



Нец Полина Алексеевна

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ПОЛОСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДОВ С
ЛОКАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

Специальность 1.1.8 — механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Краснодар — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Кубанский государственный университет»

Научный руководитель:

Еремин Артем Александрович

кандидат физико-математических наук,
доцент, ведущий научный
сотрудник Института математики,
механики и информатики ФГБОУ ВО
«Кубанский государственный университет»

Официальные оппоненты:

Дунаев Владислав Игоревич

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры газонефтегазотранспортных
систем и оборудования нефтяной
и газовой промышленности, ФГБОУ ВО
«Кубанский государственный технологический
университет»

Каменских Анна Александровна

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры вычислительной математики,
механики и биомеханики, ФГАОУ ВО
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное
научное учреждение «Федеральный исследова-
тельский центр Институт прикладной физики
им. А.В. Гапонова-Грехова Российской
академии наук» (ИПФ РАН)

Защита состоится «11» декабря 2026 года в 12:00 на заседании диссертационного совета 24.2.320.03 на базе ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, ауд. 231.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Кубанского государственного университета по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149 и на сайте <https://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>.

Автореферат разослан «__» октября 2026 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.320.03,
профессор, доктор физико-математических наук

М.В. Зарецкая

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Теоретическое и экспериментальное изучение динамического поведения слоистых упругих волноводов, содержащих единичные или множественные локализованные неоднородности, представляет существенный интерес для развития ряда прикладных областей – ультразвукового неразрушающего контроля (УЗК) и мониторинга состояния инженерных конструкций (structural health monitoring – SHM) (*Raghavan A., Cesnik C.E.S., 2007; Giurgiutiu, V., 2014; Lowe M. J. S. et al., 2002*), современной сенсорики (*Anisimkin V. I., et al., 2015; Yantchev, V., Katardjiev, I., 2013*), проектирования виброакустических метаматериалов (*Yan, X. et al., 2013; Du, D. et al., 2024*) и других. Такие волноводы могут быть изготовлены как из склеенных между собой традиционных изотропных конструкционных материалов (металлы и сплавы, стекло, полимеры), так и из слоистых анизотропных композитных материалов, например, волоконно-армированных стекло- и углепластиков. Возникающие при этом краевые задачи динамической теории упругости, рассматриваемые как в трехмерной постановке, так и в важном частном случае плоских колебаний (плоской деформации), связаны с тремя аспектами: возбуждение и регистрация бегущих упругих волн, в частности, волн Рэлея-Лэмба при динамическом взаимодействии пьезопреобразователей с упругим волноводом, их распространение по нему, а также рассеяние на дефектах и структурных элементах различных типов, характерных для соответствующих конструкций.

В качестве источников колебаний в УЗК/SHM приложениях используются как приклеенные к поверхности конструкции (*Giurgiutiu, V., 2014; Шардаков, И. Н. и др., 2024*), так и интегрированные в композитный материал пленочные пьезокерамические или пьезокомпозитные элементы (*Qi, R. et. al., 2025*). Наличие адекватных моделей, учитывающих геометрические характеристики и механическое поведение пьезоактуаторов и сенсоров, позволяет эффективно анализировать возбуждение и измерение бегущих упругих волн в полосовых волноводах с целью оптимизации расположения элементов сенсорно-актуаторной сети как в плоскости волновода, так и относительно его толщины.

Компьютерное моделирование волновых процессов, связанных с распространением бегущих упругих волн в слоистых композитных материалах, усложняется рядом факторов. К ним относится анизотропия упругих свойств, характерная для стекло- и углепластиков, существенное затухание упругих колебаний с удалением от источника, вызванное вязкоупругими свойствами полимерного связующего (*Schubert, K. J., Herrmann, A. S., 2011; Asamene, K. et. al., 2015; Белов А.А. и др., 2016*), а также сложная внутренняя структура, присущая волоконно-армированным композитам, и вызывающая такое явление, как непрерывная конвертация нормальных мод (*Neumann, M. N. et. al., 2014; Willberg, C. et. al., 2015*). Адекватный учет данных аспектов в соответствующих компьютерных моделях не только является самостоятельной научной задачей, но и позволит повысить их практическую значимость для рассматриваемых инженерных приложений.

Всестороннее изучение процессов рассеяния бегущих упругих волн на неоднородностях различной природы также является важным этапом в проектировании диагностирующих SHM-систем и повышении надежности интерпретации данных УЗК. Распространенным классом повреждений, возникающих в слоистых композитных материалах и существенно ухудшающих их прочностные свойства, являются расслоения и трещины, которые могут располагаться как между отдельными слоями, так и внутри одного из слоев, что, в свою очередь, вызывает большой интерес к изучению волновой динамики слоистых упругих волноводов с такими дефектами (*Guo, N., Cawley, P., 1993, Глушков, Е. В. и др., 2009; Gupta, S., Rajagopal, P., 2018*). В качестве препятствий для бегущих упругих волн, влияющих на интерпретацию УЗК/SHM-данных, выступают также и различные структурные элементы, например, ребра жесткости (*Mueller, I., et. al., 2022*).

Решение описанных выше задач для полосовых ортотропных волноводов, содержащих локализованные неоднородности классических форм, может быть построено при помощи аналитических методов (*Schaal, C., Mal, A., 2016; Williams, P. et. al., 2020*) или на основе полуаналитического интегрального подхода и метода граничных интегральных уравнений (*Glushkov, Ye. V. et. al., 1998; Boström, A., 2003; Ватульян А. О., 2004; Ватульян А. О., Суворова О. А., 2005; Glushkov, E. et. al., 2006*). Данные методы обеспечивают физически наглядное представление структуры волнового поля, и их компьютерная реализация требует умеренных вычислительных ресурсов. В инженерной практике для численного решения волновых задач в областях произвольной геометрии, а также с учетом связанных физических полей используются прямые численные методы (например, методы конечных разностей или конечных элементов (МКЭ)) (*Петров, И.Б. и др., 1990; Наседкин, А. В. и др., 2014; Fakih, M. et. al., 2022*), реализованные, как в случае с МКЭ, в виде пакетов прикладных программ (ANSYS, COMSOL, ACELAN, Fidesys и др.). Однако применение таких МКЭ-пакетов требует существенных вычислительных затрат при моделировании волновой динамики протяженных слоистых структур с локальными неоднородностями, а также дополнительной нетривиальной обработки получаемых численных данных для анализа вклада отдельных нормальных мод.

Естественным способом преодоления описанных выше трудностей является разработка гибридных подходов (*Koshiba, M. et. al., 1984; Benmeddour, F. et. al., 2011; Глушков, Е. В. и др., 2018; Ханазарян, А. Д., Голуб, М. В., 2023*), сочетающих сеточную дискретизацию локальных областей волновода, содержащих препятствия, с аналитическими представлениями волновых полей в оставшихся однородных частях волновода в виде суперпозиции нормальных мод. Учитывая возрастающую сложность физико-механических свойств материалов, из которых изготавливаются современные тонкостенные инженерные конструкции, большой интерес представляет дальнейшее развитие таких гибридных подходов и их обобщение на случай слоистых анизотропных материалов с множественными локализованными препятствиями.

Таким образом, задача разработки новых математических и компьютерных моделей для описания динамического поведения многослойных анизотропных полосовых волноводов, содержащих неоднородности разных типов и форм, с усложненными механическими свойствами и различным типом размещения пьезосенсоров, является актуальной. Создание таких моделей играет важную роль при совершенствовании УЗК/SHM-методов для диагностики тонкостенных инженерных конструкций, изготовленных из слоистых композитных материалов.

Целью диссертационной работы является разработка эффективных математических и компьютерных моделей, описывающих процессы возбуждения и регистрации как поверхностными, так и встроенными в волновод пьезонакладками, распространения и рассеяния плоских упругих волн в слоистых изотропных и анизотропных волноводах с локальными неоднородностями (препятствиями, дефектами) и усложненными механическими свойствами и проведение на их основе соответствующего параметрического анализа в приложении к задачам совершенствования систем ультразвукового неразрушающего контроля и мониторинга состояния конструкций.

Для достижения этой цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. Разработать и реализовать в виде пакета программ эффективные методы решения динамических задач о возбуждении и распространении плоских упругих волн в многослойных ортотропных волноводах с единичными или множественными локализованными неоднородностями.
2. Исследовать процессы возбуждения и регистрации бегущих упругих волн поверхностными и встроенными в волновод пьезопреобразователями.
3. Изучить особенности распространения упругих волн в многослойных ортотропных волноводах с учетом их усложненных механических свойств.
4. Провести анализ процесса рассеяния бегущих упругих волн на отдельных типах структурных элементов и дефектов, характерных для тонкостенных конструкций из слоистых композитных материалов.

