

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»

На правах рукописи



Нец Полина Алексеевна

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОСОВЫХ
АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДОВ С ЛОКАЛЬНЫМИ
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

1.1.8 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент

Еремин А. А.

Краснодар

2026

Оглавление

Введение	4
1. Постановка рассматриваемых краевых задач динамической теории упругости	17
§1.1. Уравнения, начальные и граничные условия	17
§1.2. Модели для внутренних и поверхностных источников колебаний	24
§1.3. Особенности волновой динамики волоконно-армированных полимерных композитных материалов	27
2. Методы решения рассматриваемых краевых задач	31
§2.1. Асимптотические представления волновых полей в многослойном полосовом орторопном волноводе	31
§2.2. Гибридная численно-аналитическая схема	37
§2.2.1 Описание схемы	37
§2.2.2 Численная валидация гибридной схемы	48
3. Особенности возбуждения и измерения упругих волн поверхностными и встроенными пьезоэлементами	58
§3.1. Влияние глубины залегания пьезоэлемента на возбуждаемые бегущие упругие волны	58

§3.2. Влияние клеевой прослойки между пьезоэлементом и упругим волноводом на возбуждаемые бегущие упругие волны	64
4. Особенности волновой динамики слоистого анизотропного материала, связанные с его внутренней структурой	69
§4.1. Влияние отдельных упругих модулей на дисперсионные характеристики слоистого композитного материала	69
§4.2. Влияние микроструктуры волоконно-армированного слоистого композитного материала на распространяющиеся в нем нормальные моды	79
5. Взаимодействие бегущих упругих волн с характерными неоднородностями	94
§5.1. Рассеяние на ребрах жесткости	94
§5.2. Рассеяние на интерфейсных расслоениях и трещинах	100
Заключение	111

Введение

Теоретическое и экспериментальное изучение динамического поведения слоистых упругих волноводов, содержащих единичные или множественные локализованные неоднородности, представляет существенный интерес для развития ряда прикладных областей – ультразвукового неразрушающего контроля (УЗК) и мониторинга состояния инженерных конструкций (structural health monitoring – SHM) [1–4], современной сенсорики [5–7], проектирования виброакустических метаматериалов [8, 9] и других. Такие волноводы могут быть изготовлены как из склеенных между собой традиционных изотропных конструкционных материалов (металлы и сплавы, стекло, полимеры), так и из слоистых анизотропных композитных материалов, например, волоконно-армированных стекло- и углепластиков. Возникающие при этом краевые задачи динамической теории упругости, рассматриваемые как в трехмерной постановке, так и в важном частном случае плоских колебаний (плоской деформации), связаны с тремя аспектами: возбуждение и регистрация бегущих упругих волн, в частности, волн Рэлея-Лэмба при динамическом взаимодействии пьезопреобразователей с упругим волноводом, их распространение по нему, а также рассеяние на дефектах и структурных элементах различных типов, характерных для соответствующих конструкций.

В качестве источников колебаний в УЗК/SHM приложениях используются как бесконтактные ультразвуковые преобразователи [10, 11], так и приклеенные к поверхности [2, 12] или интегрированные в композитный материал пленочные пьезокерамические или пьезокомпозитные элементы [12, 13]. Наличие адекватных моделей, учитывающих геометрические характеристики и механическое поведение пьезоактуаторов и сенсо-

ров, позволяет эффективно анализировать возбуждение и измерение бегущих упругих волн в полосовых волноводах с целью оптимизации расположения элементов сенсорно-актуаторной сети как в плоскости волновода, так и относительно его толщины. Волновое поведение пленочных пьезодатчиков, которые возбуждают изгибные и продольные колебания в балках, пластинах и оболочках [14–18], может моделироваться как набор сосредоточенных сил, приложенных к концам областей их контакта с упругим телом (pin-force model). В таком случае величины сил вычисляются на основе геометрии и физических характеристик волновода и пьезоэлемента. В ряде моделей также учитываются частотная зависимость колебаний и инерционные эффекты, которые возникают в пьезоэлектрических накладках [17, 19–21]. Однако, такие модели применимы только в низкочастотном диапазоне, где длины волн значительно больше толщины волновода. Для преодоления указанных трудностей необходимо использование более точных моделей как для волновода, так и для самих датчиков, кроме того необходимо учитывать и их взаимодействие.

Наряду с размещением сети пленочных преобразователей на поверхности диагностируемой конструкции, при разработке SHM-систем для композитных материалов перспективным является установка сенсорных элементов между слоями композита непосредственно в процессе его изготовления [22]. При практической реализации такого подхода возможно как размещение таких элементов внутри композита по-отдельности [23, 24], так и их предварительная интеграция в специальный “смарт”-слой из полимерного материала, который далее целиком вставляется между слоями композитной конструкции при ее формовании [25]. Такая интеграция сенсорной сети в незначительной степени влияет на прочностные свойства получа-

емого композита, обеспечивая при этом защиту ее элементов от воздействий внешних факторов [26, 27]. Многочисленные экспериментальные исследования показывают принципиальную возможность использования таких встроенных сенсорных сетей для возбуждения и регистрации бегущих упругих волн, а также для решения задачи локализации события акустической эмиссии в виде ударного воздействия [28].

Компьютерное моделирование волновых процессов, связанных с распространением бегущих упругих волн в слоистых композитных материалах, усложняется рядом факторов. К ним относится моделирование волновой динамики анизотропных материалов значительно усложняется по сравнению с традиционными материалами (например, металлами), поскольку существенно возрастает количество параметров, описывающих их механическое поведение даже в линейном приближении. Самостоятельный интерес представляют многочисленные экспериментальные исследования распространения бегущих волн в полимерных композитных материалах, изготовленных из однонаправленных волоконно-армированных препрегов, которые указывают на ряд особенностей, связанных со сложной внутренней микроструктурой слоистых композитов. Одна из таких особенностей связана с достаточно заметным затуханием возбуждаемых в волоконно-армированных материалах упругих волн, что приводит к уменьшению размеров области, диагностируемой отдельным элементом распределенной сенсорной сети и, следовательно, определяют необходимость более плотного размещения диагностирующих узлов [29–32]. В современных исследованиях затухание бегущих упругих волн в композитных материалах рассматривается, прежде всего, как следствие вязкоупругих свойств рассматриваемых сред. Данные свойства играют важную роль при разработке и ре-

ализации методов обнаружения повреждений в волоконно-армированных материалах [33].

Исследования, связанные с затуханием, в основном связаны с численными расчетами и экспериментальными измерениями. Вязкоупругое демпфирование материала в композитных конструкциях обычно моделируется гистерезисными моделями демпфирования (HR) или моделями Кельвина-Фойгта (KV) [34, 35]. Кроме того, модель Рэлея также используется для исследования влияния демпфирования на затухание волн [36, 37]. В случае более сложной постановки может быть использована комбинация нескольких моделей для многослойных структур. Выбор модели демпфирования существенно влияет на точность моделирования затухания и должен осуществляться с учетом конкретного материала и диапазона частот.

Композитным материалам в силу особенностей их производства свойственна большая неоднородность упругих свойств, чем для изотропных материалов, приводящая к усложнению их механического поведения. Для композитных материалов характерны дополнительные колебания между волновыми пакетами [38–42]. Данное явление связано с появлением вторичной (конвертированной) модой A_0 , которая возникает от распространяющейся моды S_0 . Само явление получило название “непрерывной конвертацией моды” (далее – НКМ; continuous mode conversion – CMC) [38]. В случае волоконно-армированных материалов, НКМ обусловлено процессом производства самих препрегов и дальнейшем формированием из них готового композитного изделия. В процессе их изготовления возможно появление областей с концентрацией или, наоборот, отсутствием армирующих волокон в полимерном связующем. Данные области фактически могут рассматриваться как препятствие для бегущих волн и, следовательно, порожд-

дают рассеянное волновое поле при взаимодействии с ними. Его появление может ошибочно трактоваться как наличие дефекта внутри рассматриваемого образца. Причем, такое поведение наблюдается и в неповрежденных образцах, изготовленных из волокнистых (тканых) ламинатов [38] или из однонаправленных препрегов с различными схемами укладки [40–42].

При численном моделировании НКМ не воспроизводится в рамках моделей с пространственно однородными (даже анизотропными) упругими свойствами. В связи с этим были предложены более сложные подходы, учитывающие пространственную неоднородность упругих модулей и внутреннюю микроструктуру композитов, реализуемые, как правило, в рамках метода конечных элементов [38–42]. Важным аспектом таких моделей является отсутствие симметрии свойств материала по толщине волновода. Наряду с детерминистическим описанием, основанным на фиксированном распределении волокон и матрицы, развиваются стохастические модели, учитывающие случайный характер микроструктуры волоконно-армированных материалов. В таком случае упругие свойства материала рассматриваются как случайные поля второго порядка, задаваемые средними значениями и ковариационной функцией [43]. Например, представление модуля Юнга в виде двумерного случайного поля позволяет воспроизводить непрерывную конвертацию мод в численных расчетах для композитов с различными схемами укладки [44, 45].

Всестороннее изучение процессов рассеяния бегущих упругих волн на неоднородностях различной природы также является важным этапом в проектировании диагностирующих SHM-систем и повышении надежности интерпретации данных УЗК. Распространенным классом повреждений, возникающих в слоистых композитных материалах и существенно ухудшаю-

щих их прочностные свойства, являются расслоения и трещины, которые могут располагаться как между отдельными слоями, так и внутри одного из слоев, что, в свою очередь, вызывает большой интерес к изучению волновой динамики слоистых упругих волноводов с такими дефектами [46–49]. В качестве препятствий для бегущих упругих волн, влияющих на интерпретацию УЗК/SHM-данных, выступают также и различные структурные элементы, например, ребра жесткости.

Решение описанных выше задач для полосовых ортотропных волноводов, содержащих локализованные неоднородности классических форм, может быть построено при помощи аналитических методов [50, 51] или на основе полуаналитического интегрального подхода и метода граничных интегральных уравнений [46, 52–55]. Данные методы обеспечивают физически наглядное представление структуры волнового поля, и их компьютерная реализация требует умеренных вычислительных ресурсов. В инженерной практике для численного решения волновых задач в областях произвольной геометрии, а также с учетом связанных физических полей используются прямые численные методы (например, методы конечных разностей или конечных элементов (МКЭ)) [56, 57], реализованные, как в случае с МКЭ, в виде пакетов прикладных программ (ANSYS, COMSOL, ACELAN, Fidesys и др.). Однако применение таких МКЭ-пакетов требует существенных вычислительных затрат при моделировании волновой динамики протяженных слоистых структур с локальными неоднородностями, а также дополнительной нетривиальной обработки получаемых численных данных для анализа вклада отдельных нормальных мод.

Применение таких МКЭ-пакетов зачастую требует существенных вычислительных и временных затрат при моделировании волновой динами-

ки протяженных структур с одной или несколькими неоднородностями. Это связано с необходимостью уплотнения сетки в окрестности препятствий (особенно при наличии угловых точек) и уменьшения размера сетки с ростом частоты колебаний. Стандартный МКЭ используется для расчета колебаний тел, имеющих конечный размер. Для моделирования неограниченных тел используются условия специального вида, которые учитывают отток волновой энергии на бесконечность и позволяют выделить единственное решение рассматриваемых краевых задач. Например, поглощающие граничные условия в форме идеально согласованных слоев (PML – Perfectly Matched Layers) [58, 59] или поглощающих слоев с возрастающим демпфированием [60].

Также стандартный МКЭ-пакет не позволяет проводить анализ (без дополнительной пост-обработки) распределения энергии между отдельными бегущими упругими волнами для получения наглядной, физически ясной картины процессов возбуждения, распространения и рассеяния волн на локализованных препятствиях. Пример подобной пост-обработки решения, полученного в рамках МКЭ представлен в работах [61, 62]. Здесь для выделения отдельной нормальной моды использовалось условия ортогональности нормальных мод [63, 64].

Естественным способом преодоления описанных выше трудностей является разработка гибридных подходов [65–70], сочетающих сеточную дискретизацию локальных областей волновода, содержащих препятствия, с аналитическими представлениями волновых полей в оставшихся однородных частях волновода в виде суперпозиции нормальных мод. Учитывая возрастающую сложность физико-механических свойств материалов, из которых изготавливаются современные тонкостенные инженерные конструк-

ции, большой интерес представляет дальнейшее развитие таких гибридных подходов и их обобщение на случай слоистых анизотропных материалов с множественными локализованными препятствиями. В подобных схемах конечная область, которая содержит в себе локализованную неоднородность (препятствие, структурный дефект, актуатор, сенсор и другие), моделируется с использованием стандартных сеточных методов [66, 67] (например, МКЭ) или метода граничных элементов [71]. Далее, полученное локальное численное решение сопрягается с физически наглядным представлением волнового поля в виде суммы бегущих волн в прилегающих однородных частях волновода. Амплитудные множители, которые присутствуют в аналитическом представлении, могут иметь аналитический вид [67] или искаться численно с использованием матричных методов [68], полуаналитического интегрального подхода [72] или метода полуаналитических конечных элементов (SAFE) [66, 70, 73, 74], который особенно эффективен для волноводов со сложной формой поперечного сечения [75]. Кроме того, гибридные схемы могут быть реализованы для анализа волновой динамики в протяженных волноводах, которые содержат несколько областей с неоднородностями, разделенными однородными участками волновода [69, 76]. Однако их практическая реализация обычно требует сложной разработки МКЭ/SAFE-кодов и связана с необходимостью решения крупномасштабных систем линейных алгебраических уравнений, которые возникают при сопряжении различных областей, что затрудняет их использование в инженерной практике.

Ранее была предложена гибридная численно-аналитическая схема [77, 78], которая позволяет обойти указанные выше трудности. Данная схема основана на построении набора независимых вспомогательных краевых задач

для локальной области с граничными условиями на поперечных гранях, которые соответствуют полю смещений или напряжений для каждой отдельной распространяющейся или затухающей нормальной моды. Для решения данной задачи может применяться любой стандартный МКЭ-пакет, что позволяет моделировать волноводы с неоднородностями любой произвольной сложности, а также использовать связанные мультифизические модели, благодаря которым можно, например, анализировать возбуждение колебаний актуатором с учетом пьезоэффекта и его электромеханической связи с подложкой. Далее полученные МКЭ-решения сшиваются с представлениями волновых полей в однородных частях волновода в виде суперпозиции бегущих и затухающих нормальных мод с учетом для них обобщенных условий ортогональности [63, 64].

Таким образом, задача разработки новых математических и компьютерных моделей для описания динамического поведения многослойных анизотропных полосовых волноводов, содержащих неоднородности разных типов и форм, с усложненными механическими свойствами и различным типом размещения пьезосенсоров, является актуальной. Создание таких моделей играет важную роль при совершенствовании УЗК/SHM-методов для диагностики тонкостенных инженерных конструкций, изготовленных из слоистых композитных материалов.

Данная работа направлена на обобщение гибридной схемы [77, 78] для анализа возбуждения, распространения и рассеяния плоских бегущих волн в многослойных ортотропных волноводах, содержащих произвольное конечное число областей с локализованными неоднородностями. Эти области могут включать в себя повреждения, конструктивные элементы, а также актуаторы и сенсоры, разделенные однородными областями.

Целью диссертационной работы является разработка эффективных математических и компьютерных моделей, описывающих процессы возбуждения и регистрации как поверхностными, так и встроенными в волновод пьезонакладки, распространения и рассеяния плоских упругих волн в слоистых изотропных и анизотропных волноводах с локальными неоднородностями (препятствиями, дефектами) и усложненными механическими свойствами и проведение на их основе соответствующего параметрического анализа в приложении к задачам совершенствования систем ультразвукового неразрушающего контроля и мониторинга состояния конструкций.

Для достижения поставленных целей решены следующие **задачи**:

1. Разработать и реализовать в виде пакета программ эффективные методы решения динамических задач о возбуждении и распространении плоских упругих волн в многослойных ортотропных волноводах с единичными или множественными локализованными неоднородностями.
2. Исследовать процессы возбуждения и регистрации бегущих упругих волн поверхностными и встроенными в волновод пьезопреобразователями.
3. Изучить особенности распространения упругих волн в многослойных ортотропных волноводах с учетом их усложненных механических свойств.
4. Провести анализ процесса рассеяния бегущих упругих волн на отдельных типах структурных элементов и дефектов, характерных для тонкостенных конструкций из слоистых композитных материалов.

Диссертационная работа общим объемом 127 страниц имеет следующую структуру: введение, пять глав основной части, заключение и список

литературы, включающий 112 источников. Работа содержит 46 рисунков и 4 таблицы.

В **первой главе** формулируются математическая постановка динамических краевых задач для упругих тел в рамках линейной теории упругости и приводятся дополнительные сведения об усложненных свойствах материала волновода.

Вторая глава посвящена описанию интегрально подхода [79, 80], используемый для решения краевых задач динамической теории упругости, с точки зрения построения дисперсионных кривых и вывода асимптотик для бегущих упругих волн, а также описанию гибридного подхода, используемого для решения рассматриваемых в работе задач [77].

В **третьей главе** обсуждаются особенность возбуждения и измерения упругих волн поверхностными и встроенными пьезоэлектриками, а также влияние клеевой прослойки на возбуждение и распространение бегущих упругих волн.

Четвертая глава посвящена изучению влияния микроструктуры материала волновода на его волновые характеристики.

В **пятой главе** описывается взаимодействие бегущих упругих волн с характерными для композитных конструкций неоднородностями (ребра жесткости, отслоения, трещины и другие).

На защиту выносятся:

1. Разработанные математические и компьютерные модели, описывающие распространение бегущих упругих волн, возбуждаемых поверхностным или встроенным пьезоактуатором в многослойных изотропных и ортотропных волноводах в случае плоской деформации, и их рассеяние на локализованных макро-неоднородностях (дефектах) раз-

личной природы.

2. Реализация обобщения гибридной численно-аналитической схемы в приложении к задачам определения динамической реакции протяженных многослойных ортотропных волноводов и рассеяния упругих волн на множественных неоднородностях различной природы в случае плоской деформации.
3. Результаты численного анализа влияния расположения пьезоактуатора в многослойном ортотропном волноводе относительно его толщины на перераспределение энергии между возбуждаемыми им нормальными модами.
4. Механико-математическая модель, описывающая в случае плоской деформации особенности волновой динамики многослойных волоконно-армированных композитных материалов с учетом вязкости полимерного связующего и сложной микроструктуры, а также ее компьютерная реализация.
5. Результаты численного анализа волновых процессов в системе «пьезоактуатор – многослойный упругий волновод с поверхностными и/или внутренними препятствиями - пьезосенсор» в приложении к задачам ультразвуковой диагностики тонкостенных конструкций.

На разных этапах выполнения данная диссертационная работы была поддержана грантами Минобрнауки России FZEN-2020-0017 «Разработка расчетно-экспериментальных методов диагностики конструкций и определения и мониторинга деградации свойств материалов на основе систем возбуждения и регистрации бегущих волн» и FZEN-2024-0003 «Развитие методов ультразвукового волнового мониторинга тонкостенных конструк-

ций из композитных материалов», а также Российского научного фонда № 24-71-00105 «Разработка гибридных численно-аналитических подходов к моделированию волновой динамики в слоистых упругих материалах».

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на 6 всероссийских и международных конференциях. В их числе: Юбилейная Международная Летняя Школа – Конференция “Актуальные Проблемы Механики” (г. Санкт-Петербург, 2022 г.), XXI Международная конференция “Современные проблемы механики сплошной среды” (г. Ростов-на-Дону, 2023 г.), Всероссийская конференция “Механика деформируемого твердого тела в проектировании материалов и конструкций” (г. Пермь, 2024 г.), Международная конференция “Days on Diffraction 2025” (г. Санкт-Петербург, 2025 г.), Всероссийская научная политематическая конференция “XXXVII сессия Российского акустического общества” (г. Москва, 2025), XX Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, г. Геленджик, 2026 г.).

Публикации. Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертации, опубликованы в 5 работах (в том числе две – в изданиях, определенных ВАК РФ для публикации основных научных результатов) [81–85], которые приводятся в списке литературы. В данных работах А.А. Еремину и А.А. Евдокимову принадлежит постановка задач и разработка методов их решения, П.А. Нец – программная реализация предложенных подходов, проведение численных экспериментов, а также анализ полученных результатов.

ГЛАВА 1. Постановка рассматриваемых краевых задач динамической теории упругости

§1.1. Уравнения, начальные и граничные условия

Рассматривается свободный M -слойный ортотропный упругий волновод (рис. 1.1), занимающий в декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ область $D = \{\mathbf{x} : |x|, |y| < \infty, -H \leq z \leq 0\}$. Слои $D_m = \{\mathbf{x} : |x|, |y| < \infty, z_{m+1} < z < z_m\}$, $m = 1, 2, \dots, M$, составляющие волновод ($D = \bigcup_{m=1}^M D_m$, $z_{M+1} = -H$) жестко сцеплены между собой. В области D содержится конечное число локализованных неоднородностей различных типов, в качестве которых рассматриваются внутренние и выходящие на поверхность дефекты со свободными от напряжений границами в виде интерфейсных расслоений, трещин и локализованных изменений толщины (выемок), поверхностные препятствия типа ребер жесткости или источников колебаний/сенсоров, жестко сцепленных с верхней $z = 0$ или нижней $z = -H$ границами волновода, а также внутренние включения из другого материала. Предполагается, что все рассматриваемые неоднородности имеют цилиндрическую форму с образующей параллельной оси Oy , а также, что для каждого из ортотропных слоев волновода оси упругой симметрии совпадают с осями координат (рисунок 1.1). Для общности изложения также вводятся в рассмотрение области волновода конечной протяженности относительно оси Ox , содержащие единичные или близко расположенные между собой неоднородности, которые обозначаются как $D^{(2p-1)} = D_{F,p}$, где индекс $p = 1, 2, \dots, P$ соответствует номеру области. Остальные части волновода считаются однородными и обозначаются как $D^{(2p)} = D_{A,p}$, $p = 0, 1, \dots, P$.

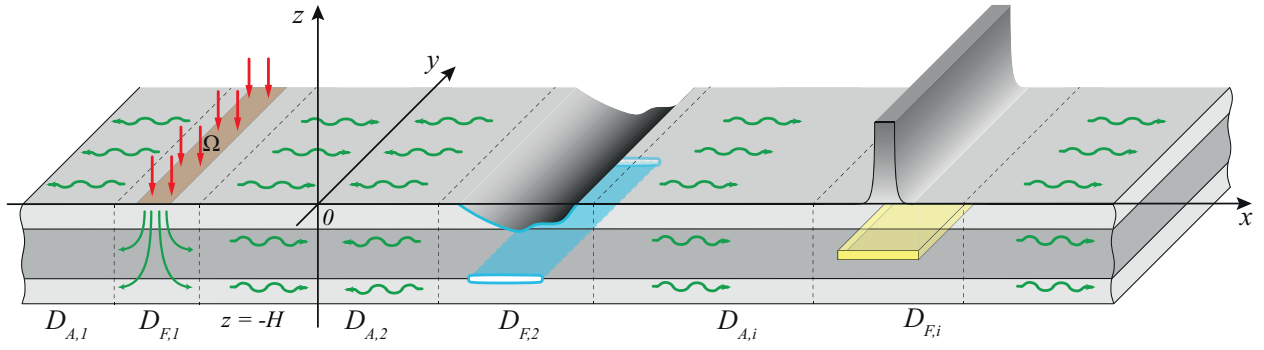


Рис. 1.1: Геометрия рассматриваемой задачи

Под действием некоторой нагрузки точки волновода $\mathbf{x} \in D$ в результате деформации отклоняются от своего первоначального положения на величину, характеризуемую вектор-функцией $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = (u, v, w)^T$. Перемещения $\mathbf{u}$, в предположении сплошности материала, непрерывно зависят от координат $\mathbf{x}$ и времени t . Компоненты тензора деформаций ε_{ij} и тензора напряжений σ_{ij} описывают напряженно-деформируемое состояние тела [86–88]. Вектора и вектор-функции обозначены жирным шрифтом.

Перемещения, деформации и напряжения в линейной теории упругости связаны уравнениями движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho^{(p)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^{(p)} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

и геометрическими соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Здесь $c_{ijkl}^{(p)}(\mathbf{x})$ – модули упругости, $\rho^{(p)}(\mathbf{x})$ – плотность, где $p = 0, 1, \dots, 2P$, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ – вектор-функция, которая характеризует массовые силы, ε_{ij} – тензор деформаций, σ_{ij} – тензор напряжений. Плотность материала $\rho^{(p)}$, тензор

упругих постоянных $c_{ijkl}^{(p)}$ считаются кусочно-постоянными функциями поперечной координаты z . Кроме того, плотность материала и тензор упругих постоянных может меняться при переходе от одной области $D^{(p)}$ к другой. При использовании тензорной записи, традиционно, предполагается суммирование по одинаковым индексам и для производных по координате используется следующие обозначение $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Свойства симметричности, которые присуще как тензору деформаций ε_{ij} , так и тензору упругих постоянных $c_{ijkl}^{(p)}$ (а именно симметрия относительно перестановки двух первых ij и двух последних kl индексов), приводят к значительному сокращению количества независимых компонент тензора $c_{ijkl}^{(p)}$. Несмотря на то, что в общем случае тензор $c_{ijkl}^{(p)}$ описывается 81 компонентой, перечисленные выше свойства оставляют независимыми только 21 элемент. Для перехода к компактной матричной форме записи применяется правило Фохта, которое позволяет заменить пары индексов ij и kl на одиночные индексы. Следовательно, тензору $c_{ijkl}^{(p)}$ ставится в соответствие симметричная матрица $C_{\alpha\beta}^{(p)}$ размерности 6×6 , а соотношения обобщенного закона Гука (1.2) примут вид

$$\sigma_i = c_{ij}^{(p)} \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, 6$$

а матрица упругих постоянных материала записывается в виде

$$C^{(p)} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}.$$

На практике, для описания ортотропных и трансверсально изотропных материалов, часто используются 12 инженерных констант, которые включают в себя модули упругости в соответствующих направлениях $E_1^{(p)}$, $E_2^{(p)}$, $E_3^{(p)}$, модули сдвига в соответствующих плоскостях $G_{12}^{(p)}$, $G_{13}^{(p)}$, $G_{23}^{(p)}$ и коэффициенты Пуассона $\nu_{12}^{(p)}$, $\nu_{13}^{(p)}$, $\nu_{23}^{(p)}$, $\nu_{21}^{(p)}$, $\nu_{31}^{(p)}$, $\nu_{32}^{(p)}$. Из этого набора независимыми являются только 9 констант в случае ортотропного материала и 5 – в случае трансверсально изотропного. На их основе строится симметричная матрица податливости $S^{(p)}$, которая связана с матрицей жесткости $C^{(p)}$ следующим соотношением [89, 90]: $C^{(p)} = (S^{(p)})^{-1}$.

Вектор напряжений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$, который возникает в упругом теле на некоторой элементарной площадке с нормалью $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$, связан с компонентами тензора напряжений следующими соотношениями

$$\tau_i = \sigma_{ij}^{(p)} n_j,$$

В данной работе, в большинства случаев, в качестве волновода рассматривается упругий ортотропный слой или пакет слоев D_m , $m = 1, \dots, M$, где его плоскопараллельные границы - горизонтальны. Также координатная плоскость $z = 0$ совпадает с верхней границей слоя (пакета слоев) толщины H . Слои предполагаются жестко сцепленными между собой, т.е. перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и напряжения $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ непрерывны во всем объеме пластины:

$$[\mathbf{u}]_m = 0, \quad [\boldsymbol{\tau}]_m = 0, \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (1.4)$$

Квадратными скобками обозначен скачок функции в точках раздела при $z = z_m$:

$$[f]_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(z_m - \varepsilon) - f(z_m + \varepsilon)).$$

Предполагается, что до начального момента времени $t = 0$ все точки

слоя находятся в покое:

$$\mathbf{u}\Big|_{t \leq 0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}\Big|_{t \leq 0} = 0. \quad (1.5)$$

Далее к слою прикладываются поверхностные силы в ограниченной области Ω (рис. 1.1), которые порождают колебания в D , начиная с момента $t = 0$. На верхней границе $z = 0$ рассматриваются следующие условия

$$\boldsymbol{\tau}\Big|_{z=0} = \mathbf{q} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \mathbf{u}\Big|_{\mathbf{x} \in \Omega} &= \mathbf{p}, \\ \boldsymbol{\tau}\Big|_{\mathbf{x} \notin \Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

На нижней границе рассматриваются условия отсутствия напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}\Big|_{z=-h} = 0 \quad (1.7)$$

Здесь вектор-функции $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ заданы в области Ω , а вне данной области предполагаются торжественно равными нулю. Кроме того, компоненты $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ вдоль оси Oy считаются равными нулю ($\mathbf{q} = (q_x, 0, q_z)^T$, $\mathbf{p} = (p_x, 0, p_z)^T$).

Уравнения (1.1) вместе с граничными условиями (1.6)-(1.7) и (1.4) могут локально нарушаться внутри области с неоднородностью $D_{F,p}$. Например, вместо строгого условия непрерывности (1.4) могут задаваться условия несовершенного контакта, частичное расслоение между слоями или условия пружинного типа. Также могут вводиться локальные геометрические неоднородности или изменения поперечного сечения волновода.

Частным случаем движения точек слоя являются установившиеся гармонические колебания, которые возникают при косинусоидальных колебаниях частиц среды. Зависимость от времени компонент смещения для данного типа колебаний имеет вид $\cos(\theta(\mathbf{x}) - \omega t)$, здесь ω – круговая частота колебаний, а θ – сдвиг фазы. Для установившихся гармонических колебаний принято переходить к комплексной форме записи, таким образом горизонтальную компоненту вектора смещений обозначим $u = v_1(\mathbf{x}) \cos(\theta - \omega t)$.

Следовательно,

$$u = v_1(\mathbf{x}) \operatorname{Re} \left[e^{i(\theta - \omega t)} \right] = \operatorname{Re} [v e^{-i\omega t}], \quad (1.8)$$

где $v = v_1 e^{i\theta}$ - комплексная амплитуда величины u . Аналогичная запись справедлива для компонентов тензора деформаций и напряжений, а также компонент вектора объемных и поверхностных сил. Везде, где над данными величинами производятся линейные операции, их можно свести к операциям над их комплексными амплитудами. Для гармонических колебаний справедлива следующая схема решения:

1. Для всех величин с гармонической зависимостью от времени в уравнениях и граничных условиях производится их замена на соответствующие комплексные амплитуды. Дифференцирование по t заменяется на множитель $-i\omega$.
2. Решается краевая задача относительно неизвестных комплексных амплитуд.
3. Полученные в ходе решения комплексные амплитуды домножаются на $e^{-i\omega t}$, далее берется вещественная часть получившегося выражения.

Введение комплексных амплитуд позволяет избавиться от временной зависимости в выкладках и, кроме того, они описывают одновременно и амплитуду, и сдвиг фазы. В дальнейшем в случае установившихся гармонических колебаний под $\mathbf{u}$, σ_{ij} , ε_{ij} , $\mathbf{F}$ и т.д. будем понимать комплексные амплитуды соответствующих величин. Граничные условия (1.6) и (1.7), а также уравнения движения (1.1), закон Гука (1.2) и геометрические соотношения Коши (1.3) не изменяются с учетом рассуждений, описанных выше. Уравнение движения для каждого из слоев и подслоев рассматриваемого

волновода в случае гармонических колебаний принимает вид:

$$c_{ijkl}^{(p)} u_{l,jk} - \rho^{(p)} \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Здесь ω – круговая частота.

Построение решения нестационарной задачи (1.1)–(1.7) для поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ может быть выполнено с использованием решения соответствующей гармонической задачи (1.1)–(1.4), (1.6), (1.7) для комплексных амплитуд $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$. Применение преобразования Фурье-Лапласа по времени t к уравнениям и граничным условиям с учетом начальных условий (1.5), приводит к краевой задаче относительно комплексной амплитуды:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^\infty \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.10)$$

В силу свойства комплексного сопряжения $u(x, -\omega) = u^*(x, \omega)$ обратное преобразование принимает форму интеграла по вещественной полуоси:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.11)$$

Тем самым решение гармонической задачи служит промежуточным этапом при построении решения нестационарной задачи, а представление (1.11) отражает принцип суперпозиции в линейных системах. Кроме того, при $\omega = 0$ уравнения переходят в уравнения статики, а вещественная часть комплексной амплитуды $\text{Re } \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ дает решение соответствующей статической задачи.

Вид вектор-функций нагрузки $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ (1.6), (1.7), геометрическая форма неоднородностей (рисунок 1.1), а также свойства симметрии материала позволяет перейти к плоской постановке рассматриваемых краевых задач. В случае плоских установившихся колебаний уравнение движения (1.9) и

обобщенный закон Гука (1.2) записываются как:

$$\begin{aligned}
C_{11}^{(p)} u_{1,11} + C_{55}^{(p)} u_{1,33} + (C_{13}^{(p)} + C_{55}^{(p)}) u_{3,13} + \rho^{(p)} \omega^2 u_1 &= 0, \\
C_{55}^{(p)} u_{3,11} + C_{33}^{(p)} u_{3,33} + (C_{13}^{(p)} + C_{55}^{(p)}) u_{1,13} + \rho^{(p)} \omega^2 u_3 &= 0, \\
\sigma_{11} = C_{11}^{(p)} u_{1,1} + C_{13}^{(p)} u_{3,3}, \quad \sigma_{33} = C_{13}^{(p)} u_{1,1} + C_{33}^{(p)} u_{3,3}, \\
\sigma_{13} = \sigma_{31} = C_{55}^{(p)} (u_{1,3} + u_{3,1}).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Таким образом, краевая задача для ортотропной упругого полосового волновода записывается как (1.12), (1.4), (1.6), (1.7). Замыкают постановку задачи условия излучения на бесконечности, сформулированные с использованием принципа предельного поглощения [91].

§1.2. Модели для внутренних и поверхностных источников колебаний

В задачах ультразвукового неразрушающего контроля и мониторинга состояния конструкций [1, 2] традиционным является применение поверхностных или интегрированных пленочных пьезопреобразователей [12, 13]. Предполагается, что данные пьезоактуаторы имеют цилиндрическую форму, вытянутую вдоль оси Oy , а значит для них справедливы рассуждения, представленные при выводе уравнений (1.12).

