

Сопоставляя эти выражения с аналогичными, полученными в работах [3, 4], где в качестве моделей литосферных плит использовались пластины Кирхгофа, находим их полную качественную идентичность. Так же, как и в указанных работах, возникают функциональные уравнения типа Винера – Хопфа, имеющие описанные там свойства решений. При  $\theta > 0$  на краях литосферных плит возникают особенности в контактных напряжениях, описываемые функциями

$$\begin{aligned}
u_{\lambda}(x_2, x_3) &= \sigma_{1\lambda}(x_2, x_3)(-x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 < -\theta, \\
u_r(x_2, x_3) &= \sigma_{1r}(x_2, x_3)(x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 > \theta.
\end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{1b}(x_2, x_3)$ ,  $b = \lambda, r$  – непрерывные по обеим координатам функции при достаточно гладких  $f_{bn}$ ,  $b = \lambda, r$  [44, 45].

Обращение второго уравнения при  $\theta = 0$  строится традиционным методом Винера – Хопфа [52] и приводит при  $x_2 \rightarrow 0$  к следующим свойствам решений

$$\begin{aligned}
u_{\lambda}(x_2, x_3) &\rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_2, x_3)x_2^{-1} + \sigma_{3\lambda}(x_2, x_3)\ln|x_2| + \sigma_{4\lambda}(x_2, x_3)\operatorname{sgn} x_2, \\
u_r(x_2, x_3) &\rightarrow \sigma_{2r}(x_2, x_3)x_2^{-1} + \sigma_{3r}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4r}(x_2, x_3)\operatorname{sgn} x_2.
\end{aligned}$$

Функции  $\sigma_{nb}(x_2, x_3)$ ,  $b = \lambda, r$ ;  $n = 2, 3, 4$  непрерывны по обоим параметрам.

**Заключение.** При  $\theta = 0$  в зоне сближения литосферных плит, находящихся на деформируемом слое, при гармоническом режиме возникает сингулярная особенность при соответствующих направлениях действия напряжений на их боковых границах. Этот результат подтверждает корректность использования моделей пластин Кирхгофа в режиме гармонических колебаний для этого типа воздействий на литосферные плиты, в которых влияние модели трехмерности литосферных плит не внесло качественных изменений в окончательные результаты.

### **О способе тестирования наличия скрытой трещины нового типа**

Полученный результат в сейсмологии открывает возможность оценивать наличие скрытой трещины нового типа не только под Землей, но и в инженерной практике.

С помощью соотношения

$$\int_{-a}^a k(x - \xi)g(\xi)d\xi = f(x), \quad |x| \leq a, \quad |a| \leq \infty$$

представляющего связь напряжений с поведением поверхности среды, можно определять подвижки поверхности при наличии разлома или скрытой внутренней трещины нового типа и таким образом тестировать ресурс изделия.

Внося под интеграл каждую из функций (1.4), описывающих особенности трещин нового типа, можно определить перемещения поверхности  $f(x)$  среды над зоной трещины. Они имеют вид от разных концентраций напряжений.

Для случая особенности  $g(x_1, x_2) = \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1}$  рисунки ба, бб показывают, что среда разрушилась, произошла подвижка поверхности.

Для случая  $g(x_1, x_2) = \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2) \ln|x_2|$  из рисунков 7а, 7б следует, что коэффициент  $\sigma_{2\lambda}$  при соответствующих условиях обратился в ноль, т.е.  $\sigma_{2\lambda}(x_1, x_2) = 0$ , а  $\sigma_{3\lambda}(x_1, x_2) \neq 0$ .

Это может означать, что трещина нового типа уже существует и при соответствующем нагружении может разрушить среду. Это произойдет, если  $\sigma_{2\lambda}(x_1, x_2) \neq 0$ .

Для случая  $g(x_1, x_2) = \sigma_{4r}(x_1, x_2) \operatorname{sgn} x_2$  из рисунков 8а, 8б следует, что оба коэффициента  $\sigma_{2\lambda}$  и  $\sigma_{3\lambda}$  при соответствующих условиях обратились в ноль, т.е.  $\sigma_{2\lambda}(x_1, x_2) = 0$  и  $\sigma_{3\lambda}(x_1, x_2) = 0$ . Это может означать, что трещина нового типа уже существует и может при соответствующем нагружении и параметрах среды разрушить ее. Это произойдет, если  $\sigma_{2\lambda}(x_1, x_2) \neq 0$ .

Два последних случая могут служить способом определения присутствия трещины нового типа в изделии и способом своевременного предотвращения аварии.

## 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА В ПРОБЛЕМЕ ПРОЧНОСТИ ПОДШИПНИКОВЫХ ПАР

### 2.1 О трещинах нового типа в подшипниках

В параграфе рассматриваются две задачи [57, 58], из которых одна связана с инженерным направлением, посвященным исследованию ресурсов подшипников с покрытиями (см. рисунок 10), получивших некоторый дефект.

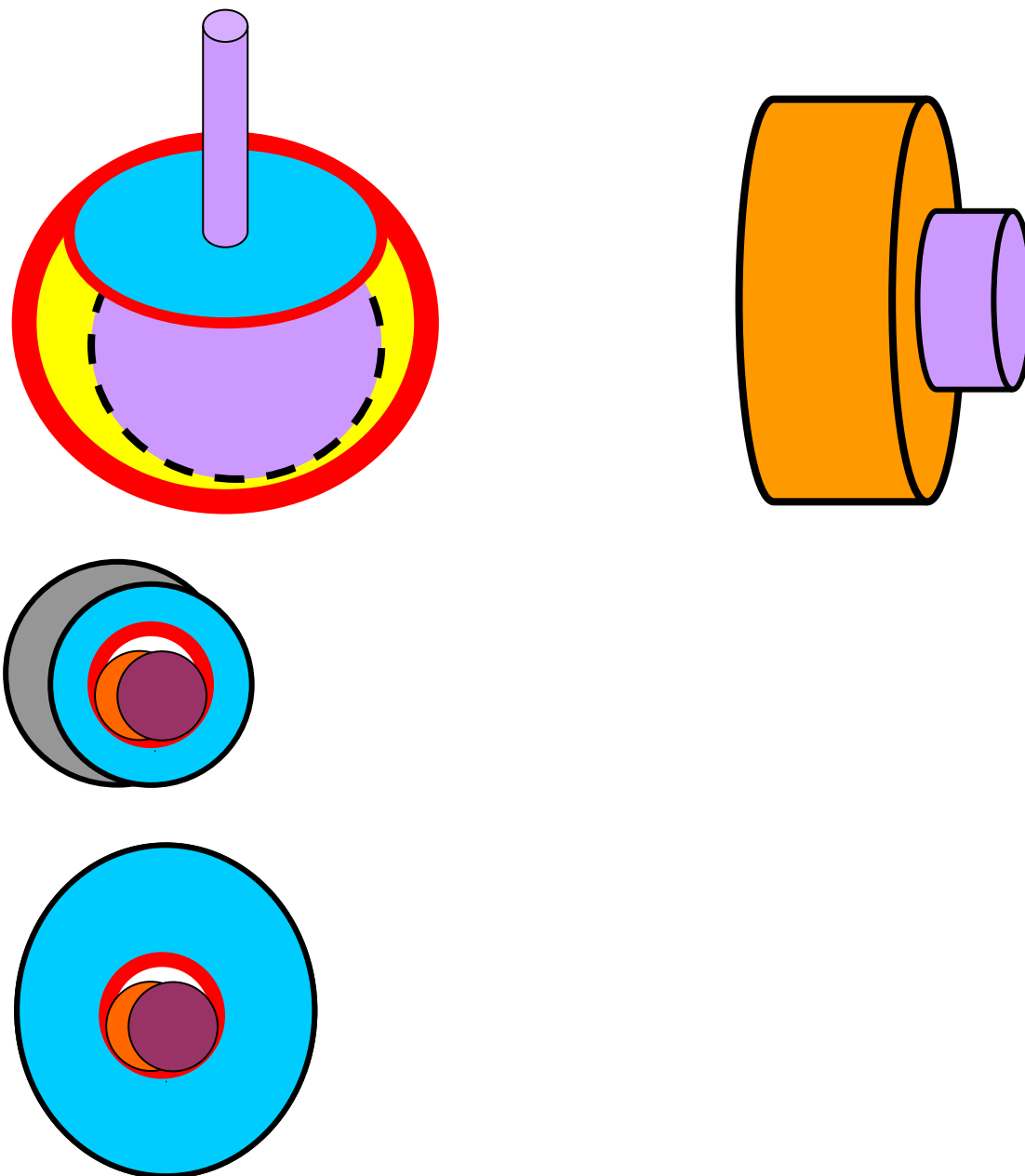


Рисунок 10 – Подшипники

Вторая относится к механике природных явлений и связана с явлением субдукции. Субдукция – это процесс продвижения океанических литосферных плит под континентальные в прибрежной зоне (см. рисунок 11).

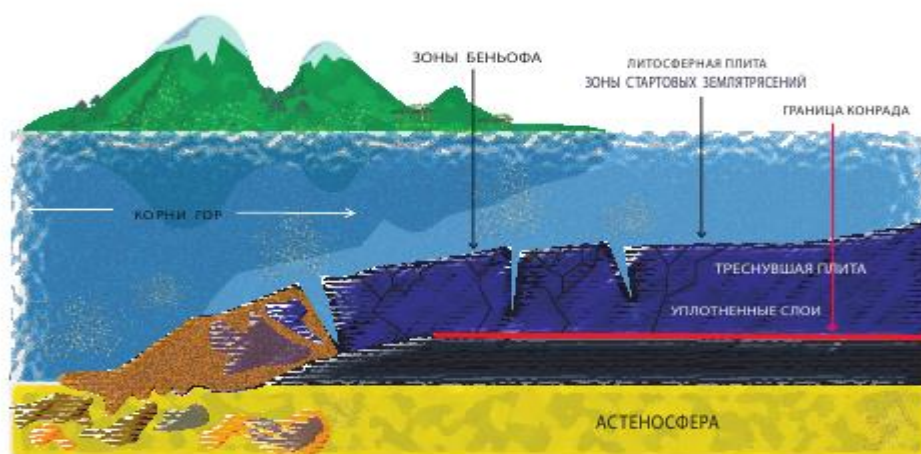


Рисунок 11 – Явление субдукции

Подсчитано, что протяженность прибрежных зон, где происходит субдукционный процесс, составляет 45 тысяч километров. Зоны субдукции – это зоны интенсивных прибрежных морских и океанических землетрясений, которые характеризуются наличием разломов у литосферных плит. Здесь удалось заметить, что обе эти проблемы описываются одними и теми же граничными задачами.

Выявленные при исследовании сейсмологические свойства разломов, т. е. трещин нового типа, открывают возможность исследования скрытых дефектов в объектах инженерной практики. Это связано с тем, что обе эти проблемы математически описываются одними и теми же граничными задачами.

Для их исследования и решения применяется метод блочного элемента, позволяющий точно решать эти задачи. Исследование показало, что в зонах дефектов и разломов возникают высокие концентрации напряжений, приводящие к разрушениям покрытий. Изучены последствия таких разрушений.

Исследованию подшипниковых пар и возможных в них дефектов посвящено большое число фундаментальных работ. Некоторые из них приведены



в работах [59–66]. В работе [58] изложен один из подходов исследования подшипников с дефектами, основанный на применении метода блочного элемента. Автор исследует вариант задачи для подшипниковой пары. Этой же граничной задачей удастся изучить проблему субдукционного процесса, принадлежащего направлению механики природных процессов и связанного с сейсмологией [67–73]. В инженерном направлении изучается подшипниковая пара, имеющая покрытие с дефектом, состоящим в отслоении покрытия от основания. В результате на границе отслоения образовалась трещина, перпендикулярная границе покрытия. Контакт между покрытием и основанием подшипника по разные стороны от трещины – различный: с одной стороны подшипник свободен от трения, а с другой – жестко связан с основанием. Вопрос о последствиях поведения такого подшипника связан с механикой природных процессов и связан именно с явлением субдукции. Это явление, протекающее в прибрежных зонах океанов, состоит в продвижении океанических плит под континентальные. Оно было открыто и описано исследователем Беньофом, а прибрежная область была названа сейсмофокальной зоной Беньофа, центром сосредоточения морских землетрясений. Литосферная плита изгибается, попав под континент, и приобретает разломы. С одной стороны, от разлома часть плиты, попавшая под континент, оплавляется снизу высокой температурой и теряет контактные напряжения трения. По другую сторону от разлома плита остается жестко соединенной с основанием. Для обоих случаев ставится одна граничная задача, причем в качестве покрытия в подшипнике и литосферных плит принимаются с учетом масштабов пластины Кирхгофа. Применяется метод блочного элемента. В результате исследования и решения граничной задачи для разных размеров относительных расстояний между берегами дефектов найдены концентрации контактных напряжений и описаны последствия разрушений.

**Постановка задачи.** Считаем, что подшипник имитируется как полупространство, на котором имеется покрытие с дефектом, часть которого отслоилась, и имеется трещина, перпендикулярная границе покрытия. В этой постановке охватывается и субдукционный процесс. Полагаем, что покрытия

представляют собой полубесконечные пластины Кирхгофа в форме полуплоскостей, границы которых параллельны и находятся на дистанции  $2\theta$ ,  $\theta \geq 0$  друг от друга, причем каждая обладает индивидуальными механическими свойствами. В случае подшипника, согласно принципу Сен-Венана, влияние трещины в покрытии локально и ослабевает при удалении от нее, поэтому обойму можно заменить (см. рисунки 12, 13).

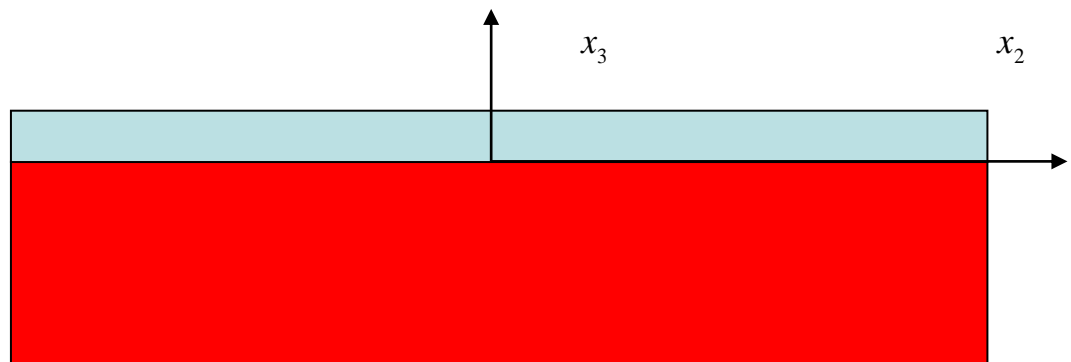


Рисунок 12 – Подшипниковая обойма имеет защитное покрытие

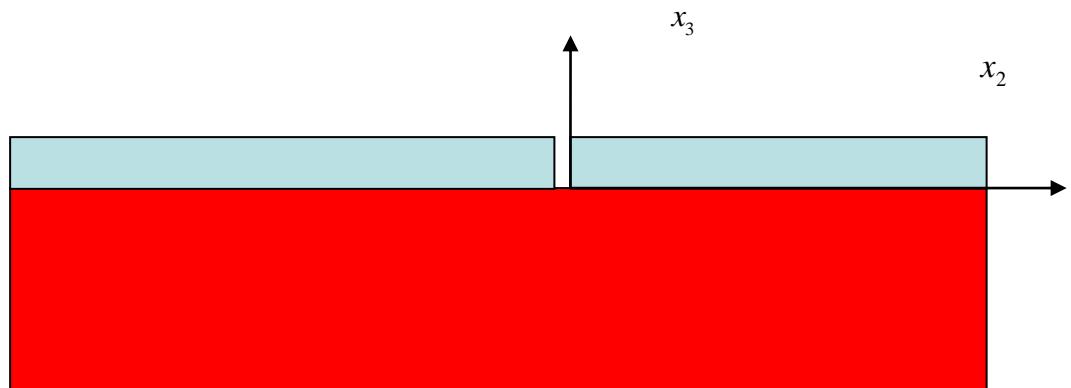


Рисунок 13 – Предполагается, что в покрытии образовалась трещина нового типа, перпендикулярная границе покрытия

Примем оси координат  $x_1, x_2$  лежащими в плоскости пластин, а ось  $x_3$  направленной по внешней нормали к подложке. Рассмотрим случай статических воздействий на поверхность пластин, из которых левая контактирует с

основанием без трения, а правая – с пренебрежимо малым вертикальным воздействием по сравнению с касательными контактными напряжениями. Тогда уравнения граничных задач для пластин представимы в виде

$$\mathbf{R}_b(x_1, x_2)\mathbf{u}_b - \mathbf{s}_b(x_1, x_2) = 0, \quad b = \lambda, r. \quad (2.1)$$

Здесь каждая пластина рассматривается как многообразие с краем, где  $\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}\}$  – вектор перемещения точек пластин по горизонтальным  $u_{1b}$ ,  $u_{2b}$  и вертикальным  $u_{3b}$  направлениям срединной плоскости, а  $b = \lambda$  для левой плиты и  $b = r$  – для правой. Введем обозначения

$$s_b(x_1, x_2) = \left\| \begin{array}{ccc} -\varepsilon_{5b}s_{1b}(x_1, x_2) & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{5b}s_{2b}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{53b}s_{3b}(x_1, x_2) \end{array} \right\|, \quad (2.2)$$

$$s_{nb}(x_1, x_2) = (t_{nb} + g_{nb}),$$

$$\begin{aligned} R_b(x_1, x_2)u_b = & \\ = & \left\| \begin{array}{ccc} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_{1b} & \left( \varepsilon_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) u_{2b} & 0 \\ \left( \varepsilon_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) u_{1b} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) u_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом характера взаимодействия покрытий с основанием, в формулах (2.1) – (2.3) принято при  $b = \lambda$

$$s_{nb}(x_1, x_2) = 0, \quad u_{nb} = 0, \quad n = 1, 2.$$

Для случая  $b = r$  обязано выполняться условие

$$s_{nb}(x_1, x_2) = 0, \quad u_{nb} = 0, \quad n = 3.$$

Обозначим  $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$  – двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Введем обозначения

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F}_2 \mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F}_2 \mathbf{g}_b, \quad \mathbf{T}_b = \mathbf{F}_2 \mathbf{t}_b, \quad b = \lambda, r,$$

$$\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}\}, \quad \mathbf{g}_b = \{g_{1b}, g_{2b}, g_{3b}\}, \quad \mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}, t_{3b}\}.$$

Преобразование Фурье дифференциальной части системы уравнений (2.1) принимает вид

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{U}_b = - \left\| \begin{array}{ccc} (\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b} \alpha_2^2) U_{1b} & \varepsilon_{2b} \alpha_1 \alpha_2 U_{2b} & 0 \\ \varepsilon_{2b} \alpha_1 \alpha_2 U_{1b} & (\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b} \alpha_1^2) U_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} \end{array} \right\|.$$

Здесь для  $b = \lambda$  нормальные напряжения  $t_{3b}$  действуют на покрытие сверху и  $g_{3b}$  – снизу. Аналогично  $b = r$  напряжения  $g_{1b}$ ,  $g_{2b}$  и  $t_{1b}$ ,  $t_{2b}$  действуют в касательной плоскости в области контакта с основанием, причем  $g_{1b}$  и  $t_{1b}$  в направлении касательной к торцу литосферной плиты, а  $g_{2b}$  и  $t_{2b}$  в направлении нормали.