Научную новизну работы составляют следующие результаты:

1. Разработана математическая и компьютерная модель, описывающая процессы возбуждения, распространения, рассеяния и измерения плоских упругих волн в слоистых волноводах, содержащих локализованные препятствия, дефекты и поверхностные или встроенные пьезопреобразователи.
2. Предложено обобщение гибридной вычислительной схемы (*Глушков Е.В. и др. Акустический журнал, 2018*) на случай многослойных изотропных и анизотропных волноводов с множественными локальными неоднородностями, что позволяет, в частности, анализировать вклад каждой отдельной моды, рассеянной препятствием, в регистрируемые волновые сигналы.

3. Развита математическая и компьютерная модель, описывающая в случае плоской деформации волновую динамику слоистых анизотропных волноводов с усложненными механическими свойствами.
4. Для многослойного ортотропного полосового волновода на численных примерах показано взаимное влияние резонансных частот дефекта в виде расслоения, моделирующего результат ударного воздействия на композитный материал, и пьезопреобразователя на отклик пьезосенсора.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что развиваемые в рамках диссертационного исследования математические и компьютерные модели позволяют проводить быстрый и физически адекватный параметрический анализ волновых и энергетических процессов в многослойных ортотропных волноводах с усложненными упругими свойствами, и содержащих поверхностные и внутренние неоднородности различных типов. Полученные результаты представляют интерес для решения актуальных задач совершенствования УЗК/SHM-систем для диагностики состояния тонкостенных конструкций.

На разных этапах выполнения данная научно-квалификационная работы была поддержана грантами Минобрнауки России FZEN-2020-0017 «Разработка расчетно-экспериментальных методов диагностики конструкций и определения и мониторинга деградации свойств материалов на основе систем возбуждения и регистрации бегущих волн» и FZEN-2024-0003 «Развитие методов ультразвукового волнового мониторинга тонкостенных конструкций из композитных материалов», а также Российского научного фонда № 24-71-00105 «Разработка гибридных численно-аналитических подходов к моделированию волновой динамики в слоистых упругих материалах».

Методология и методы исследования. Краевые задачи, рассматриваемые в диссертационной работе, решаются в рамках дальнейшего развития гибридной вычислительной схемы (*Глушков Е.В. и др., 2018*). При этом для расчета динамического поведения локальных областей многослойного полосового волновода, содержащих препятствия различных типов, применяется МКЭ, а для представления волновых полей в оставшихся однородных частях волновода используются асимптотические представления в виде суперпозиции нормальных мод, получаемые в рамках полуаналитического интегрального подхода. Для корректной стыковки МКЭ- и асимптотических решений используется условие обобщенной ортогональности нормальных мод в многослойном полосовом волноводе.

На защиту выносятся:

1. Разработанные математические и компьютерные модели, описывающие распространение бегущих упругих волн, возбуждаемых поверхностным или встроенным пьезоактуатором в многослойных изотропных и ортотропных волноводах в случае плоской деформации, и их рассеяние на локализованных макро-неоднородностях (дефектах) различной природы.

2. Реализация обобщения гибридной численно-аналитической схемы в приложении к задачам определения динамической реакции протяженных многослойных ортотропных волноводов и рассеяния упругих волн на множественных неоднородностях различной природы в случае плоской деформации.
3. Результаты численного анализа влияния расположения пьезоактуатора в многослойном ортотропном волноводе относительно его толщины на перераспределение энергии между возбуждаемыми им нормальными модами.
4. Механико-математическая модель, описывающая в случае плоской деформации особенности волновой динамики многослойных волокнно-армированных композитных материалов с учетом вязкости полимерного связующего и сложной микроструктуры, а также ее компьютерная реализация.
5. Результаты численного анализа волновых процессов в системе «пьезоактуатор – многослойный упругий волновод с поверхностными и/или внутренними препятствиями - пьезосенсор» в приложении к задачам ультразвуковой диагностики тонкостенных конструкций.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых динамических задач теории упругости, применением строгих математических методов, сравнением результатов с данными, полученными иными методами или экспериментально.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты исследований, выполненных по теме диссертации, были представлены в период с 2021 г. по 2026 г. на 6 всероссийских и международных конференциях. В их числе: Юбилейная Международная Летняя Школа – Конференция “Актуальные Проблемы Механики” (г. Санкт-Петербург, 2022 г.), XXI Международная конференция “Современные проблемы механики сплошной среды” (г. Ростов-на-Дону, 2023 г.), Всероссийская конференция “Механика деформируемого твердого тела в проектировании материалов и конструкций” (г. Пермь, 2024 г.), Международная конференция “Days on Diffraction 2025” (г. Санкт-Петербург, 2025 г.), Всероссийская научная политематическая конференция “XXXVII сессия Российского акустического общества” (г. Москва, 2025), XX Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, г. Геленджик, 2026 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертационного исследования отражены в работах [1-5], опубликованных в рецензируемых изданиях из списка ВАК и/или индексируемых в Web of Science или Scopus.

Структура и объем работы. Диссертационная работа общим объемом 127 страниц имеет следующую структуру: введение, пять глав, заключение и список литературы, включающий 112 источников. Работа содержит 46 рисунков и 4 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится обзор работ отечественных и зарубежных авторов, внесших значительный вклад в развитие методов решения рассматриваемых в данной работе задач, и общая характеристика подходов к расчету волновой динамики протяженных многослойных структур, обсуждается актуальность диссертационной работы, её цели и задачи, а также указывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В **первой главе** формулируется математическая постановка краевых задач для упругих и пьезоупругих тел в рамках динамической теории упругости. Также приведена краткая информация об особенностях волновой динамики многослойных композитных конструкций. В **разделе 1.1** дается постановка краевой задачи для установившихся гармонических колебаний $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u_x, u_y, u_z)$ (ω – круговая частота; далее гармонический множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен) свободного M -слоистого ортотропного упругого волновода, занимающего в декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ область $D = \{\mathbf{x} : |x|, |y| < \infty, -H \leq z \leq 0\}$. Слои $D_m = \{\mathbf{x} : |x|, |y| < \infty, z_{m+1} < z < z_m\}$, $m = 1, 2, \dots, M$, составляющие волновод ($D = \bigcup_{m=1}^M D_m, z_{M+1} = -H$) жестко сцеплены между собой.

В области D содержится конечное число локализованных неоднородностей различных типов, в качестве которых рассматриваются внутренние и выходящие на поверхность дефекты со свободными от напряжений границами в виде интерфейсных расслоений, трещин и локализованных изменений толщины (выемок), поверхностные препятствия типа ребер жесткости или источников колебаний/сенсоров, жестко сцепленных с верхней $z = 0$ или нижней $z = -H$ границами волновода, а также внутренние включения из другого материала. Предполагается, что все рассматриваемые неоднородности имеют цилиндрическую форму с образующей параллельной оси Oy , а также, что для каждого из ортотропных слоев волновода оси упругой симметрии совпадают с осями координат (рисунок 1).

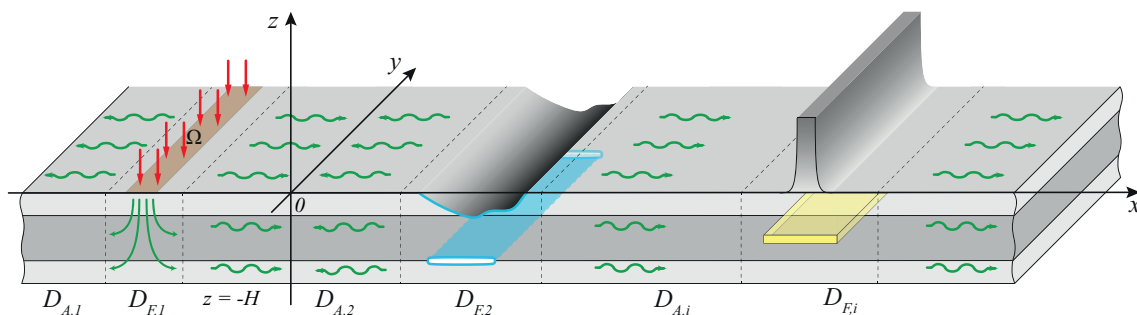


Рисунок 1 – Общая геометрия рассматриваемых задач

Для общности изложения также вводятся в рассмотрение области волновода конечной протяженности относительно оси Ox , содержащие единичные или близко расположенные между собой неоднородности, которые обозначаются как

$D^{(2p-1)} = D_{F,p}$, где индекс $p = 1, 2, \dots, P$ соответствует номеру области. Остальные части волновода считаются однородными и обозначаются как $D^{(2p)} = D_{A,p}$, $p = 0, 1, \dots, P$. В таких однородных областях верхняя и нижняя поверхности $z = 0$ и $z = -H$ свободны от напряжений, а перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и напряжения $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z)$ непрерывны во всем объеме многослойного пакета:

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \boldsymbol{\tau}|_{z=-H} = 0, \quad (1)$$

$$[\mathbf{u}]_m = [\boldsymbol{\tau}]_m = 0 \quad (2)$$

Квадратными скобками обозначен скачок функции на интерфейсах $z = z_m$. Уравнения движения для каждого из слоев в областях $D_{A,p}$ в случае гармонических колебаний с использованием тензорной записи принимают вид:

$$c_{ijkl}^{(m)} u_{l,jk} - \rho^{(m)} \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3)$$

Здесь $c_{ijkl}^{(m)}(\mathbf{x})$ и $\rho_m^{(p)}(\mathbf{x})$ – тензор упругих постоянных и плотность в каждом из слоев $m = 1, \dots, M$, u_i – компоненты вектора перемещений.