В данной работе в качестве источника колебаний рассматриваются наклейки, выполненные из пьезокерамики. Данные наклейки могут быть как наклеены к верхней поверхности волновода в области $\Omega = \{(x, z) : x \in [-a_x, a_x], z \in [0, h_{pzt}]\}$ (рис. 1.2 (а)), так и располагаться внутри него между отдельными слоями или внутри одного из слоев, например, между первым и вторым слоем $\Omega = \{(x, z) : x \in [-a_x, a_x], z \in [z_1, z_1 + h_{pzt}]\}$, при этом возможно размещение таких элементов по-отдельности или предварительная их интеграция в специальный “смарт”-слой, выполненный из полимер-

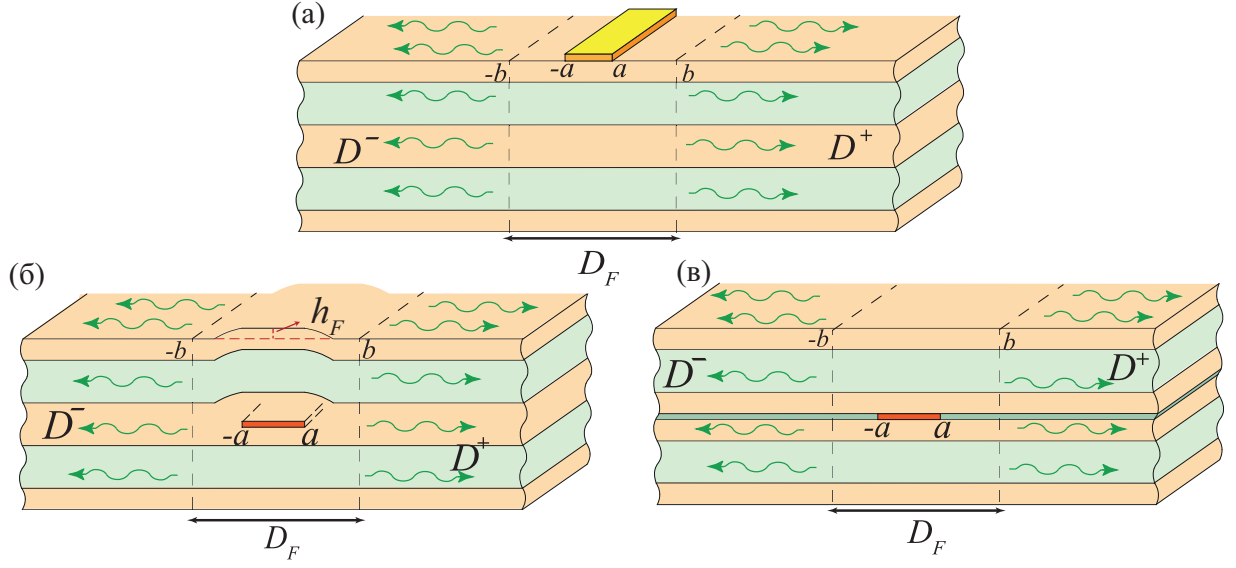


Рис. 1.2: Геометрия волновода с пьезонакладкой: (а) поверхностная, (б) встроенная без “смарт”-слоя, (в) встроенная со “смарт”-слоем

ного материала (рис. 1.2 (б), (в) соответственно). Контакт между пьезоэлементом и подложкой в случае поверхностного расположения источника колебаний, а также между пьезоактуатором и прилегающими к нему слоями волновода в случае интегрированного преобразователя предполагается идеальным, то есть соответствующие компоненты векторов смещений и напряжений на всех границах контакта считаются непрерывными.

Уравнения, описывающие гармонические колебания в пьезоэлектрической среде ($\mathbf{x} \in \Omega$), могут быть записаны через вектор перемещений $\mathbf{u}$ и потенциал электрического поля ϕ [92, 93]:

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_j} + \rho \omega^2 u_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.13)$$

$$e_{ikl} \frac{\partial^2 u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l \partial x_i} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \quad (1.14)$$

где c_{ijkl} , e_{kij} , ε_{ik} – тензоры упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант соответственно. Компоненты вектора напряженности $\mathbf{E}$ опреде-

ляются как производные от функции потенциала $\phi(\mathbf{x})$:

$$E_k(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k}.$$

Для формулирования граничных условий поверхность пьезоэлектрика делится на три части: $\partial\Omega^U$, $\partial\Omega^L$, $\partial\Omega^S$ – верхняя, нижняя горизонтальные и боковые поверхности пьезоэлектрика соответственно. С учетом данных обозначений электрические граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^S, \\ \phi(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^L, \\ \phi(\mathbf{x}) &= V_{pzt}, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^U. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ – вектор электрических смещений, а $\mathbf{n}$ – нормаль в соответствующей точке боковой поверхности. Таким образом, нижняя поверхность заземлена, к верхней поверхности приложено электрическое напряжение V_{pzt} , а на боковой поверхности заданы условия равенства нулю электрических смещений.

Механические граничные условия зависят от типа пьезопреобразователя. Если пьезоэлектрик погружен в волновод (Рис. 1.2 (б), (в)), то на всех границах раздела пьезоэлемента и волновода формулируются условия непрерывности смещений и напряжений ($\partial\Omega^U$, $\partial\Omega^L$, $\partial\Omega^S$). Если актуатор расположен на поверхности (рис. 1.2 (а)), то на нижней грани задаются условия непрерывности полей смещений и напряжений ($\partial\Omega^L$), тогда как остальные его грани считаются свободными от напряжений ($\partial\Omega^U$, $\partial\Omega^S$). Для поверхностно закрепленного пьезодатчика механические граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^L} &= 0, & [\boldsymbol{\tau}] \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^L} &= 0, \\ \boldsymbol{\tau} \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^U} &= 0, & \boldsymbol{\tau} \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^S} &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Механические граничные условия для интегрированного в волновод пьезоэлектрика имеют вид:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^L} &= 0, & [\boldsymbol{\tau}] \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^L} &= 0, \\ [\mathbf{u}] \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^U} &= 0, & [\boldsymbol{\tau}] \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^U} &= 0, \\ [\mathbf{u}] \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^S} &= 0, & [\boldsymbol{\tau}] \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^S} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для определения электрического потенциала на электродах пьезодатчика необходимо воспользоваться двумя дополнительными граничными условиями [83, 92]:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \bar{V}, \quad x \in \partial\Omega^U \\ Q &= \int_{\partial\Omega^U} \mathbf{D}\mathbf{n} \, d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где Q – электрический заряд, а постоянный электрический потенциал $\bar{V}$ предполагается неизвестным.

Таким образом, краевая задача электроупругости состоит из уравнений движения (1.13), соотношений, вытекающих из уравнений Максвелла (1.14), электрических (1.15) и механических (1.16) или (1.17) граничных условий. В рамках квазистатического приближения начальные электрические условия не задаются.

§1.3. Особенности волновой динамики волоконно-армированных полимерных композитных материалов

Исследования, посвященные затуханию волн в многослойных композитных конструкциях, в последние годы были, зачастую, связаны с численными расчетами и экспериментами. Гистерезисная модель (HR) и модель Кельвина-Фойгта (KV) являются наиболее распространенными моделями демпфирования, которые используются для описания вязкоупру-

гих свойств в композитных конструкциях [94], как показано в уравнениях (1.19) и (1.20) соответственно. В обоих моделях модуль упругости рассматривается как комплексная величина E^* , действительная часть которой E соответствует модулю накопления [95], тогда как мнимая часть связана с коэффициентами потерь η_{HR} и γ_{KV} . Среди данных моделей в модели HR комплексный модуль E^* не зависит от частоты ω , а в модели KV модуль E^* является комплексно-зависимым.

$$E^* = E(1 - i\eta_{HR}) \quad \text{модель HR} \quad (1.19)$$

$$E^*(\omega) = E \left(1 - i\gamma_{KV} \frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad \text{модель KV} \quad (1.20)$$

где i – мнимая единица, верхний индекс $*$ указывает на принадлежность величины к комплексным модулям, ω_c – характеристическая частота модели Кельвина-Фойгта, при которой определяется параметр γ_{KV} .

Для произвольного слоя, входящего в состав многослойного композита, соотношение между напряжениями и деформациями характеризуется девятью независимыми упругими постоянными. К их числу относятся три продольных модуля упругости E_1 , E_2 и E_3 , три модуля сдвига G_{23} , G_{31} и G_{12} , а также три коэффициента Пуассона ν_{12} , ν_{13} и ν_{23} . Поскольку в данной работе учитываются вязкоупругие свойства композитных материалов, выбранные модели демпфирования из соотношений (1.19) и (1.20) могут быть применены к шести упругим модулям. В результате параметры, приведенные выше, принимают комплексный частотно-зависимый характер: $E_1(\omega)$, $E_2(\omega)$, $E_3(\omega)$, $G_{23}(\omega)$, $G_{31}(\omega)$, $G_{12}(\omega)$. Таким образом, стандартная матрица податливости S преобразуется в соответствующую частотно-зависимую комплексную матрицу $S^*(\omega)$ (1.21). Данная матрица описывает ортотропную анизотропию композитного материала, характерную для многослой-

ных композитных структур, и записывается в следующем виде:

$$S^*(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1^*(\omega)} & -\frac{\nu_{12}}{E_1^*(\omega)} & -\frac{\nu_{13}}{E_1^*(\omega)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2^*(\omega)} & \frac{1}{E_2^*(\omega)} & -\frac{\nu_{23}}{E_2^*(\omega)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3^*(\omega)} & -\frac{\nu_{12}}{E_1^*(\omega)} & -\frac{\nu_{13}}{E_1^*(\omega)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}^*(\omega)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}^*(\omega)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^*(\omega)} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (1.21)$$

здесь шесть коэффициентов Пуассона рассматриваются как вещественные числа. При этом коэффициенты ν_{21} , ν_{31} и ν_{32} не являются независимыми вследствие симметрии матрицы жесткости.

Матрица податливости $S^*(\omega)$ определяется для каждого слоя отдельно. Для последующего анализа необходимо привести данную матрицу к системе координат, связанной с направлением распространению волны. Такая трансформация позволяет упростить дальнейшие математические преобразования. Переход к новой системе координат осуществляется при помощи тензорных операций. На первом этапе каждый коэффициент $S_{pq}^*(\omega)$, входящий в матрицу податливости, представленную в уравнении (1.21), преобразуется в компоненты тензора жесткости четвертого ранга $c_{ijkl}^*(\omega)$. Данное преобразование выполняется с использованием нотации Фойгта, обеспечивающей взаимно-однозначное соответствие между индексами матрицы и тензора. После данной операции тензор жесткости $c_{ijkl}^*(\omega)$ поворачивается в направлении распространения бегущих волн согласно правилу тензорного преобразования, используя правило суммирования Эйнштейна, в соответствии с которым суммирование выполняется по повторяющимся индексам. Компоненты повернутого тензора жесткости определяется следующим вы-

ражением

$$c_{mnpo}^*(\omega, \theta) = R_{mi}(\theta)R_{nj}(\theta)R_{ok}(\theta)R_{pl}(\theta) c_{ijkl}^*(\omega), \quad (1.22)$$

где $c_{mnpo}^*(\omega, \theta)$ – представляет собой повернутый тензор жесткости, а $R_{mi}(\theta)$ – коэффициенты тензора поворота, как показано в уравнении (1.23). При этом угол θ считается положительным при повороте против часовой стрелки.

Матрица вращения имеет вид

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где угол θ считается положительным при повороте против часовой стрелки.

После выполненного поворота тензорная форма матрицы жесткости $c_{mnpo}^*(\omega, \theta)$ вновь преобразуется в матричное представление $C_{pq}^*(\omega, \theta)$ с использованием нотации Фойгта. Развернутая форма записи данной матрицы представлена в уравнении (1.24) и отражает моноклинную анизотропию композитного материала:

$$C^*(\omega, \theta) = \begin{pmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{13}^* & 0 & 0 & C_{16}^* \\ & C_{22}^* & C_{23}^* & 0 & 0 & C_{26}^* \\ & & C_{33}^* & 0 & 0 & C_{36}^* \\ \text{sym} & & & C_{44}^* & C_{45}^* & 0 \\ & & & & C_{55}^* & 0 \\ & & & & & C_{66}^* \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

С учетом предположений, сделанных в разделе §1.1., для сохранения плоской постановки рассматриваются углы вращения $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$, позволяющие сохранить ориентацию осей симметрии материала совпадающей с направлениями координатных осей.

ГЛАВА 2. Методы решения рассматриваемых краевых задач

Данная глава посвящена описанию обобщения гибридной численно-аналитической схемы [77, 78] для решения сформулированных в разделе §1.1. краевых задач, то есть для компьютерного моделирования динамического поведения многослойных полосовых ортотропных волноводов с произвольным конечным количеством локальных неоднородностей. Важным этапом ее реализации является построение на основе полуаналитического интегрального подхода [79, 80] асимптотических представлений для волновых полей в виде разложения по нормальным модам, позволяющие не только рассчитывать динамический отклик однородного стратифицированного волновода, но анализировать его дисперсионные характеристики в том числе и при наличии затухания.

§2.1. Асимптотические представления волновых полей в многослойном полосовом ортотропном волноводе

Для получения количественных (амплитудно-частотных) характеристик бегущих волн, возбуждаемых в многослойном ортотропном волноводе, в данной работе используется полуаналитический интегральный подход, базирующийся на явном интегральном представлении вектора смещений волнового поля $\mathbf{u}$ через свертку матрицы Грина k для рассматриваемой упругой слоистой структуры и вектора поверхностной нагрузки $\mathbf{q}$ [79, 80]. Для этого к уравнению движения (1.9), а также к граничным условиям (1.4), (1.6) и (1.7) применяется преобразование Фурье. Задача сводится к решению однородной системы дифференциальных уравнений второго по-

рядка в Фурье-трансформантах. К найденному решению применяется обратное преобразование Фурье, что дает точное интегральное представление искомого волнового поля в трехмерном случае [79, 80, 96].

Для того, чтобы получить интегральное представление искомого решения в плоском случае достаточно применить к уравнению (1.12) и соответствующим граничным условиям интегральное преобразование Фурье лишь по x -координате, полагая нулем параметр α_2 и y -компоненты всех величин. После применения преобразования Фурье к уравнениям и граничным условиям, получаем систему однородных дифференциальных уравнений (ОДУ) для каждого отдельного слоя m :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{u}^m}{dz} = A^m \mathbf{u}^m, \quad m = 1, \dots, M, \\ S^1 u^1 \Big|_{z=0} = \mathbf{Q}, \\ [B^m u^m - B^{m+1} u^{m+1}] \Big|_{z=z_{m+1}} = 0, \quad m = 1, \dots, M-1, \\ S^M u^M \Big|_{z=-H} = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}^m = (u_1^m, u_3^m, u_1^{m'}, u_3^{m'})^T$. Матрицы S^M и S^1 и матрица “перехода” между слоями B^m определяются как:

$$S^m = \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha c_{55}^m & c_{55}^m & 0 \\ -i\alpha c_{31}^m & 0 & 0 & c_{33}^m \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$B^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i\alpha c_{55}^m & c_{55}^m & 0 \\ -i\alpha c_{31}^m & 0 & 0 & c_{33}^m \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A^m системы (2.1) записывается в следующем виде:

$$A^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31}^m & 0 & 0 & a_{34}^m \\ 0 & a_{42}^m & a_{43}^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} a_{31}^m &= (\alpha^2 c_{11}^m - \rho^m \omega^2)/c_{55}^m \\ a_{34}^m &= i\alpha(c_{31}^m + c_{55}^m)/c_{55}^m \\ a_{42}^m &= (\alpha^2 c_{55}^m - \rho^m \omega^2)/c_{33}^m \\ a_{43}^m &= i\alpha(c_{31}^m + c_{55}^m)/c_{33}^m \end{aligned} \quad (2.3)$$

Общее решение ОДУ (2.1) представимо в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^m &= t_1^m \mathbf{n}_1^m e^{\sigma_1^m(z-z_m)} + t_2^m \mathbf{n}_2^m e^{\sigma_2^m(z-z_m)} + \\ &+ t_3^m \mathbf{n}_3^m e^{\sigma_3^m(z-z_{m+1})} + t_4^m \mathbf{n}_4^m e^{\sigma_4^m(z-z_{m+1})}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где t_i^m – неизвестные постоянные, $\sigma_i^m = \gamma_{i,m}$ – собственные числа матрицы A^m , $\mathbf{n}_i^m$ – собственные векторы соответствующих собственных чисел, индексы изменяются в пределах: $i = 1, \dots, 4, m = 1, \dots, M$.

Собственные числа матрицы A^m определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_1^m &= \sqrt{t_1^m}, \quad \sigma_2^m = -\sqrt{t_1^m}, \quad \sigma_3^m = \sqrt{t_2^m}, \quad \sigma_4^m = -\sqrt{t_2^m}, \\ \text{где } t_1^m &= \frac{b^m + \sqrt{(b^m)^2 - 4c^m}}{2}, \quad t_2^m = \frac{b^m - \sqrt{(b^m)^2 - 4c^m}}{2}, \\ b^m &= a_{34}^m a_{43}^m + a_{42}^m + a_{31}^m, \quad c^m = a_{31}^m a_{42}^m. \end{aligned}$$

Собственные векторы $\mathbf{n}_i^m$ соответствующих собственных чисел матрицы A^m определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1^m = \gamma_{1,m} : \quad n_1^m &= \alpha, \quad n_2^m = \alpha \frac{\gamma_{1,m}^2 - a_{31}^m}{a_{34}^m \gamma_{1,m}}, \quad n_3^m = \gamma_{1,m} \alpha, \quad n_4^m = \alpha \frac{\gamma_{1,m}^2 - a_{31}^m}{a_{34}^m}; \\ \sigma_2^m = \gamma_{2,m} : \quad n_1^m &= \alpha, \quad n_2^m = \alpha \frac{\gamma_{2,m}^2 - a_{31}^m}{a_{34}^m \gamma_{2,m}}, \quad n_3^m = \gamma_{2,m} \alpha, \quad n_4^m = \alpha \frac{\gamma_{2,m}^2 - a_{31}^m}{a_{34}^m}; \\ \sigma_3^m = \gamma_{3,m} : \quad n_1^m &= \alpha \frac{\gamma_{3,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m \gamma_{3,m}}, \quad n_2^m = \alpha, \quad n_3^m = \alpha \frac{\gamma_{3,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m}, \quad n_4^m = \gamma_{3,m} \alpha; \\ \sigma_4^m = \gamma_{4,m} : \quad n_1^m &= \alpha \frac{\gamma_{4,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m \gamma_{4,m}}, \quad n_2^m = \alpha, \quad n_3^m = \alpha \frac{\gamma_{4,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m}, \quad n_4^m = \gamma_{4,m} \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение для каждого отдельного слоя представимо в следующем виде:

$$\mathbf{u}^m(\alpha, z) = M^m(\alpha) E^m(\alpha, z) \mathbf{t}^m, \quad (2.5)$$

здесь $\mathbf{u}^m(\alpha, z)$ – Фурье-образ вектора $\mathbf{u}^m$, а матрицы M^m и E^m имеют вид:

$$M^m(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \frac{\gamma_{3,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m \gamma_{3,m}} & \alpha & \alpha \frac{\gamma_{4,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m \gamma_{4,m}} \\ \alpha \frac{\gamma_{1,m}^2 - a_{31}^m}{a_{34}^m \gamma_{1,m}} & \alpha & \alpha \frac{\gamma_{2,m}^2 - a_{31}^m}{a_{34}^m \gamma_{2,m}} & \alpha \\ \gamma_{1,m} \alpha & \alpha \frac{\gamma_{3,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m} & \gamma_{2,m} \alpha & \alpha \frac{\gamma_{4,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m} \\ \alpha \frac{\gamma_{1,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m} & \gamma_{3,m} \alpha & \alpha \frac{\gamma_{2,m}^2 - a_{42}^m}{a_{43}^m} & \gamma_{4,m} \alpha \end{pmatrix},$$

$$E^m(\alpha, z) = \text{diag}(e^{\gamma_{1,m}(z-z_m)}, e^{\gamma_{3,m}(z-z_{m+1})}, e^{\gamma_{2,m}(z-z_m)}, e^{\gamma_{4,m}(z-z_{m+1})})$$

При подстановке найденных решений в граничные условия получим систему уравнений для определения неизвестных постоянных $\mathbf{t}^n$: $A\mathbf{t} = \mathbf{F}$.

Матрица A и векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{F}$ имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} S^1 M^1 E^1(z_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B^1 M^1 E^1(z_2) & -B^2 M^2 E^2(z_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B^2 M^2 E^2(z_3) & B^3 M^3 E^3(z_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B^M M^M E^M(z_M) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S^M M^M E^M(z_M) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_3^1 \\ \vdots \\ t_4^M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_z \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В силу линейности исходной задачи 2.1 решение $\mathbf{u}^m$ можно выразить в виде линейной комбинации решений двух вспомогательных задач:

$$\mathbf{Y}_1^m = \begin{pmatrix} M^m \\ S^m \\ M^{m'} \\ S^{m'} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2^m = \begin{pmatrix} P^m \\ R^m \\ P^{m'} \\ R^{m'} \end{pmatrix}.$$

$$S^1 \mathbf{Y}_1^1 \Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S^1 \mathbf{Y}_2^1 \Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данные функции удовлетворяют уравнениям и условиям краевой задаче 2.1 за исключением условий на верхней границе:

$$S^1 \mathbf{Y}_1^1 \Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S^1 \mathbf{Y}_2^1 \Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остальные условия на границах между слоями и на нижней границе остаются без изменений. Таким образом, общее решение может быть записано в виде $\mathbf{u} = Q_x \mathbf{Y}_1 + Q_z \mathbf{Y}_2$, а в матричной форме решение исходной задачи отдельно для каждого слоя выражается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\alpha, z) &= \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) = \begin{pmatrix} M & P \\ S & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_z \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}'(\alpha, z) &= \mathbf{K}'(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) = \begin{pmatrix} M' & P' \\ S' & R' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Применив обратное преобразование Фурье, получаем:

$$\mathbf{u}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \tag{2.7}$$

Контур Γ отклоняется от вещественной оси параметра α только при обходе вещественных полюсов элементов Фурье-символа матрицы Грина $\mathbf{K}$, при

этом направление отклонения определяется исходя из принципа предельного поглощения [91].

К интегральному представлению решения (2.7) для точек x , которые расположены вне области приложения нагрузки Ω , применимы лемма Жордана и теорема Коши [79, 97–99]. Волновые поля, распространяющиеся в направлениях влево и вправо от источника колебаний ($\mathbf{u}^-$ и $\mathbf{u}^+$), могут быть представлены в виде рядов, отдельные члены которых соответствуют нормальным модам:

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\pm} \mathbf{u}^{\pm}(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^- \mathbf{d}_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & \text{при } x < -a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^+ \mathbf{d}_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & \text{при } x > a, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{c}_n^{\pm} = \mp i e^{i\zeta_n a} \begin{pmatrix} Q_1(\mp \zeta_n) \\ Q_2(\mp \zeta_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_n^-(z) = \mathbf{d}_n(z) = \text{res } K(\alpha, z) \Big|_{\alpha=\zeta_n},$$

$$\mathbf{d}_n^+(z) = \text{res } \mathbf{K}(\alpha, z) \Big|_{\alpha=-\zeta_n} = \begin{pmatrix} -\text{res } K_{11} \Big|_{\alpha=\zeta_n} & \text{res } K_{12} \Big|_{\alpha=\zeta_n} \\ \text{res } K_{21} \Big|_{\alpha=\zeta_n} & -\text{res } K_{22} \Big|_{\alpha=\zeta_n} \end{pmatrix}.$$

Здесь $|a|$ – граница приложения нагрузки или препятствия. Члены в разложении (2.8) с точностью до постоянных коэффициентов $\mathbf{c}_n^{\pm}$ соответствуют собственным решениям рассматриваемых краевых задач. Вектор-функции $\mathbf{d}_n^{\pm}(z)$ характеризуют смещений волны вдоль вертикальной координаты z с волновыми числами ζ_n . Эти числа являются полюсами матрицы Грина $\mathbf{K}$.

Для поля напряжений $\boldsymbol{\sigma}(x, z)$ может быть получено аналогичное модальное представление:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\pm} \boldsymbol{\sigma}^{\pm}(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^- \mathbf{g}_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & \text{при } x < -a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^+ \mathbf{g}_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & \text{при } x > a. \end{cases}$$

В волноводе со свободными граничными условиями и с симметричными относительно его срединной линии свойствами составляющих его слоев бегущие волны подразделяются на два типа – симметричные и антисимметричные волны Лэмба (S_n и A_n , $n = 1, 2, \dots$ соответственно) [100, 101]. Данные моды обеспечивают перенос энергии в обоих направлениях от источника колебаний. Их фазовые и групповые скорости определяются выражениями $c_n = \omega/\zeta_n$ и $v_n = d\omega/d\zeta_n$ соответственно.

Пара мод с комплексными, но не чисто мнимыми, волновыми числами $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ и $\zeta_{n+1} = -\xi_n + i\eta_n$ соответствует стоячей волне, амплитуда которой убывает по экспоненциальному закону $e^{-\eta_n|x|}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Моды, связанные с чисто мнимыми полюсами вида $\zeta_n = i\eta_n$ ($\xi_n = 0$), также характеризуется экспоненциальным затуханием при удалении от источника. Однако, волны, имеющие малые значения мнимой части волнового числа ($\eta_n \approx 0$) необходимо учитывать вблизи источника колебаний или некоторой неоднородности.

§2.2. Гибридная численно-аналитическая схема

§2.2.1 Описание схемы

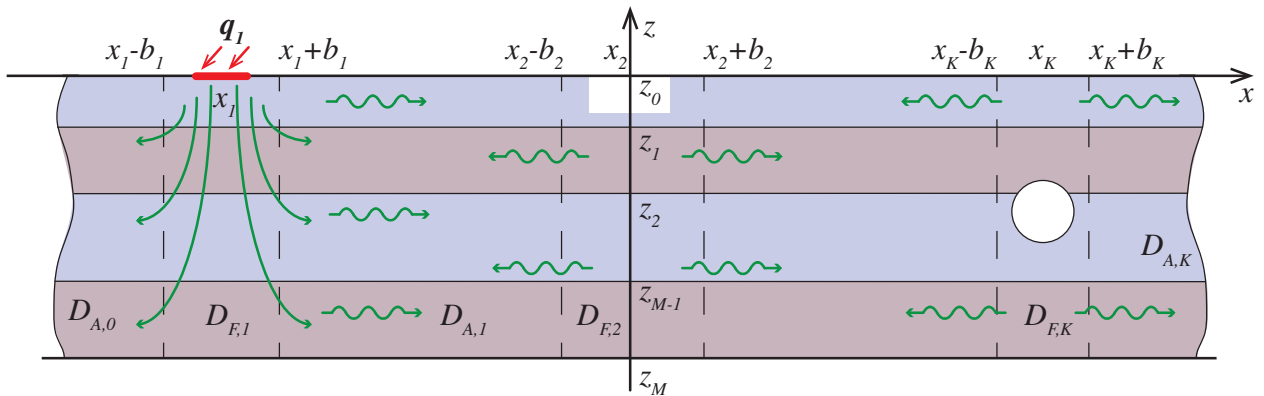


Рис. 2.1: Многослойный волновод с произвольными неоднородностями

Гибридная численно-аналитическая схема [77,78] описывается для волноводов, состоящих из M ортотропных слоев, имеющих K областей с локальными неоднородностями (источники колебаний, полости, выемки, утолщения, трещины, ребра жесткости и т.п.), рис. 2.1, выделенные в отдельные области $D_{F,p} = D_{F,k} = \{(x, z) : |x - x_k| \leq b_k, z_0 \leq z \leq z_M\}$, $k = \overline{1, K}$ [82, 84]. Решение в этих областях предполагается искать численно. Здесь x_k - центр области с неоднородностью шириной $2b_k$ и высотой $H = z_0 - z_M$. Остальные части волновода считаются однородными ($D_{A,p} = D_{A,k}$) и описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{A,0} &= \{(x, z) : x < x_1 - b_1, z_M \leq z \leq z_0\}, \\ D_{A,k} &= \{(x, z) : x_k + b_k < x < x_{k+1} - b_{k+1}, z_M \leq z \leq z_0\}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ D_{A,K} &= \{(x, z) : x > x_K + b_K, z_M \leq z \leq z_0\}. \end{aligned}$$

Комплексные амплитуды вектора смещений $\mathbf{u} = (u, w)^T = (u_1, u_3)^T$ удовлетворяют соотношениям линейной теории упругости внутри каждого отдельного слоя и области, рассматриваемого волновода D (1.12). Предполагаются условия отсутствия напряжений на внешних поверхностях $z = 0$ и $z = z_M$ в однородных частях волновода $D_{A,k}$:

$$\boldsymbol{\sigma}|_{z=z_0} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}|_{z=z_M} = 0. \quad (2.9)$$

Здесь, $\boldsymbol{\sigma} = (\tau_{xz}, \sigma_{zz})^T$ вектор напряжения вдоль горизонтальной прямой $z = \text{const}$. Между отдельными слоями рассматриваются условия идеального контакта (1.4). Уравнения (1.12) и условия (2.9), (1.4) могут нарушаться внутри областей $D_{F,k}$. Кроме того, возможны изменения геометрических параметров волновода, например, к его верхней поверхности может быть приклеены актуатор, сенсор или Т-образное ребро жесткости. Для определенности и простоты описания предполагается, что все источники колеба-

ний расположены на верхней поверхности волновода $z = 0$ и описываются функциями $\mathbf{q}_k = (q_x, q_z)^T$, $|x - x_k| \leq a_k$. Кроме того, в качестве дефектов рассматриваются внутренние полости или трещины имеющие границы Ω_k . С учетом введенных предположений граничные условия для всего волновода можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma|_{z=z_0} &= \sum_k \hat{\delta}_k \mathbf{q}_k \\ \sigma|_{\Omega_k} &= 0, \\ \sigma|_{z=z_M} &= 0.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Если внутри области $D_{F,k}$ есть источник колебаний, то коэффициент $\hat{\delta}_k$ равен единице, в противном случае он равен нулю.

Общее решение рассматриваемой краевой задачи в рамках гибридного подхода имеет вид:

$$\mathbf{u}(x, z) = \begin{cases} \mathbf{u}_k^A(x, z), & (x, z) \in D_{A,k}, k = \overline{0, K}, \\ \mathbf{u}_k^F(x, z), & (x, z) \in D_{F,k}, k = \overline{1, K}. \end{cases}\tag{2.11}$$

Здесь $\mathbf{u}_k^F$ – численное МКЭ-решение в области $D_{F,k}$, а $\mathbf{u}_k^A$ – аналитическое решение в однородной части волновода $D_{A,k}$ (рисунок 2.1). За пределами соответствующих областей решения считаются нулевыми. Таким образом, конкретной точке волновода соответствует одна из функций (2.11).

Решения в однородных частях волновода $\mathbf{u}_k^A$ представляются аналитически в виде суммы бегущих волн с неизвестными коэффициентами $c_{k,n}^\pm$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0^A(x, z) &= \delta^W \mathbf{d}_j^+(z) e^{i\zeta_j(x-x_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n}^- \mathbf{d}_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x-x_1+a_1)}, \\ \mathbf{u}_k^A(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{k,n}^+ \mathbf{d}_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-x_k-a_k)} + c_{k+1,n}^- \mathbf{d}_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x-x_k+a_k)} \right], \\ \mathbf{u}_K^A(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{K,n}^+ \mathbf{d}_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-x_K-a_K)}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Функции $\mathbf{d}_n^\pm(z) = (d_{x,n}^\pm, d_{z,n}^\pm)^\top$ были введены ранее в разделе §2.1., представление которых можно найти в [102]. Параметры a_k определяют точные границы неоднородности в области $D_{F,k}$ ($a_k < b_k$). В качестве источника колебаний помимо пьезопреобразователя, который возбуждает бегущие упругие волны, может рассматриваться единичная нормальная мода с волновым числом ζ_j , падающая из бесконечности. В таком случае её вклад в разложении по модам для области $D_{A,0}$ учитывается при помощи коэффициента δ^W , который равен нулю при отсутствии набегающего поля и единице в противном случае.

Среди ζ_n для определенной частоты ω существует конечное множество вещественных волновых чисел $n = \overline{1, N_r}$ и бесконечное множество комплексных значений при $n = N_r + 1, N_r + 2, \dots$ [102]. Слагаемые в разложении (2.12) с действительными волновыми числами соответствуют волнам Лэмба, распространяющимся вдоль горизонтальных границ волновода. Данные моды описывают отток и приток волновой энергии от областей с неоднородностями. Члены с комплексными значениями ζ_n соответствуют волнам с экспоненциально затухающими амплитудами:

$$|\mathbf{d}_n(z)e^{\pm i\zeta_n(x-(x_k \pm a_k))}| \sim O(e^{-\text{Im } \zeta_n |x-(x_k \pm a_k)|}), \quad k = \overline{0, K}, \quad (x, z) \in D_{A,k}.$$

Последнее соотношение справедливо для любого волновода конечной толщины (однослойные и многослойные изотропные, анизотропные волноводы с вязкостью или без нее), что позволяет использовать гибридный подход и в этих случаях. Указанное свойство позволяет ограничить число членов в разложении (2.12) до определенного значения $N \geq N_r$ и определить границы между $D_{F,k}$ и $D_{A,k}$ (значения параметров b_k , рисунок 2.1). Увеличение параметров N или b_k приводит к повышению точности решения, но также увеличивает вычислительные затраты. Для достижения приемлемой точ-

ности достаточно удерживать члены в (2.12) с комплексными значениями ζ_n близкими к вещественной оси ($|\operatorname{Im} \zeta_n| < 2/H$) и выбирать полуширину b_k области с неоднородностями, равной сумме двух толщин волновода и параметра a_k ($b_k = a_k + 2H$) [77, 78].

Численные решения $\mathbf{u}_k^F$ представимы в виде суммы решений со специальными граничными условиями на боковых границах ($x = x_k \pm b_k$) неоднородной области $D_{F,k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^F = & \widehat{\delta}_k \mathbf{u}_k^{F0} + \delta^W \mathbf{u}_1^{FW} + \sum_{n=1}^N [\bar{\delta}_{0,k-1} c_{k-1,n}^+ \mathbf{u}_{n,k,1}^{F-} + \quad k = \overline{1, K}, \\ & + c_{k,n}^- \mathbf{u}_{n,k,2}^{F-} + c_{k,n}^+ \mathbf{u}_{n,k,1}^{F+} + \bar{\delta}_{K,k} c_{k+1,n}^- \mathbf{u}_{n,k,2}^{F+}], \quad (x, z) \in D_{F,k}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Численные решения $\mathbf{u}_k^{F0}$ описывают приток волновой энергии от источников колебаний в волновод внутри области $D_{F,k}$. Решение $\mathbf{u}_1^{FW}$ соответствует волновому полю, которое порождается набегающей волной, подающей из бесконечности в $D_{F,1}$ (см. уравнение 2.12). Решения $\mathbf{u}_{n,k,2}^{F-}$, $\mathbf{u}_{n,k,1}^{F+}$ описывают отток энергии из $D_{F,k}$. Решения $\mathbf{u}_{n,k,2}^{F+}$ и $\mathbf{u}_{n,k,1}^{F-}$ описывают приток энергии из соседних областей с неоднородностями ($D_{F,k+1}$ и $D_{F,k-1}$, соответственно). Решения $\mathbf{u}_{n,k,2}^{F+}$ и $\mathbf{u}_{n,k,1}^{F-}$ отсутствуют в случае единственной области с неоднородностью, что соответствует полученным ранее результатам [77, 78]. Коэффициенты $\bar{\delta}_{k,l}$ вводятся таким образом, что $\bar{\delta}_{k,l} = 0$ когда $k = l$ и $\bar{\delta}_{k,l} = 1$. Неизвестные коэффициенты $c_{k,n}^\pm$ одинаковы в обоих соотношениях (2.12) и (2.13)

На вертикальных отрезках, вдоль которых области $D_{F,k}$ и $D_{A,k}$ стыкуются между собой, граничные условия задаются в соответствии с условием обобщенной ортогональности нормальных мод для упругих волново-

дов [103].

$$(d_{x,m}, g_{x,n}) - (g_{z,m}, d_{z,n}) = 0, \quad m \neq n, \quad (2.14)$$

$$(f, g) = \int_{z_M}^{z_0} f(z)g(z)dz.$$

В данном соотношении m и n – номера нормальных мод, вектор $\mathbf{g}_n$ соответствует вектору напряжений для бегущей волны с номером n , действующих на площадку с нормалью ориентированной вдоль горизонтальной оси: $\mathbf{g}_n = \boldsymbol{\sigma}_{n,x} = \{\sigma_{xx,n}, \tau_{xz,n}\}^T$. Функции $d_{x,n}^\pm$ и $d_{z,n}^\pm$ совпадают с аналогичными из представлений (2.12).