Справедливы соотношения

$$M_b = -D_{b1} \left( \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3},$$

$$Q_b = -D_{b2} \left( \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right), \quad u_{3b}, \quad \frac{\partial u_{3b}}{H \partial x_2},$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1-\nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1-\nu_b^2)12H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu},$$

$$\varepsilon_{1b} = 0,5(1-\nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0,5(1+\nu_b), \quad \varepsilon_{5b} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b h_b},$$

$$g_{1b} = \mu_{0b} \left( \frac{\partial u_{1b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} \right), \quad g_{2b} = \mu_{0b} \left( \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} \right),$$

$$\mu_{0b} = \frac{\mu_b}{H}, \quad x_3 = 0, \quad g = \{g_{1b}, g_{2b}\}.$$

Приняты следующие обозначения:  $\mu_b$  – модуль сдвига;  $\nu_b$  – коэффициент Пуассона;  $E_b$  – модуль Юнга;  $h_b$  – толщина;  $\mathbf{g}_b$ ,  $\mathbf{t}_b$  – векторы контактных напряжений и внешних горизонтальных;  $g_{1b}$ ,  $g_{2b}$ ,  $t_{1b}$ ,  $t_{2b}$  и вертикальных,  $g_{3b}$ ,  $t_{3b}$  воздействий, действующих соответственно по касательной к границе основания и по нормали к ней в областях  $\Omega_b$ . Выражения для нормальной  $N_{x_2}$  и касательной  $T_{x_1x_2}$  составляющих напряжений к срединной плоскости на торцах пластин даются соответственно соотношениями

$$T_{x_1x_2} = \varepsilon_7 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \quad N_{x_2} = \varepsilon_8 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right),$$

$$\varepsilon_7 = \frac{E}{2(1+\nu)H}, \quad \varepsilon_8 = \frac{E}{(1-\nu^2)H}.$$

Для деформируемого основания, описываемого граничной задачей, применимы различные модели, даваемые соотношениями

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta, \quad \langle \alpha, \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leq \infty; x_2 \leq -\theta), \quad \Omega_r(|x_1| \leq \infty; \theta \leq x_2), \quad \Omega_\theta(|x_1| \leq \infty; -\theta \leq x_2 \leq \theta),$$

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m, n = 1, 2, 3, \quad \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty,$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu}, \quad \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{g}.$$

Здесь  $\mathbf{g}$  – вектор касательных и нормальных напряжений под покрытиями на границе основания. Некоторые типы матриц-функций  $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$  оснований, называемые символом системы интегральных уравнений, приведены в работах [57, 58]. Например, для упругого слоя в статическом случае она имеет вид

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N & \alpha_1 \alpha_2 (M - N) & i\alpha_1 P \\ \alpha_1 \alpha_2 (M - N) & \alpha_1^2 N + \alpha_2^2 M & i\alpha_2 P \\ -i\alpha_1 P & -i\alpha_2 P & K \end{vmatrix},$$

$$M(u) = \frac{(1-\nu)(3-4\nu)(\operatorname{sh} 4u + 4u)}{u^2 \Delta}, \quad N(u) = \frac{2 \operatorname{sh} 2u}{u^3 \operatorname{ch} 2u},$$

$$P(u) = -\frac{(1-2\nu)(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2}{u \Delta(u)}, \quad K(u) = \frac{(1-\nu)(3-4\nu)(\operatorname{sh} 4u - 4u)}{\Delta(u)},$$

$$\Delta(u) = u \left[ (3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u + 4u^2 + 4(1-\nu)^2 \right], \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Матрица (2.3) граничной задачи является блочно-диагональной, состоящей из расположенной на диагонали матрицы второго порядка, представляющей матричный оператор или векторный оператор, и отдельного на диагонали скалярного оператора. Поскольку операторы независимы, это существенно облегчает исследование граничной задачи на этапе внешнего анализа, позволяя воспользоваться результатами, выполненными в работах [3, 4].

**Внешний анализ граничной задачи.** Граничные задачи для каждого блока блочной структуры погружаются в топологическое пространство, индуцированное трехмерным евклидовым пространством, после чего применением формулы Стокса в топологическом пространстве сводятся к функциональным уравнениям. Приведем представления функциональных уравнений, отвечающих перечисленным операторам граничной задачи. Функциональные уравнения скалярного оператора для левой плиты,  $b=\lambda$ , имеют вид [3, 4]

$$R_{3b}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} = - \int_{\Omega_b} \omega_{3b} + S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon_{53b} F_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} + g_{3b}), \quad b = \lambda, r.$$

Здесь  $\omega_{3b}$  – участвующие в представлении внешние формы, имеющие для левой плиты выражение

$$\begin{aligned} \omega_{3\lambda} = e^{i\langle \alpha, x \rangle} & \left\{ - \left[ \frac{\partial^3 u_{3\lambda}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3\lambda}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3\lambda} + 2 \frac{\partial^3 u_{3\lambda}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3\lambda}}{\partial x_1^2} \right] dx_1 + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial^3 u_{3\lambda}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3\lambda}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3\lambda} \right] dx_2 \right\}. \end{aligned}$$

Функциональные уравнения граничной задачи для векторного случая, представленные для правой плиты,  $b = r$  являются матричными и имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12b}(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})\mathbf{U}_{12b} &= - \int_{\Omega_b} \boldsymbol{\omega}_{12b} + \mathbf{S}_{12b}(\alpha_{1b}, \alpha_{2b}), \quad \mathbf{U}_{12b} = \{U_{1b}, U_{2b}\}, \\ \boldsymbol{\omega}_{12b} &= \{\omega_{1b}, \omega_{2b}\}, \quad \mathbf{S}_{12b}(\alpha_{1b}, \alpha_{2b}) = -\varepsilon_{5b} \mathbf{F}_2(\alpha_{1b}, \alpha_{2b})(\mathbf{g}_b + \mathbf{t}_b), \\ \mathbf{S}_{12b}(\alpha_{1b}, \alpha_{2b}) &= \{S_{1b}, S_{2b}\}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{12b}(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b}) = - \left\| \begin{pmatrix} (\alpha_{1b}^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_{2b}^2) & \varepsilon_{2b}\alpha_{1b}\alpha_{2b} \\ \varepsilon_{2b}\alpha_{1b}\alpha_{2b} & (\alpha_{2b}^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_{1b}^2) \end{pmatrix} \right\|.$$

Здесь  $\omega_b$  – вектор внешних форм, имеющих представление.

Совершив над этими функциональными уравнениями операции внешнего анализа [3, 4], включающие факторизацию коэффициента функционального уравнения матрицы-функции и просто функции, вычисление форм-вычетов Лере, построение псевдодифференциальных уравнений, извлечение из них необходимых, поставленными граничными задачами, интегральных уравнений и решение последних. Найденные таким образом решения вносятся во внешние формы функциональных уравнений каждого покрытия, после чего сопрягаются с основанием, формируя новое топологическое пространство, называемое фактор-топологическим.

**Основные результаты.** В процессе выполнения этой достаточно детально описанной в указанных работах части исследования вводятся сокращенные обозначения применяемых далее параметров напряженно-деформируемого состояния блочной структуры. Введена следующая система обозначений для скалярного оператора левой плиты:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\lambda 0} &= \{y_{1\lambda 0}, y_{2\lambda 0}\}, & \mathbf{Z}_{\lambda 0} &= \{z_{1\lambda 0}, z_{2\lambda 0}\}, \\ \mathbf{F}_1 g &= \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, & \mathbf{F}_2 g &= \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g, \\ y_{1\lambda 0} &= D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 M_\lambda, & y_{2\lambda 0} &= D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 Q_\lambda, \\ z_{1\lambda 0} &= \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}, & z_{2\lambda 0} &= \mathbf{F}_1 u_{3\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\lambda 0} &= \{k_{1\lambda 0}, k_{2\lambda 0}\}, & k_{1\lambda 0} &= \varepsilon_{53\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2-})(t_{3\lambda} + g_{3\lambda}) = \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}), \\ k_{2\lambda 0} &= \varepsilon_{53\lambda} S'_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}). \end{aligned}$$

Аналогично для векторного случая правой плиты



$$\mathbf{Y}_r = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_r = \{z_{1r}, z_{2r}\}, \quad \mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g,$$

$$y_{1r} = \mathbf{F}_1^T T_{x_1 x_2 r}, \quad y_{2r} = \mathbf{F}_1 N_{x_2 r}, \quad z_{1r} = \mathbf{F}_1 u_{1r}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_{2r},$$

$$\mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\}, \quad k_{1r} = \varepsilon_{5r} \left[ S_{1r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) + \alpha_{2+} \alpha_1^{-1} S_{2r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right],$$

$$k_{2r} = -\varepsilon_{5r} \left[ -(1 + \varepsilon_{1r}) S_{1r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) + \varepsilon_{2r} \alpha_1 S'_{1r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) + \varepsilon_{2r} \alpha_{2+} S'_{2r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right].$$

Чтобы осуществить сопряжение покрытий с трехмерным основанием, имеющим на границе трехмерные векторы перемещений и напряжений, необходимо в такой же форме представить параметры напряженно-деформированного состояния покрытий. Для этого введем в рассмотрение объединенный вектор внешних форм и параметра внешних нагрузок

$$\boldsymbol{\omega}_b = \{\omega_{1b}, \omega_{2b}, \omega_{3b}\}, \quad \mathbf{S}_b = \{S_{1b}, S_{2b}, S_{3b}\},$$

где для

$$\boldsymbol{\omega}_\lambda = \{0, 0, \omega_{3\lambda}\}, \quad \mathbf{S}_\lambda = \{0, 0, S_{3\lambda}\}, \quad \boldsymbol{\omega}_r = \{\omega_{1r}, \omega_{2r}, 0\}, \quad \mathbf{S}_r = \{S_{1r}, S_{2r}, 0\}.$$

Тогда решения в каждом покрытии можно представить в виде

$$\mathbf{u}_\lambda(x_1, x_2, 0) = \mathbf{F}_2^{-1}(x_1, x_2) [\mathbf{R}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left( - \int_{\Omega_\lambda} \boldsymbol{\omega}_\lambda + \mathbf{S}_\lambda \right), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}_r(x_1, x_2, 0) = \mathbf{F}_2^{-1}(x_1, x_2) [\mathbf{R}_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left( - \int_{\Omega_r} \boldsymbol{\omega}_r + \mathbf{S}_r \right).$$

Сопрягая все три компоненты перемещений обоих полубесконечных покрытий, как нормальные, так и касательные, с перемещениями верхней границы основания, получаем соотношения вида

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_\lambda \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{P}_0 \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{P}_r \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \\
& = \varepsilon_6^{-1} \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0) [\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)], \\
& \mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_\lambda \mathbf{g}(x_1, x_2), \quad \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_r \mathbf{g}(x_1, x_2), \\
& \mathbf{P}_p \mathbf{u} = \mathbf{F}_2^{-1} [\mathbf{R}_p(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle -\int_{\Omega_p} \boldsymbol{\omega}_p + \mathbf{S}_b(\alpha_1, \alpha_2) \right\rangle, \quad p = \lambda, r.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь  $\mathbf{P}_\lambda$ ,  $\mathbf{P}_r$ ,  $\mathbf{P}_0$  – проекторы на левую, правую полуплоскости и на срединный промежуток, являющиеся носителями соответствующих покрытий и описывающего промежуток  $|x_2| \leq \theta$ . Внося соотношения (2.4) в левые части (2.5) и применив преобразования Фурье, получим соотношения вида

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{R}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle -\int_{\Omega_\lambda} \boldsymbol{\omega}_\lambda + \mathbf{S}_\lambda \right\rangle + \mathbf{U}_\theta + [\mathbf{R}_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle -\int_{\Omega_r} \boldsymbol{\omega}_r + \mathbf{S}_r \right\rangle - \\
& - \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0) [\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)] = 0, \\
& \mathbf{U}_\theta = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_0 \mathbf{u}(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Вектор-функции  $\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)$ , являющиеся преобразованиями Фурье функций с носителями в полуплоскостях, есть регулярные функции параметров  $\alpha_2$  при фиксированном  $\alpha_1$  в нижней и верхней полуплоскостях соответственно. В связи с этим можем обозначить вектор-функции, регулярные по параметру  $\alpha_2$  в нижней, знак минус, и в верхней, знак плюс, полуплоскостях, положив

$$\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_-(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_+(\alpha_1, \alpha_2).$$

Внося эти обозначения в предыдущее соотношение, приходим к матричному обобщенному функциональному уравнению Винера – Хопфа,

$$\mathbf{M}\mathbf{G}_+ = \mathbf{G}_- + \mathbf{V} + \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{U}_0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2, \quad \mathbf{K}_2 = \varepsilon_r \mathbf{R}_r^{-1} - \varepsilon_6^{-1}\mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_1 = \varepsilon_6^{-1}\mathbf{K} - \varepsilon_\lambda \mathbf{R}_\lambda^{-1},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}_1^{-1} \left( \mathbf{R}_\lambda^{-1} \int_{\Omega_\lambda} \boldsymbol{\omega}_\lambda + \mathbf{R}_r^{-1} \int_{\Omega_r} \boldsymbol{\omega}_r - \varepsilon_\lambda \mathbf{R}_\lambda^{-1} \mathbf{T}_\lambda - \varepsilon_r \mathbf{R}_r^{-1} \mathbf{T}_r \right), \quad \mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_0 \mathbf{u}(x_1, x_2).$$

которое наряду с наличием неизвестных  $\mathbf{G}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)$  содержит в качестве неизвестных также и их функционалы вида  $\mathbf{G}_\pm(\alpha_1, \alpha_{2\pm})$ , нуждающиеся в последующем определении из некоторой системы алгебраических уравнений [3, 4]. В этих же работах изложены способы определения функционалов, входящих во внешние формы. Для исследования особенностей решения функционального уравнения был использован факторизационный подход, изложенный в [3, 4]. При  $\theta > 0$ , т. е., когда торцы плит удалены на расстояние  $2\theta$ , контактные напряжения на краях пластин имеют представление [3, 4] вида

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\lambda(x_1, x_2) &= \boldsymbol{\sigma}_{1\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-0.5} \quad x_2 < -\theta, \\ \mathbf{g}_r(x_1, x_2) &= \boldsymbol{\sigma}_{2r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-0.5}, \quad x_2 > \theta \quad \gamma > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При  $\theta = 0$ , т. е., когда торцы плит полностью сблизилась, главный член контактных напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\lambda(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_{22}^{-1} + \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4\lambda}(x_1, x_2)\operatorname{sgn} x_{22}, \\ \mathbf{g}_r(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2r}(x_1, x_2)x_{22}^{-1} + \sigma_{3r}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4r}(x_1, x_2)\operatorname{sgn} x_{22}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В обоих случаях вектор-функции  $\boldsymbol{\sigma}_{1\lambda}(x_1, x_2)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{2r}(x_1, x_2)$  непрерывны по обоим параметрам.

Анализ полученного решения показывает, что возникает более сложная подвижка в зоне дефекта, охватывающая рассмотренные в [3, 4] случаи.

В результате вычисления перемещений в зоне дефекта или поверхности Земли, вызванных сингулярными составляющими контактных напряжений, получается картина, в которой левая плита испытывает вертикальное

перемещение, а правая – горизонтальный сдвиг в одном из направлений, вызываемых внешними воздействиями, порождая разрушение зоны дефекта и переход из состояния (2.7) в состояние (2.6). Последнее, как известно из теории контактных задач [3, 4], приводит лишь к точечному излому в точках  $x_2 = \pm \theta$  поверхности основания подшипника, на котором находится покрытие, или основания, на котором расположены литосферные плиты.

**Замечание.** Таким образом, в случае принятых разнотипных контактов покрытия с деформируемым основанием имеет место дальнейшее разрушение зоны контакта сингулярными концентрациями напряжений. Разрушение приводит к уничтожению части покрытия в окрестности дефекта и обнажению основания, на котором оно находится. Для подшипников это означает износ оголенной части основания. В случае зоны Бенъофа оно провоцирует прибрежные землетрясения различной балльности и дает свободу отделившейся левой части литосферной плиты более свободно уйти под континентальную и расплавиться, попав уже в следующий тектонический процесс, называемый спредингом.