Уравнения движения (3) вместе с граничными условиями (1), (2) могут локально нарушаться внутри областей с неоднородностями $D_{F,p}$ в соответствии с типом рассматриваемого препятствия. В частности, в одной из областей $D_{F,p}$ на участке верхней поверхности $\Omega = \{\mathbf{x} : |x| < a, |y| < \infty, z = 0\}$ приложена гармоническая поверхностная нагрузка $\mathbf{q} = (q_x, 0, q_z)$, служащая источником колебаний:

$$\boldsymbol{\tau} \Big|_{z=0} = \mathbf{q}. \quad (4)$$

Вектор-функция $\mathbf{q}$ задана в области Ω , а вне нее предполагаются тождественно равной нулю.

С учетом сделанных предположений приведенные выше краевые задачи для многослойного ортотропного волновода с неоднородностями рассматриваются далее в работе в плоской постановке, которая замыкается условиями излучения на бесконечности, сформулированными с использованием принципа предельного поглощения (Свешников, А. Г., 1951).

Раздел 1.2 посвящен описанию моделей для источников колебаний и сенсорных элементов, соответствующих расположенным на поверхности волновода или интегрированным в него пленочным пьезопреобразователям. Предполагается, что данные пьезоактуаторы/сенсоры изготовлены из вертикально поляризованного пьезоупругого материала и имеют цилиндрическую форму с образующей, сонаправленной с осью Oy . Следовательно, может быть рассмотрена плоская постановка задачи.

В случае поверхностного расположения пьезоэлемента в плоскости xOz он занимает область $\Omega = \{(x, z) : x \in [-a_x, a_x], z \in [0, h_{pzt}]\}$. Встроенный преобразователь может находиться между отдельными слоями или внутри одного из слоев, например, между первым и вторым слоем $\Omega = \{(x, z) : x \in [-a_x, a_x], z \in [z_1, z_1 + h_{pzt}]\}$. При этом возможно размещение таких элементов по-отдельности

или предварительная их интеграция в специальный “смарт”-слой, выполненный из полимерного материала. Механический контакт между пьезоэлементом и подложкой в случае поверхностного расположения источника колебаний, а также между пьезоактуатором/сенсором, “смарт”-слем и прилегающими к нему слоями волновода в случае интегрированного преобразователя предполагается идеальным, то есть соответствующие компоненты векторов смещений и напряжений на всех границах контакта считаются непрерывными.

В разделе также приводятся уравнения, описывающие гармонические колебания в пьезоэлектрической среде ($\mathbf{x} \in \Omega$), которые могут быть записаны через вектор перемещений $\mathbf{u}$ и потенциал электрического поля ϕ (Партон В. З., Кудрявцев Б. А., 1988). Кроме того, формулируются электрические граничные условия, позволяющие рассматривать пьезоэлемент как в качестве источника колебаний (актуатора), так и как сенсор. В рамках квазистатического приближения, рассматриваемого в данной работе, начальные электрические условия не задаются.

Описанию моделей демпфирования, которые позволяют учитывать вязкоупругое поведение многослойных композитных конструкций, посвящен **раздел 1.3**. Рассмотрены гистерезисная модель и модель Кельвина-Фойгта, учитывающие затухание упругих волн посредством введения модуля упругости как комплексной величины E^* . Сформирована частотно-зависимая комплексная матрица упругости многослойного ортотропного материала, а также описано ее преобразование с учетом ориентации слоев относительно направления распространения волн.

Глава 2 посвящена описанию обобщения гибридной численно-аналитической схемы (Глушков, Е. В. и др., 2018) для компьютерного моделирования динамического поведения многослойных полосовых ортотропных волноводов с произвольным конечным количеством локальных неоднородностей. Для этого в **разделе 2.1** на основе полуаналитического интегрального подхода (Ворович И.И., Бабешко В.А., 1979; Бабешко В.А., Глушков Е.В. и др., 1986) строятся асимптотические представления для волновых полей в виде разложения по нормальным модам, позволяющие не только рассчитывать динамический отклик однородного стратифицированного волновода, но и анализировать его дисперсионные характеристики в том числе и при наличии затухания. **Раздел 2.2** непосредственно посвящен описанию гибридной вычислительной схемы, а также численным результатам проверки корректности ее компьютерной реализации.

С учетом возможности редуцировать рассматриваемые краевые задачи на плоский случай, применяя полуаналитический интегральный подход и технику интегрально преобразования Фурье, решение краевой задачи (1)-(3) в предположении наличия единственной области $D_{F,p}$, содержащей поверхностную нагрузку (4), можно представить в виде:

$$\mathbf{u}(x, z) = \int_{\Omega} \mathbf{k}(x - \xi, z) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (5)$$

Контур интегрирования Γ отклоняется от вещественной оси параметра прямого преобразования Фурье α при обходе вещественных полюсов элементов Фурье-символа матрицы Грина $\mathbf{K}$, при этом направление отклонения определяется исходя из принципа предельного поглощения. Далее в разделе приводится алгоритм построения матрицы $\mathbf{K}$ для многослойного полосового ортотропного волновода.

Для точек x , которые расположены вне области приложения нагрузки Ω , к интегральному представлению решения (5) применимы лемма Жордана и теорема Коши (Ворович, И. И., Бабешко В. А., 1979; Гринченко В. Т., Мелешко В. В., 1981). Волновые поля, распространяющиеся в направлениях влево и вправо от источника колебаний ($\mathbf{u}^-$ и $\mathbf{u}^+$), могут быть представлены в виде рядов, отдельные члены которых соответствуют нормальным модам:

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\pm} \mathbf{u}^{\pm}(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^{-} \mathbf{d}_n^{-}(z) e^{-i\zeta_n(x+a)}, & \text{при } x < -a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^{+} \mathbf{d}_n^{+}(z) e^{i\zeta_n(x-a)}, & \text{при } x > a, \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{c}_n^{\pm} = \mp i e^{i\zeta_n a} \begin{pmatrix} Q_1(\mp \zeta_n) \\ Q_2(\mp \zeta_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_n^{-}(z) = \mathbf{d}_n(z) = \text{res } K(\alpha, z) \Big|_{\alpha=\zeta_n},$$

$$\mathbf{d}_n^{+}(z) = \text{res } \mathbf{K}(\alpha, z) \Big|_{\alpha=-\zeta_n} = \begin{pmatrix} -\text{res } K_{11} \Big|_{\alpha=\zeta_n} & \text{res } K_{12} \Big|_{\alpha=\zeta_n} \\ \text{res } K_{21} \Big|_{\alpha=\zeta_n} & -\text{res } K_{22} \Big|_{\alpha=\zeta_n} \end{pmatrix}.$$

Слагаемые в разложении (6) с точностью до постоянных коэффициентов $\mathbf{c}_n^{\pm}$ являются собственными решениями рассматриваемых краевых задач для однородного многослойного волновода. Вектор-функции $\mathbf{d}_n^{\pm}(z)$ характеризуют вдоль вертикальной координаты z смещения волны с волновым числом ζ_n , являющимся полюсом матрицы Грина $\mathbf{K}$. В волноводе со свободными граничными условиями и с симметричными относительно его срединной линии свойствами составляющих его слоев бегущие волны подразделяются на два типа – симметричные и антисимметричные волны Рэлея-Лэмба (S_n и A_n , $n = 1, 2, \dots$ соответственно) (Викторов И. А., 1981; Lamb H., 1917). Данные моды обеспечивают перенос энергии в обоих направлениях от источника колебаний. Их фазовые и групповые скорости определяются выражениями $c_n = \omega/\zeta_n$ и $v_n = d\omega/d\zeta_n$ соответственно.

Пара мод с комплексными, но не чисто мнимыми, волновыми числами $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ и $\zeta_{n+1} = -\xi_n + i\eta_n$ соответствует стоячей волне, амплитуда которой убывает по экспоненциальному закону $e^{-\eta_n|x|}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Моды, связанные с чисто мнимыми полюсами вида $\zeta_n = i\eta_n$ ($\xi_n = 0$), также характеризуется экспоненциальным затуханием при удалении от источника. Однако, волны, имеющие малые значения мнимой части волнового числа ($\eta_n \approx 0$) необходимо учитывать при использовании разложения (6) для расчета поля смещений вблизи источника колебаний или некоторой неоднородности.