На боковых границах $x = \pm b_k$, $-H < z < 0$ можно задать два варианта граничных условий для МКЭ-решений, входящих в правую часть представления (2.13). В первом случае они формулируются относительно нормальной компоненты напряжений $\sigma_n^{F\pm}$ и вертикальной компоненты перемещений $w_n^{F\pm}$, то есть

$$\begin{aligned} e_{n,k,l}^\pm &= e^{\pm i\zeta_n(x_k \mp b_k - (x_l \pm a_l))}, & e_{n,k} &= e^{i\zeta_n(b_k - a_k)}, \\ x &= x_k - b_k, & x &= x_k + b_k, \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{n,k,1}^{F-} : \begin{cases} \sigma_{xx,n,k,1}^{F-} = g_{x,n}^+ e_{n,k,k-1}^+, \\ w_{n,k,1}^{F-} = d_{z,n}^+ e_{n,k,k-1}^+, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{xx,n,k,1}^{F-} = 0, \\ w_{n,k,1}^{F-} = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}_{n,k,2}^{F-} : \begin{cases} \sigma_{xx,n,k,2}^{F-} = g_{x,n}^- e_{n,k}, \\ w_{n,k,2}^{F-} = d_{z,n}^- e_{n,k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{xx,n,k,2}^{F-} = 0, \\ w_{n,k,2}^{F-} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{n,k,1}^{F+} : \quad & \begin{cases} \sigma_{xx,n,k,1}^{F+} = 0, \\ w_{n,k,1}^{F+} = 0, \end{cases} & \begin{cases} \sigma_{xx,n,k,1}^{F+} = g_{x,n}^+ e_{n,k}, \\ w_{n,k,1}^{F+} = d_{z,n}^+ e_{n,k}, \end{cases} \\
\mathbf{u}_{n,k,2}^{F+} : \quad & \begin{cases} \sigma_{xx,n,k,2}^{F+} = 0, \\ w_{n,k,2}^{F+} = 0, \end{cases} & \begin{cases} \sigma_{xx,n,k,2}^{F+} = g_{x,n}^- e_{n,k,k+1}^-, \\ w_{n,k,2}^{F+} = d_{z,n}^- e_{n,k,k+1}^-, \end{cases} \\
\mathbf{u}_k^{F0} : \quad & \begin{cases} \sigma_{xx,k}^{F0} = 0, \\ w_k^{F0} = 0, \end{cases} & \begin{cases} \sigma_{xx,k}^{F0} = 0, \\ w_k^{F0} = 0, \end{cases} \\
\mathbf{u}_1^{FW} : \quad & \begin{cases} \sigma_{xx,1}^{FW} = g_{x,j}^+ e^{-i\zeta_j b_1}, \\ w_1^{FW} = d_{z,j}^+ e^{-i\zeta_j b_1}, \end{cases} & \begin{cases} \sigma_{xx,1}^{FW} = 0, \\ w_1^{FW} = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Во втором варианте граничные условия задаются относительно горизонтальной и касательной компонент векторов смещений и напряжений:

$$x = x_k - b_k, \quad x = x_k + b_k,$$

$$\mathbf{u}_{n,k,1}^{F-} : \quad \begin{cases} \tau_{xz,n,k,1}^{F-} = g_{z,n}^+ e_{nkk-1}^+, \\ u_{n,k,1}^{F-} = d_{x,n}^+ e_{n,k,k-1}^+, \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{xz,n,k,1}^{F-} = 0, \\ u_{n,k,1}^{F-} = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u}_{n,k,2}^{F-} : \quad \begin{cases} \tau_{xz,n,k,2}^{F-} = g_{z,n}^- e_{n,k}, \\ u_{n,k,2}^{F-} = d_{x,n}^- e_{n,k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{xz,n,k,2}^{F-} = 0, \\ u_{n,k,2}^{F-} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{n,k,1}^{F+} : \quad & \begin{cases} \tau_{xz,n,k,1}^{F+} = 0, \\ u_{n,k,1}^{F+} = 0, \end{cases} & \begin{cases} \tau_{xz,n,k,1}^{F+} = g_{z,n}^+ e_{n,k}, \\ u_{n,k,1}^{F+} = d_{x,n}^+ e_{n,k}, \end{cases} \\
\mathbf{u}_{n,k,2}^{F+} : \quad & \begin{cases} \tau_{xz,n,k,2}^{F+} = 0, \\ u_{n,k,2}^{F+} = 0, \end{cases} & \begin{cases} \tau_{xz,n,k,2}^{F+} = g_{z,n}^- e_{n,k,k+1}^-, \\ u_{n,k,2}^{F+} = d_{x,n}^- e_{n,k,k+1}^-, \end{cases} \\
\mathbf{u}_k^{F0} : \quad & \begin{cases} \tau_{xz,k}^{F0} = 0, \\ u_k^{F0} = 0, \end{cases} & \begin{cases} \tau_{xz,k}^{F0} = 0, \\ u_k^{F0} = 0, \end{cases} \\
\mathbf{u}_1^{FW} : \quad & \begin{cases} \tau_{xz,1}^{FW} = g_{z,j}^+ e^{-i\zeta_j b_1}, \\ u_1^{FW} = d_{x,j}^+ e^{-i\zeta_j b_1}, \end{cases} & \begin{cases} \tau_{xz,1}^{FW} = 0, \\ u_1^{FW} = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

В случае граничных условий (2.16) обеспечивается непрерывность первой компоненты $u_{n,k}$ вектора перемещений $\mathbf{u}$ и второй компоненты $\tau_{xz,n,k}$ вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на внутренних искусственных границах $x = \pm b_k$. При использовании граничных условий (2.15), напротив, явно задается непрерывность компонент $w_{n,n,k}$ и $\sigma_{xx,n,k}$. В случае однослойного волновода принципиальной разницы между обоими вариантами граничных условий нет. Однако для многослойного композита условия (2.15) могут обеспечить более высокую точность получаемого численного решения при том же объеме вычислительных затрат. Связано это с тем, что нормальная компонента напряжений $\sigma_{xx,n,k}$ в случае, когда упругие свойства соседних слоев D_k и D_{k+1} , $k = 1, \dots, K-1$ различны, терпит разрыв при переходе через границу $z = z_k$. Поскольку вычисления напряжений с использованием стандартных

МКЭ-пакетов, в которых реализована КЭ-аппроксимация в классе функций C_0 , могут приводить к численным артефактам, более рациональным представляется явно задать условия непрерывности для той компоненты вектора напряжений, которая носит разрывный характер по переменной z , нежели чем удовлетворять их в интегральном смысле в рамках соотношений (2.14) [82].

Условия непрерывности для оставшихся компонент векторов смещений и напряжений, не входящих в граничные условия (2.16) или (2.15) используются для определения неизвестных коэффициентов $c_n^\pm$. Для граничных условий (2.16) на внешних и внутренних границах дефектов Ω_k условия для численных решений выбираются таким образом, чтобы удовлетворять условиям (2.10). С их учетом граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
z &= z_0, & z &= z_M, & (x, z) &\in \Omega_k, \\
\sigma_k^{F0} &= \widehat{\delta}_k \mathbf{q}_k, & \sigma_k^{F0} &= 0, & \sigma_k^{F0} &= 0, \\
\sigma_{n,k,1}^{F-} &= 0, & \sigma_{n,k,1}^{F-} &= 0, & \sigma_{n,k,1}^{F-} &= 0, \\
\sigma_{n,k,2}^{F-} &= 0, & \sigma_{n,k,2}^{F-} &= 0, & \sigma_{n,k,2}^{F-} &= 0, \\
\sigma_{n,k,1}^{F+} &= 0, & \sigma_{n,k,1}^{F+} &= 0, & \sigma_{n,k,1}^{F+} &= 0, \\
\sigma_{n,k,2}^{F+} &= 0, & \sigma_{n,k,2}^{F+} &= 0, & \sigma_{n,k,2}^{F+} &= 0, \\
\sigma_k^{FW} &= 0, & \sigma_k^{FW} &= 0, & \sigma_k^{FW} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Следует отметить наличие связи между парами решений $\mathbf{u}_{n,k,1}^{F-}$ и $\mathbf{u}_{n,k,2}^{F-}$, а также $\mathbf{u}_{n,k,1}^{F+}$ и $\mathbf{u}_{n,k,2}^{F+}$. Эти численные решения отличаются только граничными условиями на левой $x = x_k - b_k$ и правой $x = x_k + b_k$ границах, соответственно. Сами различия выражаются в виде постоянного множите-

ля:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n,k,1}^{F-}|_{x=x_k-b_k} &= e^{i\zeta_n(x_k+a_k-2b_k-x_{k-1}-a_{k-1})} \mathbf{u}_{n,k,2}^{F-}|_{x=x_k-b_k}, \\ \mathbf{u}_{n,k,2}^{F+}|_{x=x_k+b_k} &= e^{i\zeta_n(x_{k+1}-a_{k+1}-x_k-2b_k+a_k)} \mathbf{u}_{n,k,1}^{F+}|_{x=x_k+b_k}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для граничных условий (2.15) представления (2.11) - (2.13) и граничные условия (2.15) и (2.17) обеспечивают выполнение всех условий исходной задачи (1.12), (2.9), (1.4) и (2.10). Кроме того, условия (2.15) и (2.17) обеспечивают непрерывность компоненты вектора напряжений σ_{xx} и вертикальной компоненты перемещений W на границах раздела ($x = x_k \pm b_k$) локальных численных (2.13) и глобальной аналитических (2.12) решений. Для условия на боковых границах (2.16) непрерывными будут компоненты τ_{xz} и u . Неизвестные коэффициенты $\mathbf{c} = (c_{1,1}^-, \dots, c_{1,N}^-, c_{1,1}^+, \dots, c_{1,N}^+, c_{2,1}^-, \dots, c_{K,N}^+)^T$ определяются исходя из условий непрерывности остальных компонент векторов перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u_k^F(x_k - b_k, z) &= u_{k-1}^A(x_k - b_k, z), \\ \tau_{xz,k}^F(x_k - b_k, z) &= \tau_{xz,k-1}^A(x_k - b_k, z), \quad z \in [z_M, z_0], \\ u_k^F(x_k + b_k, z) &= u_k^A(x_k + b_k, z), \quad k = \overline{1, K}, \\ \tau_{xz,k}^F(x_k + b_k, z) &= \tau_{xz,k}^A(x_k + b_k, z). \end{aligned} \quad (2.19)$$

В случае граничных условий для МКЭ-задач (2.16) соотношения для вертикальной компоненты перемещений и нормальной компоненты вектора напряжений запишутся аналогично представлениям (2.17) и (2.19).

Для определения неизвестных констант $\mathbf{c}$ используется метод Галеркина. Проекторы $g_{x,n}^\pm$ и $d_{z,n}^\pm$, где $n = \overline{1, N}$ выбираются исходя из условий ортогональности волновых форм в пространстве L_2 (2.14).

Проекция каждого уравнения (2.19) на выбранные функции приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

коэффициентов размерностью $2NK \times 2NK$:

$$A\mathbf{c} = \mathbf{f}. \quad (2.20)$$

Матрица A представляется как разность двух блочных матриц: $A = D - B$. Для описания элементов и блоков этих матриц вводятся дополнительные обозначения:

$$I_{nm}^{\pm\mp} = \int_{z_M}^{z_0} d_{x,m}^{\mp} g_{x,n}^{\pm} - d_{z,n}^{\pm} g_{z,m}^{\mp} dz,$$

$$I_{nmkl}^{F\pm\mp} = \int_{z_M}^{z_0} u_{m,k,l}^{F\mp}(x_k \pm b_k, z) g_{x,n}^{\pm} - \tau_{xz,m,k,l}^{F\mp}(x_k \pm b_k, z) d_{z,n}^{\pm} dz,$$

$$I_{0kn}^{F\pm} = \int_{z_M}^{z_0} u_{k,0}^F(x_k \pm b_k, z) g_{x,n}^{\pm} - \tau_{xz,k,0}^F(x_k \pm b_k, z) d_{z,n}^{\pm} dz,$$

$$D_{kl}^{\pm\mp} = \begin{pmatrix} I_{11}^{\pm\mp} e_{1kl}^{\pm} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I_{NN}^{\pm\mp} e_{Nkl}^{\pm} \end{pmatrix}, \quad B_{kl}^{\pm\mp} = \begin{pmatrix} I_{11kl}^{F\pm\mp} & \dots & I_{1Nkl}^{F\pm\mp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N1kl}^{F\pm\mp} & \dots & I_{NNkl}^{F\pm\mp} \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_{12}^{--} & B_{11}^{-+} & B_{12}^{++} \\ B_{12}^{+-} & B_{11}^{++} & B_{12}^{++} \end{pmatrix}, \quad B_K = \begin{pmatrix} B_{K1}^{--} & B_{K2}^{--} & B_{K1}^{-+} \\ B_{K1}^{+-} & B_{K2}^{+-} & B_{K1}^{++} \end{pmatrix},$$

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} B_{k1}^{--} & B_{k2}^{--} & B_{k1}^{-+} & B_{k2}^{-+} \\ B_{k1}^{+-} & B_{k2}^{+-} & B_{k1}^{++} & B_{k2}^{++} \end{pmatrix}.$$

Используя введенные обозначения, матрицы D и B имеют вид:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11}^{--} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & D_{kk-1}^{-+} & D_{kk}^{--} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & D_{kk}^{++} & D_{kk+1}^{+-} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D_K^{++} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B^{(k)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & B_K \end{pmatrix}.$$

Вектор правой части $\mathbf{f}$ системы линейных алгебраических уравнений представляется в виде разницы:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^F - \mathbf{f}^W, \quad \mathbf{f}^W = (0, \dots, 0, \delta^W I_{jj}^{-+} e^{-i\zeta_j b_1}, 0, \dots, 0)^T$$

$$\mathbf{f}^F = (\widehat{\delta}_1 I_{011}^{F-}, \dots, \widehat{\delta}_1 I_{01N}^{F-}, \widehat{\delta}_1 I_{011}^{F+}, \dots, \widehat{\delta}_1 I_{01N}^{F+}, \widehat{\delta}_2 I_{021}^{F-}, \dots, \widehat{\delta}_K I_{0KN}^{F+})^T$$

Практически все компоненты вектора $\mathbf{f}^W$ равны нулю, за исключением одного ненулевого компоненты, имеющего индекс j . Значения неизвестных констант $\mathbf{s}$ определяют вид локальных и глобальных решений (2.12), (2.13). В силу линейности исходной краевой задачи сформулированная форма решения (2.14) справедлива не только для смещений, но и, например, для напряжений.

§2.2.2 Численная валидация гибридной схемы

Для проверки корректности компьютерной реализации обобщенной на случай многослойного анизотропного волновода гибридной схемы и оцен-

ки эффективности использования разных типов граничных условия (2.15) или (2.16) при построении базисных МКЭ-решений в (2.11) рассматривалась задача о возбуждении плоских колебаний заданной поверхностной нагрузкой в трехслойном композитном образце с перекрестной схемой укладки $[0, 90, 0]$ однонаправленных трансверсально-изотропных слоев (рис. 2.2) [82, 84]. Предполагается, что ориентация волокон в верхнем и нижнем слоях совпадает с направлением горизонтальной оси. Поскольку исходная задача рассматривается в плоской постановке, что допустимо для такого класса материалов в случае, если нормальные моды распространяются вдоль одной из главных осей композита, то упругие свойства каждого из слоев могут быть описаны четырьмя независимыми упругими модулями. Соответствующие элементы матрицы жесткости в нотации Фойгта, а также значения плотности и толщины слоев приведены в таблице 2.1.

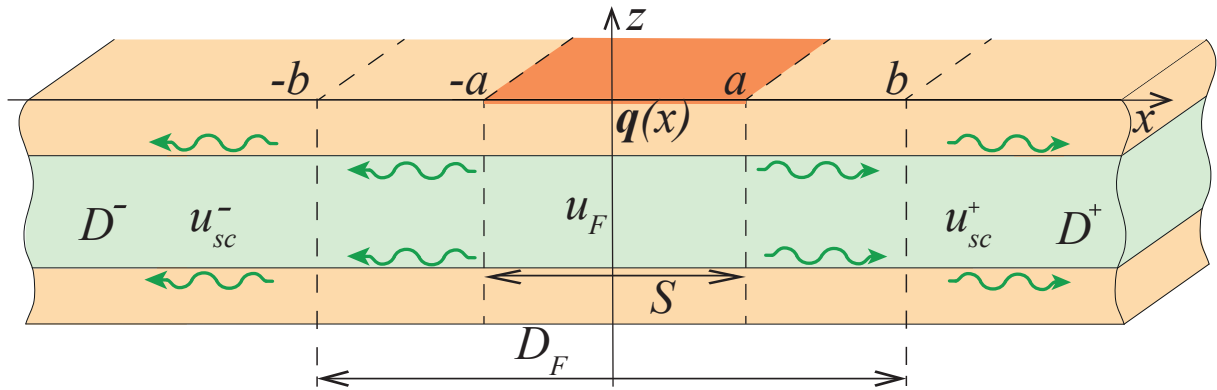


Рис. 2.2: Геометрия модельной задачи

Таблица 2.1: Параметры материала.

Ориентация слоя	Номер слоя	h_m мм	ρ , г/см ³	C_{11} , ГПа	C_{13} , ГПа	C_{33} , ГПа	C_{55} , ГПа
0°	1	0.575	1.522	122.4	4.13	11.5	4.85
90°	2	1.15	1.522	11.5	6.47	11.5	2.51
0°	3	0.575	1.522	122.4	4.13	11.5	4.85

В качестве источника колебаний рассматривается приложенная к верхней границе волновода $z = 0$ равномерно распределенная вдоль отрезка $S : |x| < a$ нагрузка $\mathbf{q}(x) = \{q_x, q_z\} \equiv 1$. Тогда соотношение $\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = 0$ принимает вид:

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \begin{cases} \mathbf{q}(x), x \in S \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus S \end{cases}$$

Численное решение краевой задачи (1.12), (2.9), (1.4) в такой постановке может быть построено с использованием полуаналитического интегрального подхода [79, 80] и рассматривается далее в качестве эталонного:

$$\mathbf{u}_{IA} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \mathbf{Q}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 \sin(\alpha a) / \alpha \\ 2 \sin(\alpha a) / \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Здесь $\mathbf{K}(\alpha, z)$ и $\mathbf{Q}(\alpha)$ – Фурье-символы матрица Грина для рассматриваемого волновода и вектор-функции $\mathbf{q}(x)$ соответственно, контур интегрирования Γ обходит вещественные полюса ζ_n , $n = 1, \dots, N_R$ матрицы $\mathbf{K}$ в соответствии с принципом предельного поглощения [91]. Для вычисления интеграла в соотношении (2.21) использовались адаптивные квадратуры Гаусса-Кронрода, обеспечивавшие относительную погрешность интегрирования, равную 10^{-6} .

В качестве параметра, характеризующего отклонение решения, получаемого с использованием гибридного подхода, от эталонного рассматривалась следующая величина:

$$\varepsilon = \frac{1}{2H} \int_{-H}^0 \frac{|\mathbf{u}_{IA}(-b, z) - \mathbf{u}(-b, z)|}{|\mathbf{u}_{IA}(-b, z)|} + \frac{|\mathbf{u}_{IA}(b, z) - \mathbf{u}(b, z)|}{|\mathbf{u}_{IA}(b, z)|} dz.$$

Влияние выбора граничных условий (2.16) или (2.15) на боковых границах $x = \pm b$ области D_F при построении базисных МКЭ-решений на погрешность ε иллюстрируется на рисунках 2.3 и 2.4. В обоих случаях

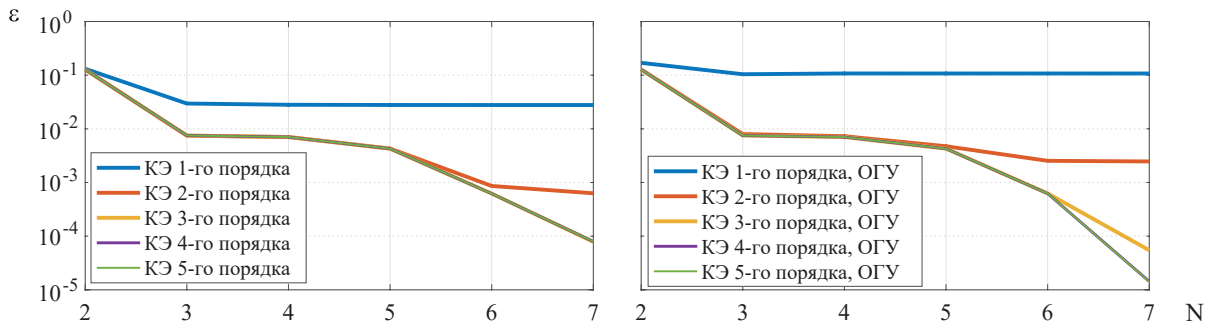


Рис. 2.3: Относительная ошибка ε в зависимости от числа учитываемых в разложении мод N . Расчеты выполнялись на одной и той же конечно-элементной сетке, но с различным порядком элементов, при частоте $f = 200$ кГц и числе сплайнов 2000 на единицу длины

$a = 1$ мм, $b = 4$ мм, $f = 0,2$ МГц, при построении МКЭ-решений использовалась сетка из треугольных КЭ с максимальным характерным размером, равным $0,5$ мм, что обеспечивает дискретизацию каждого из слоев не менее, чем двумя элементами по толщине. При малом числе слагаемых N , удерживаемых в представлениях (2.12) и (2.13) (для данной частоты колебаний $N_R = 2$), а также низком порядке полиномов в базисной функции КЭ различие незначительно. Более того, граничные условия вида (2.16) дают лучшие численные результаты для некоторых комбинаций параметров (рис. 2.3). Однако с увеличением порядка полиномов и числа удерживаемых нормальных мод с комплексными волновыми числами граничные условия (2.15) обеспечивают более точные результаты по сравнению с условиями (2.16). Более наглядно эта особенность проявляется на рис. 2.4 при сравнении расчетов, выполненных с различным числом точек, выгружаемых из МКЭ-решений для вычисления интегралов при построении элементов матрицы системы (2.20). Видно, что при выборе граничных условий (2.15) гибридная схема дает более устойчивые результаты и гораздо быстрее сходится к некоторому постоянному значению погрешности,

которое зависит от других параметров (в частности, N и b).

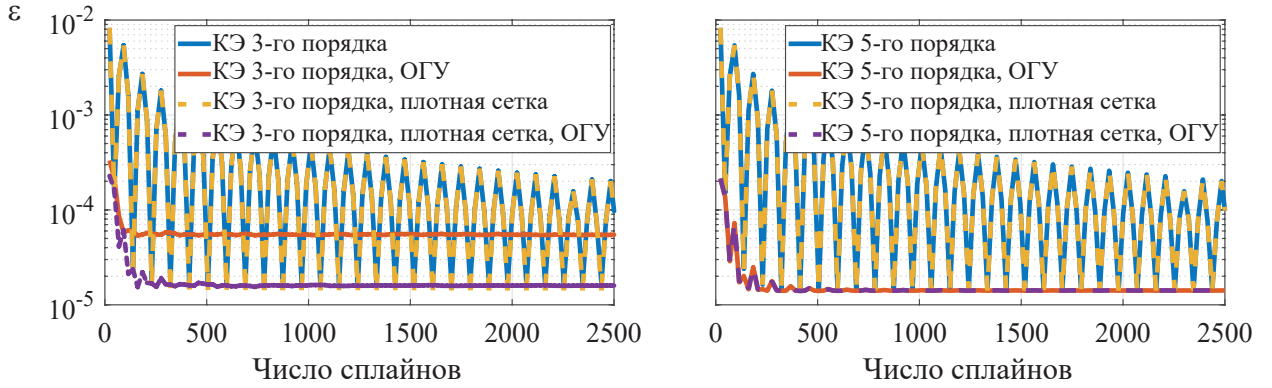


Рис. 2.4: Относительная ошибка ε при различных числах сплайнов на вертикальных участках $x = \pm b$ (рис. 2.2). Для сплошных и штриховых линий использовались одинаковая сетка и порядок конечных элементов. Для штриховых линий выбрана более плотная сетка. Расчеты выполнены на частоте $f = 200$ кГц

Для проверки возможности использования гибридной схемы на высоких частотах колебаний, при которых в волноводе возбуждается большее количество незатухающих нормальных мод ($N_R > 2$), сопоставление с $\mathbf{u}_{IA}$ осуществлялось в диапазоне частот до $f = 1$ МГц (рис. 2.5 (б)). Соответствующие дисперсионные кривые (частотные зависимости вещественных волновых чисел) для трехслойного волновода приведены на рис. 2.5 (а). Поскольку решение рассматриваемой задачи, вообще говоря, может быть получено и без использования гибридной схемы в рамках встроенных возможностей COMSOL Multiphysics для моделирования открытых волноводов — так называемых идеально согласованных слоев (МКЭ-ИСС), примыкающих справа и слева к расчетной области и обеспечивающих учет оттока волновой энергии на бесконечность от источника колебаний, то результаты расчетов интегральной невязки МКЭ-ИСС также приводятся на рис. 2.5 (б).

Для обоих методов (гибридная схема и МКЭ-ИСС) использовалась

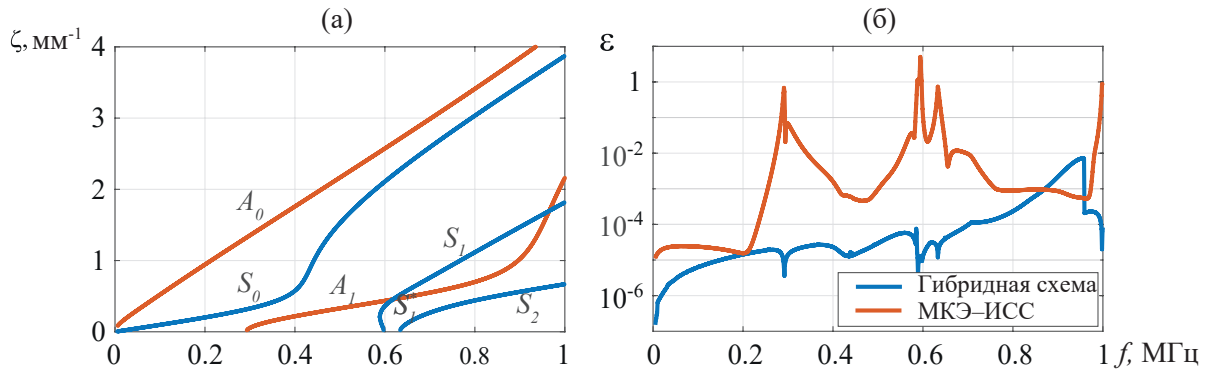


Рис. 2.5: (а) – дисперсионные кривые для рассматриваемого многослойного волновода с ориентацией слоев $[0, 90, 0]$; (б) – относительная погрешность ε как функция частоты f для метода МКЭ-ИСС (красная линия) и гибридной численно-аналитической схемы (синяя линия).

такая же расчетная сетка, как в примерах выше, и одинаковый, четвертый порядок базисных функций конечных элементов. Оба подхода демонстрируют хорошую согласованность с эталонным решением (относительная ошибка $\varepsilon < 10^{-2}$) почти для всех рассматриваемых частот. В то же время для метода МКЭ-ИСС в диапазоне обратных мод и окрестностях частот отсечки, как и ожидалось, погрешность ε существенно возрастает и может превосходить единицу. В свою очередь точность результатов, получаемых с использованием гибридной схемы, снижается в диапазоне частот от 0.86 до 0.96 МГц. В конце данного интервала при $f = 0.96$ МГц наблюдается скачок, который связан с увеличением числа слагаемых N в разложении (2.12). В проведенных расчетах величина N была ограничена условием $|\text{Im } \zeta_n| \leq 1.5$, $n = 1, 2, \dots, N$ для всего рассматривавшегося частотного диапазона. Для повышения точности вычисления $\mathbf{u}_N$, можно увеличить верхний предел для мнимой части волновых чисел ζ_n , соответствующих нормальным модам, удерживаемым в разложении (2.12) и/или расширить область D_F (в выполненных расчетах $b = 4$ мм), что безусловно приведет и к росту вычислительных затрат.

Для иллюстрации отклонения решений, полученных методами гибридной схема и МКЭ-ИСС, от точного решения, полученного при помощи интегрального подхода, в различных точках волновода относительная ошибка рассчитывалась на частоте 200 кГц (рис. 2.6). Для определения относительной погрешности $\eta(x, z)$ использовалась следующая формула:

$$\eta(x, z) = \log_{10}\left(\frac{||\mathbf{u}_{ac}(x, z)| - |\mathbf{u}(x, z)||}{|\mathbf{u}_{ac}(x, z)|}\right),$$

$$|\mathbf{u}_{ac}| = \sqrt{|u_{ac}|^2 + |w_{ac}|^2}, |\mathbf{u}| = \sqrt{|u|^2 + |w|^2}.$$

Здесь вектор смещения $\mathbf{u}$ получен либо с помощью гибридной численно-аналитической схемы рис. 2.6 (а)), либо методом МКЭ-ИСС (рис. 2.6 (б)).

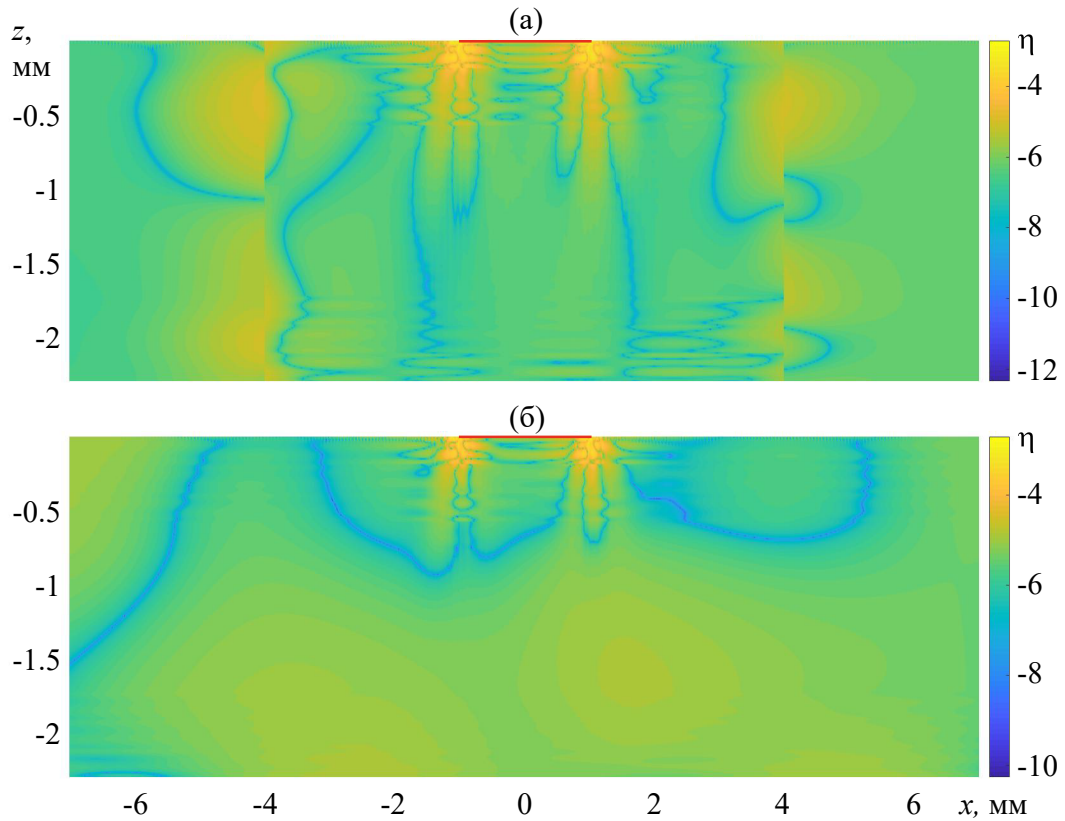


Рис. 2.6: относительная погрешность $\eta(x, z)$, вычисленная вблизи источника колебаний $x = \pm a = \pm 1$ мм. Относительная погрешность для гибридной схемы приведена на рис. (а). Рис. (б) рассчитана для МКЭ-ИСС.

Как и прежде, численные результаты хорошо согласуются. Максиму-

мы погрешности наблюдаются вблизи точек приложения нагрузки q в обоих случаях ($z = 0$, $x = \pm a = \pm 1$ мм). Эти максимумы связаны с разрывами напряжений в указанных точках. Дополнительные максимумы погрешности можно заметить вблизи искусственных границ ($x = \pm b = \pm 4$ мм) между локальными и глобальными решениями в случае гибридной схемы. Порядок точности решения уменьшается на единицу вдоль этих границ. Как упоминалось ранее, для повышения точности необходимо увеличить количество сохраняемых мод и/или увеличить расстояние от искусственных границ b до источника колебаний.