## 2.2 О смазываемых подшипниках с трещинами нового типа

В параграфе рассматривается модель подшипника с дефектом для выявления прочностных свойств блочной структуры, включающей обойму подшипниковой пары и сам подшипник со смазкой [74]. Обойма представляет собой деформируемое основание с тонким покрытием, имеющим дефекты. Покрытие находится под воздействием смазки, которая в условиях функционирования утрачивает вязкость и может моделироваться тонким слоем идеальной несжимаемой жидкости, на который оказывается вертикальное внешнее давление подшипника. Для исследования локальных свойств подшипника в окрестности дефекта основание обоймы рассматривается в форме деформируемого слоя с дефектным покрытием, содержащим сверху слой идеальной несжимаемой жидкости (см. рисунок 14).

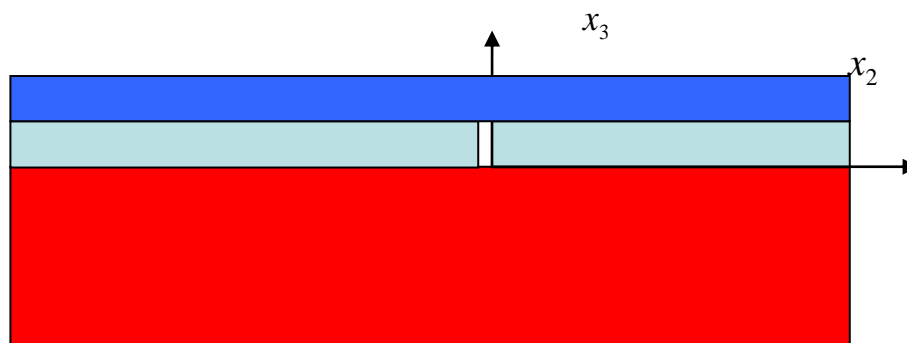


Рисунок 14 – Предполагается, что слой жидкости покрывает покрытие, в котором образовалась трещина нового типа, перпендикулярная границе покрытия

Предполагается, что покрытие имеет наиболее сложный скрытый дефект, описываемый трещиной, плоскость которой перпендикулярна границе покрытия. Описанная блочная структура исследуется методом блочного элемента, при этом выявляются особенности дальнейшего поведения подшипника.

В связи с важностью подшипниковых пар в машиностроении и других отраслях, всестороннее исследование в мире этих объектов ведется многие годы и в разных направлениях. В железнодорожном транспорте фрикционные проблемы возникли в связи с использованием рельсов нового поколения, имеющих больший ресурс прочности, чем рельсы старого типа. Перечисленные объекты ввиду практически постоянного функционирования рано или поздно обязательно выходят из строя. Имеется обширный теоретический и экспериментальный материал, связанный с разрушением подшипниковых пар и поверхностей, подвергающихся различным воздействиям. Идет поиск путей и способов упреждения разрушения этих объектов и способов индикации их прочностного состояния [75-79]. Для этого применяется широкий спектр различных современных методов как исследований и расчетов, так и диагностики и экспериментирования. Анализ результатов исследований в области прочности подшипниковых пар показал, что практически нет работ, связанных с изучением прочностных свойств дефектных подшипниковых пар, имеющих покрытия и смазку при наличии в качестве дефектов скрытых трещин, плоскости которых

перпендикулярны покрытиям. Дефекты, которые рассматриваются в работе, относятся к категории скрытых, поскольку их вертикальная плоскость является малодоступной для обнаружения ультразвуковыми или рентгеновскими методами, сканирующими в вертикальном направлении. Наличие слоя жидкости усложняет выявление дефектов. Результаты работы свидетельствуют о важности их обнаружения, поскольку даже единичные дефекты могут приводить к необратимым последствиям в таких конструкциях. В основе исследования лежит метод блочного элемента, удачно зарекомендовавший себя в задачах со скрытыми дефектами.

**Основные уравнения.** Описанная проблема рассматривается в четырехблочной структуре, состоящей из деформируемого слоя, моделирующего тело, двух полубесконечных пластин Кирхгофа, между торцами которых может отсутствовать или присутствовать некоторое расстояние, и слоя жидкости. В каждом блоке такой структуры поставлены соответствующие граничные задачи. Методом блочного элемента исследование сводится к изучению системы функциональных уравнений, позволяющих выявить концентрацию напряжений в блочной структуре. Считаем, что на смазывающий материал – слой идеальной жидкости и пластины действуют внешние гармонические во времени силы, направленные вертикально. Покрытие жестко соединено с основанием, однако касательными силами в контакте с основанием можно пренебречь, поскольку смазка считается идеальной жидкостью. Рассмотрим локальную систему координат  $x_1x_2x_3$  с началом в плоскости  $x_1x_2$ , совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью  $ox_3$ , направленной вверх по нормали к пластине, осью  $ox_1$ , направленной по касательной к границе торца пластины, осью  $ox_2$  – по нормали к его границе. Область, занятая левой пластиной, обозначается  $\lambda$  и описывается соотношениями  $|x_1| \leq \infty$ ,  $x_2 \leq -\theta$ , а занятая правой – индексом  $r$  и координатами  $|x_1| \leq \infty$ ,  $\theta \leq x_2$ . Для пластин уравнение Кирхгофа для фрагментов  $b$   $b = \lambda, r$ , занимающих области  $\Omega_b$  с границами  $\partial\Omega_b$ , при вертикальных

гармонических воздействиях напряжением  $t_{3b}e^{-i\omega t}$  сверху и  $g_{3b}e^{-i\omega t}$  снизу после исключения временного параметра имеют вид [74]

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \varepsilon_{43b} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(g_{3b} - t_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} = [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}]U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$

$$m_b = -D_{b1} \left( \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right) = f_{3b}(\partial \Omega_b),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3}, \quad x_{k0} = Hx_k, \quad k = 1, 2,$$

$$q_b = -D_{b2} \left( \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = f_{4b}(\partial \Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial \Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H \partial x_2} = f_{2b}(\partial \Omega_b), \quad D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)},$$

$$\varepsilon_{43b} = \omega^2 \rho_b \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E h_b^2}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H}{\mu}.$$

Здесь для пластин приняты обозначения:  $\nu_b$  – коэффициент Пуассона;  $E_b$  – модуль Юнга,  $h_b$  – толщины пластин;  $\rho_b$  – плотность;  $\omega$  – частота колебаний;  $g_{3b}$ ,  $t_{3b}$  значения контактных напряжений со стороны основания и давлений на пластины слоя жидкости сверху, действующих вдоль оси  $x_3$  в области  $\Omega_b$ .  $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$  – двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно;  $m_b$  и  $q_b$  – изгибающий момент и перерезывающая сила;  $f_1(\partial \Omega_b)$  – вертикальное перемещение на границе  $f_2(\partial \Omega_b)$ ; угол поворота срединной плоскости вокруг оси  $x_1$  в системе координат  $x_1 o x_2$ ;  $h_b$  – толщины

пластин;  $H$  – размерный параметр подложки, например, толщина деформируемого слоя материала.

Поведение блочного элемента, которым является слой толщины  $H_1$  несжимаемой жидкости  $\Omega_0$  на поверхности, описывается уравнениями мелкой воды следующего вида:

$$p = \left( i\omega\rho\varphi + \rho g \frac{ih_b}{\omega H_1^2} \Delta\varphi \right) e^{-i\omega t} - w e^{-i\omega t}.$$

Здесь  $p$  – давление в слое жидкости;  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\varphi$  – потенциал скоростей в жидкости;  $w$  – внешнее воздействие на слой. Учитывая, что на верхней границе литосферной плиты на нее оказывается давление слоя жидкости, с учетом взятой модели необходимо принять

$$t_{3b} = p, \quad u_{3b} = \frac{h_b}{i\omega H_1^2} \Delta\varphi_b.$$

В результате дифференциальное уравнение относительно потенциала скоростей принимает вид

$$\Delta^3\varphi_b + (\varepsilon_{53b}\rho g - \varepsilon_{43b})\Delta\varphi_b + \varepsilon_{53b}\rho \frac{\omega^2 H_1^2}{h_b} \varphi_b - i\varepsilon_{53b} \frac{\omega H_1^2}{h_b} (g_{3b} - w_b) = 0.$$

**Метод решения.** Для использования метода блочного элемента необходимо применить его алгоритм, включающий этапы внешней алгебры, внешнего анализа и фактор-топологии. На этапе внешней алгебры граничная задача сводится к функциональному уравнению следующего вида:



$$\begin{aligned}
N_b(\alpha_1, \alpha_2)\Phi_b(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_{\partial\Omega_b} \omega_b(\alpha_1, \alpha_2) + S_b(\alpha_1, \alpha_2), \\
N_b(\alpha_1, \alpha_2) &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^3 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\varepsilon_{53b}\rho g - \varepsilon_{43b}) - \varepsilon_{53b}R_b, \\
S_b(\alpha_1, \alpha_2) &= i\varepsilon_{53b} \frac{\omega H_1^2}{h_b} F_2(\alpha_1, \alpha_2)(g_{3b} - w_b), \\
\Phi_b(\alpha_1, \alpha_2) &= F_2(\alpha_1, \alpha_2)\varphi_b, \quad R_b = \rho \frac{\omega^2 H_1^2}{h_b}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь  $\omega_b(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $b = \lambda, r$  – внешние формы, отвечающие рассматриваемой граничной задаче, которые достаточно просто строятся. Для  $b = \lambda$  внешняя форма имеет вид

$$\begin{aligned}
\omega_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) &= e^{i(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)} \left[ \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_2^5} - i\alpha_2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} - (\alpha_2^2 + 3\alpha_1^2) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2^3} + (i\alpha_2^3 + 3\alpha_2 \alpha_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \right. \\
&+ (\alpha_2^4 + 3\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \varepsilon_{53b}\rho g - \varepsilon_{43b}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \\
&\left. - \langle i\alpha_2^5 + 3i\alpha_2^3 \alpha_1^2 + i\alpha_2 3\alpha_1^4 + i\alpha_2 (\varepsilon_{53b}\rho g - \varepsilon_{43b}) \rangle \varphi \right] dx_1.
\end{aligned}$$

Аналогичный вид имеет внешняя форма для правой полупластины:

$$\begin{aligned}
u_{3m}(x_1, x_2) &= \varepsilon_6^{-1} \sum_{n=1}^2 \iint_{\Omega_n} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) g_{3n}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\
x_1, x_2 &\in \Omega_m, \quad m = 1, 2, 3, \\
u_{31} &= u_{3\lambda}, \quad u_{32} = u_{3r}, \quad u_{33} = u_{3\theta}, \quad g_{31} = g_{3\lambda}, \quad g_{32} = g_{3r}, \\
\Omega_1 &\equiv \Omega_\lambda (|x_1| \leq \infty; \quad x_2 \leq -\theta), \quad \Omega_2 \equiv \Omega_r (|x_1| \leq \infty; \quad \theta \leq x_2), \\
\Omega_3 &\equiv \Omega_\theta (|x_1| \leq \infty; \quad -\theta \leq x_2 \leq \theta).
\end{aligned}$$

Применим к исследованию функциональных уравнений этап внешнего анализа, названного так, поскольку дифференциальные операции совершаются над внешними формами. С этой целью представим функциональные уравнения в виде

$$U_{3b}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = N_b^{-1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) [\omega_b(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \varepsilon_{53b} S_{3b}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)]. \quad (2.9)$$

Потребуем выполнения автоморфизма, одним из способов осуществления которого является обращение в ноль форм-вычетов Лере лишь в тех нулях  $\mathbf{a}_{2n\pm} = \mathbf{a}_{2n\pm}(\mathbf{a}_1)$  функции  $N_b^{-1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ , которые обеспечивают каждой из граничных задач в качестве носителей только свои пластины. Псевдодифференциальные уравнения вырождаются в алгебраические. С учетом принятых обозначений уравнение для левой пластины можно представить в форме

$$\begin{aligned} & -e^{-i\alpha_2 \cdot \theta} \{ B_{1\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2n-}) Q_\lambda(\alpha_1, -\theta) + B_{2\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2n-}) M_\lambda(\alpha_1, -\theta) + \\ & + B_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2n-}) U_{3\lambda \partial x_2}(\alpha_1, -\theta) + B_{4\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2n-}) U_{3\lambda}(\alpha_1, -\theta) + \\ & + B_{5\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2n-}) P(\alpha_1, -\theta) + B_{6\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2n-}) V_{x_2}(\alpha_1, -\theta) \} + S_\lambda(\alpha_1, \alpha_{2n-}) = 0, \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Аналогичный вид имеет второе псевдодифференциальное уравнение для правой пластины. Неизвестными в функциональных уравнениях являются задаваемые на торцах пластин с дефектами, то есть при  $x_2 = \pm\theta$  внешние воздействия. Их граничные значения в форме преобразований Фурье, представленные группами для левой и правой пластин, имеют вид

$$Q_\lambda(\alpha_1, -\theta), \quad M_\lambda(\alpha_1, -\theta), \quad U_{3\lambda \partial x_2}(\alpha_1, -\theta), \quad U_{3\lambda}(\alpha_1, -\theta), \quad P_\lambda(\alpha_1, -\theta), \quad V_{\lambda x_2}(\alpha_1, -\theta),$$

$$Q_r(\alpha_1, \theta), \quad M_r(\alpha_1, \theta), \quad U_{3r \partial x_2}(\alpha_1, \theta), \quad U_{3r}(\alpha_1, \theta), \quad P_r(\alpha_1, \theta), \quad V_{rx_2}(\alpha_1, \theta).$$

В каждой из двух групп псевдодифференциальных уравнений, в соответствии с постановкой той или иной граничной задачи можно задавать по три граничных условия на торцах пластин и на сечениях водного слоя, определяемых по торцам пластин. Остальные неизвестные определяются в

результате решения псевдодифференциальных уравнений. После внесения найденных неизвестных во внешние формы в (2.9) получаем упакованные блочные элементы для пластин и слоев жидкости над ними. Таким образом, этап внешнего анализа для рассматриваемой блочной структуры завершен, поскольку по построению блочный элемент основания, имеющий неограниченный носитель, является всегда упакованным. Таким же можно было считать и слой жидкости. Однако, полагая, что левая и правая пластины могут иметь разные толщины, рассматривается более сложная граничная задача с учетом этого разделения. Этап фактор-топологии предполагает осуществление сопряжения друг с другом блочных элементов как топологических многообразий с краем. Отношениями эквивалентности являются продиктованные интересами исследования граничные условия, принятые в рассматриваемых граничных задачах. Для сопряжения блочных элементов с основанием сопрягаются граничные перемещения и контактные напряжения пластин и основания. Для перемещений имеем

$$U_{3\lambda} + U_{3r} + U_{3\theta} = U_3.$$

Здесь  $U_{3\theta}$  – объем жидкости в области между торцами пластин и верхней границей поверхности жидкости. При сближившихся торцах пластин функция  $U_{3\theta}$  исчезает. Последнее соотношение можно, выделив контактные напряжения  $G_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $G_{3r}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $G_3(\alpha_1, \alpha_2)$ , представить в виде

$$\begin{aligned} & N_{\lambda}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left\langle \omega_{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon_{53\lambda} i R_{\lambda} [G_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) - W_{\lambda}] \right\rangle + U_{3\theta} + \\ & + N_r^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left\langle \omega_r(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon_{53r} i R_r [G_{3r}(\alpha_1, \alpha_2) - W_r] \right\rangle = \varepsilon_6^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2) G_3(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что  $G_3(\alpha_1, \alpha_2) = -G_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) - G_{3r}(\alpha_1, \alpha_2)$ , и введя обозначения  $G_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) = G^{-}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $G_{3r}(\alpha_1, \alpha_2) = G^{+}(\alpha_1, \alpha_2)$  получим следующие

функциональные уравнения типа Винера – Хопфа для определения контактных напряжений для двух случаев:  $\theta > 0$  и  $\theta = 0$  при  $U_{3\theta\lambda} = 0$  в виде

$$M_{r\lambda}(\alpha_1, \alpha_2)G^+(\alpha_1, \alpha_2) = G^-(\alpha_1, \alpha_2) + T_{r\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) + U_{3\theta\lambda}.$$

Функции  $G^+(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $G^-(\alpha_1, \alpha_2)$  регулярны по параметру  $\alpha_2$  в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} -[N_\lambda^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\varepsilon_{53\lambda}iR_\lambda + \varepsilon_6^{-1}K(\alpha_1, \alpha_2)] &= M_\lambda(\alpha_1, \alpha_2), \\ [N_r^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\varepsilon_{53r}iR_r + \varepsilon_6^{-1}K(\alpha_1, \alpha_2)] &= M_r(\alpha_1, \alpha_2), \\ N_\lambda^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\omega_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) - N_\lambda^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\varepsilon_{53\lambda}iR_\lambda W_\lambda &= T_\lambda(\alpha_1, \alpha_2), \\ N_r^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\omega_r(\alpha_1, \alpha_2) - N_r^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\varepsilon_{53r}iR_r W_r &= T_r(\alpha_1, \alpha_2), \\ M_{r\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) &= M_r(\alpha_1, \alpha_2)M_\lambda^{-1}(\alpha_1, \alpha_2), \quad U_{3\theta\lambda} = U_{3\theta}, \\ T_{r\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) &= [T_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) - T_r(\alpha_1, \alpha_2)]M_\lambda^{-1}(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

Дальнейший анализ полученных функциональных уравнений и их решение детально изложено в работах [3, 4]. Анализ полученных функциональных уравнений, которые являются более сложными, чем в случае отсутствия слоя жидкости. Поведение контактных напряжений в зоне сближения пластин описывается функциями, приведенными далее. При исследовании решения первого уравнения,  $\theta > 0$ , т. е. в случае не скрытого дефекта, а легко наблюдаемого, имеются следующие свойства контактных напряжений между пластинами и основанием:

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &= \sigma_{1\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 < -\theta, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &= \sigma_{1r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 > \theta. \end{aligned}$$

При  $\theta = 0$ , т. е., когда дефект является скрытым, контактные напряжения в зоне близости фрагментов лопнувшего покрытия приобретают сингулярную составляющую и имеют поведение вида

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4\lambda}(x_1, x_2)\operatorname{sgn} x_2, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2r}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3r}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4r}(x_1, x_2)\operatorname{sgn} x_2. \end{aligned}$$

Вещественные напряжения с учетом гармонических воздействий имеют вид

$$\sigma_{3b}(x_1, x_2, t) = \operatorname{Re} \sigma_{3b}(x_1, x_2) e^{-i\omega t} \equiv \operatorname{Re} \sigma_{3b}(x_1, x_2) \cos \omega t + \operatorname{Im} \sigma_{3b}(x_1, x_2) \sin \omega t.$$

**Замечание.** Принимая во внимание результаты работ по исследованию стартовых землетрясений, на основании последних формул можно сделать следующие выводы. В случае, если покрытие состоит из материала с более высокими прочностными свойствами, то появление скрытого дефекта влечет за собой разрушение основания подшипника прочными частями покрытия. При этом менее разрушительно образование нескрытого дефекта с  $\theta > 0$ : исчезает целый фрагмент покрытия, но контактные напряжения в зоне покрытия оказываются энергетическими. В том случае, если прочностные свойства материала покрытия уступают материалу основания, то такое покрытие при появлении скрытого дефекта имеет меньше шансов разрушить более прочное основание. В работе исследован простейший вариант из большого разнообразия разрушения смазываемого подшипника при наличии защитного покрытия, а также и без него.