В рамках **раздела 2.2** гибридный численно-аналитический подход (Глушков Е. В. и др., 2018) обобщается на случай волноводов, состоящих из M орто-

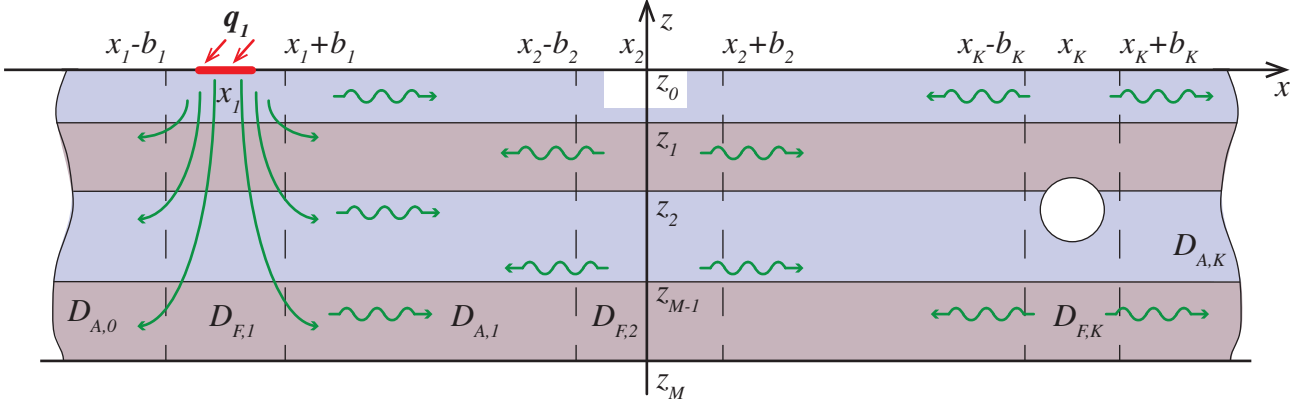


Рисунок 2 – Многослойный волновод с произвольными неоднородностями

тотропных слоев, имеющих K областей с локальными неоднородностями (рис. 2) $D_{F,p} = D_{F,k} = \{(x, z) : |x - x_k| \leq b_k, z_0 \leq z \leq z_M\}$, $p = k = \overline{1, K}$. Решение в этих областях предполагается искать численно с использованием МКЭ. Здесь x_k - центр области с неоднородностью шириной $2b_k$ и высотой $H = z_M - z_0$. Остальные части волновода считаются однородными ($D_{A,p} = D_{A,k}$) и описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{A,0} &= \{(x, z) : x < x_1 - b_1, z_0 \leq z \leq z_M\}, \\ D_{A,k} &= \{(x, z) : x_k + b_k < x < x_{k+1} - b_{k+1}, z_0 \leq z \leq z_M\}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ D_{A,K} &= \{(x, z) : x > x_K + b_K, z_0 \leq z \leq z_M\}. \end{aligned}$$

Общее решение рассматриваемых в работе краевых задач в рамках гибридного подхода имеет вид:

$$\mathbf{u}(x, z) = \begin{cases} \mathbf{u}_k^A(x, z), & (x, z) \in D_{A,k}, k = \overline{0, K}, \\ \mathbf{u}_k^F(x, z), & (x, z) \in D_{F,k}, k = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{u}_k^F$ – численное МКЭ-решение в области $D_{F,k}$, а $\mathbf{u}_k^A$ – аналитическое решение в однородной части волновода $D_{A,k}$ (рисунок 2). За пределами соответствующих областей решения считаются нулевыми. Таким образом, конкретной точке волновода соответствует одна из функций суммы (7).

Решения в однородных частях волновода $\mathbf{u}_k^A$ представляются аналитически в виде суммы бегущих волн с неизвестными коэффициентами $c_{k,n}^\pm$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^A(x, z) &= \delta^W \mathbf{d}_j^+(z) e^{i\zeta_j(x-x_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n}^- \mathbf{d}_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x-x_1+a_1)}, \\ \mathbf{u}_k^A(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{k,n}^+ \mathbf{d}_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-x_k-a_k)} + c_{k+1,n}^- \mathbf{d}_n^-(z) e^{-i\zeta_n(x-x_k+a_k)} \right], \\ \mathbf{u}_K^A(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{K,n}^+ \mathbf{d}_n^+(z) e^{i\zeta_n(x-x_K-a_K)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции $\mathbf{d}_n^\pm(z) = (d_{x,n}^\pm, d_{z,n}^\pm)^T$ были введены ранее в **разделе 2.1**. Параметры a_k определяют точные границы неоднородности в области $D_{F,k}$ ($a_k < b_k$). В качестве источника колебаний помимо пьезопреобразователя, который возбуждает бегущие упругие волны, может рассматриваться единичная нормальная мода с волновым числом ζ_j , набегающая из бесконечности. В таком случае её вклад в разложении по модам для области $D_{A,0}$ учитывается при помощи коэффициента δ^W , который равен нулю при отсутствии набегающего поля и единице в противном случае.

Численные решения $\mathbf{u}_k^F$ представимы в виде суммы решений со специальными граничными условиями на боковых границах ($x = x_k \pm b_k$) неоднородной области $D_{F,k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^F = & \hat{\delta}_k \mathbf{u}_k^{F0} + \bar{\delta}_{0,k-1} \delta^W \mathbf{u}_1^{FW} + \sum_{n=1}^N [\bar{\delta}_{0,k-1} c_{k-1,n}^+ \mathbf{u}_{n,k,1}^{F-} + \quad k = \overline{1, K}, \\ & + c_{k,n}^- \mathbf{u}_{n,k,2}^{F-} + c_{k,n}^+ \mathbf{u}_{n,k,1}^{F+} + \bar{\delta}_{K,k} c_{k+1,n}^- \mathbf{u}_{n,k,2}^{F+}], \quad (x, z) \in D_{F,k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Слагаемые $\mathbf{u}_k^{F0}$ описывают приток волновой энергии от источников колебаний в волновод внутри области $D_{F,k}$. Решение $\mathbf{u}_1^{FW}$ соответствует волновому полю, генерируемому набегающей в область $D_{F,1}$ из бесконечности волной (см. уравнение (8)). Слагаемые $\mathbf{u}_{n,k,2}^{F-}$, $\mathbf{u}_{n,k,1}^{F+}$ описывают отток энергии из $D_{F,k}$, тогда как $\mathbf{u}_{n,k,2}^{F+}$ и $\mathbf{u}_{n,k,1}^{F-}$ – приток энергии из соседних областей с неоднородностями ($D_{F,k+1}$ и $D_{F,k-1}$, соответственно). Решения $\mathbf{u}_{n,k,2}^{F+}$ и $\mathbf{u}_{n,k,1}^{F-}$ отсутствуют в случае единственной области с неоднородностью, что соответствует полученным ранее результатам (Глушков, Е. В. и др., 2018). Коэффициенты $\bar{\delta}_{k,l}$ вводятся таким образом, что $\bar{\delta}_{k,l} = 0$ когда $k = l$ и $\bar{\delta}_{k,l} = 1$. Неизвестные коэффициенты $c_{k,n}^\pm$ одинаковы в обоих соотношениях (8) и (9).

На вертикальных отрезках, вдоль которых области $D_{F,k}$ и $D_{A,k}$ стыкуются между собой, граничные условия задаются в соответствии с условием обобщенной ортогональности нормальных мод для упругих волноводов (Зильберглейт, А. С., Нуллер, Б. М., 1997). Вид граничных условий на боковых границах, а также на границах между слоями волновода подробно описан в диссертационной работе.

Представления (7) - (9) и граничные условия обеспечивают выполнение всех условий краевой задачи. Неизвестные коэффициенты $\mathbf{c} = (c_{1,1}^-, \dots, c_{1,N}^-, c_{1,1}^+, \dots, c_{1,N}^+, c_{2,1}^-, \dots, c_{K,N}^+)^T$ определяются исходя из условий непрерывности компонент векторов перемещений и напряжений на боковых границах областей $D_{F,k}$ и $D_{A,k}$:

$$\begin{aligned} u_k^F(x_k - b_k, z) &= u_{k-1}^A(x_k - b_k, z), \\ \tau_{xz,k}^F(x_k - b_k, z) &= \tau_{xz,k-1}^A(x_k - b_k, z), \quad z \in [z_M, z_0], \\ u_k^F(x_k + b_k, z) &= u_k^A(x_k + b_k, z), \quad k = \overline{1, K}, \\ \tau_{xz,k}^F(x_k + b_k, z) &= \tau_{xz,k}^A(x_k + b_k, z). \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения неизвестных констант $\mathbf{c}$ используется метод Галеркина,

аспекты применения которого подробно описаны в тексте работы.

Далее, в **подразделе 2.2.2** дается описание численной валидации гибридной схемы. Для этого рассматривается как модельная задача о воздействии на многослойной ортотропный волновод заданной поверхностной нагрузки, решение которой строится с использованием полуаналитического интегрального подхода, так и волновод содержащий несколько локальных областей с неоднородностями, соответствующими поверхностным или встроенным пьезоэлементам, решение для которого строится с использованием пакета COMSOL Multiphysics. В обоих случаях наблюдается почти полное совпадение результатов, получаемых с использованием развиваемой гибридной вычислительной схемы и указанных методов.