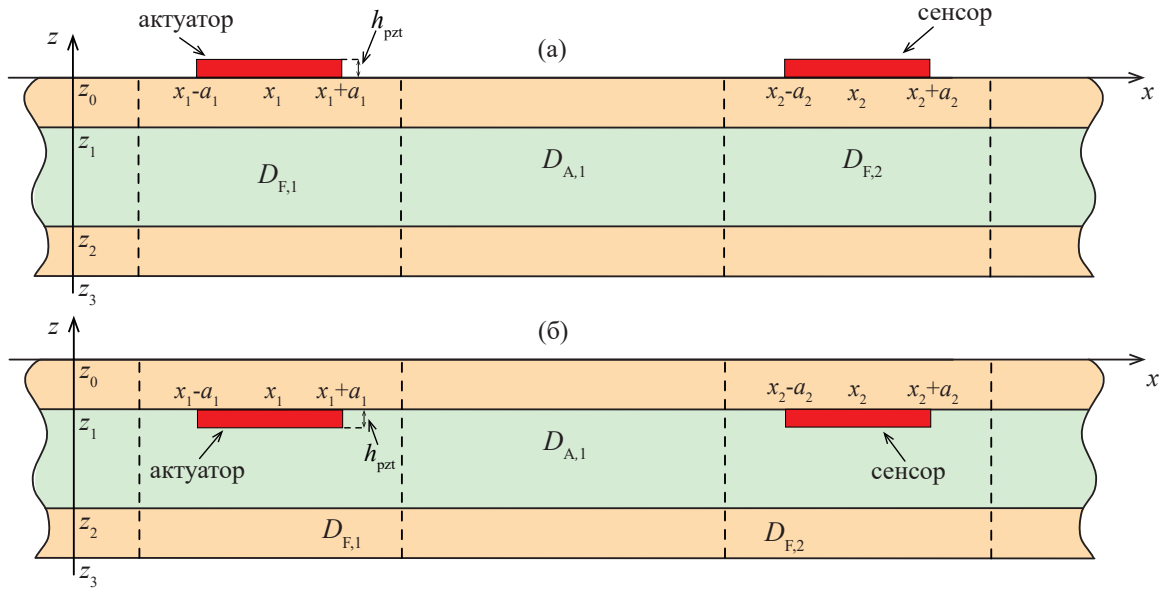


Рис. 2.7: Геометрия рассматриваемой задачи: (а) – поверхностно закрепленные актуатор и сенсор; (б) – интегрированные в волновод актуатор и сенсор

Для проверки возможности использования гибридной численно - аналитической схемы для решения связанной электромеханической задачи, результаты, полученные при помощи МКЭ-ИСС, сопоставлялись с результатами, которые получены гибридной схемой, в диапазоне частот до появления обратной волны ($f \in [0, 500]$ кГц). Как и ранее, рассматривается трехслойный волновод со схемой кладки трансверсально-изотропных пре-

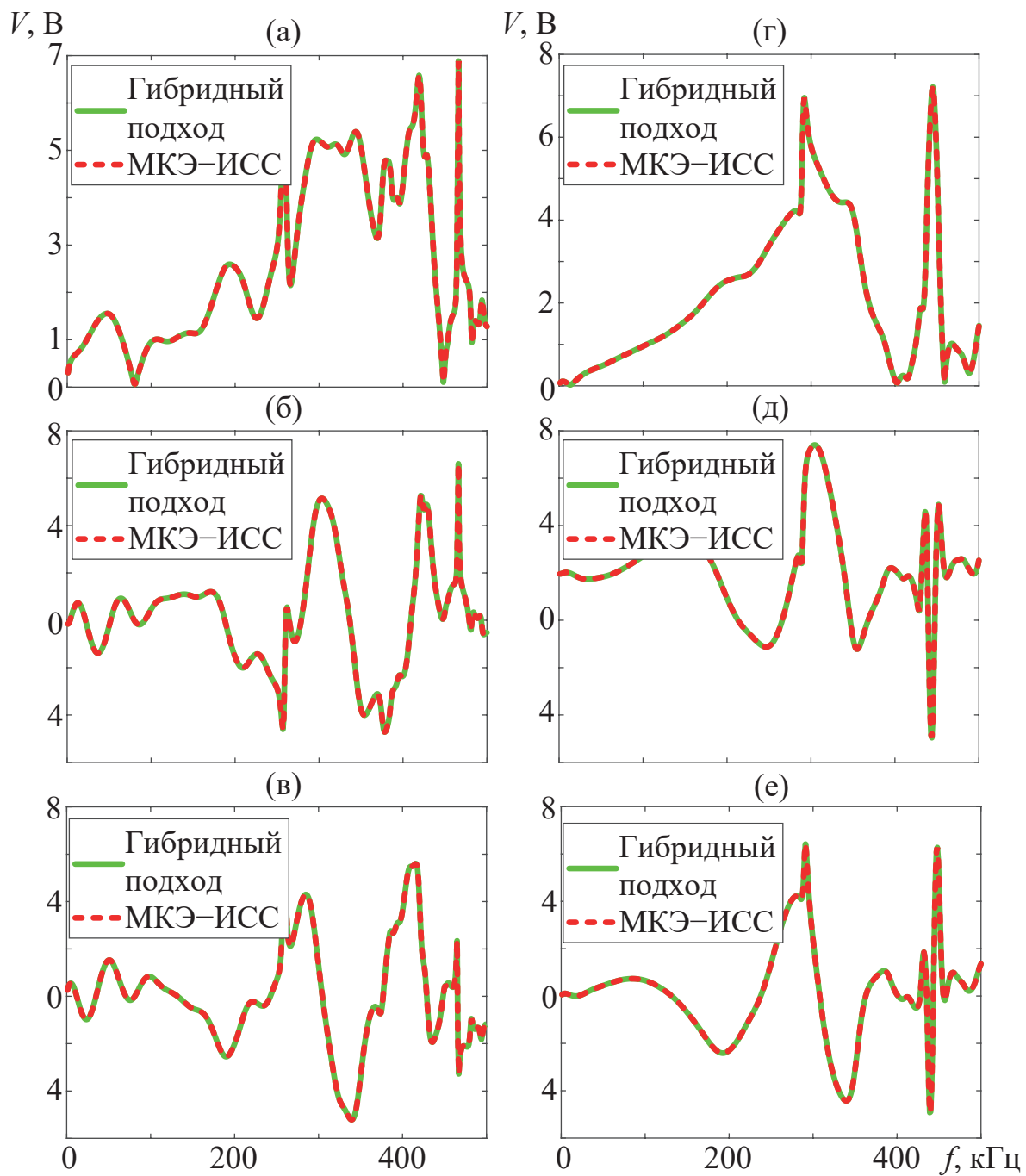


Рис. 2.8: Отклик сенсора $V, В$, полученный для поверхностного ((а), (б), (в)) и встроенного ((г), (д), (е)) сенсора: (а), (г) – модуль отклика сенсора; (б), (д) – мнимая часть; (в), (е) – вещественная часть

прегов $[0, 90, 0]$ (значения плотности и толщины слоев приведены в таблице 2.1). К верхней поверхности волновода приклеен пьезокерамический актуатор в области $D_{F,1}$ с центром в точке $x_1 = 0$, а в области $D_{F,2}$ ($x_3 = 25$ мм) приклеен сенсор из пьезокерамики (рис. 2.7 (а)). Актуатор, как и сенсор изготовлены из пьезокерамики PZT-5Н [104] и имеют одинаковые геометрические размеры: ширина $a_1 = a_2 = 5$ мм, высота $h_{\text{pzt}} = 0.2$ мм. Кроме того, пьезонакладки могут быть интегрированы и между слоями композитной конструкции (рис. 2.7 (б)). Нижняя поверхность актуатора считается заземленной, а к верхней поверхности приложено напряжение 70 В. На верхней поверхности сенсора задано условие плавающего потенциала, при этом боковые стороны как актуатора, так и сенсора считаются электрически изолированными (то есть нормальная компонента электрического смещения равна нулю). Условия идеального механического контакта выполняются на границах раздела между пьезоэлектрическими накладками и основным волноводом. Все остальные поверхности датчиков считаются свободными от напряжений.

Как и прежде, численные результаты (рис. 2.8) хорошо согласуются между собой. Резкий локальный максимум на частоте $f = 292$ кГц связан с выходом новой антисимметричной моды A_1 . Оставшиеся локальные максимумы и минимумы, скорее всего, связаны с собственными частотами актуатора. Как видно из полученных результатов, гибридная схема позволяет решать связанную электромеханическую задачу как для поверхностно закрепленных, так и для интегрированных в волновод актуатора и сенсора.

ГЛАВА 3. Особенности возбуждения и измерения упругих волн поверхностными и встроенными пьезоэлементами

§3.1. Влияние глубины залегания пьезоэлемента на возбуждаемые бегущие упругие волны

Рассматривается задача о возбуждении плоских упругих колебаний вдоль главной осей симметрии, совпадающей с направлением горизонтальной оси Ox , в восьмислойном ($M = 8$) композитном материале со схемой укладки трансверсально-изотропных препрегов $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ и $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$ [82]. Толщина обеих пластин $H = 2,3$ мм, плотности и упругие модули отдельных слоев представлена в таблице 2.1. В качестве источника колебаний использовался пьезоэлемент толщиной $h_p = 0,1$ мм и полушириной $a = 5$ мм из материала PZT-5Н [104] ($V = 70$ В разность потенциалов, подаваемая на пьезоактуатор), установленный на поверхности композита или встроенный внутри него между различными слоями. В качестве материала “смарт”-слоя был выбран полиэтилен высокой плотности ($\rho = 950$ кг/м³, модуль Юнга $E = 3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$). Схематичное изображение рассматриваемых задач представлено на рисунке 1.2 (б) и (в). Анализируется влияние расположения пленочного пьезодатчика по толщине волновода на распределение волновой энергии, переносимой отдельными модами. Суммарный поток энергии от источника колебаний через боковое сечение волновода вычислялся по формуле [80]

$$E^\pm = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[\int_{-H}^0 (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) dz \right],$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор смещений (2.11); $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ – вектор напряжений на площадке с нормалью, сонаправленной с осью Ox (знак “+”) и действующей в противоположном направлении (знак “-”). Для расчета потока энергии, переносимой отдельной нормальной модой, использовалось аналогичное соотношение

$$E_n^\pm = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[\int_{-H}^0 (\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\sigma}_n) dz \right], \quad n = 1, 2, \dots, N_r,$$

где N_r – количество нормальных мод с вещественными волновыми числами, удерживаемых в представлении (2.12) на данной частоте. Вклад каждой моды по-отдельности определялся по формуле:

$$\eta_n^\pm = \frac{E_n^\pm}{E^\pm}.$$

В силу симметрии задачи относительно оси O_z можно рассматривать только одну из долей η_n^+ или η_n^- .

Предварительно для каждого из рассматриваемых волноводов были построены частотные зависимости волновых чисел. Соответствующие дисперсионные кривые приведены на рисунке 3.1.

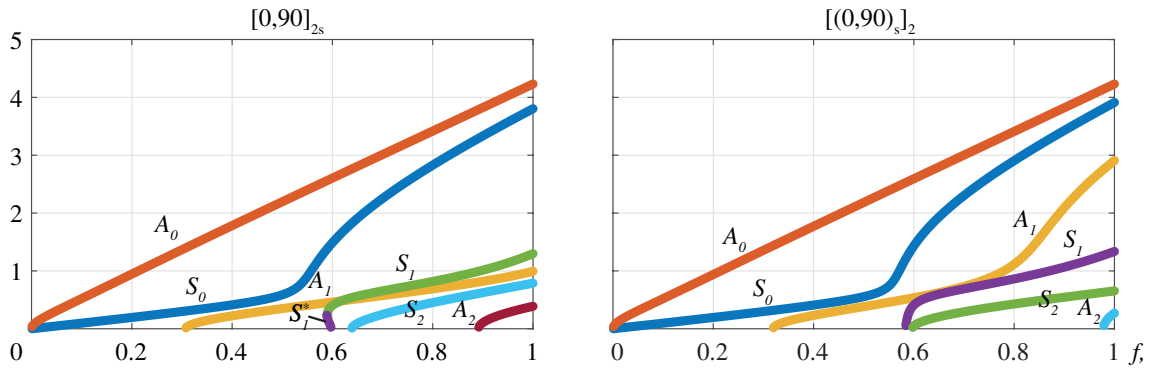


Рис. 3.1: Частотные зависимости волновых чисел фундаментальных и высших нормальных мод: (а) $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$, (б) $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$

На рисунке 3.2 представлен график долей энергии каждой моды для

волновода с поверхностным пьезоэлементом. Как видно из рисунка, характер поведения в обоих случаях похож вплоть до частоты возбуждения обратной волны (до 580 кГц), далее уже заметны различия. А именно, после выхода обратной волны S_1^* на рисунке 3.2 (а) большую долю энергии переносит антисимметричная волна A_1 . На рисунке 3.2 (б) можно наблюдать противоположную ситуацию: после 800 кГц доминирующими являются симметричные моды S_1 и S_2 , а антисимметричные моды A_1 и A_2 практически полностью подавляются.

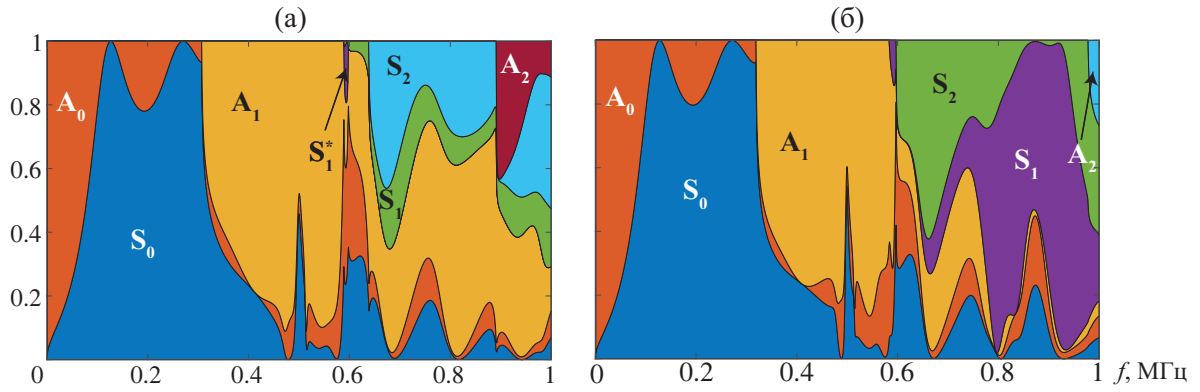


Рис. 3.2: Распределение энергии по модам для волновода с поверхностным пьезоэлементом со схемой укладки трансверсально-изотропных препрегов: (а) $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$, (б) $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$

На рисунках 3.3 и 3.4 представлены графики для пьезоэлемента, встроенного в волновод со схемой укладки $[0\ 90]_{2s}$ без “смарт”-слоя и со “смарт”-слоем. Видно, что на низких частотах доминирует фундаментальная антисимметричная мода A_0 , но достаточно быстро основная часть энергии источника переходит к фундаментальной симметричной моде S_0 . Кроме того, на рисунках 3.3 (г) и 3.4 (г) видно, что встроенный под 4-м слоем пьезодатчик селективно возбуждает моду S_0 на диапазоне частот до 500 кГц, далее для волновода со “смарт”-слоем антисимметричные моды также практически не возбуждаются (рисунок 3.4 (г)). Иная картина наблюдает-

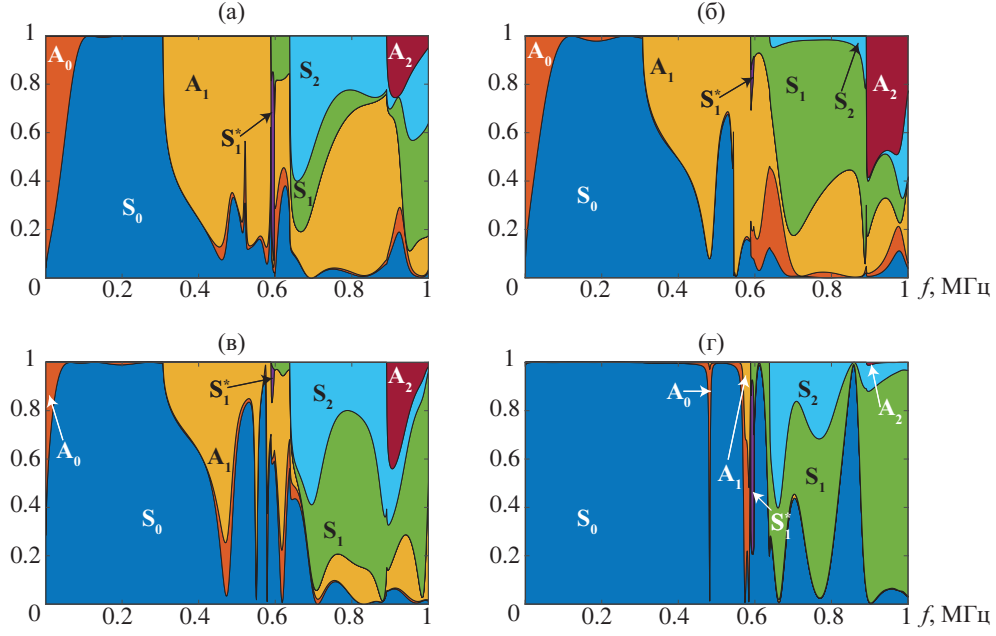


Рис. 3.3: Распределение энергии по модам для волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ со встроенным пьзоэлементом: (а) под 1-м слоем, (б) под 2-м слоем, (в) под 3-м слоем, (г) под 4-м слоем

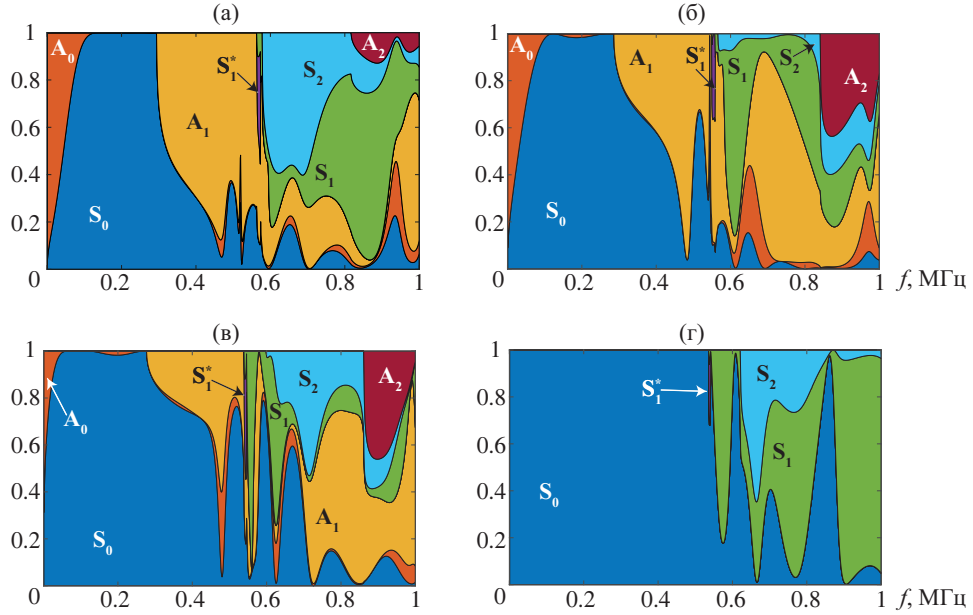


Рис. 3.4: Распределение энергии по модам для волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ с встроенным пьзоэлементом со “смарт”-слоем: (а) – под 1-м слоем, (б)– под 2-м слоем, (в)– под 3-м слоем, (г) – под 4-м слоем

ся для волновода без “смарт”-слоя: на трехмодовом диапазоне небольшой вклад вносят моды A_0 и A_1 , но после выходы обратной волны S_1^* они практически полностью подавляются и доминирующими становятся S_0 , S_1 и S_2 . В случае, когда пьезоэлемент находится под 1-м, 2-м или 3-м слоем, в трехмодовом диапазоне наблюдается одинаковая картина для волновода со “смарт”-слоем и без него. На рисунке 3.4 (а) доминируют симметричные моды, аналогичное поведение наблюдается на 3.3 (б) и (в). Антисимметричная мода A_1 переносит на себе большую часть энергии на рисунках 3.3 (а) и 3.4 (в), (б) в диапазоне частот от 700 до 900 кГц. Но при этом доля моды A_1 после выхода обратной волны меньше, чем в случае поверхностного пьезоэлемента (рис. 3.2 (а)).

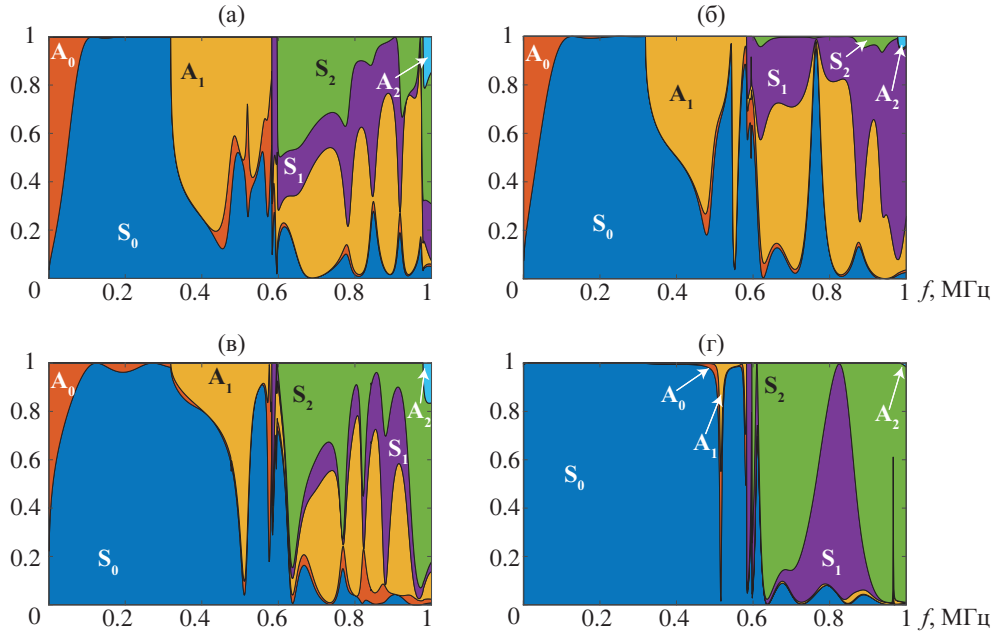


Рис. 3.5: Распределение энергии по модам для волновода $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$ со встроенным пьезоэлементом: (а)– под 1-м слоем, (б)– под 2-м слоем, (в) – под 3-м слоем, (г)– под 4-м слоем

Аналогичное поведение можно наблюдать для волновода $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$ на рисунках 3.5 и 3.6. Причем для пьезоэлемента под 4-м слоем (рисунки

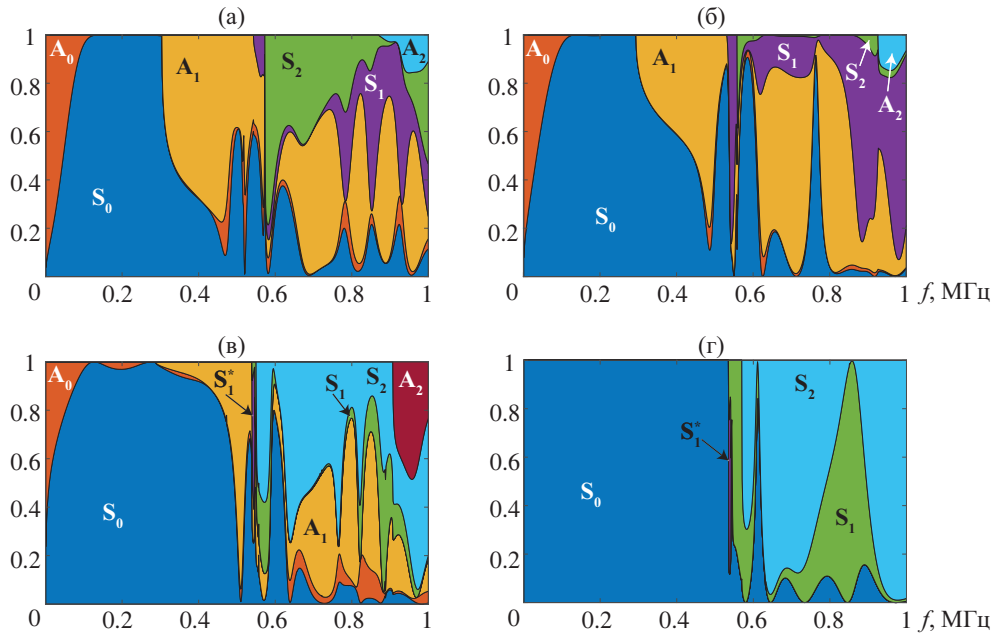


Рис. 3.6: Распределение энергии по модам для волновода $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$ со встроенным пьзоэлементом и со “смарт”-слоем: (а)– под 1-м слоем, (б)– под 2-м слоем, (в)– под 3-м слоем, (г)– под 4-м слоем

3.5 (г) и 3.6 (г)) также наблюдается подавление антисимметричных мод A_0 и A_1 . В отличие от поверхностного пьзоактуатора (рисунок 3.2 (б)), для пьзоэлемента, встроенного под 1-м, 2-м и 3-м слоями, значительную часть энергии в диапазоне выше 600 кГц переносит мода A_1 (рисунки 3.5 (а), (б), (в) и 3.6 (а), (б), (в)). Кроме того, для пьзодатчика, встроенного под 2-м слоем, в отличии от поверхностного заметно, что мода S_1 имеет большую долю, чем мода S_2 (3.5 (б) и рисунок 3.6 (б), соответственно). Вплоть до возбуждения обратной волны наблюдается схожий характер поведения для волновода без “смарт”-слоя и с ним, то есть доминирует фундаментальная симметричная мода S_0 .

§3.2. Влияние клеевой прослойки между пьезоэлементом и упругим волноводом на возбуждаемые бегущие упругие волны

В данном разделе для демонстрации влияния клеевой прослойки на возбуждение бегущих волн в упругом волноводе рассматривается задача о возбуждении гармонических колебаний в изотропной конструкции с поверхностно закрепленным пьезоактуатором, выполненным из пьезокерамики PZT-5H [104] (рис. 3.7). Актуатор приклеен к верхней поверхности $z = 0$ волновода, выполненного из алюминия, упругие модули которого получены из эксперимента (модуль Юнга $E = 72.012$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3944$, плотность $\rho = 2700$ кг/м³, толщина $H = 3.79$ мм). Нижняя поверхность актуатора заземлена, к верхней поверхности прикладывается электрическое напряжение 20 В.

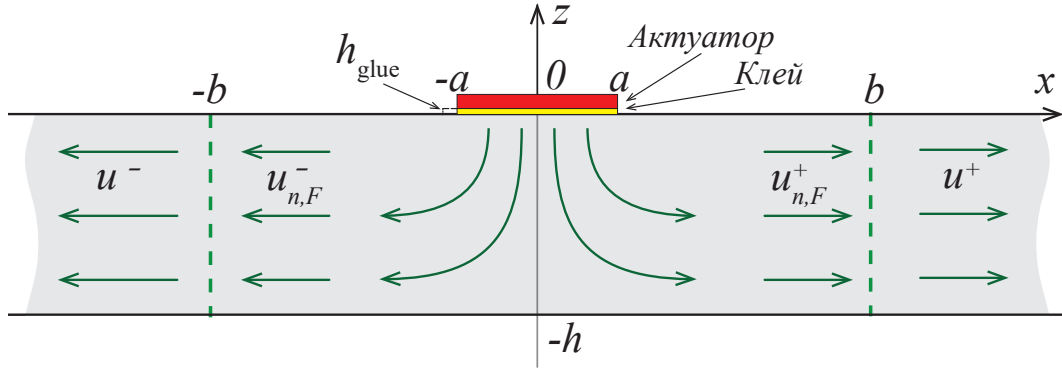


Рис. 3.7: Геометрия рассматриваемой задачи

Рассмотрено несколько способов прикрепления пьезоактуатора к волноводу. В первом случае в качестве клеевой прослойки выступает суперклей, который моделируется как изотропный материал с параметрами: модуль Юнга $E = 1.7$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$, плотность $\rho = 1248$ кг/м³. Толщина суперклея варьируется и принимает следующие значения:

$h_{glue} = 25 * 10^{-4}$ мм, $h_{glue} = 50 * 10^{-4}$ мм и $h_{glue} = 100 * 10^{-4}$ мм. Во втором случае актуатор крепится к волноводу при помощи двусторонней клеевой ленты, описываемая изотропной моделью ($E = 0.5261$ ГПа, $\nu = 0.4254$, $\rho = 1029$ кг/м³, $h_{glue} = 58 * 10^{-4}$ мм). Во втором варианте также рассматривается три варианта толщины: лента приклеенная в один, два или три слоя. Упругие модули клеевых слоев определялись из эксперимента.

Дисперсионные кривые, рассчитанные для рассматриваемого волновода представлены на рисунке 3.8

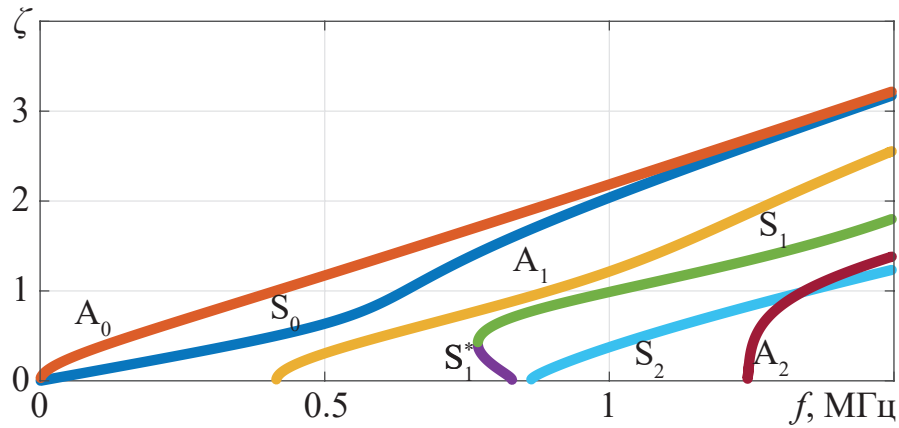


Рис. 3.8: Дисперсионные кривые для алюминиевого волновода толщины $H = 3.79$ мм

Для анализа влияния типа клеевой прослойки и его толщины построены графики долей энергии η_n каждой моды. Цвета долей энергии совпадают с цветами дисперсионных кривых, представленных на рисунке 3.8. Как видно из рисунка 3.9 доля моды S_0 для обоих вариантов клеевого слоя уменьшается с ростом его толщины до 600 кГц, при этом значения для A_1 остаются практически неизменными. После 600 кГц поведение моды S_0 остается практически неизменным, только после 1250 кГц появляются более заметные изменения в её характере поведения. В случае волновода с двусторонней лентой (рис. 3.9 (а), (в), (д)) доля переносимой энергии для обратной волны S_1^* увеличивается, когда используется два и три слоя ленты.

Обратное поведение можно наблюдать для моды A_2 . В случае суперклея (рис. 3.9 (б), (г), (е)) наблюдается противоположная ситуация: доля моды S_1^* уменьшается, а A_2 увеличивается. Мода S_2 переносит на себе большую часть энергии во всех случаях толщины и типа клеевой прослойки после её выхода и до появления моды A_2 .

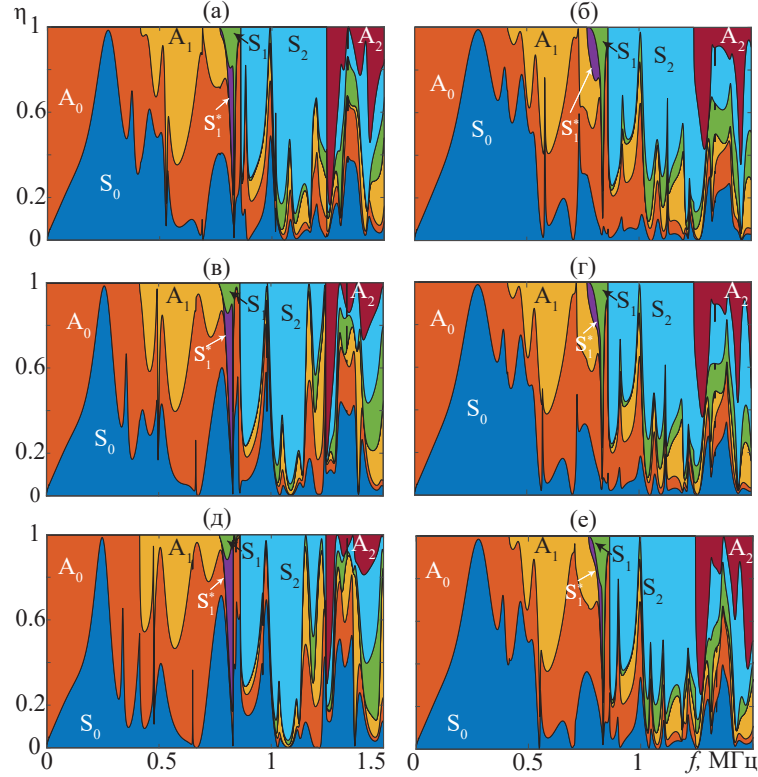


Рис. 3.9: Распределение энергии от источника колебаний между бегущими волнами, рассчитанное для различных типов соединения актуатора с волноводом. Слева приведены графики для двусторонней ленты, справа – суперклея. (а) – $h_{glue} = 58 * 10^{-4}$ мм; (б) – $h_{glue} = 25 * 10^{-4}$ мм; (в) – $h_{glue} = 2 * 58 * 10^{-4}$ мм; (г) – $h_{glue} = 50 * 10^{-4}$ мм; (д) – $h_{glue} = 3 * 58 * 10^{-4}$ мм; (е) – $h_{glue} = 100 * 10^{-4}$ мм

Далее рассматривается задача о возбуждении бегущих упругих волн с помощью пьезоэлемента, выполненного из материала РІС-151 (толщина $h_p = 0.2$ мм, ширина $2a = 10$ мм), прикрепленного в верхней поверхности $z = 0$ трехслойного волновода (таблица 2.1, рис. 3.10). Нижняя поверхность пьезоэлемента заземлена, а к верхней прикладывается электрическое на-

пряжение 70 В.

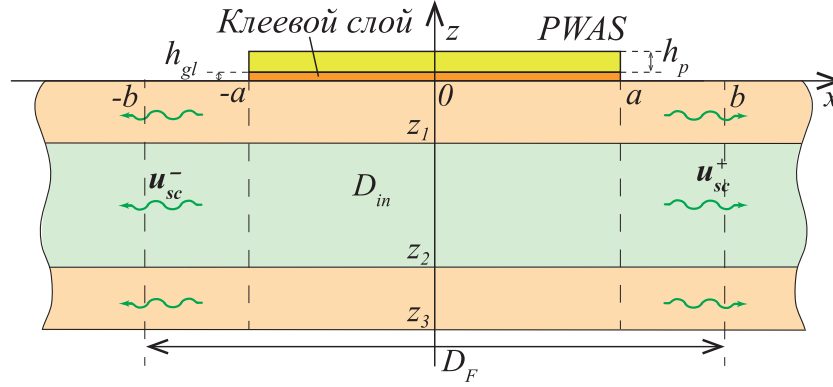


Рис. 3.10: Композитная пластина с актуатором, прикрепленным к верхней поверхности

Рассматриваются несколько способов прикрепления PWAS к волноводу. Условия идеального контакта относятся к первому типу. Оно предполагает непрерывность перемещений и напряжений на границе раздела между волноводом и PWAS ($h_{gl} = 0$). Во втором случае добавляется промежуточный клеевой слой, который представляет собой изотропный материал со следующими параметрами: толщина $h_{gl} = 25$ мкм, модуль Юнга $E_{gl} = 1.7$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{gl} = 0.4$, плотность $\rho_{gl} = 1248$ кг/м³. В третьем случае предполагается крепление PWAS с помощью двусторонней клейкой ленты, также описываемой изотропной моделью ($h_{gl} = 60$ мкм, $E_{gl} = 0.4$ ГПа, $\nu_{gl} = 0.435$, $\rho_{gl} = 930$ кг/м³).