### 3 ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕОРИИ ТРЕЩИН НОВОГО ТИПА В СРЕДАХ С ДЕФЕКТНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

#### 3.1 О трещинах нового типа в предоползневых структурах

В параграфе дается построение методом блочного элемента модели предоползневого состояния блочной структуры, состоящей из водонасыщенной среды и упругого покрытия, с учетом образования трещины в покрытии, (см. рисунок 15).



Рисунок 15 – Трещины в предоползневом состоянии. Начало



Рисунок 15 – Трещины в предоползневом состоянии. Окончание

Пространственная предоползневая структура занимает неограниченную цилиндрическую область, в сечении которой находится третий квадрант. Она заполнена средой, описываемой анизотропным уравнением Гельмгольца, предельно текучей среди других водонасыщенных сред. С учетом физико-механических свойств предоползневой структуры она представляет собой вертикальную деформируемую сдерживающую стенку с деформируемым горизонтальным покрытием, называемые саркофагом оползневой среды. Для построения модели, адекватной сформулированной, рассматривается граничная задача для трехмерного уравнения Гельмгольца в указанной области с учетом наличия деформируемых стенки и покрытия. Методом блочного элемента строится точное решение граничной задачи для принятых покрытий на границе из мембраны. Исследуются свойства трещины, образовавшейся в мембране саркофага, и последствия ее развития для разрушения предоползневой структуры в построенной модели. Все результаты, построенные для уравнений Гельмгольца, благодаря подходу, изложенному в публикациях авторов по представлению

решений граничных задач для системы уравнений Ламе с помощью блочных элементов, переносятся на материалы различных реологических свойств.

Оползневые и селевые явления относятся к числу сложнейших для прогноза процессов, наносящих огромный ущерб обществу, как материальный, так и связанный с жертвами. Сложность прогнозирования этих процессов заключается в большом комплексе физических, механических, гидромеханических, реологических, пластических явлений, тесно переплетающихся с геометрическими параметрами рельефов и ландшафтов территорий (см. рисунок 15). Именно это обстоятельство не позволяет, кроме отдельных частных случаев, построить строго обоснованную математическую теорию и модель этих процессов. Создание теории и моделей этих явлений даст возможность получить достаточно достоверные данные о процессах, протекающих в зоне, опасной для оползней, и оценить шаги, позволяющие штатно инициировать или упредить оползневые явления. Медленное моделирование оползневых явлений в значительной степени было связано с отсутствием удобного для этих целей математического аппарата. С созданием метода блочного элемента наблюдается определенный прогресс в этом направлении в связи с возможностью моделировать сложные процессы, описываемые линейными и нелинейными граничными задачами для систем дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. Математически этот раздел механики сплошных сред относится к числу самых сложных и наименее развитых разделов смешанных задач, так и не решенных до конца.

Часто для решения этих проблем ставилась крайне упрощенная задача, предполагавшая, что в той или иной задаче рассматривается лишь растекающаяся среда без оценки условий возникновения подобных явлений. Сами области, занятые средой, предполагались простейшими. Лишь небольшое количество исследований посвящено попыткам учета деформируемости как внутренней массы предоползневой структуры, так и сдерживающих их покрытий. В настоящей работе применяется новый разработанный в Кубанском



государственном университете метод блочного элемента [6]. Из 10 типов предположенных структур строится модель наименее исследованного из них типа, называемого горизонтально распространяющимся. Область этого типа предположенной структуры представляет собой вертикальную сдерживающую стенку с горизонтальным покрытием. В этой области сосредоточена оползневая масса в виде размягченной текучей водонасыщенной среды. Предельным ее случаем наибольшей текучести является анизотропная модель, описываемая анизотропным уравнением Гельмгольца. Стенка и покрытие являются деформируемыми и сдерживают растекание массы. При начале оползневой процесса происходит либо прорыв вертикальной стенки, либо разрыв верхнего покрытия. Рассматриваемая задача предельно приближена к реальной. В учет принято деформирование всех контактирующих объектов, а среда обладает реологией, предельной текучести, описываемой анизотропным уравнением Гельмгольца. Кроме того, учитывая, что начало оползневой процесса может быть спровоцировано внешним динамическим воздействием, рассматривается возможность его наличия на покрытии и стенке при гармонической вибрации с произвольной частотой.

В настоящее время разработана строгая теория блочных структур, в основе которой лежит метод блочного элемента. Ее достоинство состоит в возможности исследовать граничные задачи практически в любых областях, поскольку любой объект или конструкцию можно рассматривать как некоторую реальную либо виртуальную блочную структуру. В то же время случаев применения этой теории к реальным задачам мало, что затрудняет ее использование в прикладных задачах. В настоящей работе этот подход применяется к часто используемому в приложениях уравнению Гельмгольца в области трехмерного прямоугольного клина при наличии произвольных граничных условий. Следует отметить, что исследованию уравнения Гельмгольца при решении различных фундаментальных и прикладных проблем, посвящено большое количество работ. В первую очередь это работы в слоистых областях [80, 81], в которых для исследования использован метод интегральных преобразований и приведен достаточно полный список

цитируемой литературы этого направления исследований. В работах [82–88] разработан и применен лучевой метод, эффективный при высоких частотах в граничных задачах в произвольных областях, в том числе для уравнения Гельмгольца.

В работах [89–92] развивается метод представления решений граничных задач блочными элементами. Далее рассматривается трехмерная граничная задача Неймана для уравнения Гельмгольца, для которой методом блочного элемента строятся решения для произвольных граничных условий. Решение строится в интегральном виде в клиновидной области в форме упакованного и распакованного блочных элементов. Метод блочного элемента достаточно просто применяется и может быть использован для исследования более сложных задач.

**Постановка задачи.** Примем прямоугольную систему координат, направив оси  $ox_1$ ,  $ox_3$  горизонтально, а ось  $ox_2$  – вертикально вверх (см. рисунок 16).

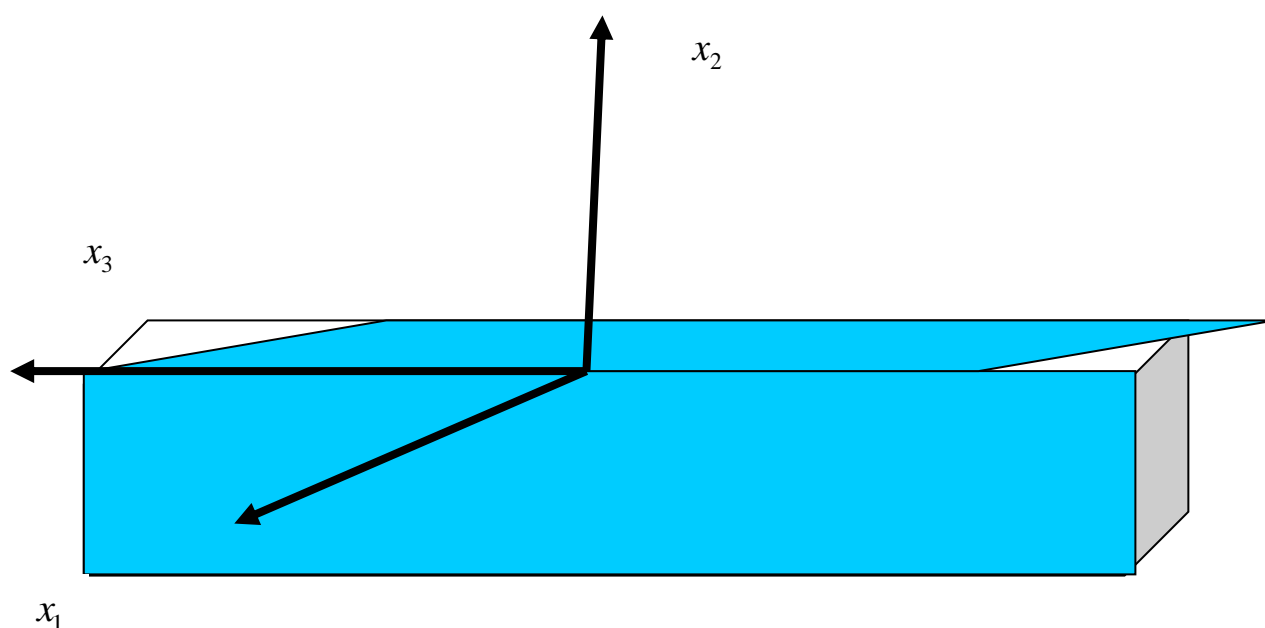


Рисунок 16 – Саркофаг покрывает оползнеопасную массу

В условиях гармонических воздействий рассматривается граничная задача для трехмерного уравнения Гельмгольца в прямоугольной области

$\Omega(|x_3| \leq \infty, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0)$ . На границах области  $\Omega$  задаются условия Неймана. Задачи такого рода возникают при исследовании акустических свойств неограниченных областей типа клина, а также при подготовке исходных данных для исследования в таких областях более сложных граничных задач для уравнений Ламе, Навье – Стокса, Максвелла и др. Построение решений в форме упакованных блочных элементов – необходимая часть исследования при изучении блочных структур. Указанная граничная задача ранее рассматривалась в ограниченной области, прямоугольнике, где методом блочного элемента с введением касательного расслоения границы были построены псевдодифференциальные уравнения. Приведем одно из них для граничной задачи:

$$\begin{aligned} & \left[ A_{11} \partial^2 x_1 + A_{22} \partial^2 x_2 + A_{33} \partial^2 x_3 + A \right] \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ & K_1 \Phi_1 = \int_{-a-c}^a \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_3^1 \varphi_1) \exp i \left[ \alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1 \right] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ & + \int_{-c-b}^c \int_{-c}^b A_{11} (\varphi'_{22} + i\alpha_1^1 \varphi_2) \exp i \left[ -\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1 (x_1^2 - b) \right] dx_1^2 dx_2^2 + \\ & + \int_{-a-c}^a \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_3^1 \varphi_3) \exp i \left[ -\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b \right] dx_1^3 dx_2^3 - \\ & - \int_{-c-b}^c \int_{-c}^b A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^1 \varphi_4) \exp i \left[ \alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 (x_1^4 + b) \right] dx_1^4 dx_2^4 + \\ & + \int_{-a-b}^a \int_{-a}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^1 \varphi_5) \exp i \left[ \alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^5 - b) \right] dx_1^5 dx_2^5 + \\ & + \int_{-a-b}^a \int_{-a}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^1 \varphi_6) \exp i \left[ -\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^6 - b) \right] dx_1^6 dx_2^6. \end{aligned}$$

Здесь постоянные  $a, b, c$  определяют прямоугольник, ограниченный, если все постоянные ограничены, или полуограниченный, если среди постоянных имеются бесконечные.

В настоящей работе применяется вариант метода блочного элемента, основанный на привязке локальных систем координат к единой координатной системе, что в связи с формой области  $\Omega$  позволяет выполнить исследование более наглядно. Далее рассматривается трехмерное анизотропное уравнение Гельмгольца с сокращенным временным множителем  $e^{-i\omega t}$

$$\left[ \partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + A_{33} \partial^2 x_3 + Ap^2 \right] u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

в области  $\Omega(|x_3| \leq \infty, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0)$ . Здесь  $p$  может быть комплексным числом.

Для применения метода блочного элемента к граничной задаче в блочной структуре необходимо выполнить три алгоритма: внешней алгебры, внешнего анализа и построение фактор-топологии. Ввиду рассмотрения лишь одного блочного элемента необходимость в последнем алгоритме отпадает.

Рассмотрим для этого уравнения граничную задачу Неймана.

Считаем, что граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u(0, x_2, x_3)}{\partial x_1} = f_2(x_2, x_3), \quad \frac{\partial u(x_1, 0, x_3)}{\partial x_2} = f_1(x_1, x_3). \quad (3.1)$$

Здесь произвольные функции  $f_n$  обладают свойствами, достаточными для разрешимости соответствующих граничных задач в пространствах медленно растущих обобщенных функций, которые будут оговорены далее. Поскольку область  $\Omega$  содержит бесконечно удаленные точки, в том случае, если в граничной задаче появляются волновые функции, ищется решение с применением принципа излучения.

Применяя преобразование Фурье к дифференциальному уравнению по параметру  $x_3$ , получаем дифференциальное уравнение с параметром  $\alpha_3$  вида

$$\left( \partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2 \right) u(x_1, x_2, \alpha_3) = 0, \quad k^2 = Ap^2 - A_{33} \alpha_3^2.$$

**Метод решения.** Используя в области  $\Omega$  один из способов касательного расслоения границы, с учетом принятия единой системы координат после использования двумерного преобразования Фурье и введения внешних форм приходим к функциональному уравнению вида

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_{\partial\Omega} \omega,$$

$$\omega = \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 - i\alpha_1 u(0, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 +$$

$$+ \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 - i\alpha_2 u(x_1, 0, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

Здесь приняты обозначения

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \iiint_{\Omega} u(x_1, x_2, x_3) e^{i\langle \alpha \mathbf{x} \rangle} dx_1 dx_2 dx_3, \quad \langle \alpha \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{R^3} U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) e^{-i\langle \alpha \mathbf{x} \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \quad (3.2)$$

С учетом вида системы координат правую часть в функциональном уравнении можно представить в форме

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 - i\alpha_1 \int_{-\infty}^0 u(0, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 - i\alpha_2 \int_{-\infty}^0 u(x_1, 0, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

Вычислив одномерные интегралы, которые являются преобразованиями Фурье соответствующих функций, можем функциональное уравнение представить в форме

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\
& = \frac{\partial U(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 U(0, \alpha_2, \alpha_3) + \frac{\partial U(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 U(\alpha_1, 0, \alpha_3).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

В дальнейшем прописной буквой будут обозначаться преобразования Фурье, вычисленные от функций, представленных соответствующей строчной буквой. Внесем в правую часть функционального уравнения (3.3) значения функций (3.1), предварительно вычислив преобразования Фурье по всем координатам. Имеем

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = F_2(\alpha_2, \alpha_3) - i\alpha_1 U(0, \alpha_2, \alpha_3) + F_1(\alpha_1, \alpha_3) - i\alpha_2 U(\alpha_1, 0, \alpha_3).$$

Для выполнения алгоритма внешнего анализа факторизуем коэффициент функционального уравнения по каждому параметру, что в данном случае выполняется тривиально

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) = (\alpha_1 - \alpha_{1-})(\alpha_1 + \alpha_{1-}) = (\alpha_2 - \alpha_{2-})(\alpha_2 + \alpha_{2-}), \\
& \alpha_{1-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 - k^2}, \quad \alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - k^2}, \quad \text{Im } \alpha_{1-} \leq 0, \quad \text{Im } \alpha_{2-} \leq 0.
\end{aligned}$$

Условие автоморфизма для носителя и функций на нем приводит к псевдодифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned}
& F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - i\alpha_1 U(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) + F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3) - i\alpha_{2-} U(\alpha_1, 0, \alpha_3) = 0, \\
& F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) - i\alpha_{1-} U(0, \alpha_2, \alpha_3) + F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - i\alpha_2 U(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) = 0.
\end{aligned}$$

Неизвестными в псевдодифференциальном уравнении являются функции и функционалы

$$U(0, \alpha_2, \alpha_3), \quad U(\alpha_1, 0, \alpha_3), \quad U(0, \alpha_{2-}, \alpha_3), \quad U(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3).$$

Решение псевдодифференциальных уравнений ищется с требованием обращения в ноль вне области  $\Omega$  решений граничных задач. Это приводит после преобразований к следующему виду функционального уравнения:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}} \left\langle (\alpha_{2-} - \alpha_2) [\alpha_{1-}F_1(\alpha_1, \alpha_3) - \alpha_1F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3)] + \right. \\ \left. + (\alpha_{1-} - \alpha_1) [\alpha_{2-}F_2(\alpha_2, \alpha_3) - \alpha_2F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3)] \right\rangle.$$

Тогда решение в преобразованиях Фурье, представляющее упакованный блочный элемент, принимает вид

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} \frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}} \left\langle (\alpha_{2-} - \alpha_2) [\alpha_{1-}F_1(\alpha_1, \alpha_3) - \alpha_1F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3)] + \right. \quad (3.4) \\ \left. + (\alpha_{1-} - \alpha_1) [\alpha_{2-}F_2(\alpha_2, \alpha_3) - \alpha_2F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3)] \right\rangle.$$

Сократив одинаковые сомножители, функцию  $U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  можно представить в виде

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = i \frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}} \left\langle \frac{[\alpha_{1-}F_1(\alpha_1, \alpha_3) - \alpha_1F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3)]}{(\alpha_2 + \alpha_{2-})} + \right. \\ \left. + \frac{[\alpha_{2-}F_2(\alpha_2, \alpha_3) - \alpha_2F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3)]}{(\alpha_1 + \alpha_{1-})} \right\rangle.$$

Полученное представление позволяет сформулировать условия на задаваемые граничные функции.