В **главе 3** обсуждаются особенность возбуждения и измерения упругих волн поверхностными и встроенными пьезопреобразователями. В **разделе 3.1** анализируется влияние глубины залегания пьезоэлемента на возбуждаемые нормальные моды. В **разделе 3.2** обсуждается влияние клеевой прослойки между пьезоэлементом и упругим волноводом на энергетические характеристики возбуждаемых волн Рэлея-Лэмба.

В качестве примера использования разработанной компьютерной модели рассматривается задача о возбуждении плоских упругих колебаний в восьми-слойном ($M = 8$) композитном материале со схемой укладки трансверсально-изотропных слоев $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$. Каждый из таких слоев моделирует однонаправленный волокноно-армированный препрег, при этом направление 0° соответствует укладке волокон вдоль горизонтальной оси Ox . Толщина пластины $H = 2,3$ мм, плотности и упругие модули отдельных слоев представлена в таблице 1. В качестве источника колебаний использовался вертикально поляризованный пьезоэлемент толщиной $h_p = 0,1$ мм и полушириной $a = 5$ мм из материала PZT-5H (Sheeraz, M. A. et. al., 2019) ($V = 70$ В – разность потенциалов, подаваемая на пьезоактуатор), установленный на поверхности композита или встроенный внутри него между различными слоями. В качестве материала “смарт”-слоя был выбран полиэтилен высокой плотности ($\rho = 950$ кг/м³, модуль Юнга $E = 3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$, толщина $h_s = 0,1$ мм).

Таблица 1 – Параметры материала.

Ориентация слоя	Номер слоя	h_m мм	ρ , г/см ³	C_{11} , ГПа	C_{13} , ГПа	C_{33} , ГПа	C_{55} , ГПа
0°	1	0,575	1,522	122,4	4,13	11,5	4,85
90°	2	1,15	1,522	11,5	6,47	11,5	2,51
0°	3	0,575	1,522	122,4	4,13	11,5	4,85

Анализируется влияние расположения пленочного пьезодатчика по толщине волновода на распределение волновой энергии, переносимой отдельной нормаль-

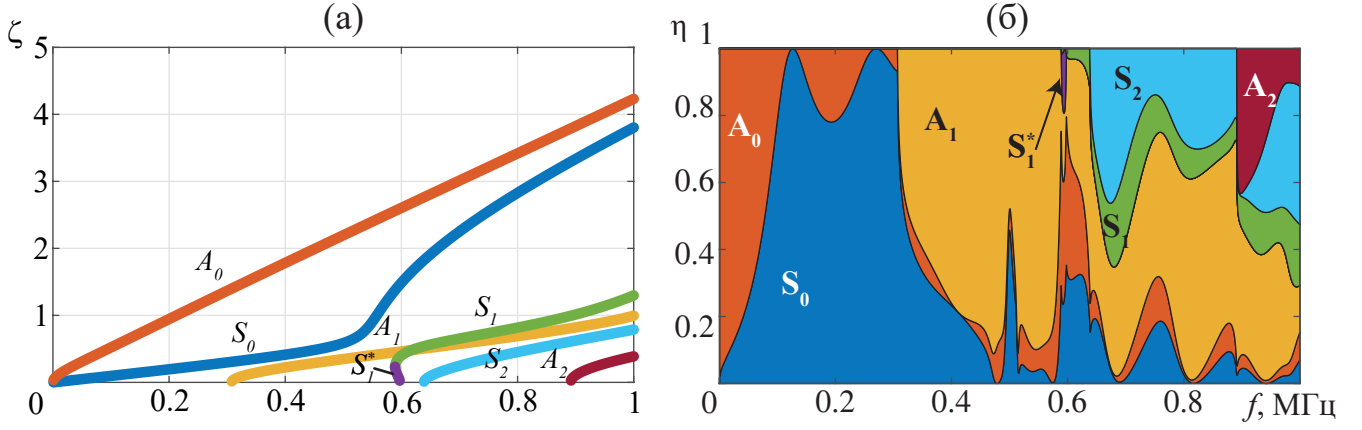


Рисунок 3 – (а) – частотные зависимости волновых чисел фундаментальных и высших мод для волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$, (б) – распределение энергии по модам для волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ с поверхностным пьезоэлементом

ной модой с номером n :

$$\eta_n^\pm = \frac{E_n^\pm}{E^\pm},$$

где (Бабешко, В. А. и др., 1989)

$$E^\pm = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[\int_{-H}^0 (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) dz \right] \quad \text{и} \quad E_n^\pm = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[\int_{-H}^0 (\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\sigma}_n) dz \right], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В этих соотношениях $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор смещений (7); $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ – вектор напряжений на площадке с нормалью, сонаправленной с осью Ox (знак “+”) и действующей в противоположном направлении (знак “-”), N – количество нормальных мод, удерживаемых в представлении (8) на данной частоте. В силу симметрии задачи относительно оси O_z можно рассматривать только одну из долей η_n^+ или η_n^- .

Предварительно для рассматриваемого волновода были построены частотные зависимости волновых чисел. Соответствующие дисперсионные кривые приведены на рисунке 3 (а). На рисунке 3 (б) представлен график долей энергии для каждой моды для волновода с поверхностным пьезоэлементом. Полученные результаты позволяют выделять частотные диапазоны, в которых доминирует конкретная мода, для ее селективного возбуждения.

На рисунках 4 и 5 представлены графики для пьезоэлемента, встроенного в волновод со схемой укладки $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ без “смарт”-слоя и с ним. Видно, что при встраивании пьезоэлемента на низких частотах доминирует фундаментальная антисимметричная мода A_0 , но достаточно быстро она подавляется фундаментальной симметричной модой S_0 . Кроме того, на рисунках 4 (г) и 5 (г) видно, что расположенный под четвертым слоем пьезодатчик селективно возбуждает моду S_0 на диапазоне частот до 500 кГц, далее для волновода со “смарт”-слоем антисимметричные моды полностью подавляются (рис. 5 (г)). Иная картина наблюдается для волновода без “смарт”-слоя: в трехмодовом диапазоне некоторый вклад мод

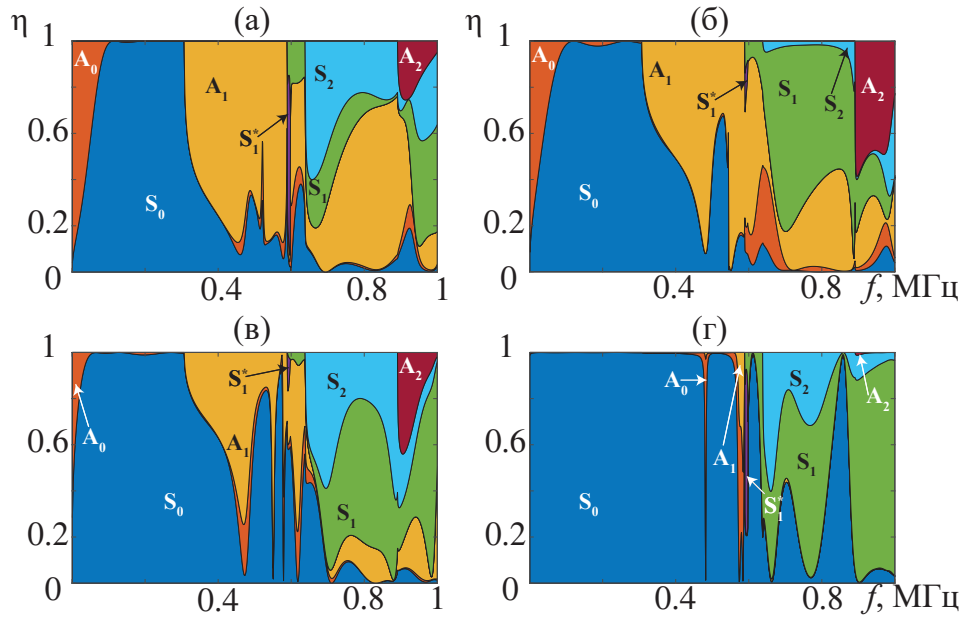


Рисунок 4 – Распределение энергии по модам для волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{2s}$ с встроенным пьезоэлементом