Доля энергии отдельной волны с номером n вычисляется по формуле $\theta_n = (E_n^+ + E_n^-)/E = \eta_n^\pm$ как и в разделе §3.1. Данный параметр рассчитывался для различных типов соединения актуатора с волноводом (рис. 3.11). Распределение энергии в моделях без клея (а) и с клеевым слоем (б) практически одинаково. Незначительные различия между моделями наблюдаются для частот f , превышающих 550 кГц, и становятся наиболее заметными вблизи 950 кГц. В окрестности данной частоты наблюдается перерас-

пределение энергии между всеми модами, за исключением моды S_2 . В случае прикрепление пьезоактуатора к волноводу при помощи клеевой ленты (в) наблюдается значительное изменение в распределении энергии между волнами начиная с 450 кГц. Например, основная волна S_0 практически не возбуждается в диапазоне от 450 до 530 кГц, чего ранее не наблюдалось. В этом диапазоне возбуждаются только антисимметричные волны Лэмба. Или, наоборот, основные волны вносят заметный вклад в общее волновое поле в диапазоне от 800 до 870 кГц, чего ранее также не наблюдалось.

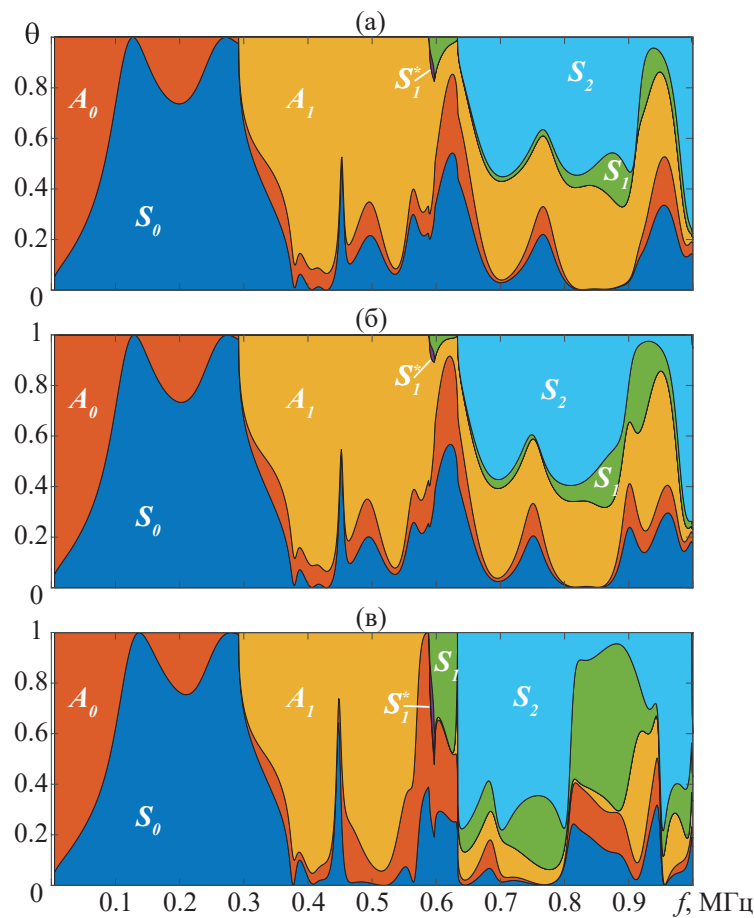


Рис. 3.11: Распределение энергии от источника колебаний между бегущими волнами, рассчитанное для различных типов соединения актуатора с волноводом: (а) - без клеевого слоя, (б) - клей, (в) - клейкая лента.

ГЛАВА 4. Особенности волновой динамики слоистого анизотропного материала, связанные с его внутренней структурой

§4.1. Влияние отдельных упругих модулей на дисперсионные характеристики слоистого композитного материала

В рамках гибридного численно-аналитического подхода был проведен параметрический анализ влияния отдельных упругих констант, входящих в матрицу жесткости C , на поведение дисперсионных кривых волновых чисел $\zeta_n(f)$ нормальных волн для волоконно-армированных препрегов. Материал препрега предполагается трансверсально-изотропным; соответствующие независимые модули упругости для модельного препрега, использовавшегося в расчетах, представлены в таблице 4.1 для случая укладки волокон вдоль оси Ox . Каждый независимый модуль упругости C_{ij} (C_{11} , C_{13} , C_{33} , C_{44} и C_{55}) варьировался отдельно от остальных констант в диапазоне от -30% до 30% относительно начальных значений с равномерным шагом в 6% .

Таблица 4.1: Упругие постоянные модельного препрега, ГПа

C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{55}
122.4	4.13	11.5	2.51	4.85

Далее на рисунках 4.1 – 4.5 представлены результаты такого параметрического анализа для важного в практических приложениях случая композитных материалов с перекрестной схемой укладки препрегов. Пред-

полагалось, что общая толщина волновода составляет $H = 2,3$ мм, а толщина препрега — $h_m = 0,14375$ мм, плотность $\rho = 1522 \text{ кг/м}^3$. Рассматривалось распространение нормальных волн вдоль направлений $\varphi = 0^\circ$ и 90° , соответствующим главным осям симметрии для следующих композитных материалов: $[0_4^\circ, 90_4^\circ]_s$, $[0_2^\circ, 90_2^\circ]_{2s}$ и $[0^\circ, 90^\circ]_{4s}$. Поскольку контакт между элементарными слоями предполагался идеальным (1.4), то в компьютерной модели повторяющиеся слои с одинаковым направлением укладки волокон объединялись в один слой большей толщины, и итоговые схемы укладки имели следующий вид: $[0^\circ, 90^\circ]_s$, $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ и $[0^\circ, 90^\circ]_{4s}$.

Дисперсионные кривые на всех рисунках 4.1 – 4.5 представлены как частотные зависимости волновых чисел $\zeta_n(f)$. Черные кривые рассчитаны для волновода с базовыми значениями модулей упругости препрега, указанными в таблице 4.1. Дисперсионные кривые в случае, когда соответствующий упругий модуль менялся в сторону увеличения, показаны красным цветом, а в сторону уменьшения – синим. На всех рисунках 4.1 – 4.5 верхний ряд графиков соответствует волноводу $[0^\circ, 90^\circ]_s$, средний — $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$, нижний — $[0^\circ, 90^\circ]_{4s}$; левые колонки — направление $\varphi = 0^\circ$, правые — $\varphi = 90^\circ$.

Влияние упругого модуля C_{11} на дисперсионные кривые представлено на рисунке 4.1. Увеличение данного модуля приводит к заметному уменьшению значений волновых чисел отдельных нормальных волн. С ростом частоты колебаний амплитуда отклонения от первоначальных значений увеличивается для всех мод за исключением A_0 и S_1 . Также следует отметить, что дисперсионные кривые более чувствительны к уменьшению C_{11} , т.к. отклонения в таком случае выше, нежели чем при его увеличении. Данные наблюдения справедливы для всех типов волноводов и ориентации волокон в них. Для направления $\varphi = 0^\circ$ увеличение числа слоев приводит

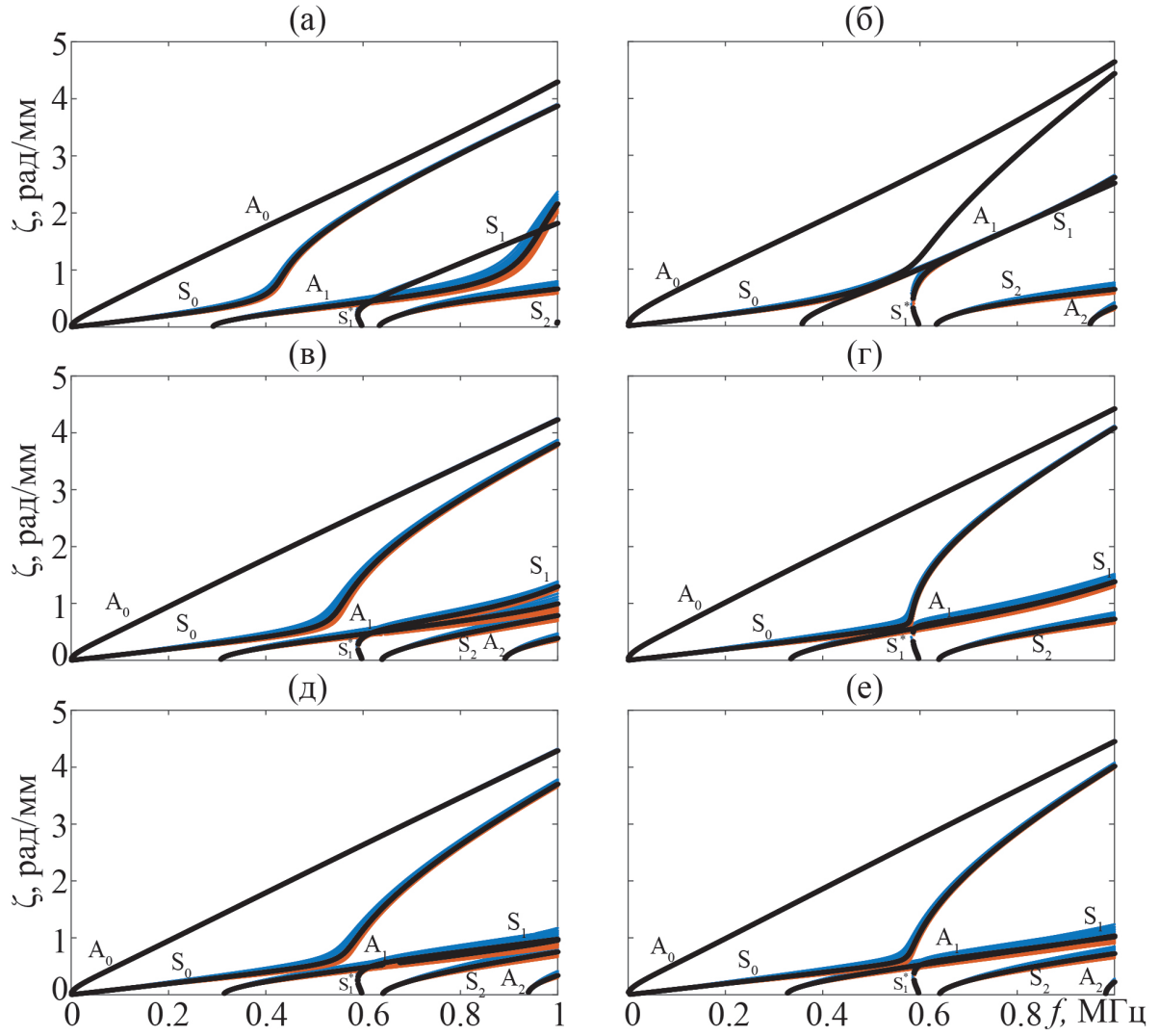


Рис. 4.1: Влияние упругого модуля C_{11} на частотные зависимости волновых чисел $\zeta_n(f)$ для слоистых композитов с перекрестной схемой армирования: (а), (б) — $[0^\circ, 90^\circ]_s$; (в), (г) — $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$; (д), (е) — $[0^\circ, 90^\circ]_{4s}$; (а), (в), (д) — направление $\varphi = 0^\circ$; (б), (г), (е) — направление $\varphi = 90^\circ$

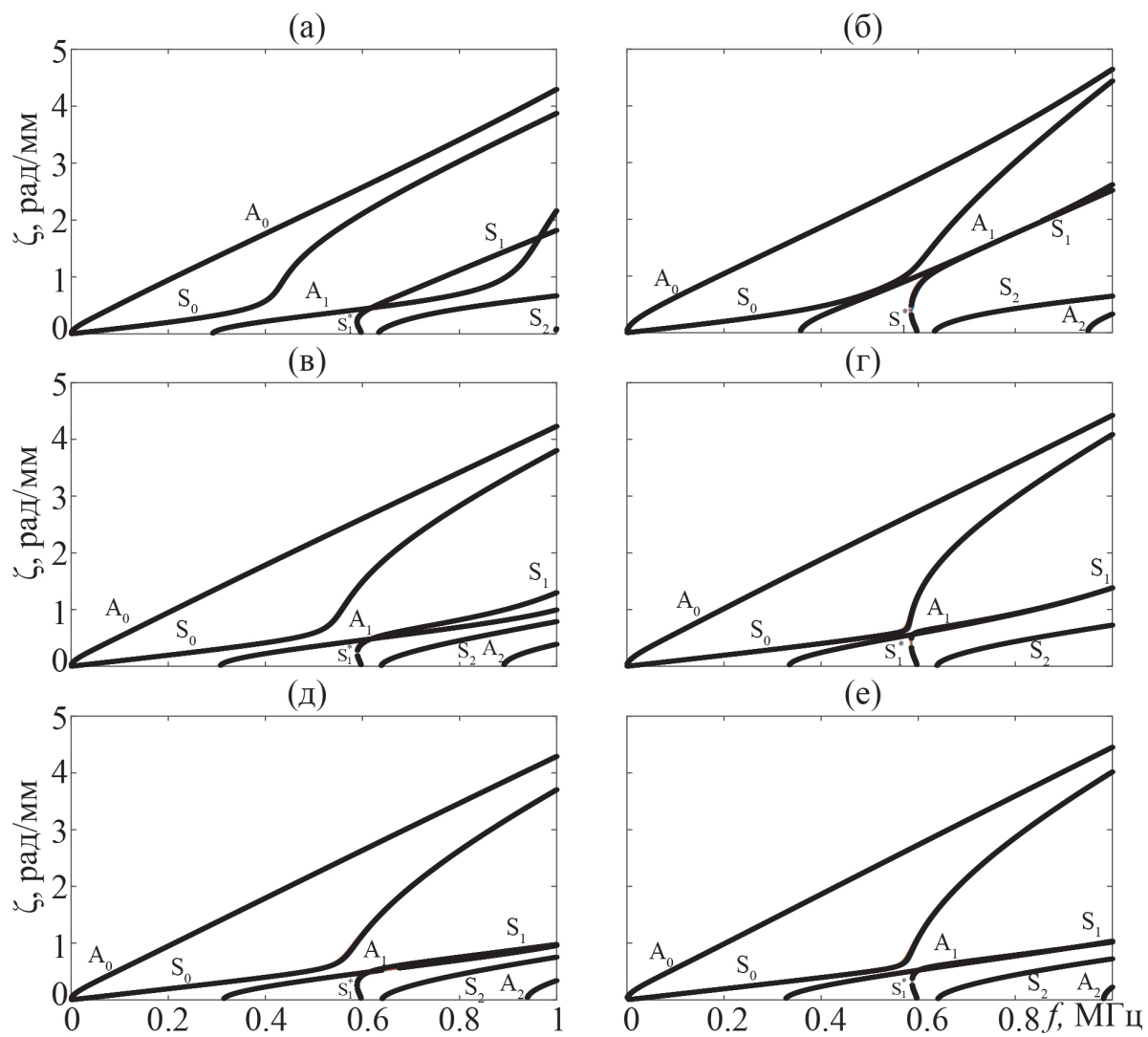


Рис. 4.2: То же, что и на рисунке 4.1, но при изменении модуля C_{13}

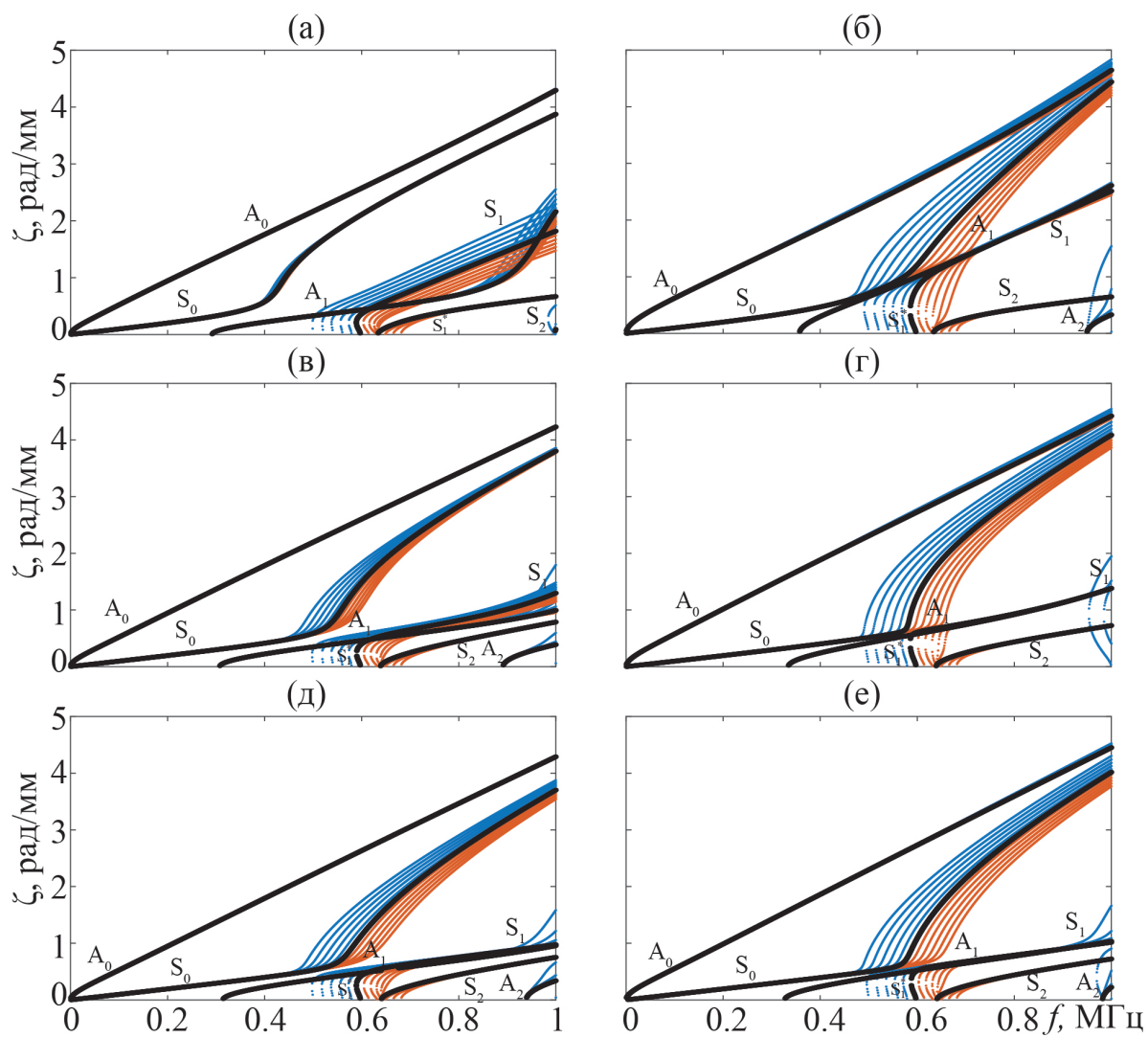


Рис. 4.3: То же, что и на рисунке 4.1, но при изменении модуля C_{33}

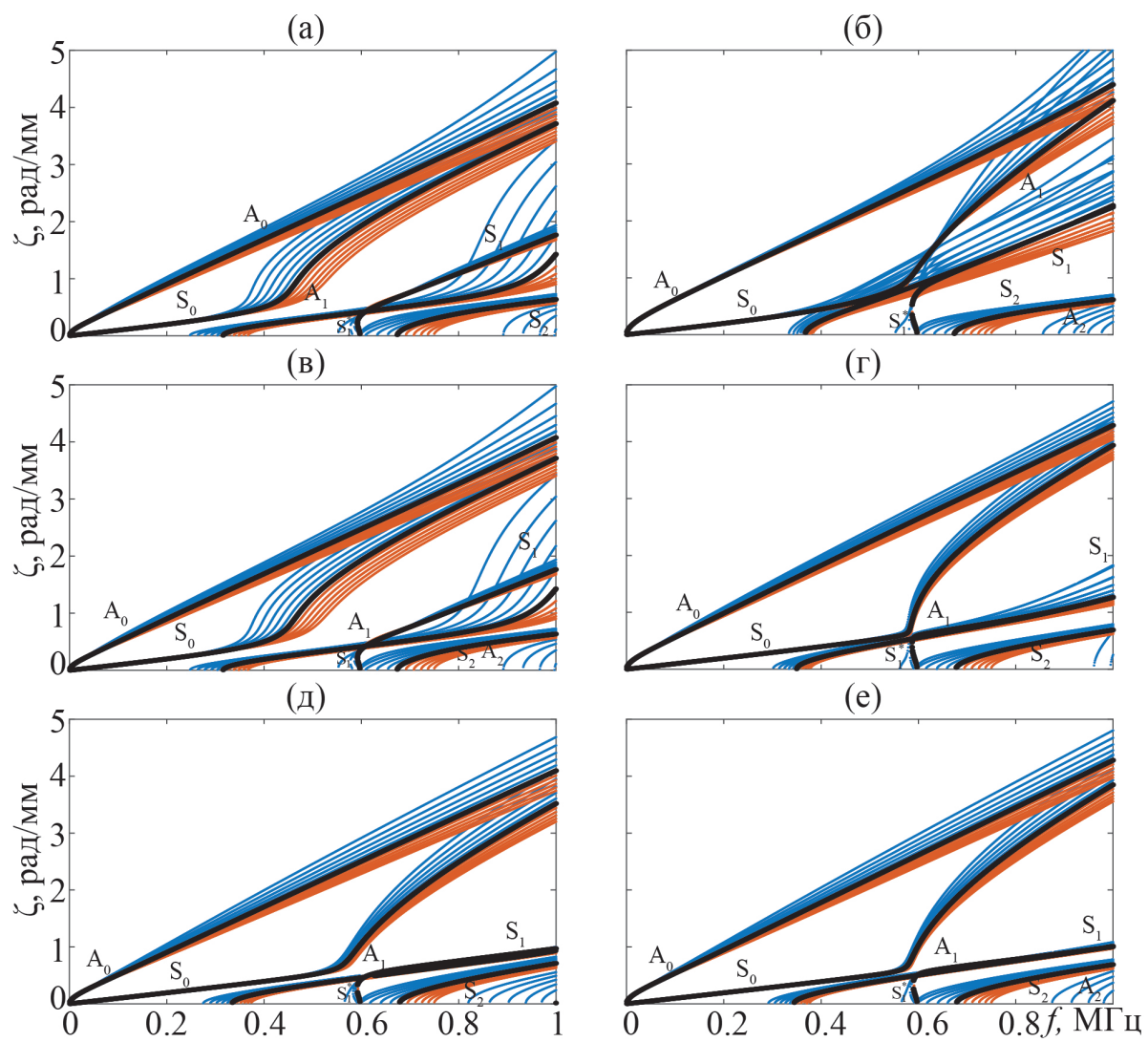


Рис. 4.4: То же, что и на рисунке 4.1, но при изменении модуля C_{44}

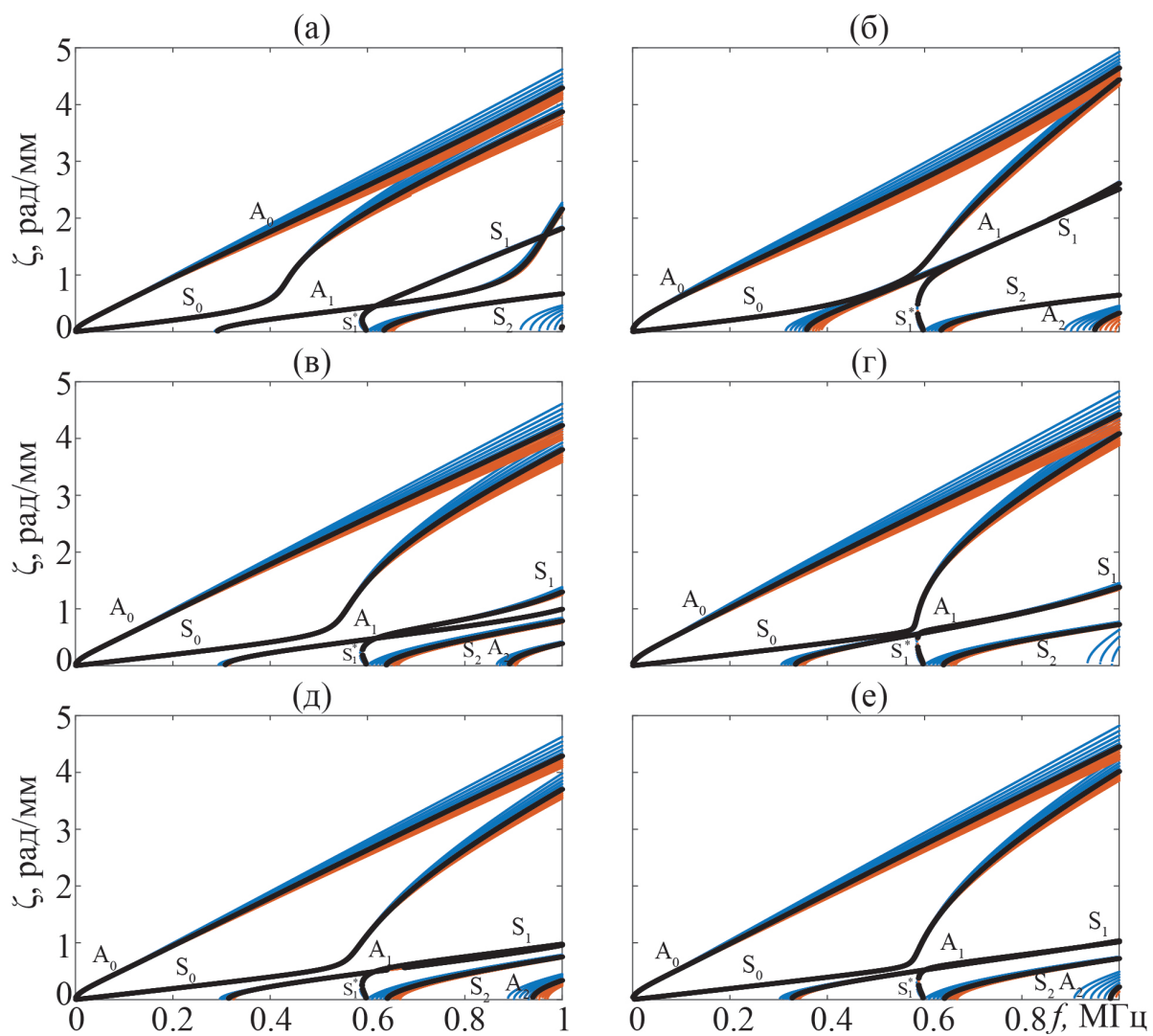


Рис. 4.5: То же, что и на рисунке 4.1, но при изменении модуля C_{55}

к сдвигу характерного изгиба (точки перегиба) моды S_0 . Для перпендикулярного направления $\varphi = 90^\circ$ дисперсия моды S_0 менее заметна, хотя и достигает своих максимальных значений тоже вблизи изгиба. Остальные волны менее чувствительны к изменению модуля C_{11} за исключением волнового числа для моды A_1 , которая на частотах выше 600 кГц демонстрирует более сильное отклонения от первоначальных значений. Варьирование модуля C_{13} (рисунок 4.2) мало влияет на дисперсионные характеристики бегущих волн.

Влияние изменения модуля C_{33} на вид дисперсионных кривых показано на рисунке 4.3. Данный модуль наиболее сильно влияет дисперсионные кривые мод S_0 , S_1 и обратной волны S_1^* . В случае моды S_0 значительные изменения наблюдаются в том частотном диапазоне, где ее дисперсия максимальна. Интересно отметить, что для направления $\varphi = 0^\circ$ влияние C_{33} на моду S_0 практически отсутствует, однако с увеличением количества слоев, ориентированных вдоль 90° , изменения уже становятся весьма значительными. Варьирование коэффициента C_{33} также заметно влияет на частоту отсечки мод S_1 и S_1^* . Оба наблюдения справедливы для любого количества слоев и ориентации волокон в них. Остальные дисперсионные кривые остаются практически неизменными в рассматриваемом частотном диапазоне, за исключение моды A_0 в высокочастотном диапазоне для направления $\varphi = 90^\circ$. Здесь для частот выше 800 кГц появляется заметная разница в значении волнового числа при уменьшении C_{33} .

Среди всех рассмотренных ранее модулей параметр C_{44} наиболее сильно влияет на поведение дисперсионных кривых и частоты отсечки отдельных мод A_1 , S_2 и A_2 (рисунок 4.4). Заметные отклонения в значениях $\zeta_n(f)$ моды A_0 наблюдаются и в низкочастотном диапазоне (выше 150 кГц), что

ранее не наблюдалось. Данный модуль также сильно влияет на частоты отсечки мод A_1 и S_2 , что может послужить хорошим индикатором при определении свойств материала композита. При этом частоты отсечки обратных волн (например S_1) фактически не меняются при изменении данного модуля. На дисперсионные характеристики моды S_0 данный модуль влияет аналогично параметру C_{33} .

Влияние модуля C_{55} на дисперсионные кривые показано на рисунке 4.5. В случае моды A_0 изменения ее волнового числа равномерно нарастают с ростом частоты. Волновое число моды S_0 также меняется, однако, происходит это не в окрестности точки перегиба, а с удалением от нее в область высоких частот. Как и для константы C_{44} , изменение значения C_{55} не оказывает существенного влияния на моды S_1 и S_1^* . В случае мод A_1 , S_2 и A_2 заметно изменение частот их отсечки, но оно менее выраженное, чем для модуля C_{44} . Аналогичное поведение наблюдается и для амплитуд отклонения волновых чисел мод A_0 и S_0 : при варьировании C_{55} они меньше, чем для C_{44} . Необходимо отметить так же, что с увеличением числа слоев с чередующейся укладкой отличия в поведении $\zeta_n(f)$ для различных направлений распространения уменьшается. Так, например, в случае волновода $[0^\circ, 90^\circ]_s$ при варьировании модуля C_{55} для направления $\varphi = 90^\circ$ в отличие от $\varphi = 0^\circ$ наблюдалось изменение в значениях частоты отсечки моды A_1 . В то же время для волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{4s}$ эти отличия имеют минимальный характер.

В качестве дополнительного примера на рисунке 4.6 приводятся результаты оценки влияния изменения упругих модулей на дисперсионные кривые $\zeta_n(f)$ для несимметричного волновода $[0^\circ, 90^\circ]_4$. Полученные результаты в целом согласуются с аналогичными для волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{4s}$.

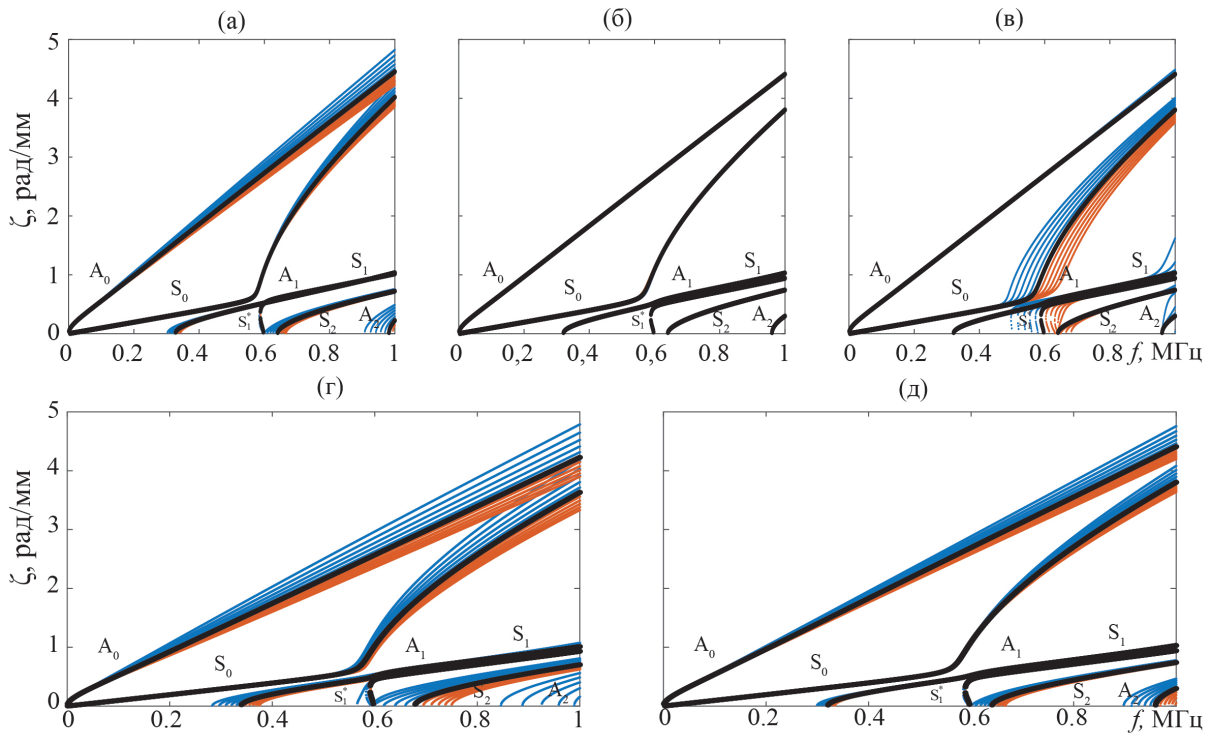


Рис. 4.6: Влияние варьирования отдельных упругих модулей на дисперсионные кривые для несимметричного волновода $[0^\circ, 90^\circ]_4$

Единственное существенное отличие наблюдается для модуля C_{11} . Если для рассматриваемого волновода он влияет на поведение дисперсионных кривых мод A_0 и S_0 на высоких частотах, то в случае симметричного композита максимальные изменения для моды S_0 характерны для частотного диапазона, где ее дисперсия максимальна.

Из приведенных результатов следует, что в рассмотренном случае композитов с перекрестной схемой укладки препрегов, влияние отдельных упругих модулей на дисперсионные кривые носит существенно более сложный характер, чем в случае однонаправленных материалов [105, 106], где для отдельных направлений распространения и отдельных мод такая зависимость фактически однозначная. Для всех указанных выше композитов уникальное влияние отдельной компоненты матрицы жесткости на дисперсионные кривые имеет место только для константы C_{33} , от значения которой

существенно зависит частота резонанса обратной волны. В то же время константы C_{44} и C_{55} (а в случае несимметричного композита и C_{11}) похожим образом воздействуют на поведение дисперсионных кривых. Для константы C_{11} и симметричных композитов оптимальным в плане ее влияния является частотный диапазон, в котором наблюдается максимальная дисперсия моды S_0 , и последующие за ним частоты.

Данные наблюдения о дисперсионных свойствах бегущих волн являются важной информацией, позволяющей оценить возможность решения задачи идентификации упругих модулей отдельного препрега в многослойном волокнно-армированном композите. Ключевым же выводом из полученных результатов может быть, по-видимому, то, что в случае материалов с большим количеством слоев и частым чередованием направлений укладки препрегов, для сколь либо надежного восстановления их механических свойств по данным волнового зондирования необходима информация об особенностях дисперсионных кривых высших нормальных волн (например, точки выхода новых мод, точки перегиба на дисперсионной кривой).