Для построения математической модели предоползневой структуры необходимо взятую анизотропную среду накрыть мембранным саркофагом, сдерживающим растекание. Для этого построим математическую модель

саркофага, включающего вертикальную стенку и горизонтальное покрытие. Применим метод блочного элемента.

Граничная задача для горизонтального покрытия имеет формулировку

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_3 + p_1^2)w_1(x_1, x_3) = t_1(x_1, x_3), \quad |x_3| \leq \infty, \quad -\infty < x_1 \leq 0, \quad \partial x_1 w_1(0, x_3) = g_1(0, x_3).$$

Граничная задача для вертикальной стенки описывается уравнением и условиями

$$(\partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p_2^2)w_2(x_2, x_3) = t_2(x_2, x_3), \quad |x_3| \leq \infty, \quad -\infty < x_2 \leq 0, \quad \partial x_2 w_2(0, x_3) = g_2(0, x_3).$$

Здесь  $t_1(x_1, x_3)$  и  $t_2(x_2, x_3)$  – амплитуды внешних воздействий на саркофаг,  $g_1(0, x_3)$  и  $g_2(0, x_3)$  – углы поворота угловых концов стенки и покрытия. Стенка и покрытие плотно сопрягаются с удерживаемой массой.

Учитывая, что функция  $u(x_1, x_2, x_3)$  представляет собой потенциал водонасыщенной массы, а  $w_1$  и  $w_2$  – нормальные к границе саркофага амплитуды движений, то должны выполняться условия

$$\begin{aligned} w_1(x_1, x_3) &= \partial x_2 u(x_1, x_2, x_3), \quad x_2 = 0, \quad -\infty < x_1 \leq 0, \\ w_2(x_2, x_3) &= \partial x_1 u(x_1, x_2, x_3), \quad x_1 = 0, \quad -\infty < x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

После вычислений для модели растекающегося оползня получаем следующее представление:



$$f_1(x_1, x_3) = \mathbf{F}_2^{-1}(x_1, x_3) \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_{1-}^{-1} T_1(\alpha_{1-}, \alpha_3) - T_1(\alpha_1, \alpha_3)}{(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 - p_1^2)} - \frac{\alpha_{1-} G_1(0, \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_{1+})} \right],$$

$$f_2(x_2, x_3) = \mathbf{F}_2^{-1}(x_2, x_3) \left[ \frac{\alpha_2 \alpha_{2-}^{-1} T_2(\alpha_{2-}, \alpha_3) - T_2(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - p_2^2)} - \frac{\alpha_{2-} G_2(0, \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_{2+})} \right],$$

$$G_r(0, \alpha_3) = \int_{-\infty}^0 g_r(0, x_3) e^{i\alpha_3 x_3} dx_3, \quad r = 1, 2.$$

Внесение этих значений функций в формулы (3.4) и (3.2) позволяет получить аналитическое представление в форме интегралов модели горизонтально распространяющегося оползня.

Далее методом блочного элемента исследуется проблема возможности возникновения стартового землетрясения и степень сейсмичности в зоне с ограниченными разломами, которые могут возникнуть в саркофаге или в ином покрытии, но горизонтально расположенными (см. рисунок 17).

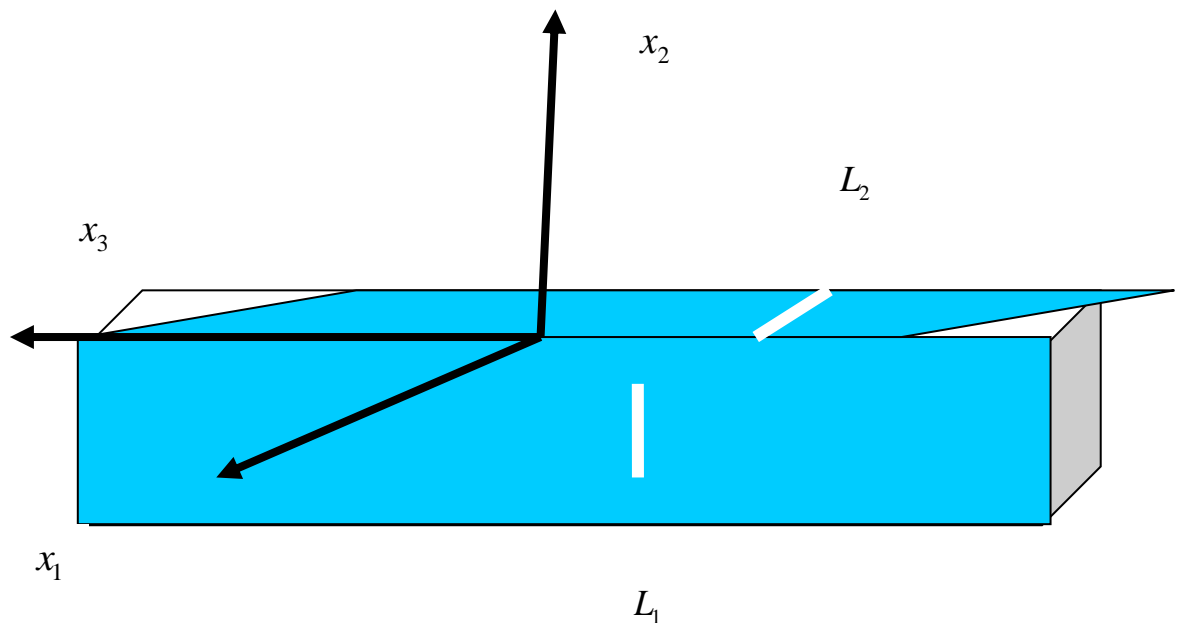


Рисунок 17 – В саркофаге образуются трещины  $L$  нового типа

Приближенно построены интегральные уравнения для случаев конечного и полубесконечного разломов и выведена структура символа ядра интегрального уравнения. Последнее может использоваться не только для анализа сингулярных

особенностей в граничной задаче, но и для изучения волновых процессов на разломах в динамических задачах.

### **Углубленное исследование трещины в саркофаге или в покрытии из пластин Кирхгофа**

Для более глубокого исследования задачи о разрушении саркофага с трещиной, далее изучается поведение трещин нового типа разных размеров – бесконечного, полубесконечного и конечного. В основном используются результаты первой главы и полученные выше результаты.

Считаем, что покрытие, представляет собой пластину Кирхгофа, имеющую три типа дефектов: бесконечный, разделяющий пластину на две полубесконечные пластины, называемые ради краткости плитами, полубесконечный, когда дефект представляет полубесконечную трещину, и конечный, когда дефект является конечной трещиной. Полагаем, что с некоторого момента берега всех трех типов дефектов с параллельными границами удалены друг от друга на расстояние  $2\theta$  и находятся на линейно деформируемом основании. Считаем, что пространство между берегами дефекта является пустым, а на торцах плит действуют внешние силы, направленные по правилу внешних векторов. В системе координат  $x_1x_2x_3$  с началом в плоскости  $x_1x_2$ , совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью  $ox_3$ , направленной вверх по нормали к пластине, осью  $ox_1$ , направленной по касательной к границе дефекта, осью  $ox_2$  – по нормали к его границе. Область, занятая левой от дефекта плитой, обозначается  $\lambda$  и описывается соотношениями  $|x_1| \leq \infty$ ,  $x_2 \leq -\theta$  а занятая правой – индексом  $r$  и координатами  $|x_1| \leq \infty$ ,  $\theta \leq x_2$ . Ограничимся случаем лишь вертикальных воздействий на пластины, считая, что на торцах могут задаваться отличные от нуля изгибающие моменты и перерезывающие силы. Уравнение Кирхгофа для фрагментов  $b$  покрытия,  $b = \lambda, r$ , занимающих области  $\Omega_b$  с границами  $\partial\Omega_b$ , при указанных вертикальных статических воздействиях напряжением  $t_{3b}$  сверху и  $g_{3b}$  снизу имеет вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1} \left( \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3},$$

$$Q_b = -D_{b2} \left( \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = f_{4b}(\partial \Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial \Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H \partial x_2} = f_{2b}(\partial \Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H}{\mu}.$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся плиты, имеет вид

$$u_{3m}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \sum_{n=1}^2 \iint_{\Omega_n} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) g_{3n}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad x_1, x_2 \in \Omega_m, \quad m = \lambda, r, \theta,$$

$$\Omega_\lambda (|x_1| \leq \infty; \quad x_2 \leq -\theta), \quad \Omega_r (|x_1| \leq \infty; \quad \theta \leq x_2), \quad \Omega_\theta (|x_1| \leq \infty; \quad -\theta \leq x_2 \leq \theta), \quad n = \lambda, r,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$u_{3m}(x_1, x_2) = \frac{1}{\varepsilon_6 4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int K(\alpha_1, \alpha_2) G(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (3.5)$$

$K(\alpha_1, \alpha_2)$  – аналитическая функция двух комплексных переменных  $\alpha_k$ , в частности, мероморфная (ее многочисленные примеры приведены в [17, 53]);  $M_b$  и  $Q_b$  – изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат;  $x_1, x_2$ ;  $h_b$  – толщины пластин;  $H$  – размерный параметр подложки, например, толщина слоя;  $E_b$  – модули Юнга плит;  $\nu_b$  – их коэффициенты Пуассона. Обозначения заимствованы из работы [68].  $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$  – двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно.

**Метод исследования.** Рассматривая плиты и основание (3.5) как блочную структуру, состоящую из трех деформируемых блоков, применим для ее исследования метод блочного элемента. Этот метод, описанный в работе [87], предполагает первый шаг – погружение средствами внешней алгебры граничной задачи в топологическую структуру. В результате строится функциональное уравнение граничной задачи для блочной структуры. Многошаговый алгоритм дальнейших исследований функционального уравнения, уже не имеющих никакого отношения к аппарату внешней алгебры, назван авторами внешним анализом в теории блочного элемента [87]. Он включает дифференциальную факторизацию матриц-функций с элементами из нескольких комплексных переменных, реализацию автоморфизма, состоящую в вычислении форм-вычетов Лере, либо неполных функциональных уравнений Винера – Хопфа, построение псевдодифференциальных уравнений, извлечение из них интегральных уравнений, диктуемых конкретными граничными условиями граничной задачи, решение интегральных уравнений и получение интегрального представления граничной задачи в каждом блоке в форме «упакованного» блочного элемента. Наконец, «склейка» решений каждого блока, состоящая в построении фактор-топологии некоторых топологических пространств, являющихся декартовыми произведениями топологических пространств носителей и решений. Применяя описанный подход, получим функциональное уравнение граничной задачи

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} = - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.6)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}), \quad b = \lambda, r.$$

Здесь  $\omega_b$  – участвующие в представлении внешние формы [84–86], имеющие с учетом выбора системы координат вид

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ - \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right] dx_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \right\}, \quad b = \lambda, r,$$

а в частном случае прямолинейной границы представимы формулами

$$\omega_\lambda = e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ - \left[ i\alpha_2 M_\lambda D_\lambda^{-1} - Q_\lambda D_\lambda^{-1} - (\alpha_2^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_2 \left[ \alpha_2^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2 \right] u_{3\lambda} \right] \right\} dx_1, \\ \omega_r = -e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ - \left[ i\alpha_2 M_r D_r^{-1} - Q_r D_r^{-1} - (\alpha_2^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_2 \left[ \alpha_2^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2 \right] u_{3r} \right] \right\} dx_1. \quad (3.7)$$

В формуле (3.6) при интегрировании граница  $\partial\Omega_b$  представляет собой два торца левой и правой пластин Кирхгофа, если дефект бесконечный и разделяет пластины надвое. Поскольку область, занятая покрытием, рассматривается как топологическое многообразие с краем, то на границе вводятся локальные координаты, ориентация которых согласована с ориентацией внутренности многообразия. Если дефект полубесконечной или конечной, то границей будут берега трещины с соответствующей ориентацией. Для обеспечения

автоморфизма, вычислив формы-вычеты Лере по параметру  $\alpha_2$ , в том числе в двукратных полюсах, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи с учетом принятых обозначений (3.7) можем представить в виде

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{2-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}) \right\rangle = 0, \\ & \alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2-} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i[3\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \right. \\ & \left. + \varepsilon_{53\lambda} S'_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda, \quad \partial\Omega_\lambda = \{-\infty \leq x_1 \leq \infty, \quad x_2 = -\theta\}. \end{aligned}$$

Производную вычисляем по параметру  $\alpha_2$ .

Применяя в дальнейшем этот метод, приходим к системе функциональных уравнений вида

$$\begin{aligned} & \left[ \varepsilon_{53r} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2) \right] G^+(\alpha_1, \alpha_2) = \\ & = - \left[ \varepsilon_{53\lambda} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2) \right] G^-(\alpha_1, \alpha_2) + U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2), \\ & + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \left[ A_\lambda k_{1\lambda 0} + B_\lambda k_{2\lambda 0} + A_r k_{1r 0} + B_r k_{2r 0} + \right. \\ & \left. + \varepsilon_{53\lambda} T^+(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon_{53r} T^-(\alpha_1, \alpha_2) \right], \quad \theta > 0, \\ & U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\theta}^{\theta} u_3(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1)} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \varepsilon_{53r} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2) \right] G^+(\alpha_1, \alpha_2) = \\
& = - \left[ \varepsilon_{53\lambda} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2) \right] G^-(\alpha_1, \alpha_2) + \\
& + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \left[ A_\lambda k_{1\lambda 0} + B_\lambda k_{2\lambda 0} + A_r k_{1r 0} + B_r k_{2r 0} + \right. \\
& \left. + \varepsilon_{53\lambda} T^+(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon_{53r} T^-(\alpha_1, \alpha_2) \right], \quad \theta = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $A_\lambda, B_\lambda, A_r, B_r$  – выражения сложного вида, которые ради краткости опущены. Заметим, что представленные функциональные уравнения в качестве неизвестных имеют не только функции  $G^+(\alpha_1, \alpha_2), G^-(\alpha_1, \alpha_2)$ , но и функционалы  $G^+(\alpha_1, \alpha_{2+}), G^-(\alpha_1, \alpha_{2-}), G^+(\alpha_1, \alpha_{2+}), G^-(\alpha_1, \alpha_{2-})$ , которые линейно входят в  $k_{1\lambda 0}, k_{2\lambda 0}, k_{1r 0}, k_{2r 0}$  и нуждаются в определении. Получили два разных функциональных уравнения Винера – Хопфа. Первое – обобщенное функциональное уравнение Винера – Хопфа, в связи с присутствием функции  $U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2)$ . Оно решается изложенным в [55] обращением системы двух интегральных уравнений второго рода с вполне непрерывными в некотором пространстве непрерывных с весом функций, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
X^+ - \left\{ -\frac{M_1^+}{M_2^-} Y^- e^{-i2\alpha_2\theta} \right\}^+ &= \left\{ \frac{1}{M_2^-} \Phi e^{-i\alpha_2\theta} \right\}^+, \\
Y^- + \left\{ \frac{M_2^-}{M_1^+} X^+ e^{i2\alpha_2\theta} \right\}^- &= \left\{ \frac{1}{M_1^+} \Phi e^{i\alpha_2\theta} \right\}^-, \\
M_1 &= M_1^+ M_1^-, \quad M_2 = M_2^+ M_2^-, \\
M_2^+ G^+ &= X^+, \quad M_1^- G^- = Y^-, \\
M_1 &= \left[ \varepsilon_{53\lambda} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2) \right], \\
M_2 &= \left[ \varepsilon_{53r} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2) \right].
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения работы [55].

Решив граничные задачи, определив функции  $G^+(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $G^-(\alpha_1, \alpha_2)$ , требуется также найти значения функционалов  $G^+(\alpha_1, \alpha_{2+})$  и  $G^-(\alpha_1, \alpha_{2-})$ , а также

продифференцированные по второму параметру функционалы вида  $G_+'(\alpha_1, \alpha_{2+})$ ,  $G_-'(\alpha_1, \alpha_{2-})$ . Для их нахождения используем тот факт, что построенные таким образом решения обладают следующей структурой:

$$\begin{aligned} G_+(\alpha_1, \alpha_2) &= C_{1+}(\alpha_1, \alpha_2)G_+(\alpha_1, \alpha_{2+}) + C_{2+}(\alpha_1, \alpha_2)G_-(\alpha_1, \alpha_{2-}) + \\ &+ C_{3+}(\alpha_1, \alpha_2)G_+'(\alpha_1, \alpha_{2+}) + C_{4+}(\alpha_1, \alpha_2)G_-'(\alpha_1, \alpha_{2-}) + C_{5+}(\alpha_1, \alpha_2), \\ G_-(\alpha_1, \alpha_2) &= C_{1-}(\alpha_1, \alpha_2)G_+(\alpha_1, \alpha_{2+}) + C_{2-}(\alpha_1, \alpha_2)G_-(\alpha_1, \alpha_{2-}) + \\ &+ C_{1-}(\alpha_1, \alpha_2)G_+'(\alpha_1, \alpha_{2+}) + C_{2-}(\alpha_1, \alpha_2)G_-'(\alpha_1, \alpha_{2-}) + C_{3-}(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Продифференцируем первое и второе уравнения по  $\alpha_2$ .

Здесь функции  $C_{n+}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $C_{n-}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $n=1,2,3$  являются известными, они достаточно просто находятся из вышеприведенных выражений, а  $G_+(\alpha_1, \alpha_{2-})$ ,  $G_-(\alpha_1, \alpha_{2+})$ ,  $G_+'(\alpha_1, \alpha_{2+})$ ,  $G_-'(\alpha_1, \alpha_{2-})$  требуется определить. Для их определения положим в первом уравнении и в продифференцированном  $\alpha_2 = \alpha_{2+}$ , а во втором и продифференцированном уравнении –  $\alpha_2 = \alpha_{2-}$ . Получаем алгебраическую систему для определения всех вышеперечисленных неизвестных, решив которую, находим искомые функции. Внесение найденных решений в соотношения во внешние формы в зависимости от поставленной граничной задачи дает возможность полностью определить напряженно-деформированное состояние покрытия с любым из рассматриваемых дефектов или без них.