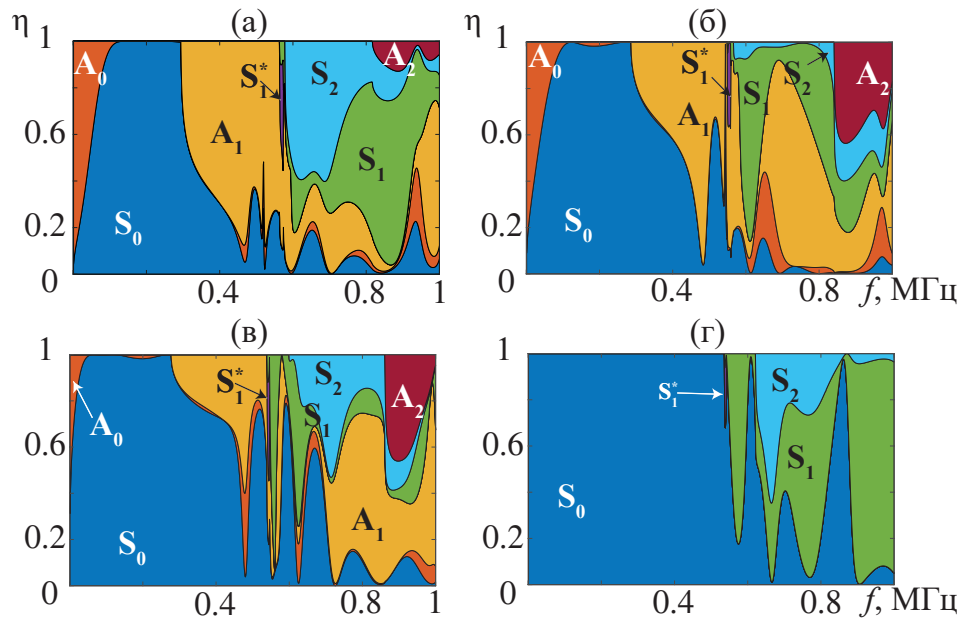


Рисунок 5 – То же, что на рисунке 4, но для встроенного пьезоэлемента со «смарт»-слоем

A_0 и A_1 еще заметен, но после выхода обратной волны S_1^* они практически полностью подавляются и доминирующими становятся S_0 , S_1 и S_2 . В случае, когда пьезоэлемент находится под первым, вторым или третьим слоем, в трехмодовом диапазоне наблюдается одинаковая картина для волновода со “смарт”-слоем и без него. В области низких частот доминирует мода A_0 (рисунки 4, 5 (а), (б), (в)). В свою очередь в диапазоне частот от 700 до 900 кГц большая часть энергии переносится модой A_1 (графики (а), (б), (в) на рисунках 4 и 5). Но при этом вклад моды A_1 после выхода обратной волны меньше чем, в случае поверхностного пьезоэлемента (рис. 3 (б)).

Глава 4 посвящена изучению влияния особенностей внутренней структуры материала волновода на его динамические характеристики. В **разделе 4.1** приводятся результаты параметрического анализа влияния отдельных упругих констант, входящих в матрицу жесткости C , на поведение волновых чисел $\zeta_n(f)$ нормальных мод для волоконно-армированных препрегов. Материал препрега предполагается трансверсально-изотропным; соответствующие независимые модули упругости для модельного препрега, использовавшегося в расчетах, представлены в таблице 1. Каждый независимый модуль упругости C_{ij} (C_{11} , C_{13} , C_{33} , C_{44} и C_{55}) варьировался отдельно от остальных констант в диапазоне от -30% до 30% относительно начальных значений с равномерным шагом в 6% .

В качестве примера на рисунке 6 приводятся результаты оценки влияния изменения упругих модулей на дисперсионные кривые $\zeta_n(f)$ для несимметричного волновода $[0^\circ, 90^\circ]_4$. Полученные результаты в целом согласуются с аналогичными для волновода $[0^\circ, 90^\circ]_{4s}$, приведенные в диссертационной работе. Единственное существенное отличие наблюдается для модуля C_{11} . Если для рассматриваемого волновода он влияет на поведение дисперсионных кривых мод A_0 и S_0 на высоких частотах, то в случае симметричного композита максимальные изменения для моды S_0 характерны для частотного диапазона, где ее дисперсия максимальна.

Из приведенных результатов следует, что в рассмотренном случае композитов с перекрестной схемой укладки препрегов, влияние отдельных упругих модулей на дисперсионные кривые носит существенно более сложный характер, чем в случае однонаправленных материалов (*Menglong, L. et. al., 2022; Eremin, A. A. et. al., 2015*), где для отдельных направлений распространения и отдельных мод такая зависимость фактически однозначная. Для всех указанных выше композитов уникальное влияние отдельной компоненты матрицы жесткости на дисперсионные кривые имеет место только для константы C_{33} , от значения которой существенно зависит частота резонанса обратной волны. В то же время константы C_{44} и C_{55} (а в случае несимметричного композита и C_{11}) похожим друг относительно друга образом воздействуют на поведение дисперсионных кривых. Для константы C_{11} и симметричных композитов оптимальным в плане ее влияния является частотный диапазон, в котором наблюдается максимальная дисперсия моды S_0 , и последующие за ним частоты.

Данные наблюдения о дисперсионных свойствах бегущих волн являются

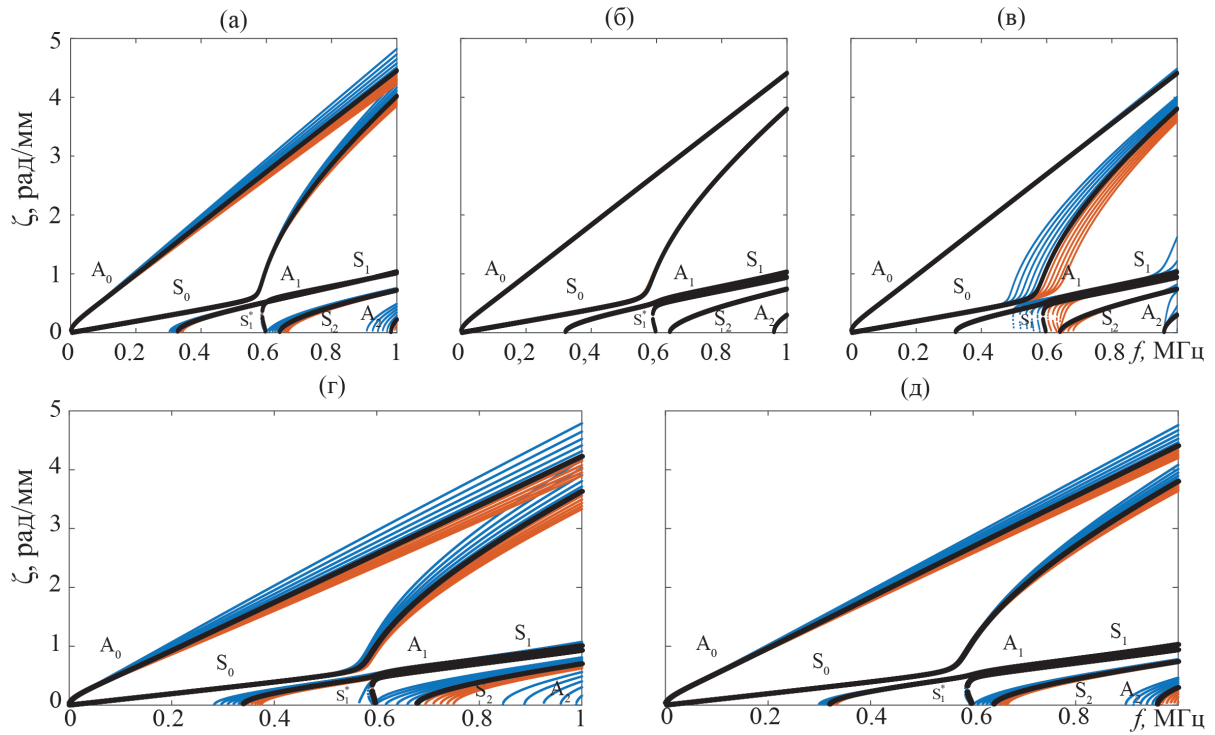


Рисунок 6 – Влияние варьирования отдельных упругих модулей на дисперсионные кривые для несимметричного волновода $[0^\circ, 90^\circ]_4$: (а) – C_{11} ; (б) – C_{13} ; (в) – C_{33} ; (г) – C_{44} ; (д) – C_{55}

важной информацией, позволяющей оценить возможность решения задачи идентификации упругих модулей отдельного препрега в многослойном волокно - армированном композите. Ключевым же выводом из полученных результатов может быть, по-видимому, то, что в случае материалов с большим количеством слоев и частым чередованием направлений укладки препрегов, для сколь либо надежного восстановления их механических свойств по данным волнового зондирования необходима информация об особенностях поведения дисперсионных кривых высших нормальных волн (например, точки выхода новых мод, точки перегиба на дисперсионной кривой).

Раздел 4.2 посвящен изучению влиянию микроструктуры волоконно - армированного слоистого композитного материала на распространяющиеся в нем нормальные моды. Экспериментальные исследования ультразвуковых волновых процессов в полимерных композитных материалах, изготовленных из однонаправленных волоконно-армированных препрегов, указывают на ряд их особенностей, связанных со сложной внутренней микроструктурой слоистых композитов. Первая из них определяется процессом производства самих препрегов и дальнейшим формованием из них готового композитного изделия, приводящим к появлению областей с концентрацией или, наоборот, с малым количеством армирующих волокон в полимерном связующем (рисунок 7, (а)). Данные области фактически могут рассматриваться как препятствия для бегущих волн и, следовательно, порождают рассеянное волновое поле при взаимодействии с ними. Подобное явление получи-

ло название непрерывной конвертации мод (в зарубежных источниках - continuous mode conversion phenomenon) и не наблюдается в случае изотропных материалов (Willberg, C. et. al., 2012). Другая сложность при моделировании динамического поведения волоконно-армированных материалов связана с достаточно заметным затуханием возбуждаемых в них упругих волн, обусловленным вязкоупругими свойствами полимерного связующего, что приводит к уменьшению размеров области, диагностируемой отдельным элементом распределенной сенсорной сети и, следовательно, определяет необходимость более плотного размещения диагностирующих узлов.