§4.2. Влияние микроструктуры волокнно-армированного слоистого композитного материала на распространяющиеся в нем нормальные моды

Многочисленные экспериментальные исследования ультразвуковых волновых процессов в полимерных композитных материалах, изготовленных из однонаправленных волокнно-армированных препрегов, указывают на ряд их особенностей, связанных со сложной внутренней микроструктурой слоистых композитов.

Первая из них определяется процессом производства самих препрегов

и дальнейшим формованием из них готового композитного изделия. В процессе их изготовления возможно появление областей с концентрацией или, наоборот, с отсутствием армирующих волокон в полимерном связующем (рисунок 4.7, а)

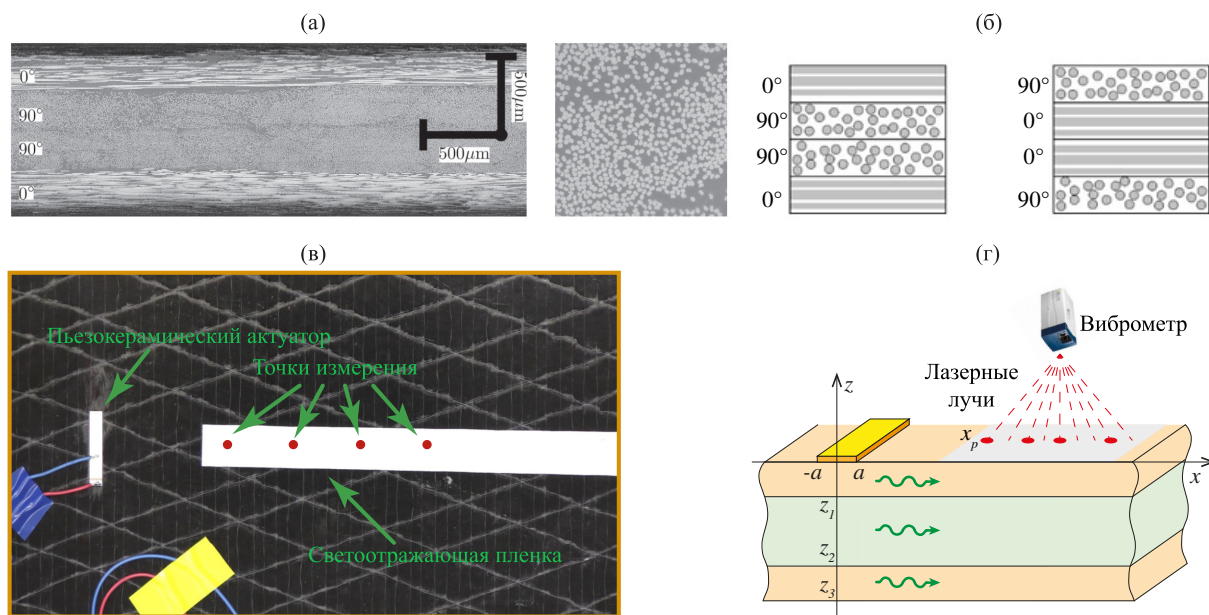


Рис. 4.7: Особенности микроструктуры волоконно-армированного углепластика: (а) – микрофотография среза композитного материала, (б), (г) – геометрия рассматриваемых задач; (в) – общий вид экспериментального образца

Данные области фактически могут рассматриваться как препятствия для бегущих волн и, следовательно, порождают рассеянное волновое поле при взаимодействии с ними. Его появление может ошибочно трактоваться как наличие дефекта внутри рассматриваемого образца. В экспериментах данное явление наблюдается в виде добавочных колебаний после прохождения самой быстрой волны (обычно, это первая фундаментальная симметричная мода S_0), но до прихода следующей по скорости волны (фундаментальная антисимметричная мода A_0). Подобное явление получило название непрерывной конвертации мод (в зарубежных источниках - continuous mode conversion phenomenon) и не наблюдается в случае изотропных мате-

риалов [38, 42].

Другая сложность при моделировании волоконно-армированных материалов связана с достаточно заметным затуханием возбуждаемых в них упругих волн, что приводит к уменьшению размеров области, диагностируемой отдельным элементом распределенной сенсорной сети и, следовательно, определяет необходимость более плотного размещения диагностирующих узлов. Такие потери энергии связаны с вязкоупругим характером полимерной матрицы композитного материала, межфазным затуханием, наличием границы раздела двух сред (волокна и полимерное связующее), затуханием в виду наличия микрповреждений (отслоения, трение волокон, повреждения в матрице, нарушения в укладке волокон и т.д.) и другими факторами. Учитывая полимерный характер связующего в таких материалах, для моделирования их вязкоупругого поведения в линейном приближении матрица жесткости C предполагается комплекснозначной

$$\tilde{C}(\omega) = C(\omega) - i\eta(\omega), \quad (4.1)$$

где C и η – вещественнозначные матрицы упругой жесткости и вязкости размерности 6×6 , зависящие, вообще говоря, от частоты колебаний. Оба явления (непрерывная конвертация мод и затухание) оказывают существенное влияние на характеристики бегущих волн и должны быть учтены в математических и компьютерных моделях при интерпретации экспериментальных данных.

Результаты экспериментальных исследований указанных выше явлений были получены ранее в рамках международного сотрудничества с использованием сканирующей лазерной виброметрии для композитных пластины с перекрестной схемой укладки однонаправленных препрегов $[0^\circ, 90^\circ]_s$ (рисунок 4.7, в,г). Из них и результатов более ранних работ других ав-

торов [42] следовало, что непрерывная конвертация мод наблюдается, в основном, вдоль направлений укладки волокон верхнего слоя или в перпендикулярном к нему, что соответствует главным осям рассматриваемого композитного материала. Поскольку вдоль данных направлений возможно распространение плоских волн, это позволяет понизить изначальную размерность задачи и формулировать ее в плоской постановке (рисунок 4.7, б). Далее для задач, рассматриваемых в разных сечениях композита, вводятся следующие обозначения $[0^\circ, 90^\circ]_s$ (ось Ox и направление укладки волокон в верхнем слое сонаправлены) и $[90^\circ, 0^\circ]_s$ (волокна первого слоя и ось Ox перпендикулярны друг другу).

Для учета линейного вязкоупругого поведения рассматриваемых композитных пластин используется соотношение (4.1) в рамках гистерезисной модели, хорошо зарекомендовавшей себя для описания затухания в слоистых композитных материалах в области низких и средних частот [107]. В рамках данной модели матрицы C и η в (4.1) не зависят от частоты. В предположении трансверсальной изотропии материала препрега и в случае плоской постановки задачи ненулевыми среди рассматриваемых констант матрицы жесткости являются элементы $\hat{C}_{11}, \hat{C}_{33}, \hat{C}_{13} = \hat{C}_{31}, \hat{C}_{55}$. Комплексные значения компонент $\hat{C}$ могут быть получены напрямую исходя из экспериментальных данных (например, используя методы ультразвуковой интерферометрии [108]). Поскольку материал препрега композитного образца, рассматривавшегося в экспериментах, аналогичен тому, что использовался в [108], то для компьютерной модели значения элементов матрицы вязкости были взяты пропорциональными соответствующим элементам вещественной матрицы жесткости, полученной ранее, $\eta_{ij} = \beta_{ij} C_{ij}$ с коэффициентами пропорциональности из [108]. Полученные значения для

рассматриваемого волновода (вдоль направления волокон верхнего слоя $[0^\circ]$ или в перпендикулярном ему направлении $[90^\circ]$) представлены в таблице 4.2; плотность материала $\rho = 1522 \text{ кг/м}^3$, толщина $h = 0,575 \text{ мм}$.

Таблица 4.2: Значения элементов матрицы жесткости слоев с различным направлением укладки волокон.

Модуль упругости	Направление $[0^\circ]$, ГПа	Направление $[90^\circ]$, ГПа
$\tilde{C}_{11}$	$122.4-7.25i$	$11.5-0.51i$
$\tilde{C}_{33}$	$11.5-0.51i$	$11.5-0.51i$
$\tilde{C}_{13}$	$4.13-0.39i$	$6.47-0.24i$
$\tilde{C}_{55}$	$4.85-0.29i$	$2.51-0.09i$

При проведении эксперимента к поверхности композитной пластины была приклеена тонкая светоотражающая пленка для улучшения отражающих свойств поверхности и увеличения соотношения “сигнал-шум” в экспериментальных данных. Данная пленка влияет на дисперсионные и амплитудно-частотные характеристики бегущих волн, что подтверждается недавними исследованиями [109]. При проведении численных расчетов пленка моделируется как двухслойная структура, а весь волновод при этом становится пятислойным. Нижний слой пленки, имитирующий клеевую прослойку, моделируется как изотропное тело с модулем Юнга $E = 0,5 + 0,1i$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,4$, плотностью $\rho = 930 \text{ кг/м}^3$ и толщиной $h = 50 \text{ мкм}$. Верхний слой пленки представляется как смесь эпоксидной смолы и стекла толщиной $h = 50 \text{ мкм}$. Свойства верхнего слоя ($\nu = 0,25$, $E = 15,25 + 2,23i$ ГПа, $\rho = 1300 \text{ кг/м}^3$) получены исходя из правил усреднения механических свойств смолы и стекла. На рисунке 4.8 представлены частотные зависимости волновых чисел фундаментальных мод A_0 и S_0 и первой высшей моды A_1 для композитов $[0^\circ, 90^\circ]_s$ и $[90^\circ, 0^\circ]_s$, как с учетом затухания, так и с добавлением светоотражающей пленки.

Видно, что в частотном диапазоне фундаментальных мод вещественные части волновых чисел фактически совпадают для всех сочетаний параметров. В то же время с ростом частоты и появлением первой высшей моды отклонение между случаями, когда не учитывается ни влияние затухания, ни пленка, и когда данные факторы учтены в модели становится заметным. Так, добавление пленки приводит к сдвигу частот отсечки для высших мод (например, антисимметричной моды A_1). Полученные результаты для первых двух фундаментальных мод позволяют в дальнейшем пренебречь влиянием пленки на характеристики волновода и не учитывать ее в расчетах, в которых частотный диапазон ограничен двухмодовым.

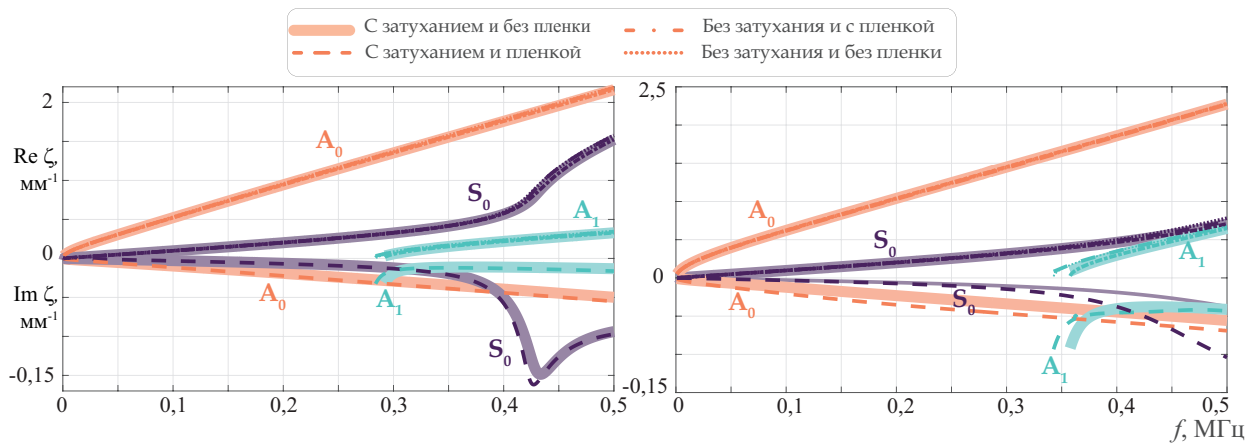


Рис. 4.8: Частотные зависимости волновых чисел для композита с перекрестным армированием: (а) – композит $[0^\circ, 90^\circ]_s$ и (б) – $[90^\circ, 0^\circ]_s$

Расчетные значения дисперсионных кривых, полученные как без учета пленки, так и при ее наличии, сравнивались также с экспериментальными результатами частотно-волнового анализа (нормированные линии уровня функции $|H(k, f)|$ – результата применения преобразований Фурье по времени и по пространственной координате к массиву экспериментальных данных, измеренных вдоль отрезка на поверхности волновода). Соответствующие результаты представлены на рисунке 4.9. В обоих рассматриваемых

случаях учет пленки в модели сближает экспериментальные данные и численные результаты. Данное явление особенно заметно начиная с появления третьей моды A_1 (выше 270-300 кГц), но до частоты отсечки (ниже 270-300 кГц), в двухмодовом диапазоне, численные результаты с пленкой и без нее фактически равны.

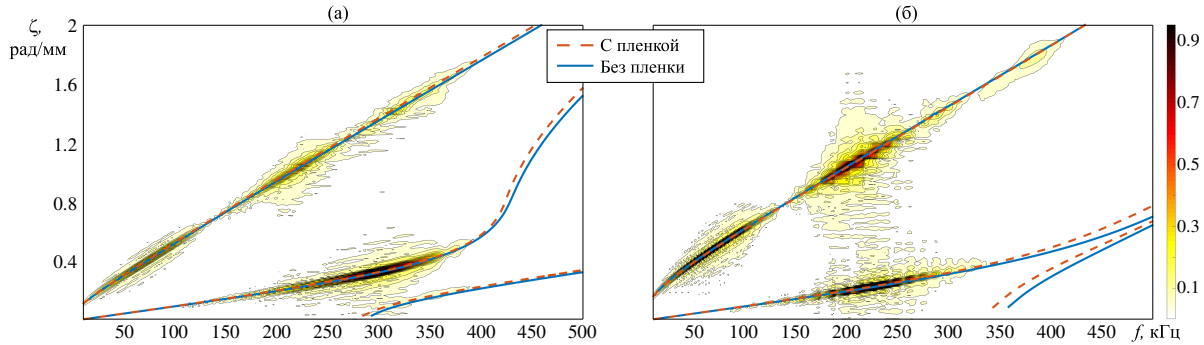


Рис. 4.9: Теоретические и экспериментальные дисперсионные кривые для различных сечений композитного образца: (а) - $[0^\circ, 90^\circ]_s$ и (б) - $[90^\circ, 0^\circ]_s$

Наряду с расчетом дисперсионных характеристик, разработанная компьютерная модель позволяет оценить влияние затухания и на нестационарные волновые сигналы, возбуждаемые в композитном материале, например, с использованием пленочных пьезоэлементов. В качестве источника колебаний при проведении расчетов и в эксперимента (рисунок 4.7) рассматривается прямоугольная накладка из пьезокерамики PIC-155, высотой $d = 0,2$ мм, шириной $2a_p = 10$ мм и длиной $l = 30$, приклеенная к верхней границе пластины $z = 0$. Нестационарные электрические напряжения, подаваемые на электроды, прикрепленные к актуатору, задавались в виде узкополосной тональной посылки - двух циклов синуса, модулированных синус-окном с центральной частотой $f_c = 180$ кГц. Результаты сопоставления вертикальной компоненты скоростей смещений $v_z(x, 0)$ между моделями с затуханием, без него и экспериментом представлены на рисунке 4.10

(синяя линия соответствует экспериментальным данным, красная линия - модель с учетом затухания внутри волновода, зеленая пунктирная линия - модель без затухания). Видно, что модель, учитывающая вязкость, существенно ближе к результатам эксперимента, нежели чем модель без вязкости, особенно для моды A_0 . Однако, совпадение не полное. Кроме того после прихода моды S_0 , но до приходы волны A_0 в экспериментальных данных наблюдаются колебания, которые не передаются ни одной из моделей с затуханием или без него. Данный эффект, как и дополнительные отклонения по времени прихода волн связан с эффектом конвертации мод.

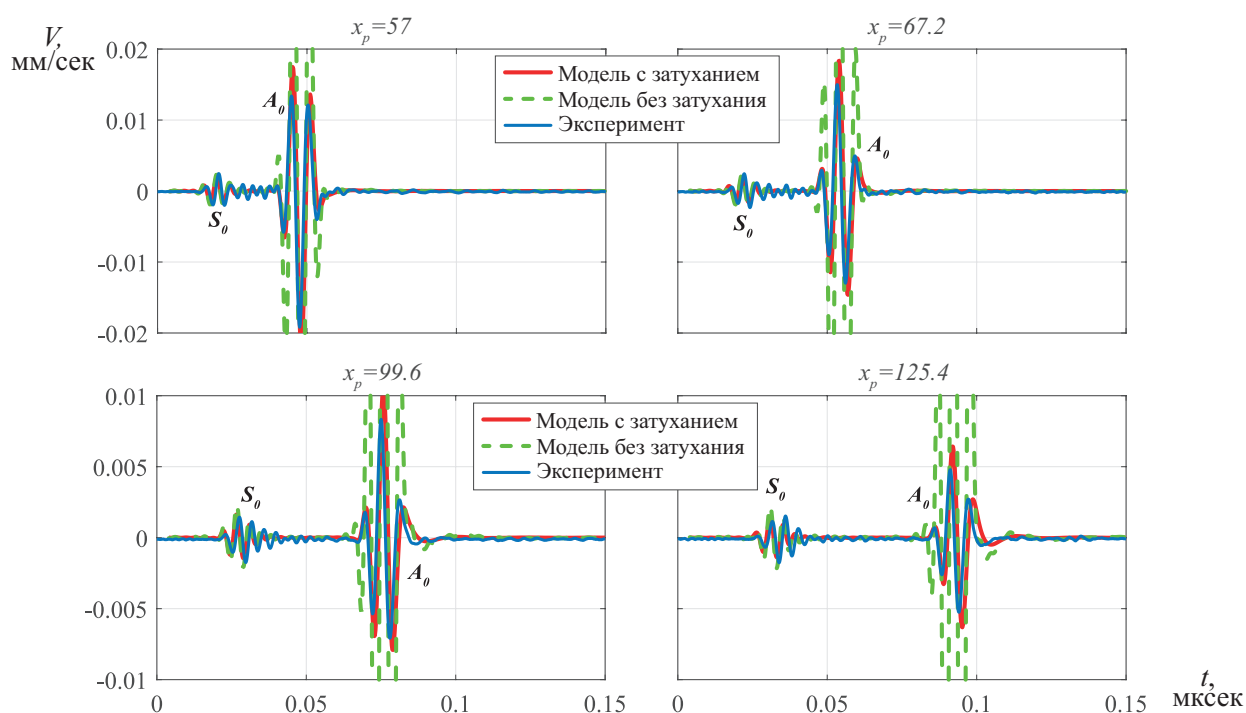


Рис. 4.10: Вертикальные компонента скоростей смещений для различных точек измерения x_p на верхней поверхности волновода

Непрерывная конвертация мод не наблюдается для волновода с однородными микроскопическими свойствами. Для воссоздания подобного эффекта волновод должен обладать сложной неоднородной структурой, которую возможно смоделировать при помощи генерации разброса моду-

лей упругости и плотности вокруг некоторых усредненных значений материала. В данной работе предполагается, что пространственное изменение свойств материала представляет собой двумерное гауссово однородное случайное поле $\mathbf{w}(\theta, \mathbf{x})$, которое разбивается на детерминированную и стохастическую составляющие:

$$w(\theta, \mathbf{x}) = \bar{w}(\mathbf{x}) + \alpha(\theta, \mathbf{x}),$$

где θ – элемент пространства событий. При этом для расчета волновых полей обычно используется метод конечных элементов.

Для удобства при описании непрерывной конвертации мод в трансверсально-изотропном материале вместо матрицы жесткости используется матрица податливости и соответствующие инженерные константы. В качестве переменных случайного поля внутри волновода рассматриваются модули Юнга $\mathbf{E}(\theta, \mathbf{x}) = \{E_1(\theta, \mathbf{x}), E_2(\theta, \mathbf{x}), E_3(\theta, \mathbf{x})\}^T$ и плотность $\rho((\theta, \mathbf{x}))$. Причина выбора модулей Юнга связана с тем, что в рассматриваемом частотном диапазоне фундаментальных мод на дисперсионные свойства волны S_0 , конвертация которой и наблюдается в эксперименте, влияют только модули Юнга [42]. К случайному полю применяется разложение Карунена-Лоэва:

$$\mathbf{w}(\theta, \mathbf{x}) = \bar{w}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{N_{KL}} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(\mathbf{x}),$$

тогда рассматриваемые свойства материала могут быть представлены в виде [45]:

$$\begin{aligned}
E_1(\mathbf{x}, \theta) &\approx \bar{E}_1 \left(1 + \sigma \sum_{n=1}^{N_{KL}} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(\mathbf{x}) \right), \\
E_2(\mathbf{x}, \theta) &\approx \bar{E}_2 \left(1 + \sigma \sum_{n=1}^{N_{KL}} \sqrt{\lambda_n} \eta_n(\theta) f_n(\mathbf{x}) \right), \\
E_3(\mathbf{x}, \theta) &\approx \bar{E}_3 \left(1 + \sigma \sum_{n=1}^{N_{KL}} \sqrt{\lambda_n} \chi_n(\theta) f_n(\mathbf{x}) \right), \\
\rho(\mathbf{x}, \theta) &\approx \bar{\rho} \left(1 + \sigma \sum_{n=1}^{N_{KL}} \sqrt{\lambda_n} \psi_n(\theta) f_n(\mathbf{x}) \right).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\bar{\mathbf{E}} = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)^T = (120, 5, 7, 82, 7, 82)^T$ ГПа и $\bar{\rho} = 1522$ кг/м³ – средние значения рассматриваемых величин, $\sigma = 0,05$ – стандартное отклонение, $N_{KL} = 1000$ – количество удерживаемых слагаемых в разложении Карунена-Лоэва, $\xi_n(\theta)$, $\eta_n(\theta)$, $\chi_n(\theta)$ и $\psi_n(\theta)$ – случайные величины, λ_n и $f_n(\mathbf{x})$ – собственные значения и собственные функции для стохастической части случайного поля $\alpha(\theta, \mathbf{x})$ с ковариационной функцией:

$$\hat{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sigma^2 e^{-\left(\frac{x_1-x_2}{b_x}\right)^2 - \left(\frac{z_1-z_2}{b_z}\right)^2}.$$

Величины $b_x = 5$ мм и $b_z = 0,575$ мм определяют затухание ковариационной функции в зависимости от координат, а, следовательно, и количество слагаемых, удерживаемых в разложении. Выбор значений данных параметров обусловлен толщиной волновода (b_z) и минимальной длиной волны A_0 в рассматриваемом частотном диапазоне (b_x). Разложение (4.2) приводит к аналогичным разложениям и элементов матрицы жесткости $\mathbf{C}$, которые зависят от вектора $\mathbf{E}$ через обратную матрицу. Генерация конкретного набора независимых случайных переменных $\xi_n(\theta_0)$, $\eta_n(\theta_0)$, $\chi_n(\theta_0)$, $\psi_n(\theta_0)$, $n = 1, \dots, N_{KL}$ с нулевым средним позволяет собрать указанные выше матрицы и найти частотный спектр $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ используя, например, гибридную численно-аналитическую схему [77], позволяющую совместить волновой характер решения с численным решением в рамках МКЭ. Нестационарное решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ затем может быть получено из частотного спек-

тра к которому применяется быстрое преобразование Фурье в рассматриваемой частотной области.

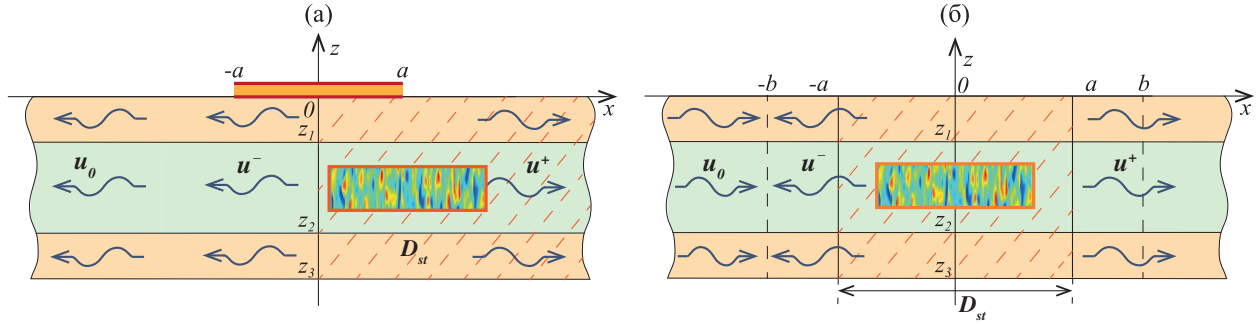


Рис. 4.11: Геометрии модельных задач для композита $[90^\circ, 0^\circ]_s$

Для оценки влияния эффекта непрерывной конвертации мод были решены несколько модельных задач, геометрии которых представлены на рисунке 4.11. В рамках первой модельной задачи предполагалось разделение волновода на две части $W = W_d \cup W_{st}$. Левая часть волновода W_d – композитная пластина $[90^\circ, 0^\circ]_s$ с постоянными значениям упругих модулей (таблица 4.2, без учета мнимых частей). Правая часть волновода W_{st} также композитная пластина, но со случайными значениями модулей Юнга и плотности, вычисленными по формулам (4.2). Между частями волновода предполагаются условия идеального контакта. К верхней поверхности приклеен пьезоэлемент, на верхний электрод которого подается напряжение в 70 В, а нижний заземлен. В рамках данной модельной задачи были рассчитаны вертикальные компоненты скоростей смещений $v_z(x, z)$ в различных точках $\pm x_p$, симметричных относительно центра координат и источника колебаний, на поверхности пластины при $z = 0$ (рисунок 4.12, а). Бегущие волны в части волновода со стохастически распределенными свойствами распространяются быстрее, что заметно и по обоим фундаментальным модам. Кроме того амплитуды скоростей в волноводе W_{st} также выше осо-

бенно с увеличением расстояния от источника колебаний, что определяется конвертацией моды S_0 в моду A_0 , у которой значительно выше вертикальная компонента поля скоростей. Наиболее явно конвертация мод проявляется в появлении дополнительных колебаний после прохождения моды S_0 и до прихода моды A_0 .

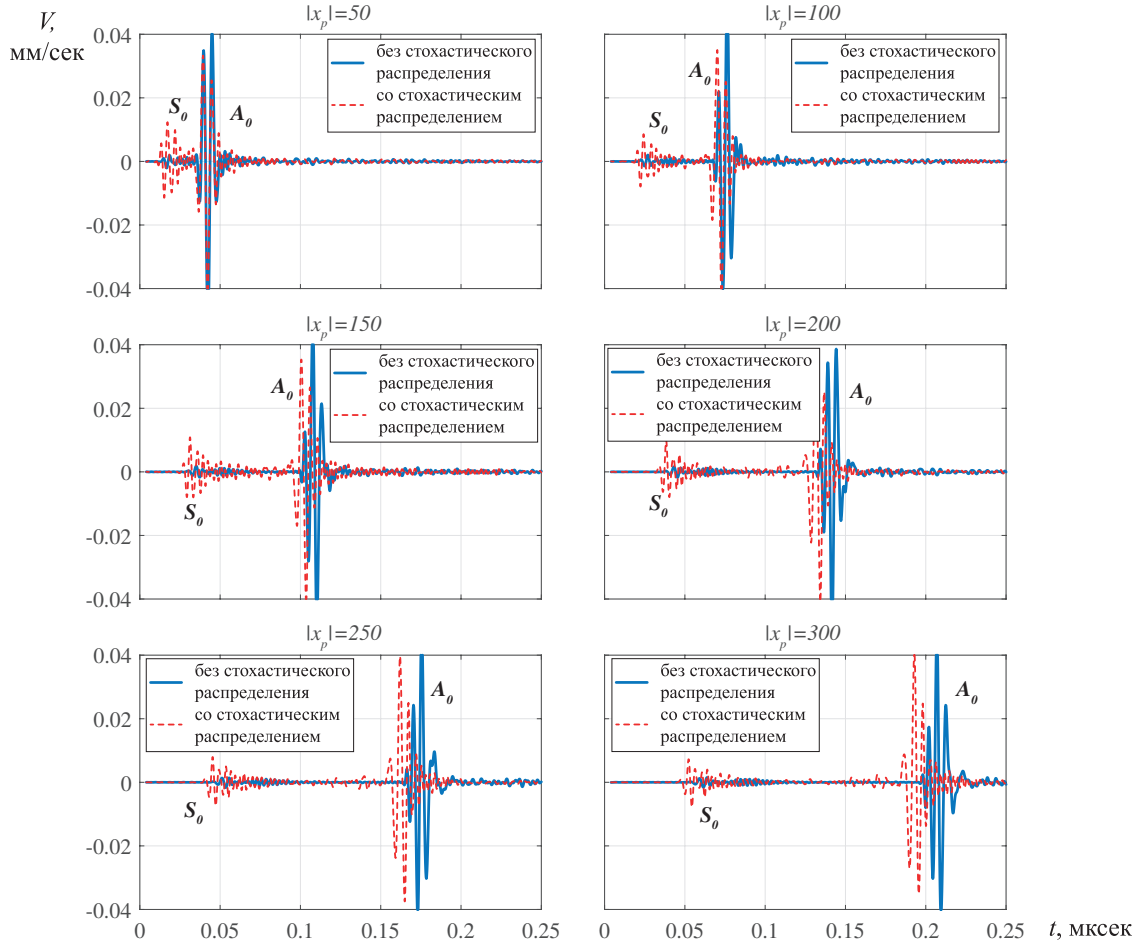


Рис. 4.12: Вертикальные компоненты скорости смещений для волноводов W_d и W_{st}

Еще одна модельная задача с геометрией, изображенной на рисунке 4.12, б, была использована для оценки количество энергии, затрачиваемого на конвертацию мод в волокнно-армированной пластине. В качестве анализируемого параметра рассматривается коэффициент прохождения для моды S_0 : $\kappa^+ = E^+/E_0$. Здесь E_0 - энергия моды S_0 до прохождения прямо-

угольной области со стохастическими свойствами волновода, а E^+ - энергия после прохождения через область. Отличие данного коэффициента от единицы иллюстрирует потерю энергии на конвертацию в моду A_0 , а также на отражение волны в противоположном направлении от направления распространения моды S_0 . Коэффициент κ^+ рассматривался в зависимости от частоты f и ширины $d_{st} = 2a$ области. Результаты численных расчетов представлены на рисунке 4.13. В целом заметно, что при увеличении ширины области D_{st} потери энергии на конвертацию и отражение растут. Для некоторых частот f потери составляют около 19 %.

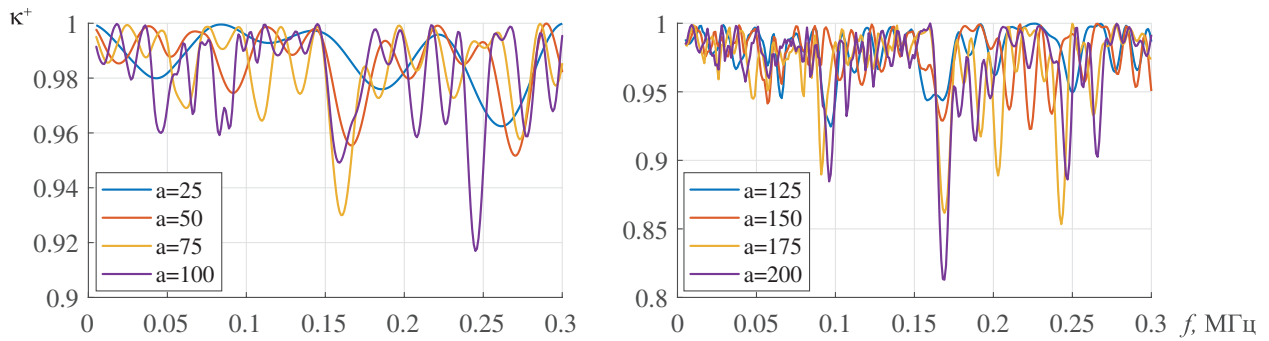


Рис. 4.13: Коэффициент прохождения κ^+ моды S_0 через область со стохастически упругими свойствами

Для проверки адекватности предложенной модели волоконно-армированного композита со случайным распределением модулей Юнга и плотности было проведено сопоставление численных результатов и экспериментальных данных. Полученные значения вертикальной компоненты скорости смещений $v_z(t)$ на поверхности волновода в массиве точек были обработаны преобразованием Гильберта, нормированы относительно максимального значения в рассматриваемом временном и пространственном диапазоне и скомбинированы в виде В-сканов (рисунок 4.14). Данные поверхности представляют собой зависимость нормированной амплитуды $v_z(t)$ от времени (вертикальная ось) и точки измерения (горизонтальная ось). Центр

координат в рассматриваемом примере был расположен посередине пьезо-актуатора. Фундаментальные моды S_0 и A_0 соответствуют широким линиям с различными углами наклона, которые зависят от скорости распространения данных волн. Непрерывная конвертация мод на данных графиках проявляется в виде пятен, следующих за распространением моды S_0 или A_0 .