Второе функциональное уравнение является уравнением Винера – Хопфа. Способы построения его точных или приближенных решений можно найти в работах [17, 55]. Достаточно просто доказываем, что решение первого функционального уравнения для  $\theta > 0$  приводит к следующим свойствам контактных напряжений между плитами и подложкой на краях:

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &= \sigma_{1\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 < -\theta, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &= \sigma_{1r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 > \theta. \end{aligned}$$



Здесь  $\sigma_{1b}(x_1, x_2)$ ,  $b = \lambda, r$  – непрерывные по обеим координатам функции для достаточно гладких  $t_{3b}$ ,  $b = \lambda, r$  [17, 55]. Обращение второго уравнения приводит при  $x_2 \rightarrow 0$  к следующим свойствам решений

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4\lambda}(x_1, x_2)\operatorname{sgn} x_2, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2r}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3r}(x_1, x_2)\ln|x_2| + \sigma_{4r}(x_1, x_2)\operatorname{sgn} x_2. \end{aligned}$$

Функции  $\sigma_{nb}(x_1, x_2)$ ,  $b = \lambda, r$ ;  $n = 2, 3$  непрерывны по обоим параметрам.

**Полугограниченные и ограниченные разломы или дефекты** (см. рисунок 16). При дальнейшем изучении установлен основной результат исследования: бесконечные и полубесконечные дефекты всегда имеют сингулярные концентрации напряжений на краях плит при сближении берегов дефекта, несущие опасность разрушения конструкции с покрытием. Степень разрушения конструкций уменьшается по мере сокращения размера дефекта конечной длины. Степень разрушения определяется сочетаниями ряда параметров. Последнее установлено путем исследования коэффициентов при особенностях. Позволяют оценить возможность решения интегральных уравнений следующие приближенные формулы для решения краевой задачи, которые представлены структурно, без конкретизации всех параметров в связи со сложностью:

$$\begin{aligned} K_0(\alpha_1) &= -D \left( 1 + \frac{B_\lambda L_-(\alpha_{2\lambda-}) + B_r L_+(\alpha_{2r+})}{[(B_r L_+(\alpha_{2r+}) + B_\lambda L_-(\alpha_{2\lambda-})) - \varepsilon_6^{-1} k_\infty(\alpha_1)]} \right), \\ D &= -A_\lambda Q_\lambda(\alpha_1, -\theta) + A_r Q_r(\alpha_1, \theta), \quad \theta \geq 0, \\ G_-(\alpha_1, \alpha_2) &= L_-(\alpha_2) \frac{1}{\varepsilon_6^{-1} k_\infty(\alpha_1)} K_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad G_+(\alpha_1, \alpha_2) = L_+(\alpha_2) \frac{1}{\varepsilon_6^{-1} k_\infty(\alpha_1)} K_0(\alpha_1, \alpha_2), \\ A_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) &= -\frac{e^{-i\alpha_2\theta}}{\alpha_{2\lambda-}} \dots B_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{e^{-i(\alpha_2 - \alpha_{2\lambda-})\theta}}{\alpha_{2\lambda-}} \dots A_r(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{e^{i\alpha_2\theta}}{\alpha_{2r+}} \dots B_r(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{e^{i(\alpha_2 - \alpha_{2r+})\theta}}{\alpha_{2r+}}. \end{aligned}$$

В случае ограниченных по протяженности разломов плит с разными свойствами интегральное уравнение для определения поведения перерезывающих сил приближенно имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(y-\xi)s(\xi)d\xi = \sigma_2(y), \quad -\infty \leq y \leq \infty,$$

$$\frac{1}{\varepsilon_6^{-1}k_\infty(\alpha_1)}K_0(\alpha_1) = K(\alpha_1), \quad k(x_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(x_1)K(\alpha_1),$$

$$D(\alpha_1) = -A_\lambda Q_\lambda(\alpha_1, 0) + A_r Q_r(\alpha_1, 0), \quad s(x_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(x_1)D(\alpha_1).$$

Здесь

$$k_\infty(\alpha_1) = \lim |\alpha_2|^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha_2| \rightarrow \infty.$$

Если имеет место равенство свойств левой и правой полуплиты, т. е.

$$A_\lambda(\alpha_1) = A_r(\alpha_1), \quad \mathbf{F}_1^{-1}(x_1)Q_\lambda(\alpha_1, 0) = -\mathbf{F}_1^{-1}(x_1)Q_r(\alpha_1, 0), \quad -\infty \leq y \leq c_1, \quad c_2 \leq y \leq \infty.$$

Тогда

$$D = \frac{1}{\alpha_{2\lambda-}(\alpha_1)} [Q_\lambda(\alpha_1, 0) + Q_r(\alpha_1, 0)],$$

$$s_0(x_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(x_1) [Q_\lambda(\alpha_1, 0) + Q_r(\alpha_1, 0)] \quad c_1 \leq x_1 \leq c_2,$$

$$\int_{c_1}^{c_2} k_1(y-\xi)s_0(\xi)d\xi = \sigma_2(y), \quad c_1 \leq y \leq c_2, \quad k_1(x_1) = \mathbf{F}_1^{-1}(x_1) \frac{K(\alpha_1)}{\alpha_{2\lambda-}(\alpha_1)}.$$

В том случае, если  $c_2 = \infty$ , то получается интегральное уравнение для полубесконечного разлома

$$\int_{c_1}^{\infty} k_1(y - \xi) s_0(\xi) d\xi = \sigma_2(y), \quad c_1 \leq y \leq \infty.$$

С помощью этих интегральных уравнений можно определять степень воздействия на берега разлома, чтобы снизить или увеличить коэффициент при сингулярном члене в контактных напряжениях.

**Замечание.** С помощью этих интегральных уравнений можно определять степень воздействия на берега разлома, чтобы снизить или увеличить коэффициент концентрации в члене контактных характеристик мембраны или пластины Кирхгофа.

По построению функция  $u(x_1, x_2, x_3)$  представляет собой потенциал, который пропорционален давлению или углу поворота края мембраны. Построенное решение задачи позволяет его оценивать в любой точке рассматриваемой области, в том числе вблизи границы трещины. В модели можно выбирать различные постановки задач, меняя воздействие на стенки и саркофаг, а также варьировать параметрами анизотропии, тем самым выявляя предельно критические состояния оползневой структуры, после чего будет расти трещина, разрыв саркофага и начнется оползневый процесс.

### **3.2 О предвестниках сейсмичности при трещине нового типа разного раствора берегов**

В параграфе рассматривается задача о гармоническом во времени поведении двух деформируемых полубесконечных штампов, лежащих на деформируемом основании. Предполагается, что штампы сближаются параллельными торцами таким образом, что формируют трещину, дефект или тектонический разлом в зоне сближения. Деформируемый материал штампов имеет простую реологию, описываемую уравнением Гельмгольца. Для рассмотрения случаев деформируемых штампов сложных реологий можно применять созданный новый универсальный метод моделирования. Он позволяет

решения векторных граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих материалы сложных реологий, представлять разложенными по решениям отдельных скалярных граничных задач. Строится высокоточное решение граничной задачи, позволяющее получить дисперсионное уравнение, описывающее резонансные частоты. Существование резонансных частот для деформируемых штампов было предсказано в работах И.И. Воровича.

Результат остается в силе и для случая абсолютно твердых полубесконечных штампов. Ранее было показано, что резонансы возникают в контактной задаче о колебании двух абсолютно жестких штампов конечных размеров на деформируемом слое. Однако динамическая контактная задача для случая двух полубесконечных штампов, действующих на многослойную среду, ранее не изучалась. Исследование опирается на метод блочного элемента, позволяющего строить точные решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, применяются факторизационные методы и используются некоторые тонкие свойства уравнений Винера – Хопфа, в частности, принадлежащие известному математику М.Г. Крейну. Предлагаемые методы дают возможность проводить исследование для всего диапазона частот и произвольного расстояния между торцами полубесконечных плит. Результаты исследования могут использоваться для оценки прочностных свойств конструкций, имеющих контактные соединения из разнотипных материалов в динамических режимах.

Исследованию контактных задач в широком спектре постановок посвящено большое число работ, некоторые из них даны в [60, 66]. Это связано с важностью названного направления исследований в самых различных областях инженерной практики, теории прочности и разрушения, сейсмологии, геофизики, экологии. Нужно отметить и разнообразие подходов исследования, которые включают аналитические, полуаналитические, численные методы.

Каждый из подходов позволяет успешно решать контактные задачи в выбираемых постановках и выявлять ранее не исследованные стороны.

Большинство из ранее указанных задач посвящены исследованиям контактных задач о воздействии на упругую среду абсолютно жестких штампов. Как правило, большинство исследований выполнялось для одиночных штампов. Переход к деформируемым штампам и возникающим при этом особенностям впервые был выполнен И.И. Воровичем [93, 94]. Им было установлено, что наличие деформируемого штампа приводит к возникновению дискретных резонансных частот в динамических контактных задачах, приводящих к резонансам. Впервые вопрос об одновременном динамическом воздействии двух полубесконечных деформируемых штампов со встречно расположенными параллельными торцами рассматривается в настоящей работе. Одна из целей исследования состоит в установлении существования резонансов подобной блочной структуры и возможности построения дисперсионного уравнения для определения резонансных частот.

**Постановка задачи и определяющие уравнения.** Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, содержащая штампы, в условиях вибрации, описываемой функцией  $e^{-i\omega t}$ . Считаем, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются деформируемыми полубесконечными штампами с такой же временной функцией (см. рисунок 18).

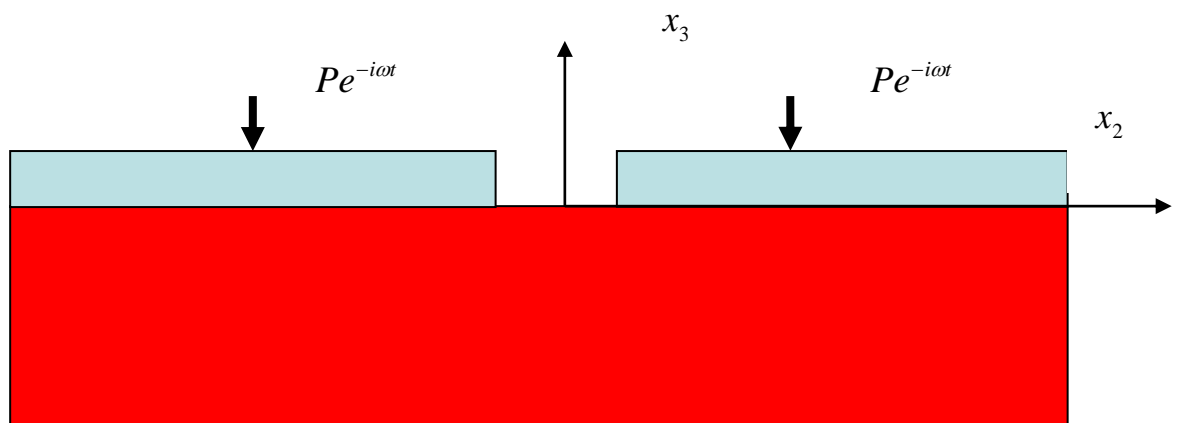


Рисунок 18 – Предполагается, что трещина нового типа имеет удаленные берега

Исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось  $ox_3$  направлена по внешней нормали, остальные оси  $ox_1$ ,  $ox_2$  лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях  $\Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty)$ ,  $\Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$  действуют деформируемые штампы, контактирующие без трения с многослойным основанием (см. рисунок 18). Одной из важных составляющих рассматриваемой задачи является модель деформируемых штампов. Рассмотрим случай, когда материал описывается уравнениями Гельмгольца. Решение этой задачи дает возможность переходить к материалам иных реологий, открывает новый универсальный метод моделирования [56] и подход [95].

Считаем, что в контактных областях  $\Omega_{-A}$  и  $\Omega_A$  материал штампов описывается дифференциальными уравнениями Гельмгольца

$$\begin{aligned} \left[ \partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2 \right] \varphi_{-A1}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty), \quad p^2 &= c\omega^2, \quad c > 0, \\ \left[ \partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2 \right] \varphi_{A1}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty), \end{aligned} \quad (3.9)$$

с граничными условиями

$$\varphi_{-A1}(x_1, x_2) = \varphi(-A, x_2), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \varphi_{A1}(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \quad x_1 \rightarrow A.$$

Здесь  $q_r(x_1, x_2)$ ,  $r = A, -A$  — воздействие на штамп снизу, а  $t_r(x_1, x_2)$  — сверху. Функции  $\varphi_r(x_1, x_2)$ ,  $r = A, -A$  описывают перемещения штампов в зоне контактов.

Применив к уравнениям (3.9) преобразование Фурье по координате  $x_2$

$$\varphi(x_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2,$$

приходим к упрощенной одномерной граничной задаче с параметром  $\alpha_2$  :

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_{-A}(x_1, \alpha_2) &= g_{-A}(x_1, \alpha_2), \\ \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A), \quad k^2 &= p^2 - \alpha_2^2, \\ (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_A(x_1, \alpha_2) &= g_A(x_1, \alpha_2), \\ \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty), & \\ g_{-A}(x_1, \alpha_2) &= q_{-A}(x_1, \alpha_2) - t_{-A}(x_1, \alpha_2), \\ g_A(x_1, \alpha_2) &= q_A(x_1, \alpha_2) - t_A(x_1, \alpha_2), \\ \varphi(x_1) &= \varphi(x_1, \alpha_2), \quad \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(\pm A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow \pm A, \\ \varphi_{-A}(x_1, \alpha_2) &= \varphi(-A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \varphi_A(x_1, \alpha_2) = \varphi(A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow A. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Параметр  $\alpha_2$  в дальнейшем опускается, и возврат к нему произойдет по формулам (3.10) после решения следующей одномерной граничной задачи:

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_r(x_1) &= g_r(x_1), \quad \Omega_r, \quad r = A, -A, \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2 \\ g_r(x_1) &= q_r(x_1) - t_r(x_1), \\ \varphi_{-A}(x_1) &= \varphi_{-A}(-A), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \varphi_A(x_1) = \varphi_A(A), \quad x_1 \rightarrow A. \end{aligned} \tag{3.11}$$

**Метод исследования.** Для исследования построим упакованные блочные элементы, порождаемые граничной задачей (3.11). В результате применения метода блочного элемента, строятся внешние формы для каждой граничной задачи, которые принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_{-A}(\alpha_1) &= -i(\alpha_1 + k) \varphi_{-A}(-C) e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A} - \\ &- Q_{-A}(\alpha_1) - T_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A} + T_{-A}(\alpha_1), \\ \omega_A(\alpha_1) &= i(\alpha_1 - k) \varphi_A(A) e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} - Q_A(\alpha_1) - T_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} + T_A(\alpha_1). \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения преобразований Фурье вместо строчных букв заглавными

$$\Phi(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

С помощью построенных внешних форм поведение штампов можно представить упакованными блочными элементами в виде

$$\begin{aligned} \varphi_r(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_r(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad \Phi_r(\alpha_1) = \frac{\omega_r(\alpha_1)}{N(\alpha_1)}, \quad r = A, -A, \\ N(\alpha_1) &= (\alpha^2 - k^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Интегральное уравнение контактной задачи.** Сформулированная контактная задача описывается системой интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega_{-A}} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_{-A}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \iint_{\Omega_A} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_A(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = u_r(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega_r, \quad r = -A, A, \\ &\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad h(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} H(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ &H(\alpha_1, \alpha_2) = O(u^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь  $u_r(x_1, x_2)$  – заданные смещения оснований штампов.  $q_r(x_1, x_2)$  – контактные напряжения. Считаем, что функция  $H(\alpha_1, \alpha_2)$  четная по обеим переменным мероморфная функция двух комплексных переменных  $\alpha_k, k = 1, 2$ , ее примеры приведены в многочисленных публикациях.

Применим к двумерному интегральному уравнению (3.13) преобразование Фурье по координате  $x_2$ . В результате место координаты  $x_2$  у каждой



подвергнутой преобразованию Фурье функции займет свободный параметр преобразования Фурье  $\alpha_2$ . Чтобы упростить формулы, временно скроем параметр  $\alpha_2$  введением обозначений

$$h(x_1) = h(x_1, \alpha_2), \quad q_r(\xi_1) = q_r(\xi_1, \alpha_2), \quad h(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1,$$

$$H(\alpha_1) = H(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_r(x_1) = u_r(x_1, \alpha_2), \quad r = -A, A.$$

В результате принятых замен получим систему одномерных интегральных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_{-A}(x_1), \quad -\infty < x_1 \leq -A,$$

$$\int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_A(x_1), \quad A \leq x_1 < \infty,$$
(3.14)

В случае многослойной среды функция  $H(\alpha_1)$ , являясь мероморфной, имеет четное число нулей  $z_{mo}$  и полюсов  $\xi_{so}$ . Им свойственно асимптотическое поведение вида

$$\xi_{so} = i\nu(s + 0,5)(1 + o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \quad z_{mo} = i\nu m(1 + o(1)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \nu = const > 0.$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте  $\omega$  появляется конечное число вещественных нулей и полюсов. В этом случае представление ядра интегрального уравнения описывается интегралом, берущимся по контуру, имеющему вид

$$h(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Контур  $\gamma$  совпадает с вещественной осью всюду, кроме зон вещественных полюсов, которые обходятся им по полуокружностям малого радиуса.

Составим в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обоих контактных зон. Для этого продолжим систему интегральных уравнений (3.14) на всю ось, добавив справа на отрезке  $[-A, A]$  новую неизвестную функцию  $w_0(x_1)$ , представляющую перемещение поверхности среды в промежутках между штампами.