Развиваемая в данном разделе феноменологическая механико-математическая модель направлена на учет обеих этих особенностей. Для этого в рамках гибридной вычислительной схемы рассматривается протяженная неоднородная область $D_{F,k}$, в которой модули Юнга и плотность материала волновода представляются в виде двумерного гауссового однородного случайного поля (Zimmermann, E. et. al., 2018). При этом детерминированная составляющая модулей Юнга является комплекснозначной величиной, мнимая часть которой отвечает за гистерезисную модель вязкоупругого материала. Далее к каждому из случайных полей применяется разложение Карунена-Лоэва, а для модельных расчетов рассматриваются реализации, соответствующие конкретным значениям случайных величин в таких рядах.

Для проверки адекватности развиваемой модели проводилось сопоставление численных результатов и экспериментальных данных. Рассматривался четырехслойный композитный материал толщины $H = 2,3$ мм со схемой укладки однонаправленных препрегов $[0^\circ, 90^\circ]_s$. В качестве источника колебаний при проведении расчетов и в эксперименте рассматривается прямоугольная накладка из пьезокерамики PС-155, высотой $d = 0,2$ мм, шириной $2a_p = 10$ мм и длиной $l = 30$ мм, приклеенная к верхней границе пластины $z = 0$ (рисунок 7, (б)). Нестационарные электрические напряжения, подаваемые на электроды, прикрепленные к актуатору, задавались в виде узкополосной тональной посылки - двух циклов синуса, модулированных синус-окном с центральной частотой $f_c = 180$ кГц. Полученные с использованием лазерной виброметрии экспериментальные и расчетные значения вертикальной компоненты скорости смещений $v_z(t)$ на поверхности волновода в массиве точек были обработаны преобразованием Гильберта, нормированы относительно максимального значения в рассматриваемом временном и пространственном диапазоне и скомбинированы в виде В-сканов (рисунок 7, (в)-(е)). Фундаментальные моды S_0 и A_0 соответствуют широким линиям с различными углами наклона, которые зависят от скорости распространения данных волн. Непрерывная конвертация мод на данных графиках проявляется в виде пятен, следующих за распространением моды S_0 или A_0 . Дополнительные линии на экспериментальных данных (графики (в) и (г)) связаны с отражением от границ первоначального волнового поля и возврата отраженной моды S_0 в наблюдаемую зону. Можно видеть, что полученные на основе феноменологической модели

и гибридной вычислительной схемы результаты (графики (д) и (е)) качественно близки к экспериментальным данным, что подтверждает возможность описания явления непрерывной конвертации мод с использованием рассматриваемой модели.

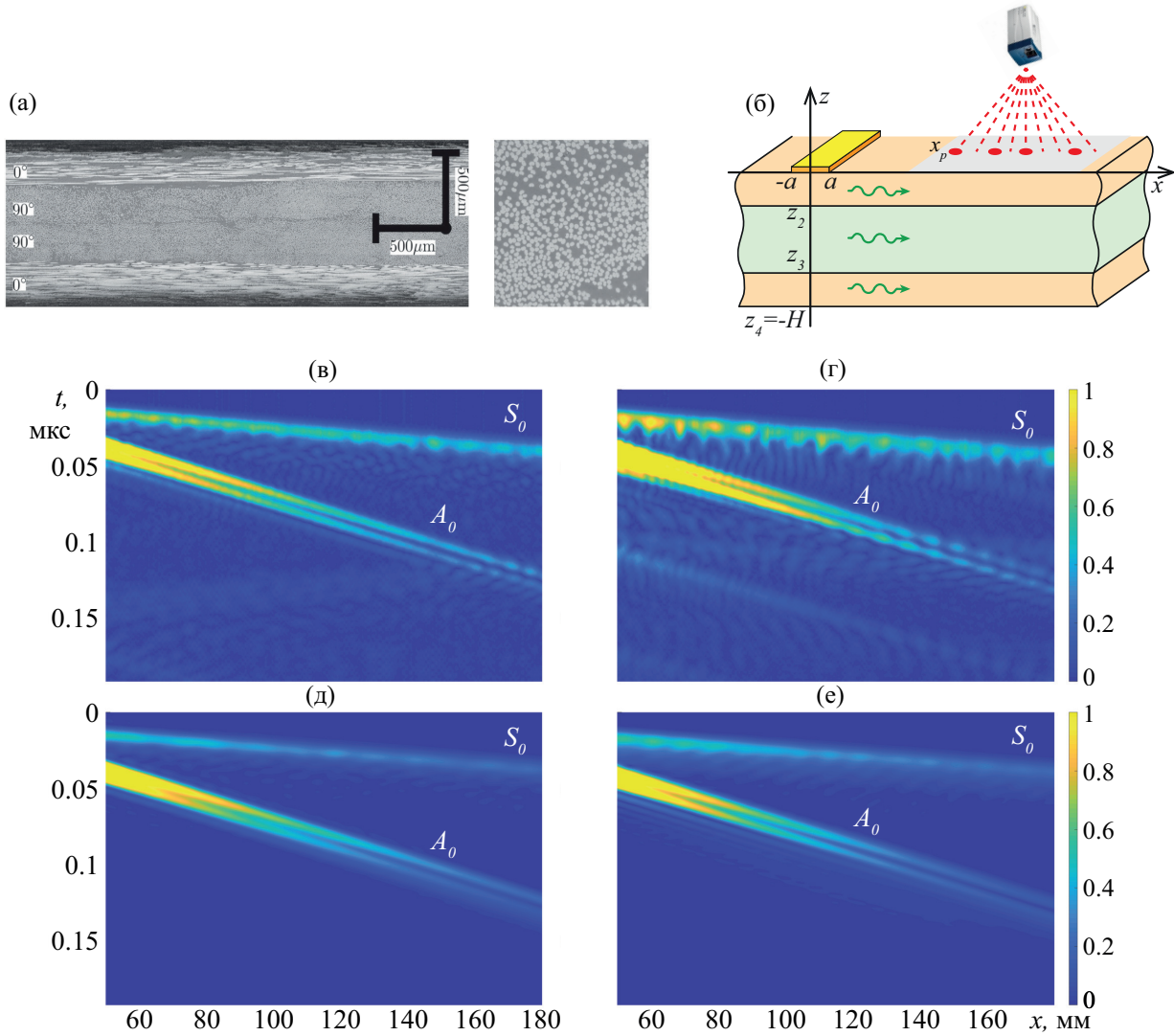


Рисунок 7 – Микрофотография среза волокно-армированного композита (а); схематичное изображение эксперимента (б); расчетные ((д), (е)) и экспериментальные ((в), (г)) В-сканы поверхности композитной пластины: (в), (д) – $[0^\circ, 90^\circ]_s$; (г), (е) – $[90^\circ, 0^\circ]_s$

В главе 5 рассматриваются несколько характерных типов локальных неоднородностей, оказывающих существенное влияние на процессы распространения и рассеяния упругих бегущих волн. В частности, анализируются такие конфигурации, как Т-образное ребро жесткости (*раздел 5.1*), а также расслоения и трещины, моделирующие повреждения, вызванные ударным воздействием на слоистый композитный материал (*раздел 5.2*), при условии, что источником колебаний или сенсором являются встроенные или установленные на поверхность волновода пьезоэлементы. Выбор указанных неоднородностей обусловлен их практической значимостью в задачах неразрушающего контроля и мониторинга состояния кон-

струкций. Такие задачи позволяют продемонстрировать возможности гибридного подхода при моделировании неоднородностей со сложной геометрией.

Далее в качестве примера анализируются рассеяние бегущих упругих волн на комплексе интерфейсных расслоений и вертикальных трещин в композитной пластине, вызванном вертикальным ударом (*Damghani, M. et. al., 2023*). Геометрия задачи показана на рисунке 8. Падающая бегущая волна вида $\mathbf{u}^{FW}(x, z) = P^{FW} \mathbf{d}_n^+(z) e^{i\zeta_j x}$, которая соответствует j -й моде, набегает на дефект слева из бесконечности. Множитель $P^{FW} = 10^{-3}$ представляет собой безразмерный масштабируемый параметр, используемый для нормировки амплитуды падающей волны. Рассеяние двух фундаментальных мод Лэмба, A_0 и S_0 , рассматривается по отдельности. Геометрические параметры трещины на рисунке 8 заданы следующим образом: $w_{cr1} = 10$ мм, $w_{cr2} = 6$ мм, $x_1 = 0$ мм, $x_1 \pm a_1 = \pm 9$ мм, $x_{cr1} = -5$ мм, $x_{cr2} = -3$ мм, $x_{cr3} = 3$ мм и $x_{cr4} = 5$ мм.