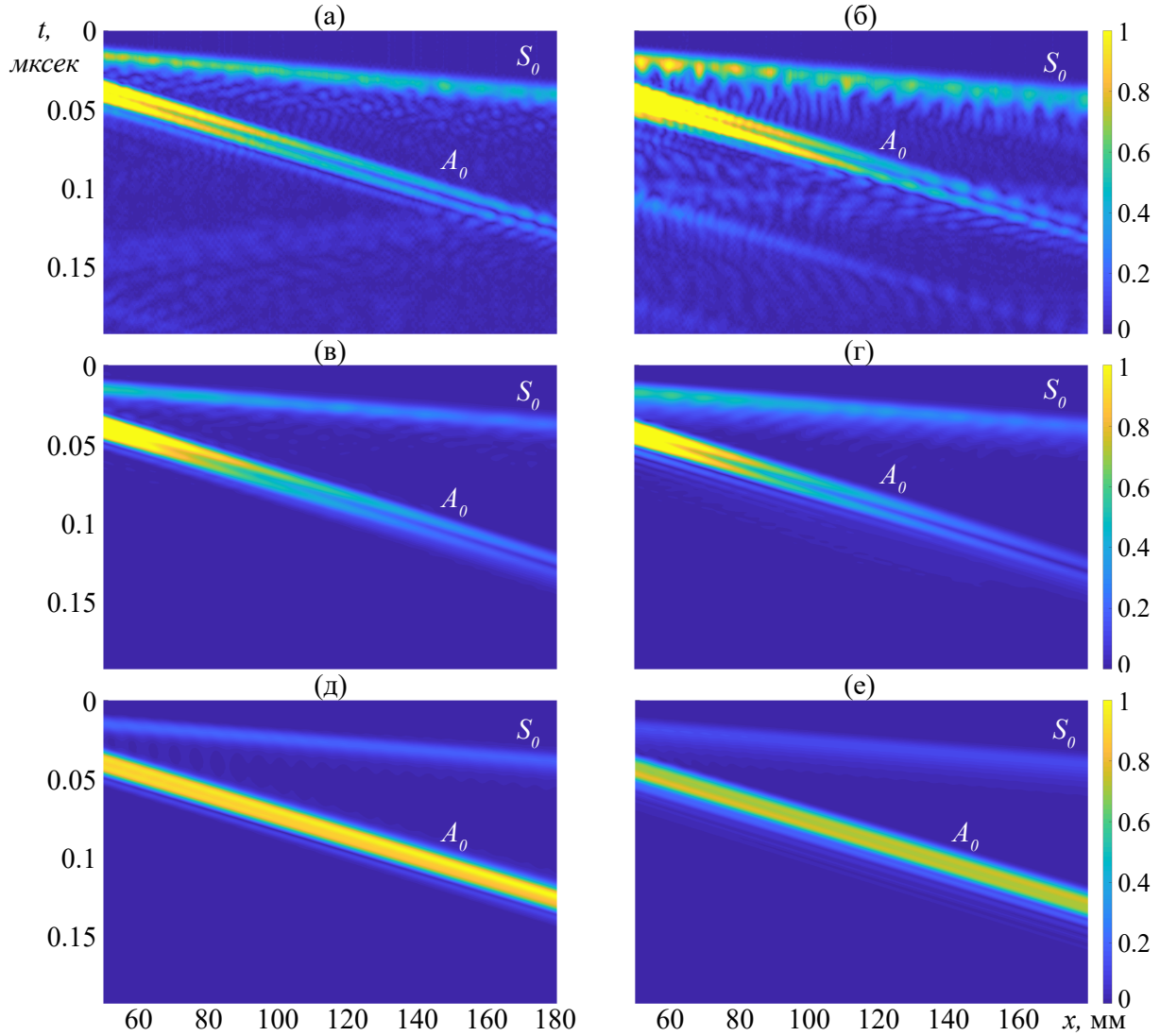


Рис. 4.14: Расчетные и экспериментальные В-сканы поверхности композитной пластины: (а), (в), (д) – $[0^\circ, 90^\circ]_s$; (б), (г), (е) – $[90^\circ, 0^\circ]_s$; (а), (б) – экспериментальные данные; (в), (г) – вязкоупругая модели со стохастически распределенными свойствами; (д), (е) – модель без затухания с однородными упругими модулями

Как и ожидалось, данный эффект более заметен для волновода $[90^\circ, 0^\circ]_s$. Дополнительные линии на экспериментальных данных связаны с отражением от границ первоначального волнового поля и возврата отраженной моды S_0 в наблюдаемую зону. Из численных результатов качественно ближе рисунки (в) и (г), которые передают как затухание бегущих волн, так и пятна под прямыми, что не наблюдается в случае рисунков (д) и (е). Полученные результаты подтверждают возможность качественного описания конвертации мод с использованием рассматриваемой модели.

ГЛАВА 5. Взаимодействие бегущих упругих волн с характерными неоднородностями

В данном разделе рассматриваются несколько характерных типов локальных неоднородностей, оказывающих существенное влияние на процессы распространения и рассеивания упругих бегущих волн. В частности, анализируются такие конфигурации, как Т-образное ребро жесткости (подраздел §5.1.), трещины, вызванные ударным воздействием, и расслоения в анизотропных пластинах (подраздел §5.2.), а также встроенные и поверхностно закрепленные пьезоэлектрические элементы, которые действуют как актуатор или сенсор. Выбор указанных неоднородностей обусловлен их практической значимостью в задачах неразрушающего контроля и мониторинга состояния конструкций. Такие дефекты позволяют продемонстрировать возможности предложенного гибридного подхода при моделировании как геометрических, так и физических неоднородностей.

§5.1. Рассеяние на ребрах жесткости

Рассматривается модельная задача о возбуждении, распространении и дифракции волн Лэмба в семислойном волноводе со схемой кладки трансверсально - изотропных препрегов $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ [81, 84], параметры материала представлены в таблице 5.1 (рисунок 5.1). К верхней поверхности волновода приклеен пьезокерамический актуатор в области $D_{F,1}$ с центром в в точке $x_1 = 0$, а в области $D_{F,3}$ ($x_3 = 145$ мм) приклеен сенсор из пьзокерамики. Актуатор, как и сенсор изготовлены из пьзокерамики PZT-5Н [104] и имеют одинаковые геометрические размеры: ширина $2a_1 = 2a_3 = 5$ мм, высота $h_{pzt} = 0.5$ мм. Нижняя поверхность актуатора считается заземленной, а к

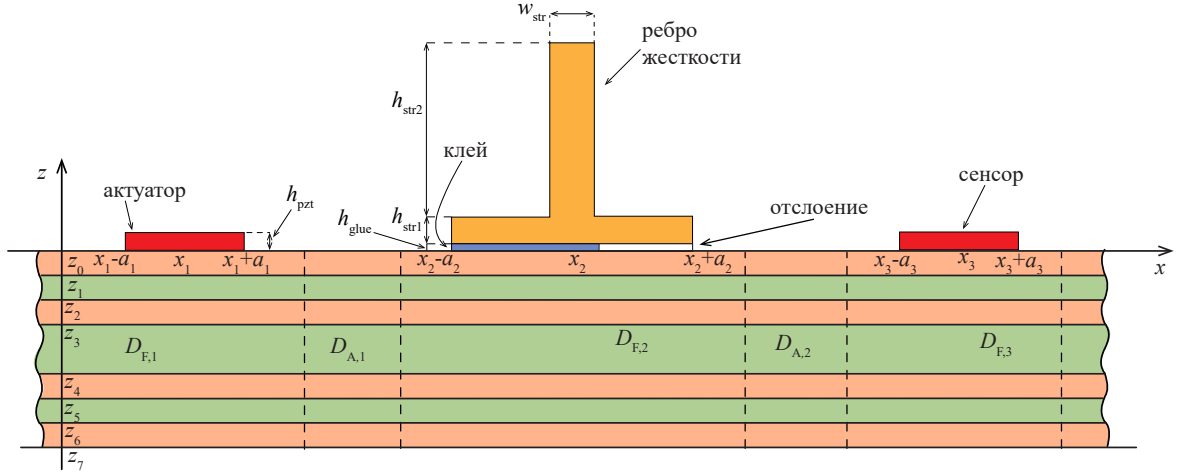


Рис. 5.1: Геометрия рассматриваемой задачи

верхней поверхности приложено напряжение 70 В. На верхней поверхности сенсора задано условие плавающего потенциала, при этом боковые стороны как актуатора, так и сенсора считаются электрически изолированными. Условия механического контакта выполняются на границах раздела между пьзоэлектрическими накладками и основным волноводом. Все остальные поверхности датчиков считаются свободными от напряжений.

Таблица 5.1: Параметры материала волновода

Ориентация препрега	ρ , кг/м ³	c_{11} , ГПа	c_{13}^m , ГПа	c_{33}^m , ГПа	c_{55}^m , ГПа
0°	1522	122.4	4.13	11.5	4.85
90°	1522	11.5	6.47	11.5	2.51

В области $D_{F,2}$ с центром в точке $x_2 = 70$ мм к верхней поверхности волновода приклеен T -образный стрингер (ребро жесткости). Геометрические параметры стрингера выбраны исходя из статьи [110] и имеют следующие значения: ширина основания $2a_2 = 40$ мм, высота основания $h_{str1} = 3.6$ мм, высота верхней части $h_{str2} = 106.4$ мм, толщина

$w_{str} = h_{str1} = 3.6$ мм. Предполагается, что ребро жесткости изготовлено из волоконно-армированной пластины. Усредненные параметры материала основания и основной части представлены в таблице 5.2. Дисперсионные кривые, рассчитанные для волновода со схемой кладки трансверсально-изотропных препрегов $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ представлены на рисунке 5.2.

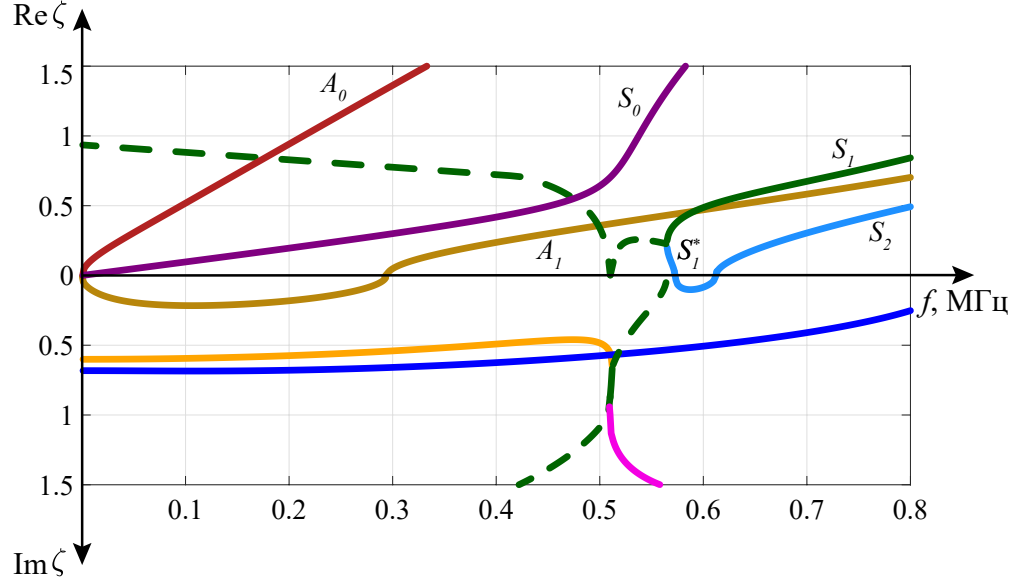


Рис. 5.2: Дисперсионные кривые для семислойного волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$

Таблица 5.2: Параметры материала ребра жесткости

Часть ребра жесткости	ρ , кг/м ³	c_{11} , ГПа	c_{13}^m , ГПа	c_{33}^m , ГПа	c_{55}^m , ГПа
Нижнее основание	1522	58.09	5.3	11.49	3.31
Основная часть	1522	11.49	5.3	58.09	3.31

Предполагается, что все внешние поверхности T -образного стрингера свободны от напряжений, за исключением поверхности контакта с волноводом. Для учета склеивания на этой границе вводится тонкий слой клея, который моделируется как изотропный линейно-упругий материал с модулем Юнга $E_{glue} = 1.7$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{glue} = 0.4$, плотность

$\rho_{glue} = 1248 \text{ кг/м}^3$. Толщина слоя клея принята равной $h_{glue} = 2.5 \text{ мкм}$.

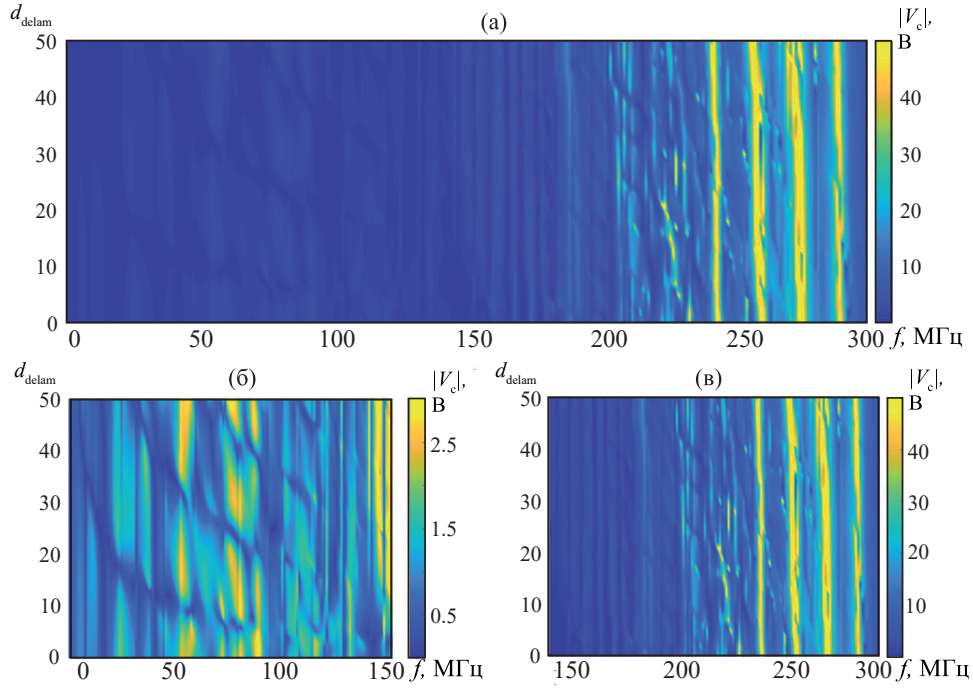


Рис. 5.3: Зависимость общего отклика сенсора от частоты колебаний f и процента отслоения d_{pc} в двумодовом диапазоне

Предполагается, что поверхность клеевого соединения в поперечном направлении является неоднородной, что моделирует частичное расслоения между стрингером и волноводом. А именно, вводится отслоение от правого края области контакта волновода с ребром жесткости (рис. 5.1). Протяженность отслоения характеризуется параметром d_{cr} , который изменяется от 0 % до 50 % от общей ширины склейки. Относительное отслоение определяется как $d_{pc} = 100 d_{cr} / (2a_c)$.

На рисунках 5.3 - 5.5 представлена частотная зависимость модуля отклика сенсора $|V_c|$ пьезоэлектрического сенсора в диапазоне частот, соответствующем возбуждению основных мод волн Лэмба A_0 и S_0 . Гибридная схема, благодаря своей формулировке, позволяет оценивать не только полный отклик (рис. 5.3), который может быть рассчитан и при помощи стандар-

ного коммерческого МКЭ-пакета, но и отдельные вклады конкретных мод в общий отклик (рис. 5.4 и 5.5). Возможность разложения по модам представляет ценный инструмент для оценки чувствительности отдельных мод к локализованным структурным особенностям или дефектам в волноводе, тем самым повышая интерпретируемость и диагностический потенциал численной модели.

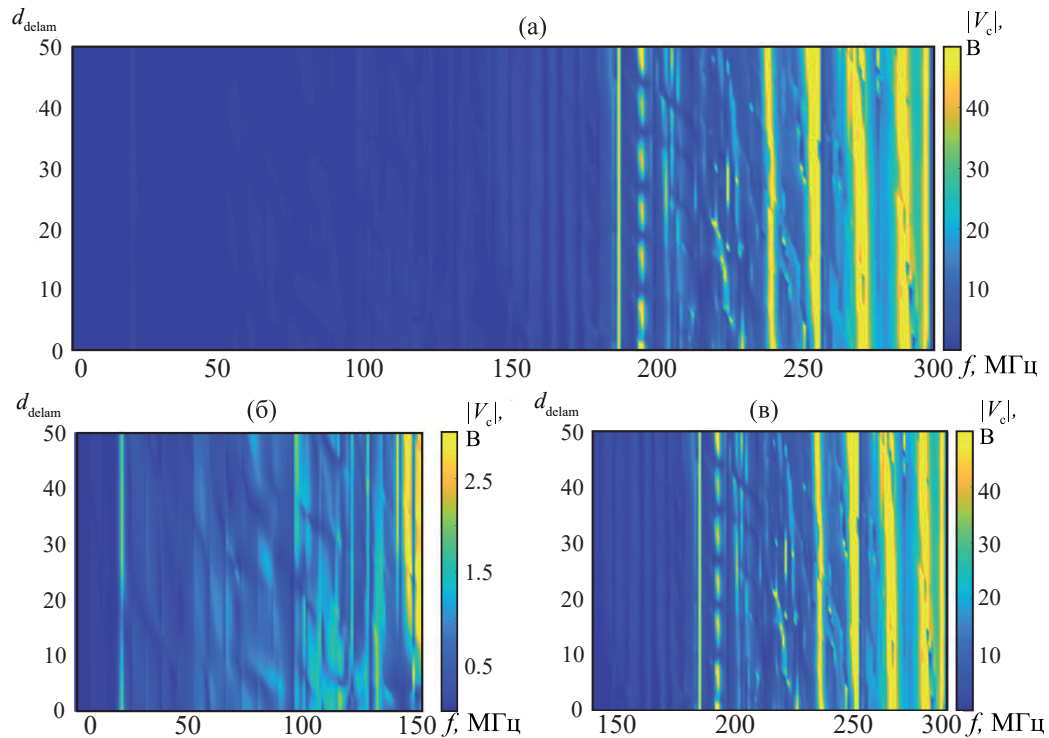


Рис. 5.4: Тоже, что и на рисунке 5.3, однако, учитывается вклад только моды S_0

Отклик сенсора демонстрирует два различных частотных режима: низкочастотный диапазон (приблизительно до 150 кГц), который характеризуется относительно малыми значениями амплитуды, и высокочастотный диапазон (150-300 кГц), в котором величина отклика возрастает на порядок (рис. 5.3 - 5.5 (б), (в)). В низкочастотной области доминирует фундаментальная антисимметричная мода A_0 , вносящая наибольший вклад в общий отклик сенсора, как показано на рисунках 5.3 - 5.5 (б). С увеличе-

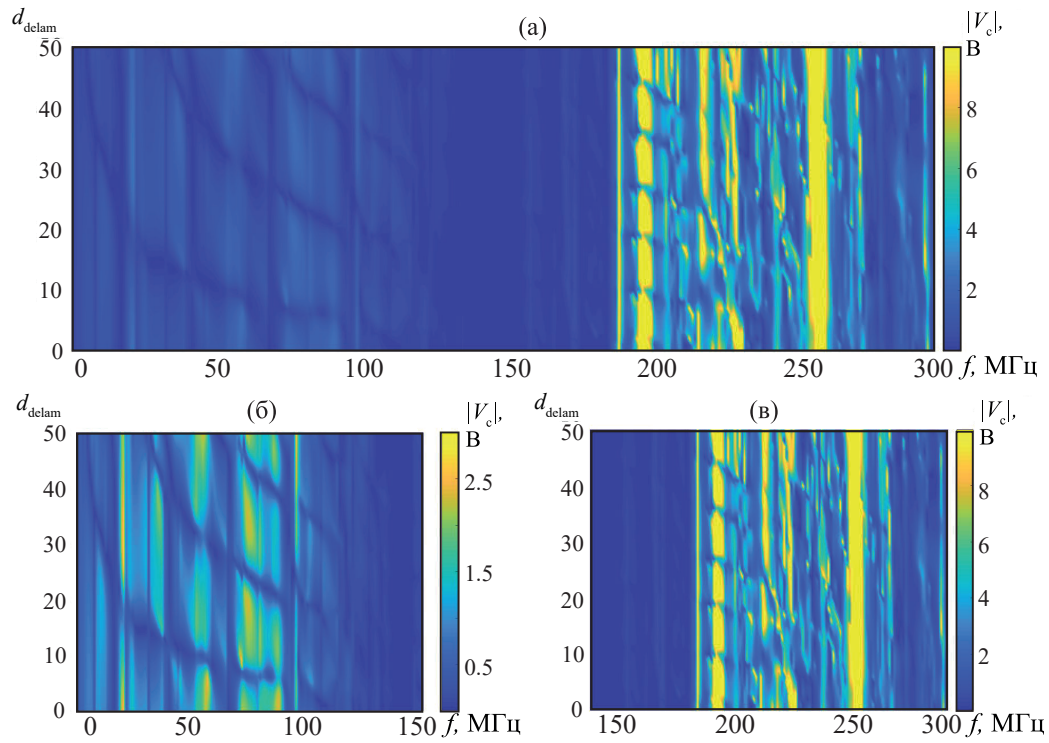


Рис. 5.5: Тоже, что и на рисунках 5.3, 5.4, однако, учитывается вклад только моды A_0 нием размера отслоения в низкочастотной области возникают отчетливые траектории пониженного отклика сенсора, образующие кривые, гиперболические паттерны (рисунок 5.5 (б)). Эти минимумы могут служить диагностическими индикаторами для обнаружения и количественной оценки частичного расслоения в волновых структурах.

В диапазоне частот от 100 до 180 кГц основной вклад в отклик сенсора вносит фундаментальная симметричная мода S_0 (рисунки 5.3 и 5.5). Анализ рассеянного поля, связанного с этой модой, показывает, что её диагностические возможности ограничены по сравнению с антисимметричной модой A_0 . А именно, картина отклика лишена отчетливых особенностей, которые могли бы надежно указывать на наличие или степень частичного отслоения. Хотя присутствуют изолированные узкополосные максимумы, проявляющиеся как локальные яркие области (например, в диапазоне

100-120 кГц), большинство максимумов сигнала выглядят как почти вертикальные полосы. Такое поведение снижает чувствительность моды S_0 к данному типу дефекта. Хотя локальные минимумы, аналогичные наблюдаемым для моды A_0 , можно идентифицировать и в отклике S_0 , они выражены значительно слабее.

Выше 180 кГц антисимметричная мода A_0 снова становится доминирующей. Однако регулярная структура, наблюдавшаяся на более низких частотах, становится менее выраженной. В некоторых частотных интервалах все еще можно наблюдать изолированные отклики, имеющие высокую амплитуду (локальные яркие пятна) для определенных значений длины отслоения. Тем не менее наиболее интенсивные максимумы обычно проявляются в виде вертикально ориентированных полос, которые практически не зависят от размера области расслоения (например, ярко выраженная особенность вблизи 255 кГц). Такие паттерны затрудняют надежное обнаружение и количественную оценку структурных дефектов в этом частотном диапазоне.

Следует подчеркнуть, что представленный здесь детальный модальный анализ лишь частично реализуем с использованием традиционных методов конечных элементов. Интеграция предложенной гибридной численно-аналитической схемы со стандартными МКЭ-пакетами существенно расширяет возможности обнаружения, локализации и типизации структурных неоднородностей в многослойных волноводах.

§5.2. Рассеяние на интерфейсных расслоениях и трещинах

Рассматривается задача обнаружения расслоения в композитной многослойной пластине (рис. 5.6). Эта задача типичная для SHM [2]. Бегущие

Гибридная численно-аналитическая схема позволяет проводить модальный анализ дифракции бегущих волн. На рис. 5.7 представлена частотная

зависимость коэффициента прохождения первых двух основных волн Лэмба A_0 и S_0 для всех типов расслоений. Кривые прохождения волн A_0 и S_0 характеризуются резкими локальными минимумами. Эти минимумы связаны с комплексными резонансными частотами запираия, значения которых зависят от размера и расположения расслоения. Если мнимая часть резонансной частоты достаточно мала, вблизи препятствия формируются стоячие волны. Первые собственные формы ($|\mathbf{u}|$) для каждого типа дефекта приведены под графиками коэффициентов прохождения (рис. 5.7). Таким образом, выделение резонансных частот рассеяния, получаемых из экспериментально измеренных частотных характеристик бегущих волн, может служить дополнительным информативным признаком при диагностике дефектов.

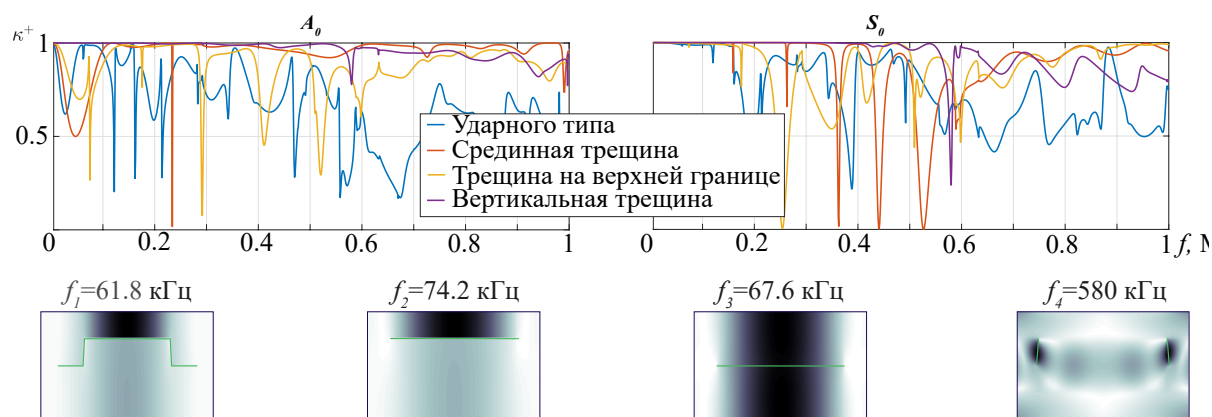


Рис. 5.7: Коэффициент прохождения κ^+ для различных типов расслоений (верхние графики) и первые собственные формы (нижние графики). На левом верхнем графике в качестве падающей волны $\mathbf{u}_0$ выбрана мода A_0 ; на правом верхнем графике, $\mathbf{u}_0$ – мода S_0 . разные цвета линий соответствуют различным типам препятствий. Синяя линия – трещина, возникшая в следствии удара (рис. 5.6); красная линия – расслоение в середине второго слоя; желтая линия – расслоение на границе первого и второго слоев; фиолетовая линия – вертикальные трещины от границы раздела до середины второго слоя.

Коэффициент прохождения κ^+ имеет более низкое среднее значение и

большее количество пиков для сложных препятствий (например, трещины ударного типа). В то же время вертикальные трещины практически не проявляются на низких частотах ($\kappa^+ \approx 1$ при $0 < f < 450$ кГц), а их первая резонансная частота ($f = 580$ кГц) значительно выше, чем в других случаях ($f \approx 67$ кГц).

Для дальнейшей демонстрации возможностей гибридного численно-аналитической схемы анализируются рассеяние бегущих упругих волн на трещине в композитной пластине, вызванной вертикальным ударом [84, 111]. Геометрия задачи показана на рисунке 5.8. Падающая бегущая волна вида $\mathbf{u}^{FW}(x, z) = P^{FW} \mathbf{d}_n^+(z) e^{i\zeta_j x}$, которая соответствует j -й моде, набегаёт на трещину. Множитель $P^{FW} = 10^{-3}$ представляет собой безразмерный масштабируемый параметр, используемый для нормировки амплитуды падающей волны. Рассеяние двух фундаментальных мод Лэмба, A_0 и S_0 , рассматривается по отдельности. Геометрические параметры трещины на рисунке 5.8 заданы следующим образом: $w_{cr1} = 10$ мм, $w_{cr2} = 6$ мм, $x_1 = 0$ мм, $x_1 \pm a_1 = \pm 9$ мм, $x_{cr1} = -5$ мм, $x_{cr2} = -3$ мм, $x_{cr3} = 3$ мм и $x_{cr4} = 5$ мм.

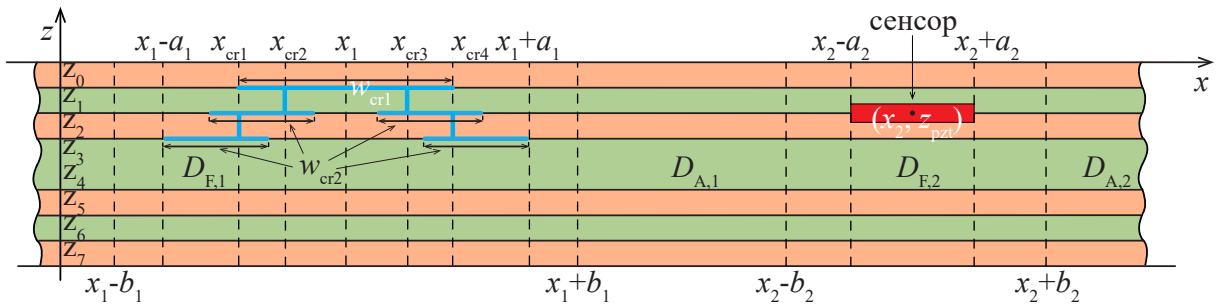


Рис. 5.8: Геометрия рассматриваемой задачи

Регистрация рассеянной волны осуществляется при помощи прямоугольного пьезоэлектрического сенсора, размещенного либо внутри пластины, либо на его поверхности. Его геометрические центр находится в точ-

ке (x_2, z_{pzt}) . Геометрия сенсора ($2a_2 = 10$ мм, $h_{pzt} = 0.5$ мм) и свойства материала (PZT-5Н) совпадает с использованными ранее в разделе §5.1.. Электрические граничные условия соответствуют стандартной конфигурации: нижняя граница заземлена, верхняя поверхность находится в режиме плавающего потенциала, а боковые грани электрически изолированы. Предполагается идеальный контакт с волноводом, обеспечивающий непрерывность полей смещений и перемещений.

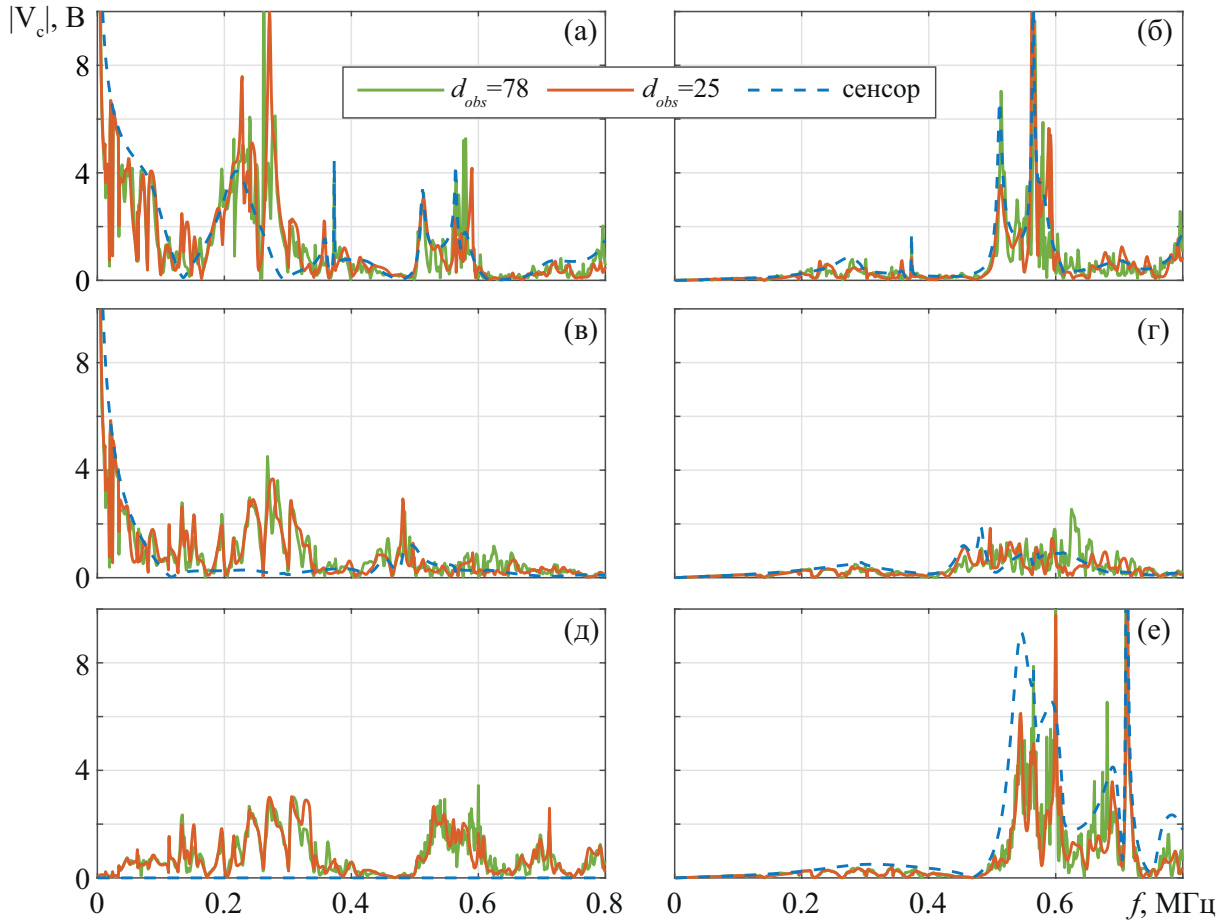


Рис. 5.9: Отклик сенсора $|V_c|$ при рассеянии мод A_0 (слева) и S_0 (справа). Зеленый: $d_{obs} = 78$ мм; красный: $d_{obs} = 25$ мм; пунктир: эталон без трещины. Глубина расположения сенсора z_{pzt} : (а), (б) – 0.25 мм; (в), (г) – 0.45 мм; (д), (и) – 1.2 мм

Частотная зависимость модуля отклика сенсора $|V_c|$ показан на рисунке 5.9. Левый столбец (а), (в), (д) соответствует рассеянию антисимметрич-

ной моды A_0 , а правый столбец (б), (г), (и) – симметричной моде S_0 . Сплошные линии соответствуют различным расстояниям от трещины до сенсора $d_{obs} = x_2 - x_1$ мм (указаны в подписи); пунктирные линии соответствуют эталону без трещины. На рисунке 5.9 (а), (б) даны результаты для поверхностного сенсора $z_{pzt} = h_{pzt}/2 = 0.25$ мм, на графиках (в), (г) и (д), (и) приведены результаты для встроенных сенсоров $z_{pzt} = (z_1 + z_2)/2 = -0.45$ мм и $z_{pzt} = (z_3 + z_4)/2 = -1.2$ мм, соответственно, причем последняя соответствует срединному расположению сенсора.

При анализе рассчитанных откликов наблюдаются ярко выраженные изменения при наличии трещины, бездефектные кривые демонстрируют гораздо более гладкое поведение. Некоторые из ярко выраженных максимумов совпадают с собственными частотами самого сенсора. Например, на рисунке 5.9 (а) отчетливые пики появляются вблизи первых трех собственных частот ($f = 360 + 3i$, $f = 373 + 0.2i$ и $f = 511 + 3i$ кГц), как для случая с трещинами (сплошные линии), так и для эталонных кривых (пунктирная линия). Другие локальные экстремумы связаны с собственными частотами трещины (например, на частоте вблизи $f = 200 + 5i$ кГц).

Остальные экстремумы, вероятно, связаны с собственными частотами трещины или всей системы “трещина - упругий волновод - сенсор”. Для иллюстрации последнего, к исходному расчету для расстояния $d_{obs} = 25$ мм (красная линия) были добавлены дополнительные кривые для 78 мм (зеленая линия). В некоторых диапазонах частот кривые практически полностью совпадают, как и соответствующие экстремумы. Например, вблизи 113 кГц и 196 кГц экстремумы наблюдаются на всех графиках. На этих частотах в окрестности трещины формируется локализованная стоячая волна, как показано на рисунках 5.10 (в), (г) и (д), (и).

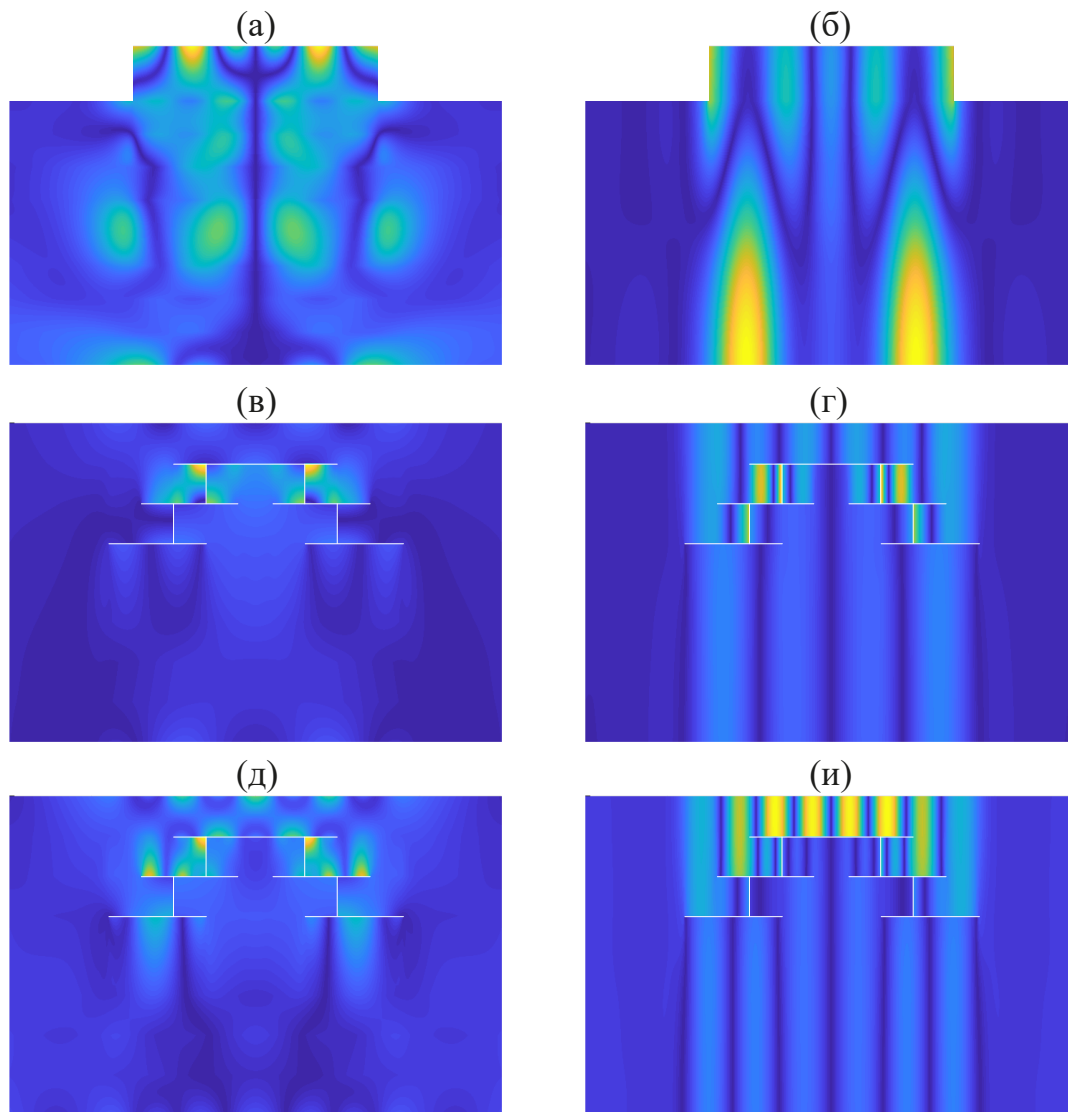


Рис. 5.10: Формы мод для характерных резонансных частот. Левый столбец: модуль горизонтально смещения $|u|$; правый столбец: модуль вертикальной компоненты смещения $|w|$. (а), (б) – резонансная частота датчика $373 + 0.2i$ кГц; (в), (г) и (д), (и) – собственные моды трещины при $113 + 0.3i$ и $196 + i$ кГц соответственно

Мода A_0 демонстрирует выраженную чувствительность и трансформацию мод на трещине в низкочастотном диапазоне, вплоть до возбуждения обратной волны S_1^* (рисунок 5.2). Это хорошо наблюдается при сравнении левого и правого столбцов на рисунке 5.9. На более высоких частотах, когда возбуждается обратная волна, амплитуда отклика при рассеянии S_0 превышает аналогичную для A_0 . Эта характеристика может быть использована при проектировании систем мониторинга состояния конструкций (SHM) для выбора наиболее информативного диагностического волнового поля.

Для дальнейшей иллюстрации эффективности гибридной численно-аналитической схемы на рисунке 5.11 показана частотная зависимость модального вклада η_j . Эта безразмерная величина определяется как

$$\eta_j = |V_c^j|/|V_s|, \quad |V_s| = \sum_j |V_c^j|, \quad V_c = \sum_j V_c^j.$$

где V_c – плавающий потенциал на верхней поверхности сенсора, V_c^j – вклад, связанный с j -ой модой, а V_s – сумма модулей всех модальных компонент. Левый и правый столбцы соответствуют рассеянию мод A_0 и S_0 соответственно. Разные строки представляют различные положения сенсора: поверхностный ($z_{pzt} = 0.25$ мм, графики (а), (б)) и встроенные сенсоры ($z_{pzt} = -0.45$ мм и $z_{pzt} = -1.2$ мм; графики (в), (г) и (д), (и)). Все результаты показаны для фиксированного расстояния $d_{obs} = 25$ мм.

На рисунке 5.11 особое внимание следует обратить на графики (д) и (и), где вклад антисимметричных мод волн Лэмба в общий отклик практически отсутствует [112]. Такое поведение объясняется характерными формами симметричных и антисимметричных мод. Аналогичный эффект также наблюдается на рисунке 5.9 (д) для случая без трещин (синяя пунктирная линия). Однако при наличии трещины общий отклик заметно возрас-

тает из-за трансформации падающей моды A_0 в другие, включая симметричные, к которым сенсор чувствителен.

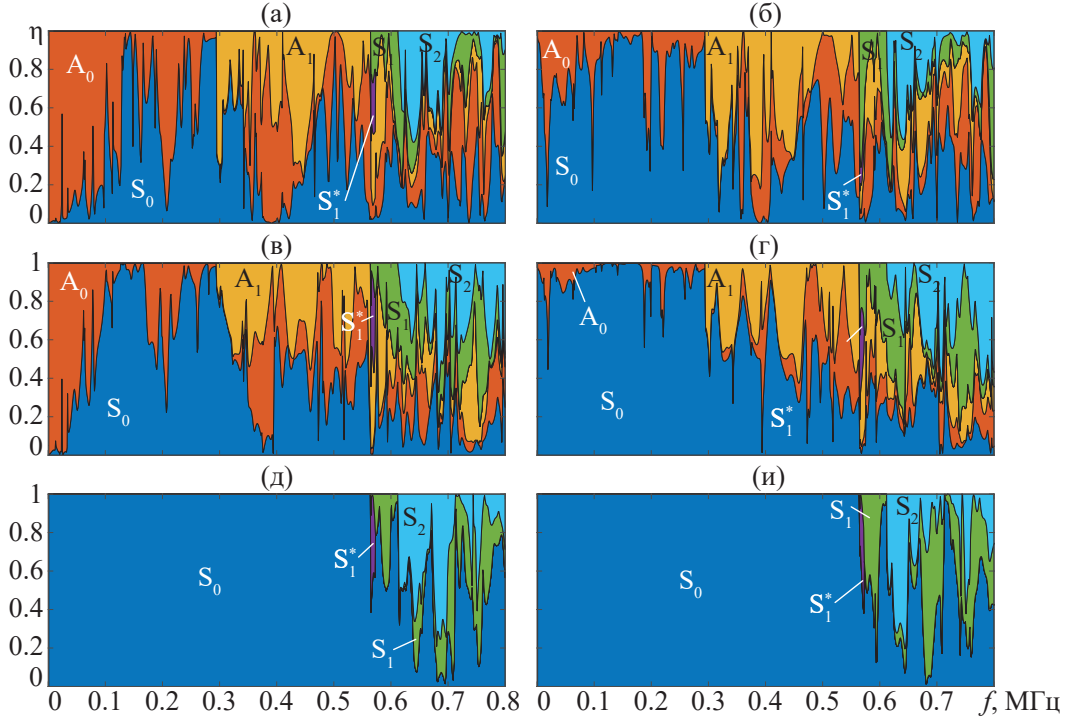


Рис. 5.11: Частотная зависимость модального вклада η_j для рассеяния A_0 (левая колонка) и S_0 (правая колонка). Расположение сенсора: (а), (б) $z_{pzt} = 0.25$ мм, (в), (г) $z_{pzt} = -0.45$ мм и (д), (и) $z_{pzt} = -1.2$ мм. Расстояние $d_{obs} = 25$ мм

Эти наблюдения позволяют предположить простое диагностическое правило для выявления неоднородностей, а именно если в волновод возбуждаются только антисимметричные волны, а измеряемый отклик сенсора значительно больше нуля, то волновод содержит дефекты, вызывающие трансформацию мод. И наоборот, если отклик близок к нулю, волновод можно считать однородным. Местоположение дефекта затем может быть оценено по времени прихода преобразованного сигнала (если такой присутствует), а в некоторых случаях его природа может быть определена по характеристикам формы волны.

Однако следует отметить ряд ограничений данного подхода. Первое

заключается в том, что существует ограниченный класс материалов, в которых отсутствуют внутренние микроструктурные особенности, способные выступать в роли естественных рассеивателей для антисимметричных волн и вызывать их трансформацию в симметричные моды. В настоящем исследовании рассматривается пластина из композита, армированного углеводным волокном, и используются гомомогонизированные упругие свойства. Тем не менее, как обсуждалось в предыдущих разделах, реальные композиты обычно содержат области с локально повышенной плотностью волокон, а также обогащенные смолой пустоты. Эти микроструктурные неоднородности выступают в роли естественных препятствий, способствующих трансформации мод. Ожидается, что вклад такой собственной трансформации будет меньше, чем вклад от рассеивании на явно выраженном дефекте (трещине или расслоении), однако детальная количественная оценка еще не была проведена.

Второй источник неопределенности касается возможности возбуждения чисто антисимметричных волн. Предыдущие исследования показывают, что такое возбуждение возможно лишь при определенных условиях, как правило, включающих подходящее сочетание клеевого подслоя, структуры материала и геометрии поверхностно-закрепленного актуатора, которые вместе ограничивают генерируемое поле преимущественно антисимметричным движением в определенных частотных диапазонах.

Еще одно ограничение связано с расположением сенсора. Описанная нечувствительность достигается только при расположении сенсора точно в середине волновода. Даже небольшие отклонения от этого положения приводит к увеличению антисимметричного вклада в измеряемый сигнал. В то же время некоторые частотные интервалы определяются симметричными

модами. Это видно из левого столбца рисунка 5.11. Например, вблизи 150 кГц доминирует мода S_0 , это доминирование становится сильнее по мере приближения сенсора к срединному расположению.

Заключение

В рамках выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. Разработаны и реализованы в виде пакета программ эффективные методы решения динамических задач о возбуждении и распространении плоских упругих волн в многослойных ортотропных волноводах с единичными или множественными локализованными неоднородностями.
2. Исследованы процессы возбуждения и регистрации бегущих упругих волн поверхностными и встроенными в волновод пьезопреобразователями.
3. Изучены особенности распространения упругих волн в многослойных ортотропных волноводах с учетом их усложненных механических свойств.
4. Проведен анализ процесса рассеяния бегущих упругих волн на отдельных типах структурных элементов и дефектов, характерных для тонкостенных конструкций из слоистых композитных материалов.

Автор выражает благодарит научного руководителя А.А. Еремину за поддержку, ободрение и мотивирование на всех этапах выполнения диссертационной работы. Автор выражает благодарность А.А. Евдокимову за обсуждение полученных результатов и ряд ценных замечаний, а также коллективу Института математики, механики и информатики ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» за дружескую атмосферу, вдохновлявшую на реализацию намеченного плана исследований.

Литература

1. Raghavan A., Cesnik C.E.S. Review of guided wave structural health monitoring // The Shock and Vibration Digest – 2007. – Vol. 39. – no 2. – P. 91–114.
2. Giurgiutiu, V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors. Second edition / V. Giurgiutiu. // Elsevier Academic Press, 2014. – 1032 p.
3. Lowe M. J. S. The low frequency reflection characteristics of the fundamental antisymmetric Lamb wave a_0 from a rectangular notch in a plate / M. J. S. Lowe, P. Cawley, J. -Y. Kao, O. Diligent // The Journal of the Acoustical Society of America – 2002. – Vol. 112. – no. 6. – P. 2612–2622.
4. Memmolo V. Guided wave propagation and scattering for structural health monitoring of stiffened composites / V. Memmo, E. Monaco, N. D. Boffa, L. Maio, F. Ricci // Composite Structures. – 2018. – Vol. 184. – P. 568–580.
5. Anisimkin V. I. Plate acoustic wave sensor for detection of small amounts of bacterial cells in micro-litre liquid samples / V. I. Anisimkin, I. E. Kuznetsova, V. V. Kolesov, I. I. Pyataikin, V. V. Sorokin, D. A. Skladnev // Ultrasonics. – 2015. – Vol. 62. – P. 156–159.
6. Yantchev, V., Katardjiev, I. Thin film Lamb wave resonators in frequency control and sensing applications: a review // Journal of Micromechanics and Microengineering. – 2013. – Vol. 23. – №4. – P. 043001.

7. Naumenko N. F. Multilayered structures using thin plates of LiTaO₃ for acoustic wave resonators with high quality factor // Ultrasonics. – 2018. – Vol. 88. – P. 115–122.
8. Yan, X., Focusing guided waves using surface bonded elastic metamaterials / X. Yan, R. Zhu, G. Huang, F. Yuan // Appl. Phys. Lett. – 2013. – Vol. 102. – no. 12. – P. 121901.
9. Du, D., Energy focusing of broadband Lamb wave by designing excitation waveforms and elastic metamaterials / D. Du, J. Hua, C. Cui, J. Lin // Ultrasonics. – 2024. – Vol. 139. – P. 107294.
10. Castaings, M., Cawley, P., The generation, propagation, and detection of Lamb waves in plates using air-coupled ultrasonic transducers. // J. Acoust. Soc. Am. – 1996. – Vol. 100. – no. 5. - P. 3070–3077.
11. Safaeinili, A., Quantitative materials characterization using air-coupled leaky Lamb waves / A. Safaeinili, O. I. Lobkis, D. E. Chimenti // Ultrasonics. – 1995. – Vol. 34. – P. 393–396.
12. Шардаков, И. Н., Сравнение динамических характеристик пьезокерамических актуаторов, применяемых в вибродиагностике крупномасштабных конструкций / И. Н. Шардаков, А. П. Шестаков, И. О. Глот, Г. Н. Гусев, В. В. Епин, Р. В. Цветков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2024. – Т. 17. – № 3. – С. 376-386.
13. Qi, R., An embedded piezoelectric actuator for active vibration control: Concept, modeling, simulation, and investigation / R. Qi, L. Wang, J. Jin, L. Yuan, Z. Shen, Y. Ge // Chinese Journal of Aeronautics. – 2025. – Vol. 28. – no. 4. – P. 103345.

14. Banks, H. T., Smith R. C. and Wang Yun The Modelling of Piezoceramic Patch Interactions with Shells, Plates, and Beams / H. T. Banks, R. C. Smith, Y. Wang // Quarterly of Applied Mathematics. – 1995. – Vol. LIII. – No. 2. – P. 353-381.
15. Chaudhry, Z., Modeling of Induced Strain of Shell Structures / Z. Chaudhry, F. Lalande, C. A. Rogers // Journal of the Acoustical Society of America. – 1995. – Vol. 97. – No. 5. – P. 2872-2877.
16. Crawley, E. F., de Luis, J., Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures // AIAA Journal. – 1987. – Vol. 25. – No. 10. – P. 1373-1385.
17. Giurgiutiu, V., Zagrai, A. N., Characterization of Piezoelectric Wafer Active Sensors // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2000. – Vol. 11. – P. 959-975.
18. Raghavan, A., Cesnik, C. E. S., Finite-Dimensional Piezoelectric Transducer Modeling for Guided Wave Based Structural Health Monitoring // Smart Materials and Structures. – 2005. – Vol. 14. – P. 1448-1461.
19. Liang, C., An Impedance Method for Dynamic Analysis of Active Material Systems / C. Liang, Sun F. P. and Rogers C. A. // Journal of Vibration and Acoustics (Transactions of the ASME). – 1994. – Vol. 116. – P. 120-128
20. Liang, C., Coupled Electro-Mechanical Analysis of Adaptive Material Systems - Determination of the Actuator Power Consumption and System Energy Transfer / C. Liang, F. P. Sun, C. A. Rogers // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 1994. – Vol. 5. – P. 12-20.

21. Zhang, B., Antiplane Shear Waves from a Piezoelectric Strip Actuator: Exact Versus Effective Boundary Condition Solutions / B. Zhang, A. Boström, A. J. Niklasson // Smart Materials and Structures. – 2004. – Vol. 13. – P. 161-168.
22. Ghasemi-Nejhad, M. N. Manufacturing and testing of active composite panels with embedded piezoelectric sensors and actuators / M. N. Ghasemi-Nejhad, R. Russ, S. Pourjalali // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2005. – Vol. 16, no. 4. – P. 319–333.
23. Melnykowycz, M. The performance of integrated active fiber composites in carbon fiber laminates / M. Melnykowycz, A. J. Brunner // Smart Materials and Structures. – 2011. – Vol. 20. – P. 1–8.
24. Masmoudi, S. Use of piezoelectric as acoustic emission sensor for in situ monitoring of composite structures / S. Masmoudi, A. El Mahi, S. Turki // Composites Part B: Engineering. – 2015. – Vol. 80. – P. 307–320.
25. An embedded non-intrusive graphene/epoxy broadband nanocomposite sensor co-cured with GFRP for in situ structural health monitoring / Q. Wang, Y. Tian, A. Duongthipthewa [et al.] // Composites Science and Technology. – 2023. – Vol. 236. – no. 109995. – P. 1–15.
26. Konka, H. P. The effects of embedded piezoelectric fiber composite sensors on the structural integrity of glass-fiber–epoxy composite laminate / H. P. Konka, M. A. Wahab, K. Lian // Smart Materials and Structures. – 2011. – Vol. 21. – no. 015016. – P. 1–9.
27. Analysis of damage in composite laminates with embedded piezoelectric

- patches subjected to bending action / L. Lampani, F. Sarasini, J. Tirillo, P. Gaudenzi // Composite Structures. – 2018. – Vol. 202. – P. 935–942.
28. On the use of in-situ piezoelectric sensors for the manufacturing and structural health monitoring of polymer-matrix composites: A literature review / C. Tuloup, W. Harizi, Z. Aboura [et al.] // Composite Structures. – 2019. – Vol. 215. – P. 127–149.
 29. Schubert, K. J., Herrmann, A. S., On attenuation and measurement of lamb waves in viscoelastic composites // Compos. Struct. – 2011. – Vol. 94. – no. 1. – P. 177–185.
 30. Asamene, K., Influence of attenuation on acoustic emission signals in carbon fiber reinforced polymer panels / K. Asamene, L. Hudson, M. Sundaresan // Ultrasonics. – 2015. – Vol. 59. – P. 86–93.
 31. Sreekumar, P, Attenuation of A_0 lamb mode in hybrid structural composites with nanofillers / P. Sreekumar, C. Ramadas, A. Anand, et al. // Compos. Struct. – 2015. – Vol. 132. – P. 198–204
 32. Wilcox, P. D., Mode and transducer selection for long range lamb wave inspection / P. D. Wilcox, M. J. S. Lowe, P. Cawley // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2001. – Vol. 12. – no. 8. – P.553–565.
 33. Rebillat, M., Mechbal, N., Damage localization in geometrically complex aeronautic structures using canonical polyadic decomposition of lamb wave difference signal tensors // Struct. Health. Monit. – 2020. – Vol. 19. – no. 1. – P. 305–321.
 34. Gresil, M., Giurgiutiu, V., Prediction of attenuated guided waves

- propagation in carbon fiber composites using Rayleigh damping model // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2015. – Vol. 26. – no. 16. – P. 2151–2169.
35. Treviso, A., Damping in composite materials: properties and models / A. Treviso, B. Van Genechten, D. Mundo, et al. // Compos. B. Eng. – 2015. – Vol. 78. – P. 144–152.
 36. Ramadas, C., Modelling of attenuation of lamb waves using Rayleigh damping: numerical and experimental studies / C. Ramadas, K. Balasubramaniam, A. Hood , et al. // Compos. Struct. – 2011. – Vol. 93. – no. 8. – P. 2020–2025.
 37. Mardanshahi, A., Simulated lamb wave propagation method for nondestructive monitoring of matrix cracking in laminated composites / A. Mardanshahi, M. M. Shokrieh, S. Kazemirad // Struct. Health. Monit. – 2021. – Vol. 21. – P. 695–709.
 38. Willberg, C. Continuous mode conversion of Lamb waves in CFRP plates / C. Willberg, S. Koch, G. Mook et al. // Smart Materials and Structures. – 2012. – Vol. 21 (075022). – P. 1–9.
 39. Kudela, P. Wave propagation modeling in composites reinforced by randomly oriented fibers / P. Kudela, M. Radzienski, W. Ostachowicz // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Vol. 414. – P. 110–125.
 40. Leckey, C. A. C. Simulation of guided wave interaction with in-plane fiber waviness / C. A. C. Leckey, P. D. Juarez // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1806 (020023). – P. 1–8.
 41. Neumann, M. N. Quasi-Continuous Mode Conversion of Lamb Waves in CFRP Plates Due to Inhomogeneity on Micro and Meso Scale /

- M. N. Neumann, B. Hennings, R. Lammering // Proceedings of the 7th European Workshop on Structural Health Monitoring - EWSHM 2014. – 2014. – Vol. 1. – P. 2220–2227.
42. Hennings, B. Material modeling for the simulation of quasi-continuous mode conversion during Lamb wave propagation in CFRP-layers / B. Hennings, R. Lammering // Composite Structures. – 2016. – Vol. 151. – P. 142–148.
 43. Ghanem, R. G. Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach / R. G. Ghanem, P. D. Spanos. – Springer, New York, 1991. – 240 p.
 44. Zimmermann, E. Guided elastic waves in CFRP plates with random material properties / E. Zimmermann, A. Eremin, R. Lammering // Proceedings of the 11th International Workshop on Structural Health Monitoring. – Stanford, USA, 2017. – Vol. 1. – P. 94-101.
 45. Zimmermann, E. Analysis of the continuous mode conversion of Lamb waves in fiber composites by a stochastic material model and laser vibrometer experiments / E. Zimmermann, A. Eremin, R. Lammering // GAMM-Mitteilungen. – 2018. – Vol. 41 (e201800001). – P. 1–15.
 46. Glushkov, E. V. Blocking of traveling waves and energy localization due to the elastodynamic diffraction by a crack / E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, M. V. Golub // Acoust. Phy. – 2006. – Vol. 52. – P. 259–269.
 47. Бабешко, В. А., Павлова, А. В., Ратнер, С. В., Вильямс, Р. Задача о вибрации упругого полупространства, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. – 2002. – Т. 386. – № 1. – С. 625-628.

48. Глушков, Е. В., Глушкова, Н. В., Голуб, М. В., Жанг, Ч. Резонансное блокирование бегущих волн системой трещин в упругом слое // Акустический журнал. – 2009. – Т. 55. – вып. 1. – С. 11-20.
49. Кардовский, И. В., Пряхина, О. Д. Метод фиктивного поглощения для плоских задач об интерфейсных трещинах // ДАН. – 2006. – Т. 410. – № 6. – С. 759-762.
50. Schaal, C., Mal, A., Lamb wave propagation in a plate with step discontinuities // Wave Motion. – 2016. – Vol. 66. – P. 177-189.
51. Williams, P., Mode matching in axisymmetric fluidfilled pipes: Scattering by a flange / P. Williams, R. Kirby, J. Hill // J. Acoust. Soc. Am. – 2020. – Vol. 147. – no. 6. – P. 4202-4213.
52. Boström, A., Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation // ASME. Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56. – no. 4. – P. 383-405.
53. Glushkov, Ye. V. A dynamic mixed problem for a packet of elastic layers / Ye. V. Glushkov, Ye. V. Kirillova // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1998. – Vol. 62. – no. 3. – P. 419-425.
54. Ватульян А. О. Об определении конфигурации трещины в анизотропной среде // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 68. – № 1. – С. 180–188.
55. Ватульян А. О., Суворова О. А. Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Экологический вестник научных центров Черноморского сотрудничества (ЧЭС). – 2005. – № 1. – С. 10–16.

56. Наседкин, А. В. Конечно-элементное моделирование пористых термоупругих композитов с учетом микроструктуры. / А. В. Наседкин, А. А. Наседкина, В. В. Ремизов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7. – № 1. – С. 100-109.
57. Fakih, M., Understanding the interaction of the fundamental Lamb-wave modes with material discontinuity: finite element analysis and experimental validation / M. Fakih, S. Mustapha, M. Harb, C. Ng // Structural Health Monitoring. – 2022. – Vol. 21. – no. 2. – P. 640-665.
58. Berenger J. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 114. – № 2. – P. 185–200.
59. Skelton, E. A. Guided elastic waves and perfectly matched layers / E. A. Skelton, S. D. M. Adams, R. V. Craster // Wave Motion. – 2007. – Vol. 44. – P. 573–592.
60. Semblat, J. -F. A simple multi-directional absorbing layer method to simulate elastic wave propagation in unbounded domains / J. -F. Semblat, L. Lenti, A. Gandomzadeh // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2011. – Vol. 85. – P. 1543–1563.
61. Moreau, L. An orthogonality relation-based technique for post-processing finite element predictions of waves scattering in solid waveguides / L. Moreau, M. Castaings, B. Hosten, M. V. Predoi // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2006. – Vol. 120. – No. 2. – P. 611–620.
62. Moreau, L. The use of an orthogonality relation for reducing the size of finite element models for 3D guided waves scattering problems /

- L. Moreau, M. Castaings // Ultrasonics. – 2008. – Vol. 48. – No. 5. – P. 357–366.
63. Бобровницкий, Ю. -В. Соотношение ортогональности для волн Лэмба // Акустический журнал. – 1974. – Т. 18. – № 4. – P. 513–515.
 64. Федорюк, М. -В. Соотношения типа ортогональности в твердых волноводах // Акустический журнал. – 1974. – Т. 20. – № 2. – P. 310–314.
 65. Golub, M., Semi-analytical hybrid approach for modelling smart structures and guided wave-based SHM systems for a laminate with multiple delaminations and surface-mounted inhomogeneities / M. Golu, S. Fomenko, A. Shpak, Y. Gu, Y. Wang, C. Zhang // Applied Mathematical Modelling. – 2023. – Vol. 120. – P. 812-832.
 66. Benmeddour, F., Numerical modeling of guided wave interaction with non-axisymmetric cracks in elastic cylinders / F. Benmeddour, F. Treyssede, L. Laguerre // Int. J. of Sol. and Struct. – 2011. – Vol. 48, no. 5. – P. 764-774.
 67. Koshiha, M., Finite-Element Analysis of Lamb Wave Scattering in an Elastic Plate Waveguide / M. Koshiha, S. Karakida, M. Suzuki // IEEE Transactions on sonics and ultrasonics. – 1984. – Vol. SU-31. – no. 1. – P. 18-25
 68. Karunasena, W., Plane-strain-wave scattering by cracks in laminated composite plates / W. Karunasena, A. Shah, S. Datta // J. Engrg. Mech. – 1991. – Vol. 117. – no. 8. – P.1738-1754.
 69. Baronian, V., Hybrid SAFE/FE simulations of inspections of elastic waveguides containing several local discontinuities of defects /

- V. Baronian, A. Lhemery, K. Jezzine // Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. – 2011. – Vol. 30. – P.183-190.
70. Khanazaryan, A., Golub, M., Hybrid method for modelling anti-plane vibrations of layered waveguides with bonded composite joints // Comput. Cont. Mech. – 2023. – Vol. 16, no. 1. – P. 101-114.
71. Zhao, X., Rose, J., Boundary element modeling for defect characterization potential in a wave guide // Int. J. of Sol. and Struct. – 2003. – Vol. 40. – no. 11. – P. 2645-2858.
72. Glushkov, E., Diffraction of normal modes in composite and stepped elastic waveguides / E. Glushkov, N. Glushkova, O. Lapina // J. of App. Math. and Mech. – 1998. – Vol. 62. – no. 2. – P. 275-280.
73. Lhemery, A., Simulation of inspections of elastic waveguides of arbitrary section containing arbitrary local discontinuities or defects / A. Lhemery, V. Baronian, K. Jezzine, A. Bonnet?BenDhia // AIP Conf. Proc. – 2010. – Vol. 1211. – P. 145-152.
74. Spada, A., Global-Local model for guided wave scattering problems with application to defect characterization in built-up composite structures / A. Spada, M. Capriotti, F. Scalea // Int. J. of Sol. and Struct. – 2020. – Vol. 182-183. – P. 267-280.
75. Long, C., Numerical verification of an efficient coupled SAFE-3D FE analysis for guided wave ultrasound excitation / C. Long, P. Loveday, D. Ramatlo, E. Andhavarapu // Fin. El. in Analysis and Des. – 2018. – Vol. 149. – P. 45-56.
76. Ramatlo, D., A modelling framework for simulation of ultrasonic guided

- wave-based inspection of welded rail tracks / D. Ramatlo, C. Long, P. Loveday, D. Wilke // Ultrasonics. – 2020. – Vol. 108 (106215). – P. 1-18.
77. Глушков, Е. В., Глушкова, Н. В., Евдокимов, А. А., Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акустический журнал. – 2018. – т. 64. – № 1. – с. 3-12.
 78. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Hybrid numerical-analytical scheme for locally inhomogeneous elastic waveguides // Proceedings of 14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) ECCOMAS Congress 2020. – Paris, France, 2021. – Vol. 700. – P. 1-12.
 79. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979. – 319 с.
 80. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
 81. Евдокимов А.А., Нец П.А., Лесин Б.М., Еремин А.А. Гибридный численно-аналитический подход для моделирования антиплоских колебаний многослойных упругих волноводов с множественными неоднородностями // Вычислительная механика сплошных сред. – 2025. – Т. 18. – № 2. – С. 140-154.
 82. Нец, П. А., Евдокимов, А. А., Моделирование возбуждения плоских упругих волн в слоистых анизотропных материалах поверхностными и встроенными пьезопреобразователями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2026. – Т. 23. – № 1. – С. 73-85.

83. Eremin, A. A., Multi-Layered and Homogenized Models for In-Plane Guided Wave Excitation, Sensing, and Scattering in Anisotropic Laminated Composites / A. A. Eremin, M. V. Golub, S. I. Fomenko, A. A. Evdokimov, P. A. Nets // Applied Sciences. – 2023. – Vol. 13. – no. 3. – P. 1698.
84. Evdokimov, A.A., Analytically-based hybrid numerical scheme for the evaluation of elastic guided wave excitation, propagation and scattering in multilayered anisotropic waveguides with multiple inhomogeneities / A. A. Evdokimov, P. A. Nets, A. A. Eremin // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2026. – Vol. 190 (106873).
85. Evdokimov A.A., Nets P.A., Eremin A.A. Hybrid numerical-analytical scheme for the elastodynamic simulation of layered elastic structures with multiple inhomogeneities // 2025 Days on Diffraction (DD). – St.Petersburg, Russian Federation, 2025. – P. 54-59.
86. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
87. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. – М.: Физматлит, 1959. – 364 с.
88. Хан Х. Теория упругости. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
89. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
90. Jones R.M. Mechanics of composite materials. Second edition. – Philadelphia, USA: Taylor & Francis, 1999. – 519 p.

91. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // ДАН. – 1951. – Т. 80. – № 3. – С. 341-344.
92. Партон В. З., Кудрявцев Б. А., Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – с. 472.
93. Tiersten, H. F., Electromechanical coupling factors and fundamental material constants of thickness vibrating piezoelectric plates // Ultrasonics. – 1970. – Vol. 8. – P. 19–23.
94. Rose, J. L. Ultrasonic guided waves in solid media. – Cambridge, MA: Cambridge University Press. – 2014.
95. Матвеев В. Н. Интерпретация реологических кривых полимерных расплавов в области линейной вязкоупругости /В. Н. Матвеев, Е. А. Кирсанов // Cifra. Химия. – 2025. – Вып. №2 (5).
96. Глушкова Н.В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Ростов-на-Дону, 2000. – 220 с.
97. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 294 с.
98. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solid – Amsterdam: North-Holland, 1973. – P. 425.
99. Auld, B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids. Vol. 1 & 2. – New York, Wiley, 1973.
100. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 287 с.

101. Lamb H. On waves in an elastic plate // The Royal Society. – 1917. – Vol. 93. – Iss. 648. – P. 114-128.
102. Glushkov E. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites / E. Glushkov, N. Glushkova, A. Eremin // J. Acoust. Soc. Am. – 2011. – Vol. 129. – no. 5. – P. 2923-2934.
103. Зильберглейт А.С., Нуллер Б.М. Обобщённая ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // ДАН. – 1977. – Т. 234. – № 2. – С. 333-335.
104. Sheeraz, M. A. Design and optimization of piezoelectric transducer (PZT-5H stack) / M. A. Sheeraz, Z. Butt, A. M. Khan, S. Mehmood, A. Ali, M. Azeem, A. Nasir, T. Imtiaz // Journal of Electronic Materials. – 2019. – Vol. 48. – no. 10. – P. 6487–6502.
105. Menglong, L., Reconstruction of composite stiffness matrix with array-guided wave-based genetic algorithm / L. Menglong, Z. Yaohui, L. Lun, C. Gongfa, C. Fangsen // Materials. – 2022. – Vol. 15. – no. 2. – P. 8715.
106. Eremin A.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V., Lammering R. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser doppler vibrometry // Composite Structures. – 2015. – Vol. 125. – P. 449-458.
107. Guo, S., Rebillat, M., Mechbal, N. Prediction of frequency and spatially dependent attenuation of guided waves propagating in mounted and unmounted a380 parts made up of anisotropic viscoelastic composite laminates // Structural Health Monitoring. – 2022. – Vol. 0. – no. 0. – P. 1–27.

108. Castaings, M., Hosten, B., Kundu, T. Inversion of ultrasonic, plane-wave transmission data in composite plates to infer viscoelastic material properties / M. Castaings, B. Hosten, T. Kundu // NDT & E International. – 2000. – Vol. 33. – no. 6. – P. 377–392.
109. Eremin, A. A. Influence of retroreflective films on the behaviour of elastic guided waves measured with laser Doppler vibrometry / A. A. Eremin, M. V. Wilde, M. V Golub, V. N. Pleshkov // Measurement. – 2022. – Vol. 190. – P. 110572.
110. Justo, J. Experimental failure investigation of pulloff tests of single T-stiffened composite specimens / J. Justo, J. Reinoso, A. Blazquez // Composite Structures. – 2017. – Vol. 177. – P. 13–27.
111. Damghani, M. An experimental investigation of the impact response and Post-impact shear buckling behaviour of hybrid composite laminates / M. Damghani, J. Saddler, E. Sammon, G. Atkinson, J. Matthews, A. Murphy // Composite Structures. – 2023. – Vol. 305. – P.. 1–13.
112. Ren, F. The temperature effects on embedded PZT signals in structural health monitoring for composite structures with different thicknesses / F. Ren, I Giannakeas, Z .Khodaei, M. Ferri Aliabadi // NDT & E International. – 2024. – Vol. 141. – no. 0963-8695. – P. 102988.