**Функциональное уравнение для реологической среды.** Вновь обращаясь к интегральным уравнениям (3.14), составим балансы перемещений поверхности многослойной среды и мембран, взяв представления в форме

$$u_r(x_1) = \varphi_r(x_1), \quad x_1 \in \Omega_r, \quad r = -A, A.$$

Применим к интегральному уравнению (3.14) и уравнениям упакованных блочных элементов (3.12) преобразование Фурье. После этого потребуем в зонах контактов  $\Omega_r$ ,  $r = A, -A$  равенств напряжений  $Q_r$  и перемещений  $u_r$  основания и штампов.

Тогда после несложных преобразований в преобразованиях Фурье построим функциональное уравнение вида

$$\begin{aligned} K_1(\alpha_1)Q_1^-(\alpha_1) + W_1(\alpha_1) + K_1(\alpha_1)Q_1^+(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+), \\ K_1(\alpha_1) &= [K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} S_{-A} &= -i(\alpha_1 + k)\varphi_{-A}(-A)e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A} - T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A} + T_{-A}(\alpha_1), \\ S_A &= i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} - T_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + T_A(\alpha_1). \end{aligned}$$

Выше  $W_1(\alpha_1)$  преобразование Фурье свободной от напряжений зоны между штампами.

С учетом аналитических свойств функций, обозначим

$$Q_1^-(\alpha_1) \equiv Q_{-A}(\alpha_1), \quad S_1^- \equiv S_{-A}(\alpha_1) \quad Q_1^+(\alpha_1) \equiv Q_A(\alpha_1), \quad S_1^+(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1).$$

Знак плюс означает регулярность аналитической функции комплексного переменного в верхней полуплоскости, а минус в нижней.

Соотношение (3.15) представляет обобщенные функциональные уравнения типа Винера Хопфа относительно неизвестных  $Q_1^-(\alpha_1)$ ,  $Q_1^+(\alpha_1)$ ,  $W_1(\alpha_1)$ , а также функционалов  $Q_1(-k)$ ,  $Q_1(k)$ , входящих в правые части уравнений. Для их получения строятся интегральные уравнения.

### **О решении интегральных уравнений контактной задачи**

Применим для исследования функционального уравнения (3.15) аппарат факторизации функций, позволяющий свести его к отдельному интегральному уравнению на отрезке.

С этой целью для четной функции осуществим деление всех членов функционального уравнения (3.15) на  $K(\alpha_1)$ . В результате получим соотношение

$$Q_1^-(\alpha_1) + K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1) + Q_1^+(\alpha_1) = K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+).$$

Переход от функционального к интегральному уравнению, которое, с учетом новых обозначений, принимает вид

$$\int_{-A}^A k_{11}(x_1 - \xi_1) w_{11}(\xi_1) d\xi_1 = f_{11}(x_1), \quad |x_1| \leq A, \quad w_{11}(\xi_1) = w_{11}(\xi_1, \alpha_2),$$

$$k_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad K_1^{-1}(\alpha_1) = P_1^{-1}(\alpha_1) R_1(\alpha_1), \quad k_{11}(x_1) = k_{11}(x_1, \alpha_2).$$

Здесь  $f_{11}(x_1)$  имеет представление

$$f_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1) (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} (S_1^- + S_1^+) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad |x_1| \leq A.$$

В связи со свойствами ядра интегрального уравнения функция  $K_1^{-1}(\alpha_1)$  имеет на бесконечности асимптотическое поведение

$$K_1^{-1}(\alpha_1) = O(|\alpha_1|).$$

Это свидетельствует о том, что интегральное уравнение, представленное с помощью классических функций, является интегро-дифференциальным. Последнее, взяв произвольное положительное число  $\tau$ , можно записать в виде

$$(-\partial^2 + \tau^2) \int_{-A}^A n_{11}(x_1 - \xi_1) w_{11}(\xi_1) d\xi_1 = f_{11}(x_1),$$

$$n_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} K_1^{-1}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad N_{11}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} K_1^{-1}(\alpha_1).$$

Решив дифференциальное уравнение, получим его в виде

$$\int_{-A}^A n_{11}(x_1 - \xi_1) w_{11}(\xi_1) d\xi_1 = f_{11}(x_1) + c_{11} e^{\tau x_1} + c_{12} e^{-\tau x_1}, \quad (3.16)$$

$$f_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1) (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} (S_1^- + S_1^+) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad |x_1| \leq A.$$

Здесь постоянные  $c_{1m}$ ,  $m=1,2$ , нуждаются в определении, после построения решения интегрального уравнения (3.16). Применим для решения интегрального уравнения метод, разработанный в работе [37]. Он позволяет построить высокоточное решение этого интегрального уравнения методом фиктивного поглощения.

Не останавливаясь на деталях построения высокоточного приближенного решения интегрального уравнения (3.16), представим окончательное решение в виде

$$w_{11}(x_1) = \frac{m_{11}(x_1) + c_{11} m_{12}(x_1) + c_{12} m_{13}(x_1)}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} A) \sqrt{2 \operatorname{ch} A - 2 \operatorname{ch} x_1}}.$$

Здесь  $m_{rs}(x_1)$  некоторые непрерывные функции, появляющиеся в процессе решения интегрального уравнения и являются известными.  $Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} A)$  функция Лежандра. Функция  $w_{11}(x_1)$  описывает поведение поверхности в зоне между штампами и должна быть непрерывной. Для обеспечения ее непрерывности необходимо, чтобы она обращалась в нули в точках  $x_1 = \pm A$ , в которых нарушается требование непрерывности. Это приводит к уравнениям для определения неизвестных  $c_{11}, c_{12}$

$$\begin{aligned} c_{11} m_{12}(A) + c_{12} m_{13}(A) + m_{11}(A) &= 0, \\ c_{11} m_{12}(-A) + c_{12} m_{13}(-A) + m_{11}(-A) &= 0. \end{aligned}$$

Решив их, находим искомые постоянные

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \Delta^{-1} [m_{11}(-A)m_{13}(A) - m_1(A)m_{13}(-A)], \\
c_{12} &= \Delta^{-1} [m_{11}(A)m_{12}(-A) - m_1(-A)m_{12}(A)], \\
\Delta &= m_{12}(A)m_{13}(-A) - m_{12}(-A)m_{13}(A).
\end{aligned}$$

Внеся найденные постоянные в функциональное уравнение (3.9), получим его в виде

$$Q_1^-(\alpha_1) + Q_1^+(\alpha_1) = K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1). \quad (3.17)$$

Осуществив факторизацию правой части (3.17) в виде суммы, получаем решения  $Q_A(\alpha_1)$ ,  $Q_{-A}(\alpha_1)$  интегрального уравнения, зависящее от функционалов  $Q_A(k)$ ,  $Q_{-A}(-k)$ .

Из него находятся выполненные в преобразованиях Фурье значения контактных напряжений под берегами трещины в виде [55]

$$\begin{aligned}
Q_A(\alpha_1) \equiv Q_1^+(\alpha_1) &= \left\{ K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1) \right\}^+, \\
Q_{-A}(\alpha_1) \equiv Q_1^-(\alpha_1) &= \left\{ K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1) \right\}^-.
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Выделив функционалы  $Q_A(k)$  и  $Q_{-A}(-k)$ , в результате разложения правых частей выражений (3.18) получим соотношения

$$\begin{aligned}
Q_A(\alpha_1) &= Q_A(k)R_1^+(\alpha_1) + Q_{-A}(-k)R_2^+(\alpha_1) + R_3^+(\alpha_1), \\
Q_{-A}(\alpha_1) &= Q_A(k)R_1^-(\alpha_1) + Q_{-A}(-k)R_2^-(\alpha_1) + R_3^-(\alpha_1).
\end{aligned}$$

Здесь  $R_m^\pm(\alpha_1)$  некоторые аналитические функции, коэффициенты при функционалах в разложении. Внеся в эти соотношения последовательно  $\alpha_1 = k$  в первое, затем  $\alpha_1 = -k$  во второе и вычислив функционалы из полученной алгебраической системы уравнений, получим их значения в виде

$$\begin{aligned}
 Q_A(k) &= \Delta_1^{-1} \left\langle R_3^+(k) [1 - R_2^-(-k)] + R_3^-(-k) R_2^+(k) \right\rangle, \\
 Q_{-A}(-k) &= \Delta_1^{-1} \left\langle R_3^+(k) R_1^-(-k) - R_3^-(-k) [1 - R_2^+(k)] \right\rangle, \\
 \Delta_1(k) &= [1 - R_1^+(k)] [1 - R_2^-(-k)] - R_2^+(k) R_1^-(-k).
 \end{aligned}$$

Внесем значения функционалов в правые части соотношений (3.18) и получим в преобразованиях Фурье выражения для контактных напряжений под каждым штампом.  $\Delta_1(k) = 0$  является дисперсионным уравнением для определения резонансных частот, предсказанное в работах И.И. Воровича [93, 94].

### **Об исследовании трещин нового типа в средах сложных реологий**

Теория метода блочного элемента построена для исследования и решения граничных задач, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Решения могут иметь сложный вид. Для преодоления этих сложностей в работе [56] разработаны методы, упрощающие эти решения. Это достигается путем разложения решений граничных задач сложных реологий, имеющих векторный вид, по блочным элементам граничных задач для простых реологий, т. е. скалярных, в частности, описываемых уравнениями Гельмгольца. В качестве примера применения такого разложения воспользуемся результатом работы [95].

Рассмотрим плоскую граничную задачу второго рода для системы уравнений Ламе, поставленную в первом квадранте при гармонических воздействиях на границе. Ранее точное ее решение получить не удавалось, однако метод блочного элемента в настоящей работе дает возможность это сделать в форме упакованных векторных блочных элементов.

В первом квадранте динамические уравнения Ламе после исключения члена  $\exp(-i\omega t)$  имеют вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 + k^2 u_1 = 0, \quad \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad k^2 = \rho \omega^2,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 + k^2 u_2 = 0, \quad x_1, x_2 \in \Omega, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Здесь  $u_n(x_1, x_2)$  – компоненты векторов перемещений в точках  $x_1, x_2$ ;  $\Omega$  – область первого квадранта  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ;  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе;  $\rho$  – плотность материала деформируемого тела;  $\omega$  – частота внешних гармонических воздействий на границе, задаваемых комплексной функцией  $\exp(-i\omega t)$ , где  $t$  – время. В задаче первого рода значения напряжений на границах квадранта обозначаются на оси абсцисс функциями  $X_{x_2 x_1}(x_1, 0), Y_{x_2 x_1}(x_1, 0)$  и  $X_{x_1 x_2}(0, x_2), Y_{x_1 x_2}(0, x_2)$  – на оси ординат. Нормальные к границе напряжения обозначаются символом  $X$ , а касательные –  $Y$ . В задаче второго рода на границе первого квадранта задаются компоненты векторов перемещения  $u_1(x_1, 0), u_2(x_1, 0)$  и  $u_1(0, x_2), u_2(0, x_2)$ .

Примем известное разложение решения уравнений Ламе в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \partial_1 \varphi(x_1, x_2) + \partial_2 \psi(x_1, x_2), \\ u_2(x_1, x_2) &= \partial_2 \varphi(x_1, x_2) - \partial_1 \psi(x_1, x_2), \\ \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} (\Delta - p_1^2) \varphi &= 0, \quad (\Delta - p_2^2) \psi = 0, \quad p_1^2 = k_1^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad p_2^2 = k_1^2 \mu^{-1}, \\ \varphi(x_1, 0) &= f_1(x_1, 0), \quad \varphi(0, x_2) = f_2(0, x_2), \\ \psi(x_1, 0) &= g_1(x_1, 0), \quad \psi(0, x_2) = g_2(0, x_2). \end{aligned}$$



Функции  $f_m, g_m, m=1,2$ , в граничных условиях являются произвольными, удовлетворяющими лишь условиям корректности постановки граничной задачи. В частности, их можно брать из пространства медленно растущих обобщенных функций, в котором ищутся решения граничной задачи в области  $\Omega$ .

Рассматривается случай граничной задачи Ламе второго рода. На осях координат задаются условия вида  $u_n(x_1, 0), u_n(0, x_2), n=1,2$ .

Таким образом, для решений уравнения Гельмгольца формируются граничные условия при  $x_2 \rightarrow 0$  вида

$$\begin{aligned}\partial_1\varphi(x_1, x_2) + \partial_2\psi(x_1, x_2) &= u_1(x_1, 0), \\ \partial_2\varphi(x_1, x_2) - \partial_1\psi(x_1, x_2) &= u_2(x_1, 0).\end{aligned}$$

Аналогично при  $x_1 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\partial_1\varphi(x_1, x_2) + \partial_2\psi(x_1, x_2) &= u_1(0, x_2), \\ \partial_2\varphi(x_1, x_2) - \partial_1\psi(x_1, x_2) &= u_2(0, x_2).\end{aligned}$$

Выполним решение граничной задачи в первом квадранте методом блочного элемента. В упакованном виде в первом квадранте в случае граничной задачи Дирихле решения имеют вид

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_1^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_2^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\omega_1 = \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}} - 1 \right] \left\langle F_1(\alpha_2) - \frac{F_1(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}} \right\rangle + \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}} - 1 \right] \left\langle F_2(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 F_2(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}} \right\rangle,$$

$$\omega_2 = \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_{12+}} - 1 \right] \left\langle G_1(\alpha_2) - \frac{G_1(\alpha_{22+})\alpha_2}{\alpha_{22+}} \right\rangle + \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_{22+}} - 1 \right] \left\langle G_2(\alpha_1) - \frac{\alpha_1 G_2(\alpha_{12+})}{\alpha_{12+}} \right\rangle,$$

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_2^2}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_2^2}.$$

В результате проведенного в работе исследования, получается следующее разложение векторного решения двумерной граничной задачи для уравнения Ламе в первом квадранте по блочным элементам граничных задач для уравнения Гельмгольца в первом квадранте:

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2) &= \\
&= \partial_1 \left\langle \varphi_1 \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_1(\xi_1, 0), \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_1(0, \xi_2) + \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} F(\xi_2) \right] + \right. \\
&+ \varphi_2 \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_2(\xi_1, 0) + \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} D(x_1), \frac{1}{2} \partial_2^{-1} u_2(0, \xi_2) \right] \left. \right\rangle + \\
&+ \partial_2 \left\langle \psi_1 \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_1(\xi_1, 0) + \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} C(x_1), \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_1(0, \xi_2) \right] - \right. \\
&- \psi_2 \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_2(\xi_1, 0), \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_2(0, \xi_2) + \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} E(x_2) \right] \left. \right\rangle, \\
u_2(x_1, x_2) &= \\
&= \partial_2 \left\langle \varphi_1 \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_1(\xi_1, 0), \frac{1}{2} \partial_1^{-1} u_1(0, \xi_2) + \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} F(\xi_2) \right] + \right. \\
&+ \varphi_2 \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_2(\xi_1, 0) + \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} D(x_1), \frac{1}{2} \partial_2^{-1} u_2(0, \xi_2) \right] \left. \right\rangle - \\
&- \partial_1 \left\langle \psi_1 \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_1(\xi_1, 0) + \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} C(x_1), \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} u_1(0, \xi_2) \right] - \right. \\
&- \psi_2 \left[ x_1, x_2, \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_2(\xi_1, 0), \frac{1}{2} \partial_1^{(-1)} u_2(0, \xi_2) + \frac{1}{2} \partial_2^{(-1)} E(x_2) \right] \left. \right\rangle.
\end{aligned}$$

Это замечание объясняет один из способов исследования трещин нового типа в средах сложной реологии и оправдывает выполнение этих исследований для граничных задач простых реологий.

С их помощью можно решать сложные граничные задачи с трещинами нового типа в средах сложных реологий.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все поставленные в диссертации цели достигнуты. К ним относятся:

1) применена теория трещин нового типа в области инженерной практики, в частности, в подшипниках с дефектами, в геофизике, для изучения предоползневых явлений, в подводных геофизических процессах явления субдукции. Использована теория трещин нового типа для исследования предвестника землетрясения, приливными процессами, вызываемыми Луной;

2) осуществлены постановка задач и построение исходных данных для возможного конкретного применения теории трещин нового типа в инженерной практике и проблемах геофизики и сейсмологии, океанологии;

3) изучены механические свойства и особенности решений граничных задач с трещинами нового типа, возможности их применения в средах сложных реологий;

4) развиты способы прецизионного обнаружения трещин нового типа на основе изучения подвижек поверхности среды в зонах расположения трещин нового типа или тектонических разломов.

### Список литературы

1. Griffith, A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids / A. Griffith // Trans. R. Soc. London. – 1920. – Vol. 221. – P. 163–198.
2. Райс, Дж. Механика очага землетрясения / Дж. Райс. М.: Мир, 1982. – 217 с.
3. Бабешко, В.А. К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2016. – Т. 466, № 6. – С. 664–669.
4. Babeshko, V.A. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach / V.A. Babeshko, O.V. Evdokimova, O.M. Babeshko // Acta Mechanica. – 2018. – Vol. 229 (5). – P. 2163–2175.
5. Бабешко, В.А. Об одном новом типе трещин, дополняющих трещины Гриффитса Ирвина / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2019. – Т. 485, № 2. – С. 34–38.
6. Бабешко, В.А. К теории блочного элемента / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2009. – Т. 427, № 2. – С. 183–186.
7. Irwin, G. Fracture dynamics / G. Irwin // Fracture of metals, ASM, Cleveland. – 1948. – P. 147–166.
8. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. М.: Наука, 1974. – 640 с.
9. Морозов, Н.Ф. Математические вопросы теории трещин / Н.Ф. Морозов. М.: Наука, 1984. – 256 с.
10. Бабешко, В.А. О влиянии пространственной модели литосферных плит на стартовое землетрясение / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2018. – Т. 480, № 2. – С. 158163.
11. Партон, В.З. Динамика хрупкого разрушения / В.З. Партон, В.Г. Борисковский. М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
12. Александров, В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев. М.: Наука, 1993. – 224 с.

13. Kirugulige, M.S. Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy / M.S. Kirugulige, H.V. Tippur // *Exp Mech.* – 2006. – Vol. 46(2). – P. 269–281.
14. Rangarajan, R. Simulating curvilinear crack propagation in two dimensions with universal meshes / R. Rangarajan, M.M. Chiaramonte, M.J. Hunsweck, Y. Shen, A.J. Lew // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2015. – Vol. 102(3–4). – P. 632–670.
15. Huang, Y. Intersonic crack propagation. – Part II: Suddenly stopping crack / Y. Huang, H. Gao // *J. Appl. Mech.* – 2002. – Vol. 69. – P. 76–80.
16. Antipov, Y.A. Subsonic propagation of a crack parallel to the boundary of a half-plane / Y.A. Antipov, A.V. Smirnov // *Math. Mech. Solids.* – 2013. – Vol. 18. – P. 153–167.
17. Krueger, R. Virtual Crack Closure Technique: History, Approach, and Applications / R. Krueger // *Appl. Mech. Rev.* – 2004. – Vol. 57. – P. 109–143.
18. Oneida, E.K. Methods for Calculating G, GI and GII to Simulate Crack Growth in 2D / E.K. Oneida, M.C.H. van der Meulen, A.R. Ingraffea // *Multiple-Material Structures. Eng. Fract. Mech.* – 2015. – Vol. 140. – P. 106–126.
19. Rice, j.R. Elastic fracture mechanics concepts for interface cracks / j.R. Rice // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1988. – Vol. 55. – P. 98103.
20. Qu, J. Interface crack loaded by a time-harmonic plane wave / J. Qu // *Int. J. of Solids and Struct.* – 1994. – Vol. 31, №3. – P. 329–345.
21. Бабешко, В.А. Математическая и механическая взаимосвязь трещин Гриффитса и нового типа в некоторых нанотехнологиях / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // *Проблемы прочности и пластичности.* – 2023. – Т.85, №3. – С. 404–413.
22. Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. М.: Наука, 1974. – 456 с.
23. Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. М.: Наука, 1980. – 303 с.
24. Штаерман, И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. М.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.

25. Горячева, И.Г. Контактные задачи трибологии / И.Г. Горячева, М.Н. Добычин. М.: Машиностроение, 1988. – 256 с.
26. Papangelo, A. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws / A. Papangelo, M. Ciavarella, J.R. Barber // Proc. 27Roy. Soc (London). – 2015. – A 471. – Issue: 2180. – Article Number: 20150271.
27. Ciavarella, M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem / M. Ciavarella // I-Theory, II-Examples, Int. J. Solids Struct. – 1998. – Vol. 35. – P. 2349–2378.
28. Zhou, S. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity / S. Zhou, X.L. Gao // Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik. 2013. – Vol. 64. – P. 145–166.
29. Guler, M.A. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings / M.A. Guler, F. Erdogan // Int. J. Mech. Sci. – 2007. – Vol. 49. – P. 161–182.
30. Ke, L.-L. Two-Dimensional Sliding Frictional Contact of Functionally Graded Materials / L.-L. Ke, Y.-S. Wang Y. // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2007. – Vol. 26. – P.171188.
31. Almqvist, A. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces / A. Almqvist, F. Sahlin, R. Larsson and S. Glavatskih // Tribology International. – 2007. – Vol. 40(4) – P. 574–579.
32. Almqvist, A. A solution of the linear elastic contact mechanics problem [Электронный ресурс] / A. Almqvist. Режим доступа: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange>. – 2013. – 43216.
33. Andersson, L.E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction / L.E. Andersson // Appl. Math. Optim. – 2000. – Vol. 42. – P. 169–202.
34. Cocou, M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity / M. Cocou // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2015. – Vol. 22. – P. 508–519.

35. Cocou, M. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion / M. Cocou, R. Rocca // *Math. Modelling and Num. Analysis.* – 2000. – Vol. 34. – P. 981–1001.
36. Kikuchi, N. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods / N. Kikuchi, J. Oden // Philadelphia.: SIAM Studies in Applied Mathematics. – 1988.
37. Бабешко, В.А. Точное решение контактных задач в полосе конечной ширины на многослойной среде / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, В.С. Евдокимов, М.В. Зарецкая // *Проблемы прочности и пластичности.* – 2023. – Т. 84, №1. – С. 2534.
38. Баженов, В.Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
39. Калинин, В.В. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел / В.В. Калинин, Т.И. Белянкова. М.: Физматлит, 2002. – 240 с.
40. Колесников, В.И. Математические модели и экспериментальные исследования – основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов / В.И. Колесников, О.А. Беляк. М.: Физматлит, 2021. – 265 с.
41. Айзикович С.М. Приближенное аналитическое решение задачи о полосовом электроде на поверхности пьезоэластичной полуплоскости с функционально-градиентным пьезоэластичным покрытием / С.М. Айзикович, И.И. Кудиш // *Проблемы прочности и пластичности.* – 2019. – Т. 81, № 4. – С. 393401.
42. Бабешко, В.А. Динамика неоднородных линейно упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. М.: Наука, 1989. – 344 с.
43. Глушков, Е.В. Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова // *МТТ.* – 1992. – № 4. – С. 82–88.

44. Бабешко, В.А. О влиянии пространственной модели литосферных плит на стартовое землетрясение / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2018. – Т. 480, № 2. – С. 158–163.
45. Уафа, С.Б. О стартовом землетрясении при гармонических воздействиях в пространственном варианте / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Экологический вестник Черноморского экономического сотрудничества. – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 24–29.
46. Xin, Z.Q. Topology Optimization of the Caudal Fin of Three-Dimensional Self-Propelled Swimming Fish / Z.Q. Xin, C.J. Wu // Adv. Appl. Math. Mech. – 2014. – Vol. 6(6). – P. 732763.
47. Bendsoe, M.P. Topology Optimization – Theory, Methods and Applications / M.P. Bendsoe and O. Sigmund. Berlin: Springer, 2003.
48. Bonvall, T. Topology optimization of fluids in stokes flow / T. Bonvall, J. Petersson // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 2002. – Vol. 42. – P. 77–107.
49. El-Sabbage, A. Topology optimization of unconstrained damping treatments for plates / A. El-Sabbage, A. Baz // Engineering. Optimization. – 2013. – Vol. 49. – P. 1153–1168.
50. Zheng, W. Topology optimization of passive constrained layer damping with partial coverage on plate / W. Zheng, Y. Lei, S. Li et al. // J. Shock and Vibration. – 2013. – Vol. 20. – P. 199–211.
51. Van der Veen, G. Integrated topology and controller optimization of motion systems in the frequency domain / G. Van der Veen, M. Langelaar, F. van Keulen // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2014. – Vol. 51. – P. 673–685.
52. Dahl, J.J. Topology optimization for transient wave propagation problems in one dimension / J.J. Dahl, S. Jensen, and O. Sigmund // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2008. – Vol. 36. – P. 585–595.



53. Ворович, И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И.И. Ворович, В.А. Бабешко. М.: Наука, 1979. – 320 с.
54. Бабешко, В.А. Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, И.В. Рядчиков // ДАН. – 2018. – Т. 482, № 4. – С. 398–402.
55. Бабешко, В.А. О стадиях преобразования блочных элементов / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2016. – Т. 468, № 2. – С. 154158.
56. Бабешко, В.А. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // Доклады РАН. – 2021. – Т. 499, № 1. – С. 30–35.
57. Уафа, С.Б. О ресурсах подшипников и о механике субдукционных процессов / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 3. – С. 12–19.
58. Уафа, С.Б. Об особенностях ресурсов подшипников, получивших дефект / С.Б. Уафа, О.В. Евдокимова, В.А. Бабешко, [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 15–45.
59. Крагельский, И.В. Основы расчетов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
60. Горячева, И.Г. Анализ влияния внутренней системы дефектов на напряженное состояние упругих тел / И.Г. Горячева, И.В. Фельдштейн // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – № 5. – С. 55–61.
61. Maugis, D. Contact Adhesion and Rupture of Elastic Solids / D. Maugis. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
62. Горячева, И.Г. Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. М.: Наука, 2001. – 478 с.

63. Горячева, И.Г. Контактные задачи трибологии / И.Г. Горячева, М.Н. Добычин. М.: Машиностроение, 1988. – 256 с.
64. Горячева, И.Г. Моделирование трения на разных масштабных уровнях / И.Г. Горячева, Ю.Ю. Маховская // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 3. – С. 117–127.
65. Ноздрин, М.А. Расчет деформационной составляющей силы трения при скольжении тела по вязкоупругому основанию / М.А. Ноздрин, Ю.Ю. Маховская, Б.В. Шептунов // Вестник ИГЭУ. – 2009. – № 3. – С. 48–50.
66. Александров, В.М. Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству / В.М. Александров, И.Г. Горячева, Е.В. Торская // Докл. РАН. – 2010. – Т. 430, № 4. – С. 490–493.
67. Гамбурцев, Г.А. Перспективный план исследований по проблеме «Изыскание и развитие прогноза землетрясений» / Г.А. Гамбурцев // Развитие идей Г.А. Гамбурцева в геофизике. М.: Наука, 1982. – 324 с.
68. Садовский, М.А. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс / М.А. Садовский, Л.Г. Болховитинов, В.Ф. Писаренко. М.: Наука, 1987. – 104 с.
69. Алексеев, А.С. Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками: коллективная монография / А.С. Алексеев и др. М.: Изд-во СО РАН, 2004. – 388 с.
70. Соболев, Г.А. Основы прогноза землетрясений / Г.А. Соболев. М.: Наука, 1993. – 313 с.
71. Кейлис-Борок, В.А. Динамика литосферы и прогноз землетрясений / В.А. Кейлис-Борок // Природа. – 1989. – № 12. – С. 10–18.
72. Di Toro, G. Fault lubrication during earthquake / G. Di Toro // Nature. – 2011. – Vol. 471 (7339). – P. 494–498.
73. Никонов, А.А. Современные движения Земной коры / А.А. Никонов. М.: Наука, 1979. – 184 с.
74. Уафа, С.Б. О прочностных свойствах смазываемых подшипников с дефектными покрытиями / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] //

Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 6. – С. 47–53.

75. Kuznetsov, Ye.A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression / Ye.A. Kuznetsov // *Wear*. – 1985. – Vol. 102. (3). – P. 177–194.

76. Торская, Е.В. Механические и трибологические свойства наноструктурированных покрытий на основе многокомпонентных оксидов / Е.В. Торская, И.И. Курбаткин, А.М. Мезрин [и др.] // *Трение и износ*. – 2013. – Т. 34, № 2. – С. 129–137.

77. Горячева, И.Г. Теоретико-экспериментальное исследование механических свойств бикомпонентных покрытий, конденсируемых из паров металлов / И.Г. Горячева, Е.В. Торская, Ю.В. Корнев [и др.] // *Трение и износ*. – 2015. – Т. 36, №3. – С. 340–343.

78. Торская, Е.В. Механические и трибологические свойства наноструктурированных покрытий на основе многокомпонентных оксидов / Е.В. Торская, Ю.В. Корнев, А.Я. Григорьев, И.Н. Ковалева, Н.К. Мышкин // *Трение и износ*. – 2015. – Т. 36, № 3. – С. 340–343.

79. Goryacheva, I.G. The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid / I.G. Goryacheva, E.V. Torskaya // *Wear*. – 2003. – Vol. 254, № 5–6. – P. 538–545.

80. Уафа, С.Б. О роли дефектов покрытия в виде трещин на предмет разрушения предоползневой структуры / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2021. – Т. 18, № 1. – С. 23–31.

81. Уафа, С.Б. Факторизационные методы в проблеме фундаментов и покрытий полигональной формы / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2017. – Т. 14, № 2. – С. 5–12.

82. Huang, W. Elastic-wave scattering and Stoneley wave localization by anisotropic imperfect between solids / W. Huang, S.I. Rokhlin // *Geophys. J. Int.* – 1994. – №118. – P. 285304.
83. Raleigh-wave theory and application / ed. E. A. Ash, E.G.S. Paige (Springer Series on Wave Phenomena ). Berlin etc.: Springer, 1985. – Vol. 2. P. – 360.
84. Sotiropoulos, D. A. Ultrasonic reflection by a planar distribution of cracks / D.A. Sotiropoulos, J. D. Achenbach // *J. Nondestr. Eval.* – 1988. – №7. – P. 123-129.
85. Takeuchi, H. Seismic surface waves / H. Takeuchi, M. Saito // *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations*, ed. B. A. Biot (Methods in Computational Physics. Vol. 11). New York: Academic Press, 1972. – Vol. 11. – P. 217295.
86. Ursin, B. Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontal layered media / B. Ursin // *Geophysics.* – 1983. – Vol. 48, №8. – P. 1063-1081.
87. Wickham, G. A polarization theory for the scattering of sound at imperfect interfaces / G. A Wickham // *J. Nondestr. Eval.* – 1992. – Vol. 11. – P. 167174.
88. Xu, P. C., Guided waves in a bonded plate: parametric study / P.C. Xu, S. K. Datta // *J. Appl. Phys.* – 1990. – №67. – P. 67796786.
89. Уафа, С.Б. Ограниченные и полуограниченные разломы и скрытые дефекты покрытия / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.М. Бабешко [и др.] // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 22–27.
90. Уафа, С.Б. Об особенностях трещин нового типа в приложениях / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* – 2019. – Т. 16, № 3. – С. 28–45.
91. Уафа, С.Б. О факторах, снижающих вероятность стартовых землетрясений, и возможных подходах по их упреждению для конечных и полубесконечных плит / С.Б. Уафа, О.В. Евдокимова, В.А. Бабешко [и др.] // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 47–54.

92. Уафа, С.Б. О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 1. – С. 4–13.

93. Ворович, И.И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы / И.И. Ворович // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 245, № 4. – С. 817–820.

94. Ворович, И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы / И.И. Ворович // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 245, № 5. – С. 1076–1079.

95. Бабешко, В.А. Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2020. – Т. 495. – С. 3438.

**СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ДИССЕРТАНТА**

*Статьи в рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК РФ, а также статьи в рецензируемых журналах и изданиях, включенных в базы данных Scopus и Web of Science*

1. Уафа, С.Б. О мониторинге состояния параллельных штолен в зоне горизонтального движения литосферных плит / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 4. – С. 42–49.
2. Уафа, С.Б. О прочностных свойствах смазываемых подшипников с дефектными покрытиями / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 6. – С. 47–53.
3. Уафа, С.Б. Метод блочного элемента и полубесконечные и конечные дефекты покрытия / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2016. – № 4 (64). – С. 126–130.
4. Уафа, С.Б. О ресурсах подшипников и о механике субдукционных процессов / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.М. Бабешко [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 3. – С. 12–19.
5. Уафа, С.Б. Динамические контактные задачи для композитных сред с анизотропной структурой / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 2. – С. 182–191.
6. Уафа, С.Б. О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 1. – С. 4–13.
7. Уафа, С.Б. О предвестнике землетрясения в сейсмоопасной горной территории / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Геология и геофизика Юга России. – 2024. – Т. 14, № 2. – С. 33–44.

8. Уафа С.Б. Трехмерное интегральное уравнение Винера–Хопфа в смешанных задачах для анизотропных сред / С.Б. Уафа, О.В. Евдокимова, В.А. Бабешко [и др.] // Наука Юга России. — 2024. — Т. 20, №3. — С. 3–6.

9. Уафа, С.Б. Об одном способе исследования литосферных плит неклассической формы и сложной реологии / С.Б. Уафа, В.В. Лозовой, Е.М. Горшкова // Наука Юга России. – 2023. – Т. 19, № 3. – С. 3–8.

10. Уафа, С.Б. Факторизационные методы в проблеме фундаментов и покрытий полигональной формы / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2017. – Т. 14, № 2. – С. 5–12.

11. Уафа, С.Б. Ограниченные и полуограниченные разломы и скрытые дефекты покрытия / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.М. Бабешко [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 22–27.

12. Уафа, С.Б. О факторах, снижающих вероятность стартовых землетрясений, и возможных подходах по их упреждению для конечных и полубесконечных плит / С.Б. Уафа, О.В. Евдокимова, В.А. Бабешко [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 47–54.

13. Уафа, С.Б. О стартовом землетрясении при гармонических воздействиях в пространственном варианте / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.М. Бабешко [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 24–29.

14. Уафа, С.Б. О некоторых приложениях покрытий с жидкостью / С.Б. Уафа, О.В. Евдокимова, В.А. Бабешко [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2019. – Т. 16, № 3. – С. 40–45.

15. Уафа, С.Б. Об особенностях трещин нового типа в приложениях / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Экологический вестник

научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2019. – Т. 16, № 3. – С. 28–45.

16. Уафа, С.Б. Об особенностях ресурсов подшипников, получивших дефект / С.Б. Уафа, О.В. Евдокимова, В.А. Бабешко [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 15–45.

17. Уафа, С.Б. Новые методы в проблеме прогноза цунами / С.Б. Уафа, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2021. – Т. 18, № 3. – С. 33–40.

18. Уафа, С.Б. О роли дефектов покрытия в виде трещин на предмет разрушения предоползневой структуры / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2021. – Т. 18, № 1. – С. 23–31.

19. Уафа, С.Б. Исследование возможности возникновения дискретного спектра в блочной структуре основания и штампа и характера волнового поля, излучаемого вне деформируемого штампа / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.М. Бабешко [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2022. – Т. 19, № 4. – С. 57–67.

20. Уафа, С.Б. Контактная задача в четверти плоскости с жестким штампом как основа задач с деформируемым штампом / С.Б. Уафа, А.С. Мухин, О.В. Евдокимова [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2023. – Т. 20, № 3. – С. 80–85.

21. Уафа, С.Б. О решении проблемы контактных задач с деформируемым штампом / С.Б. Уафа, О.В. Евдокимова, А.С. Мухин [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2023. – Т. 20, № 3. – С. 42–49.

22. Уафа, С.Б. Развитие новых наукоемких методов мониторинга и прогноза состояния территорий в сейсмоопасных и оползнеопасных зонах / С.Б. Уафа, В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Экологический вестник



научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2013. – Т. 10, № 3. – С. 13–20.