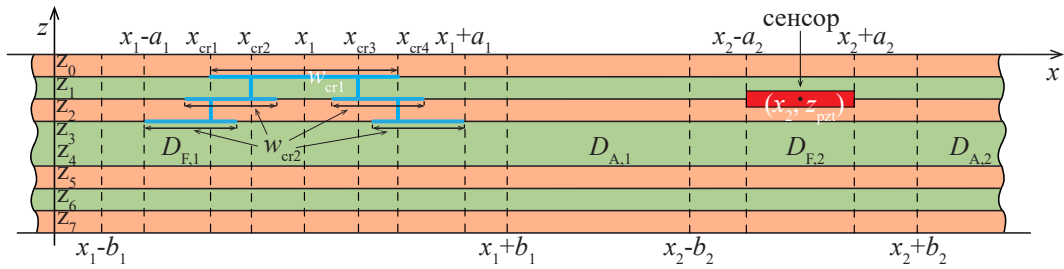


Рисунок 8 – Геометрия рассматриваемой задачи

Регистрация рассеянной волны осуществляется при помощи прямоугольного пьезоэлектрического сенсора, размещенного либо внутри пластины, либо на ее поверхности. Геометрический центр пьезосенсора ширины $2a_2 = 10$ мм и толщины $h_{pzt} = 0.5$ мм, изготовленного из пьезокерамического материала PZT-5H (*Sheeraz, M. A. et. al., 2019*), находится в точке (x_2, z_{pzt}) . Электрические граничные условия соответствуют стандартной конфигурации: нижняя граница заземлена, верхняя поверхность находится в режиме свободного потенциала, а боковые грани электрически изолированы. Предполагается идеальный контакт с волноводом, обеспечивающий непрерывность полей смещений и перемещений.

Частотная зависимость модуля отклика сенсора $|V_c|$ показан на рисунке 9. Графики (а), (в), (д) соответствуют рассеянию антисимметричной моды A_0 ; (б), (г), (и) – симметричной моде S_0 . Сплошные линии соответствуют различным расстояниям от трещины до сенсора $d_{obs} = x_2 - x_1$ мм (указаны в подписи); пунктирные линии приводятся эталонные результаты для волновода без дефекта. На рисунке 9 (а), (б) даны результаты для поверхностного сенсора $z_{pzt} = h_{pzt}/2 = 0.25$ мм, на графиках (в), (г) и (д), (и) приведены результаты для встроенных сенсоров $z_{pzt} = (z_1 + z_2)/2 = -0.45$ мм и $z_{pzt} = (z_3 + z_4)/2 = -1.2$ мм, соответственно, причем последний случай соответствует срединному расположению сенсора.

Сопоставляя результаты расчетов в бездефектном случае и при наличии повреждения, можно видеть, что в последнем случае в отклике сенсора наблюдается значительное количество весьма резких локальных максимумов и минимумов.

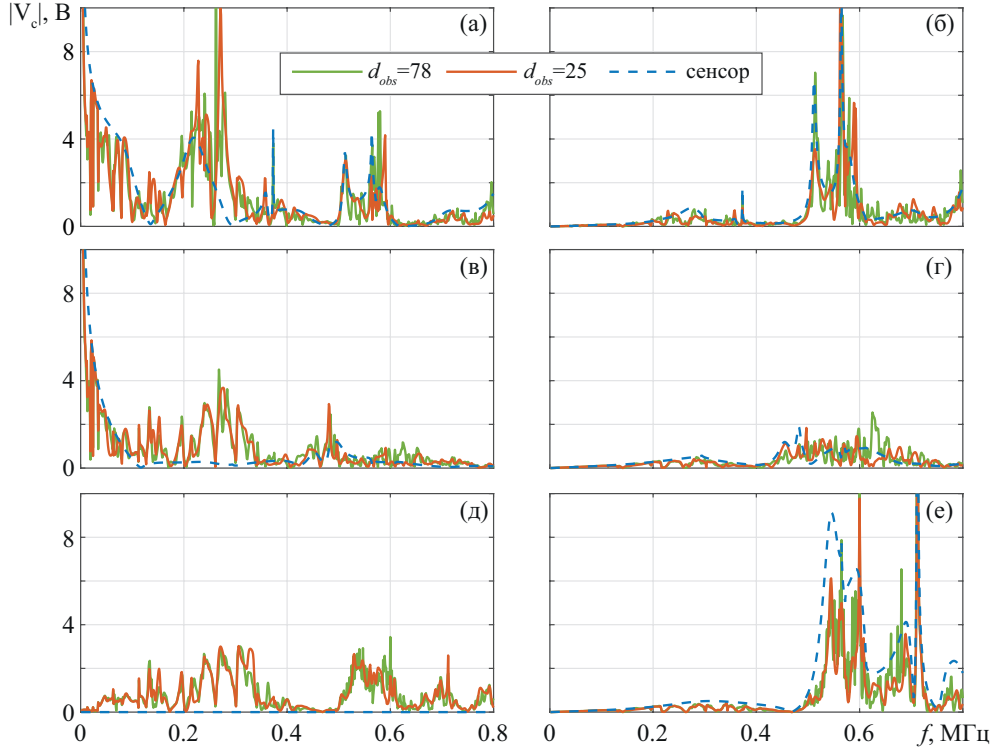


Рисунок 9 – Отклик сенсора $|V_c|$ при рассеянии мод A_0 (слева) и S_0 (справа). Зеленый: $d_{obs} = 78$ мм; красный: $d_{obs} = 25$ мм; пунктир: эталон без трещины. Глубина расположения сенсора z_{pzt} : (а), (б) – -0.25 мм; (в), (г) – -0.45 мм; (д), (и) – -1.2 мм

Некоторые из ярко выраженных максимумов совпадают с собственными частотами самого сенсора. Например, на рисунке 9 (а) резкие пики наблюдаются вблизи первых трех собственных частот пьезоэлемента ($f = 360 + 3i$, $f = 373 + 0.2i$ и $f = 511 + 3i$ кГц), причем видны они как для случая с трещинами (сплошные линии), так и для эталонных кривых (пунктирная линия). Другие локальные экстремумы связаны с собственными частотами трещины (например, на частоте вблизи $f = 200 + 5i$ кГц).

В **заключении** кратко формулируются основные результаты диссертационного исследования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Разработаны и реализованы в виде пакета программ эффективные методы решения динамических задач о возбуждении и распространении плоских упругих волн в многослойных ортотропных волноводах с единичными или множественными локализованными неоднородностями.
2. В широком диапазоне частот исследовано влияние расположения пьезоэлектрического преобразователя относительно толщины слоистого волновода на распределение волновой энергии между возбуждаемыми им плоскими нормальными модами.

3. Для композитов, составленных из однонаправленных волоконно-армированных препрегов, изучены особенности распространения в них плоских упругих волн, связанные с анизотропией их упругих свойств и сложной микроструктурой.
4. Проведен анализ процесса рассеяния бегущих упругих волн на структурных элементах в виде ребер жесткости и дефектах типа расслоений и трещин, характерных для тонкостенных конструкций из слоистых композитных материалов.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ и включенных в базы данных Scopus и Web of Science:

1. Нец, П. А. Моделирование возбуждения плоских упругих волн в слоистых анизотропных материалах поверхностными и встроенными пьезопреобразователями / П. Н. Нец, А. А. Евдокимов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2026. — Т. 23. — № 1. — С. 73–85.

2. Евдокимов, А. А. Гибридный численно-аналитический подход для моделирования антиплоских колебаний многослойных упругих волноводов с множественными неоднородностями / А. А. Евдокимов, П. Н. Нец, Б. М. Лесин, А. А. Еремин // Вычислительная механика сплошных сред. — 2025. — Т. 18. — № 2. — С. 140–154.

Статьи в рецензируемых научных изданиях, включенных в базы данных Scopus и Web of Science:

3. Eremin, A. A., Multi-Layered and Homogenized Models for In-Plane Guided Wave Excitation, Sensing, and Scattering in Anisotropic Laminated Composites / A. A. Eremin, M. V. Golub, S. I. Fomenko, A. A. Evdokimov, P. A. Nets // Applied Sciences. — 2023. — Vol. 13. — № 3. — P. 1698.

4. Evdokimov, A.A., Analytically-based hybrid numerical scheme for the evaluation of elastic guided wave excitation, propagation and scattering in multilayered anisotropic waveguides with multiple inhomogeneities / A. A. Evdokimov, P. A. Nets, A. A. Eremin // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2026. — Vol. 190. — P. 106873.

5. Evdokimov, A. A., Hybrid numerical-analytical scheme for the elastodynamic simulation of layered elastic structures with multiple inhomogeneities / A. A. Evdokimov, P. A. Nets, A. A. Eremin // 2025 Days on Diffraction (DD). — 2025. — P. 54–59.

Нец Полина Алексеевна

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ПОЛОСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДОВ С
ЛОКАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук