

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кубанский государственный университет»

На правах рукописи



Телятников Илья Сергеевич

**ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СТАТИЧЕСКОЙ
НАПРЯЖЕННОСТИ ЛИТОСФЕРНЫХ СТРУКТУР НА РАЗЛОМАХ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

**Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Бабешко О.М.

Краснодар

2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ..	18
1.1 Основные методы факторизации функций и матриц-функций.....	18
1.2 О дифференциальной факторизации матриц-функций.....	24
1.3 Решение некоторых функциональных уравнений методом Винера – Хопфа.....	28
1.4 Дифференциальный метод факторизации	31
1.5 Об особенностях топологического подхода теории блочных структур при наличии блоков разных размерностей.....	35
2 ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О ПОВЕДЕНИИ РАЗНОТИПНЫХ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПЛАСТИН НА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОДЛОЖКЕ	43
2.1 Постановка задач для покрытия.....	43
2.2 Постановка задач для подложки	49
2.3 Динамическая задача для контактирующих пластин на деформируемой подложке	51
2.4 Метод собственных функций в решении задачи об установившихся колебаниях составного покрытия на упругом основании	55
2.5 Статическая задача для разнотипных пластин на деформируемой подложке	66
2.6 Об особенности перехода от задачи для установившихся колебаний к статической	73
3 НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПЛАСТИН НА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОДЛОЖКЕ	77
3.1 Трехмерная задача об установившихся колебаниях составной пластины с разломом	77
3.2 Задача о статическом взаимодействии пластин на деформируемом основании	88
3.3 Результаты численного исследования задач	97

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	102
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	104
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	106
ПРИЛОЖЕНИЕ А	121
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	135

ВВЕДЕНИЕ

Землетрясения – грозные природные явления, способные повлечь за собой масштабные катастрофы и нанести серьезный материальный ущерб. В силу опасных последствий сейсмических событий задачи разработки теоретических основ новых геофизических технологий, систем мониторинга и прогнозирования сейсмической активности относят к фундаментальным научным проблемам настоящего времени. Наряду с этим в таких отраслях, как машиностроение, материаловедение, дефектоскопия возникают проблемы прочности, имеющие ту же математическую основу, что и развиваемая в Кубанском госуниверситете концепция механического прогноза сейсмичности.

В России и целом ряде других стран реализуются крупные программы по исследованию вопросов изменения природной среды, в которых особое место отведено изучению сейсмических процессов [1]. Создание теоретической базы и методов обработки данных наблюдений, направленных на прогнозирование землетрясений и техногенных катастроф, относится к фундаментальным задачам сейсмологии и геофизики.

Значительный вклад в исследование фундаментальных проблем сейсмических процессов в земной коре внесли В. В. Адушкин, А. О. Глико, Л. В. Канторович, Б. В. Костров, С. В. Медведев, В. Н. Родионов, М. А. Садовский, В. И. Уломов, Ю. К. Чернов [1–14]. Большое значение в данной области имеют результаты А. Ben-Menahem, J. D. Byerlee, J. H. Dieterich, С. Marone, J. R. Rice, С. Н. Scholz [15–18] и целого ряда других ученых [19–25].

Необходимо также отметить вклад К. Аки, А. С. Алексеева, В. В. Кузнецова, В. Ф. Писаренко, П. Ричардса, В. Н. Родионова, У. Ф. Саваренского в исследование динамики земной коры [26–30]. В области изучения структуры литосферы и совершенствования методов сейсморазведки важные результаты принадлежат Е. В. Гальперину, Г. А. Гамбурцеву, Ю. В. Ризниченко [31, 32], в области развития методов моделирования и мо-

нитинга сейсмоопасных участков земной коры – А. В. Николаеву, Л. Е. Собисевичу, А. Л. Собисевичу [33–35].

В результате промышленной деятельности человека масштабное техногенное воздействие на литосферную оболочку нередко усугубляет сейсмическую активность. Проявления индуцированной сейсмичности стимулируют интерес к изучению напряженно-деформированного состояния литосферных структур.

На сегодняшний день существуют разнообразные модели подготовки и развития сейсмических событий, получены значительные результаты в экспериментальных исследованиях строения геофизической среды. Однако задача достоверного прогноза землетрясений чрезвычайно сложна и по-прежнему является одной из насущных проблем человечества.

В Кубанском государственном университете совместно с учеными Южного научного центра РАН проводятся исследования, направленные на разработку новых методов оценки региональной сейсмичности. Основу предлагаемых подходов составляет анализ напряженности литосферных структур с позиции механики деформируемого твердого тела. Разработанная концепция оценки сейсмичности территорий базируется на определении зон концентрации напряжений, последние могут являться признаком возможного сейсмического события.

Большой вклад в развитие методов исследования статических и динамических задач теории упругости и вязкоупругости внесен: В. М. Александровым, Ю. А. Амензаде, В. А. Бабешко, В. М. Бабичем, А. В. Белоконем, Н. М. Бородачевым, И. Н. Векуа, И. И. Воровичем, Л. А. Галиным, В. Т. Гринченко, В. Д. Купрадзе, А. И. Лурье, М. Д. Мартыненко, В. И. Моссаковским, И. А. Молотковым, Н. И. Мухелишвили, В. Новацким, В. В. Новожиловым, В. В. Панасюком, Г. Я. Поповым, В. З. Партоном, Б. Л. Пелехом, В. Л. Рвачевым, В. М. Сеймовым, А. И. Слепяном, Л. А. Толоконниковым, А. Ф. Улитко, Я. С. Уфляндом, Ю. А. Устиновым, М. И. Чебаковым, Д. И. Шерманом,

J. D. Achenbach, W. M. Ewing, D. Gross, W. S. Jardetzky, H. Jeffreys, M. Lowengrub, M.J.P. Musgrave, Ch. Zhang и многими другими учеными. В работах [36–45] представлены обзоры основных результатов, полученных в данной области.

Исследования контактных задач проведены в работах В. М. Александрова, А. С. Алексеева, И. В. Ананьева, В. А. Бабешко, А. В. Белоконя, А. С. Благовещенского, Н. М. Бородачева, В. Г. Буряка, А. О. Ватульяна, И. И. Воровича, Е. В. Глушкова, Н. В. Глушковой, В. Т. Гринченко, В. Т. Головчана, А. Г. Горшкова, И. Г. Горячевой, А. Н. Гузя, В.И. Ерофеева, В. В. Зозули, Л. А. Игумнова, М. А. Ильгамова, Д. А. Индейцева, В. В. Калининчука, В. И. Колесникова, Л. И. Коссовича, В. А. Крысько, А. М. Кривцова, В. Д. Купрадзе, А. В. Манжирова, В. П. Матвиенко, Н. Ф. Морозова, В. И. Моссаковского, С. М. Мхитаряна, А. В. Наседкина, Г. И. Петрашеня, О. Д. Пряхиной, О. А. Савицкого, В. М. Сеймова, М. Г. Селезнева, А. Н. Соловьева, А. В. Смирновой, Т. В. Суворовой, Д.В. Тарлаковского, Ю. Г. Яновского и других ученых. Широкие обзоры работ, посвященных изучению динамического контактного взаимодействия, представлены в монографиях [46–57].

В настоящее время активно ведутся исследования и уже получены интересные результаты в рамках моделей, основанных на представлении о слоисто-блочном строении литосферы, обоснованном в работах академика М. А. Садовского [9–12], выводы которого способствовали формированию нового подхода к исследованию проблемы зарождения и развития сейсмических событий. В то же время разнородность свойств и сложность строения структур литосферы, отсутствие достоверной информации о характере их взаимодействия в областях разломов существенно затрудняют анализ напряженно-деформированного состояния геофизической среды традиционными методами. Несмотря на существующее разнообразие подходов, известные работы используют зачастую сильно идеализированную модель геофизической среды и соответственно – упрощенный

математический аппарат. В рамках концепции деформируемой среды литосферные плиты могут моделироваться трехмерными протяженными или неограниченными блочно-слоистыми структурами, подвергающимися воздействиям различной природы. Для практической реализации подобных моделей необходимы эффективные математические методы исследования.

Разнообразные методы и приемы изучения распространения возмущений в деформируемых средах представлены в монографиях и статьях [37, 39, 40, 43–59] и др. Среди традиционных подходов следует отметить прямые численные методы (метод конечных элементов (МКЭ) [60–63], конечно-разностные аппроксимации), широко используемые в инженерной практике, методы, основанные на вариационных подходах [37, 64], различные варианты метода граничных элементов (МГЭ) [65–68], метод фундаментальных решений [69]. Однако ни один из перечисленных подходов не является универсальным. Наиболее перспективными в исследовании задач такого рода оказались факторизационные методы, восходящие к работам Н. Винера и с успехом развиваемые в некоторых российских научных центрах. Фундаментальные результаты по развитию факторизационных подходов и разработке теории блочных структур, одной из задач которой является определение условий локализации волнового процесса, получены в работах В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О. В. Евдокимовой [70–76].

Отличительная черта глобальной сейсмичности – выраженная упорядоченность по местоположению всех сейсмоактивных регионов, обусловленная взаимодействием литосферных плит [13]. Упорядоченные изменения сейсмической активности, наблюдаемые в тектонически опасных зонах, указывают на явления, связанные с возникновением резонансных взаимодействий, которые могут быть вызваны как взаимным влиянием деформационных волн, распространяющихся вдоль конвергентных границ, так и искусственными возмущениями [35]. Однако данные сейсмомониторинга подтверждают возможность землетрясений и на

территориях, удаленных от глобальных разломов, что диктует необходимость исследования особенностей распространения возмущений через межблочные швы литосферных структур сравнительно небольшой мощности.

В масштабе строения Земли литосферные плиты можно рассматривать в качестве покрытий относительно малой толщины. В свою очередь проблема геодинамического взаимодействия блочных структур как разделенных контактирующих деформируемых пластин, расположенных на упругом основании, может быть изучена методами теории смешанных контактных задач [37–39, 50, 54, 55, 77–81]. Исследования задач для сред с покрытиями проводились В. М. Александровым [78], С. А. Амбарцумяном, Б. Д. Анниным, И. Н. Векуа [82], А. С. Вольмиром [83], И. И. Воровичем [84], А. Л. Гольденвейзером [85], И. Г. Горячевой [79], А. И. Лурье, С. М. Мхитаряном [77], Б. Л. Пелехом [86], Г. И. Петрашенем, В. С. Саркисяном [87], С. П. Тимошенко [88, 89] и др. [90–93]. При этом рассматривались разные механические модели покрытий и подходы к решению задач, подробный обзор которых представлен в [56]. В настоящее время в связи с активным использованием в современной технике в качестве основных элементов конструкций пластин и оболочек, в том числе анизотропных, растет интерес к исследованиям задач для тел с покрытиями в широком диапазоне постановок. В работах [94–97] приведены подходы к построению динамической теории тонких анизотропных пластин и методы решения конкретных задач, а также экспериментальные данные. В последние годы активно развивается теория оболочек при учете поверхностных напряжений [98–100], в том числе в применении к задачам наномеханики [101, 102].

Диссертационная работа посвящена исследованию взаимодействия литосферных плит, контактирующих вдоль прямолинейных разломов, путем их моделирования двумерными пластинами на трехмерном упругом основании, разработке методов определения характеристик напряженно-

деформированного состояния структур с составными покрытиями при вибрационном и статическом воздействии, изучению влияния характера взаимодействия на разломах и свойств элементов структуры на развитие волнового и деформационного процессов.

Актуальность проведенного диссертационного исследования определяется следующим обстоятельством. В Кубанском госуниверситете и Южном научном центре РАН развивается новая механическая концепция прогноза сейсмичности, основанная на анализе возможных механизмов разрушения литосферных плит в зонах контакта или у границ разломов. Положения этой концепции, опубликованные в многочисленных работах, представленные на научных мероприятиях, а также для ознакомления на сайте программы Еврокомиссии «ЕРОС» [103], требуют для своей реализации глубокого математического анализа сложных механических процессов, протекающих при взаимодействии литосферных плит. Исследования этих процессов потребовали привлечения математического аппарата высокого уровня – топологии, факторизационных методов, внешнего анализа, метода блочного элемента и других современных подходов.

В КубГУ успешно выполнен ряд работ в данном направлении, в частности в работах В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О. В. Евдокимовой, М. В. Зарецкой, А. В. Павловой большое внимание уделено математическому описанию реальных моделей строения геофизической среды блочными структурами. В исследованиях В. В. Лозового и А. С. Мухина рассмотрены вопросы диагностики разломов и дефектов литосферных структур. В работах М. Н. Колесникова предпринята попытка исследования особенностей прохождения сейсмических волн через разломы.

Колесниковым М.Н. рассмотрена динамическая плоская задача о взаимодействии литосферных плит на деформируемом основании под действием вертикальной гармонической нагрузки, приложенной к одной из плит, и развит метод решения двумерных задач. Однако следует отметить, что нарастание сейсмичности, вызванное изменением напряженно-

деформированного состояния литосферных структур, происходит медленно. Это подтверждается данными высокоточных GPS-приемников (рисунки Б1–Б5 приложения Б). Смещения литосферных плит за неделю достигают всего нескольких миллиметров, что свидетельствует о статическом взаимодействии в зоне контакта. В настоящей диссертации построены элементы теории статического взаимодействия литосферных плит в пространственном варианте.

Целью подготовленной диссертационной работы является:

- разработка на основе факторизационных и топологических подходов нового метода исследования и решения граничных задач, имеющих широкий спектр применения – от оценки напряженно-деформированного состояния взаимодействующих разнотипных литосферных плит, расположенных на деформируемом основании, до изучения свойств деформируемых тел с покрытиями, содержащими сложно обнаруживаемые вертикальные трещины;
- поиск путей преодоления трудностей использования других подходов для изучения медленного движения литосферных плит или статического состояния тел с дефектными покрытиями;
- исследование напряженно-деформированного состояния медленного или статического взаимодействия литосферных структур, находящихся на деформируемом основании и контактирующих вдоль прямолинейного разлома.

Достижение цели осуществлялось посредством решения следующих **задач**:

- модификация метода собственных функций с применением метода блочного элемента для построения решения пространственной задачи об установившихся колебаниях для двух разнотипных контактирующих пластин на поверхности упругого основания;
- разработка метода исследования граничных задач статического взаимодействия контактирующих между собой и деформируемым основанием пластин, моделирующих литосферные плиты;

- разработка подходов к решению задач вибрации при переходе к статическому случаю для убывающей частоты колебаний;
- построение решения трехмерной задачи об установившихся колебаниях составного покрытия с прямолинейным разломом на деформируемой подложке под действием сосредоточенной вертикальной нагрузки;
- построение решения статической пространственной задачи для двух разнотипных контактирующих пластин, граничащих вдоль прямой, на поверхности упругого основания под действием сосредоточенной вертикальной нагрузки;
- исследование взаимодействия контактирующих литосферных плит при прохождении сигнала через межблоковые разломы в случае уменьшения частоты колебаний.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались топологические и факторизационные методы, метод блочного элемента, дифференциальный и интегральный методы факторизации в теории граничных задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Достоверность результатов исследования обеспечивается корректностью постановок рассматриваемых граничных задач, применением строгих математических методов, а также сравнением результатов с полученными иными методами известными результатами других авторов.

Научную новизну диссертации определяют следующие основные результаты автора:

- новый факторизационный метод исследования задач о взаимодействии между собой и с деформируемым основанием разнотипных пластин Кирхгофа;
- новый эффективный метод исследования трехмерных смешанных граничных задач, моделирующих статическое напряженно-деформированное состояние взаимодействующих литосферных плит, позволяющий проводить

анализ решений при различных условиях в области контакта для прямолинейных разломов;

– построенные новые типы функциональных уравнений и представленный полный комплекс факторизационных методов их решения;

– результаты вычислительных экспериментов для установившихся колебаний деформируемой среды с покрытием в виде полубесконечных пластин, контактирующих вдоль прямолинейного разлома, при разных условиях контакта, а также различных свойствах контактирующих пластин.

Теоретическая значимость и практическая ценность полученных результатов определяются возможностью их применения в различных областях науки и техники.

Предложенные механико-математические методы могут быть применены в сейсмологии и геофизике. Так, сделанные выводы о влиянии характера взаимодействия литосферных плит на прохождение сигнала нашли применение в проектах при оценке сейсмического состояния территории олимпийского строительства с учетом имеющихся разломов на основе данных о напряжениях и деформациях.

Экспериментальные исследования взаимодействия литосферных структур на разломах и особенностей прохождения сейсмических сигналов через разлом требуют значительных временных и материальных затрат. Полученные теоретические результаты позволят с применением вибросейсмоисточников тестировать типы разломов литосферных плит, рационально определив программы экспериментов.

Кроме того, полученные результаты могут найти приложения в инженерной практике, где использование покрытий, в том числе разнотипных (с применением наноматериалов), на рабочих частях элементов конструкций и деталей машин позволяет создать поверхности, обладающие улучшенными эксплуатационными характеристиками, в частности – в авиации и судостроении в связи с решением проблем трещенообразования в использу-

емых многослойных покрытиях. Результаты исследования также могут быть применены для оценки возможности эксплуатации изделий с дефектами.

Полученные в диссертации научные результаты являются новыми и способствуют дальнейшему развитию математических методов исследования напряженно-деформированного состояния сред сложной структуры.

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (государственное задание, проект 2014/75, НИР № 2274 «Построение глобальной модели напряженности Земли для оценки сейсмичности в российских регионах»). Результаты диссертационного исследования использованы при выполнении проектов Федеральной целевой комплексной программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.В37.21.0646 по теме «Развитие новых наукоемких методов мониторинга и прогноза состояния территорий в сейсмоопасных и оползнеопасных зонах» от 20.08.12 г., соглашение № 14.В87.21.0869 по теме «Развитие метода блочных элементов для оценки резонансных свойств тел и конструкций сложного строения» от 06.09.2012 г.), а также проектов, поддержанных грантами РФФИ: 13-08-00196_a, 13-01-00132_a, 13-01-96502_p-юг-а, 13-01-96503_p-юг-а, 13-01-96504_p-юг-а, 13-01-96509_p-юг-а, что также указывает на актуальность темы и практическую значимость результатов диссертационной работы.

На защиту выносятся:

– новый метод исследования и решения граничных задач о напряженно-деформированном состоянии взаимодействующих разнотипных литосферных плит, расположенных на деформируемом основании, разработанный на основе факторизационных и топологических подходов;

– метод определения характеристик статического напряженно-деформированного состояния деформируемой среды с покрытием, образованным двумя разнотипными протяженными пластинами, контактирующими вдоль прямолинейного разлома;

– алгоритмы расчета амплитуд перемещений поверхностей пластин покрытия и вычисления ряда базовых параметров, необходимых для исследования широкого круга граничных задач;

– результаты исследования влияния параметров контактирующих пластин и условий их взаимодействия на прохождение сигнала через разлом.

Диссертационная работа общим объемом 139 страниц имеет следующую структуру: введение, три главы основной части, заключение, список литературы, включающий 142 источника, и три приложения. Работа содержит 29 рисунков.

В **первой главе** излагаются теоретические основы используемых подходов и методы, применяемые в диссертационной работе. В **параграфе 1.1** приведены основные положения факторизации функций и матриц-функций, а также используемой аппроксимации. **Параграф 1.2** посвящен изложению метода факторизации целых и полиномиальных матриц-функций, применяемого при факторизации коэффициентов функциональных уравнений. В **параграфе 1.3** описана общая схема метода факторизации Винера – Хопфа. В **параграфе 1.4** представлен алгоритм дифференциального метода факторизации, применимого единообразно к исследованию граничных задач вне зависимости от типа дифференциальных уравнений. В **параграфе 1.5** рассмотрен пример применения топологического метода в граничных задачах для блочной структуры с разной размерностью блоков. В качестве рассматриваемой модели разноразмерной блочной структуры выбрана граничная задача для двух пластин в контакте с трехмерным основанием.

Во **второй главе** даны постановки динамических и статических задач, моделирующих взаимодействие литосферных структур, описаны методы решения указанных задач для пластин, контактирующих вдоль разломов прямолинейной формы, часто встречающихся на практике. В **параграфе 2.1** приведены определяющие уравнения и граничные условия для пластин. **Параграф 2.2** содержит постановки задач для подложки. В **параграфе 2.3**

описана постановка задачи о вибрации контактирующих пластин на деформируемом основании. Разработанный факторизационный метод решения для случая прямолинейных межблоковых разломов в **параграфе 2.4** рассмотрен для случая задачи об установившихся колебаниях полуограниченных пластин. Данный подход позволяет получить более простые представления решения задачи, а также может рассматриваться в качестве контрольного для проверки предельных решений задач для разломов сложной геометрии, построенных с помощью топологического метода [104, 105]. В **параграфе 2.5** изложена схема разработанного метода решения статической задачи для случая прямолинейных межблоковых разломов. Случай граничной задачи, отвечающий статической постановке, приводит к кратным корням характеристического уравнения, что требует совершенствования метода, представленного в параграфе 2.5. **Параграф 2.6** посвящен вопросу перехода от задачи вибрации к статической задаче при уменьшении частоты колебаний системы покрытие/подложка.

В **третьей главе** построены решения конкретных задач с помощью описанного во второй главе метода. В пространственной постановке рассмотрены задача о вертикальных колебаниях системы из двух полуограниченных пластин на упругой подложке под воздействием сосредоточенной поверхностной нагрузки (**параграф 3.1**) и статическая задача для такой же структуры (**параграф 3.2**).

В **параграфе 3.3** представлены результаты численного исследования задач. Рассмотрено поведение вещественных и комплексных (для статической задачи) полюсов аппроксимируемых функций рассматриваемых задач. С помощью разработанного метода реализован алгоритм построения решения задачи для установившегося режима колебаний. Проиллюстрировано влияние характера взаимодействия блоков на разломе, а также свойств контактирующих пластин на перемещения поверхности в зоне контакта, сделаны выводы о применимости полученных результатов для идентификации типов разломов.

В **заключении** представлена сводка основных результатов исследования, указана их практическая значимость. Приложения содержат список основных обозначений и графики, иллюстрирующие результаты вычислительных экспериментов.

Публикации. Основное содержание и результаты исследований, проведенных в ходе работы над диссертацией, отражены в 19 публикациях [106–124], в том числе 5 публикациях [106, 107, 109–111], вышедших в изданиях из перечня, утвержденного ВАК РФ, ведущих рецензируемых изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание степени кандидата наук, 1 работа принята к печати.

Результаты работы представлялись на Международной научной конференции «Современные проблемы механики и математики» (Украина, г. Львов, 2013 г.), Международной молодежной конференции «Механика 2013» (Армения, г. Цахкадзор, 2013 г.), IX международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты» (г. Новосибирск, 2013 г.), Международной научной конференции «Великий русский инженер В.Г. Шухов и его научное наследие» (г. Москва, 2013 г.), XVI Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике» (г. Санкт-Петербург, 2013 г.), X и XI всероссийских научных конференциях молодых ученых «Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах» (г. Анапа, 2013 г. и 2014 г.), IX и X научных конференциях студентов и аспирантов базовых кафедр Южного научного центра РАН (г. Ростов-на-Дону, 2013 г. и 2014 г.), XIII и XIV объединенных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых факультета компьютерных технологий и прикладной математики КубГУ (г. Краснодар, 2013 г. и 2014 г.), VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Чебоксары, 2014 г.), Международной научно-практической

конференции «Природноресурсный потенциал, экология и устойчивое развитие регионов России» (г. Пенза, 2014 г.), X Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях NPNJ'2014: (г. Алушта, 2014 г.), Международной научно-практической конференции «Инновационное развитие современной науки» (г. Уфа, 2014 г.), VIII Международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Армения, г. Горис – Степанакерт, 2014 г.).

В представленных в журналах и сборниках работах основные идеи постановок задач и выбор методов их исследования принадлежат О. М. Бабешко и В. А. Бабешко, соискателем реализованы алгоритмы аналитического построения решений, разработаны вычислительные алгоритмы, проведен анализ результатов. В совместных работах с М. Н. Колесниковым последнему принадлежит преобразование дифференциального оператора [112, 113, 116] и реализация алгоритмов приближенной факторизации [114, 123], автором построены и решены функциональные уравнения, разработаны общие вычислительные алгоритмы. В работах [106, 111] соискателем построены псевдодифференциальные уравнения для отдельного блока, получены факторизующие матрицы-функции, в [107–110, 115, 118] автором диссертации получены функциональные соотношения для блоков с разломами, реализован прямой метод блочного элемента для разноразмерных блоков. В работе [119] диссертанту принадлежит содержательная часть, расчеты проведены соавтором.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю О. М. Бабешко, а также В. А. Бабешко за определение направления исследования диссертационной работы, постановку задач и обсуждение полученных результатов.

1 ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

В данной главе представлены основные сведения о способах факторизации функций и матриц-функций, описаны схемы метода решения интегральных уравнений Винера – Хопфа и дифференциального метода факторизации, используемые при изложении предлагаемых подходов. Приводимые общие положения теории заимствованы из работ [39, 49, 125, 126]. Изложен метод приближенной факторизации для случая полиномиальных матриц. Здесь же описаны особенности топологического подхода в теории блочных структур при наличии разноразмерных блоков.

1.1 Основные методы факторизации функций и матриц-функций

Понятие факторизации функций и матриц-функций имеет основополагающее значение для реализации предлагаемых в диссертационной работе подходов.

Рассмотрим функцию $F(\alpha)$, где $\alpha \in E \subset \mathbb{C}$. Функция $F(\alpha)$ называется факторизованной в виде суммы относительно контура σ (рис.1), если она может быть представлена в виде

$$F(\alpha) = F^+(\alpha) + F^-(\alpha), \quad (1.1.1)$$

где $F^+(\alpha)$, $F^-(\alpha)$ – регулярные и непрерывные вплоть до границы соответственно в областях E_+ (выше контура σ) и E_- (ниже контура σ) функции.

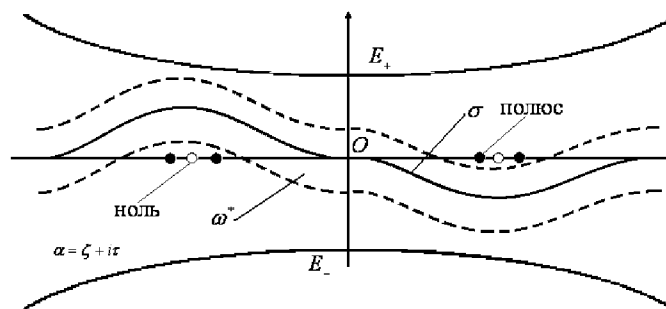


Рисунок 1 [49] – Область регулярности $F(\alpha)$ и контур σ

При формулировке условий факторизации используется понятие распадающейся алгебры. Обозначим через \tilde{C} множество непрерывных на $R = (-\infty, \infty)$ функций f , обладающих свойством $f(-\infty) = f(\infty)$.

Определение 1.1 [49, 126]. Банахова алгебра $E \subset \tilde{C}$, содержащая множество всех рациональных функций, не имеющих полюсов на вещественной оси, плотное в E , называется R -алгеброй.

Определение 1.2 [49, 126]. R -алгебра E называется распадающейся, если она представляет собой прямую сумму подалгебр E_+ и E_- , каждая из которых является замыканием по норме E линейных оболочек

$$\left\{ \left(\frac{\alpha - i}{\alpha + i} \right)^k \right\}_{k=0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \left\{ \left(\frac{\alpha - i}{\alpha + i} \right)^k \right\}_{k=-\infty}^{-1} \quad \text{соответственно.}$$

Теорема 1.1 [49]. Пусть $F(\alpha)$ – аналитическая функция комплексного аргумента $\alpha = \zeta + i\tau$, регулярная в области ω^* , содержащей контур σ , такая, что $|F(\zeta + i\tau)| < C|\zeta|^{-p}$, $p > 0$, $|\zeta| \rightarrow \infty$. И последнее неравенство выполняется в ω^* равномерно по τ . Тогда справедлива факторизация $F(\alpha)$ в виде суммы относительно контура σ вида (1.1.1), где

$$\begin{aligned} F^+(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_-} \frac{F(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha \in E_+, \\ F^-(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_+} \frac{F(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha \in E_-. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Здесь σ_+ и σ_- – контуры, лежащие в ω^* соответственно выше и ниже контура σ (рис. 1).

Если факторизируемая функция не имеет особенностей на вещественной оси, в качестве контура σ может быть выбрана вещественная ось.

Если $F(\alpha)$ является рациональной функцией, убывающей на бесконечности, т. е. $F(\alpha) = \frac{P_j(\alpha)}{P_n(\alpha)}$, где через $P_l(\alpha)$ обозначен полином степени l ($j < n$) и $P_n(\alpha) \neq 0$ для $-\tau_1 < \text{Im } \alpha < \tau_2$, то в результате факторизации $F(\alpha)$ в виде суммы (1.1.1) получим

$$F^+(\alpha) = \sum_{l=1}^{n-l_1} \frac{R_l^+}{\alpha - z_l^-}, \quad F^-(\alpha) = \sum_{l=1}^{l_1} \frac{R_l^-}{\alpha - z_l^+}, \quad R_l^\pm = \frac{P_j(z_l^\mp)}{P_n'(z_l^\mp)}.$$

Здесь z_l^+ ($l = \overline{1, l_1}$) – однократные нули $P_n(\alpha)$, лежащие в E_+ , а z_l^- ($l = \overline{1, n-l_1}$) – лежащие в E_- .

Определение 1.3 [49]. Функция $K(\alpha)$ называется факторизованной в виде произведения относительно контура σ , если она может быть представлена следующим образом:

$$K(\alpha) = K^+(\alpha)K^-(\alpha). \quad (1.1.3)$$

Здесь $K^\pm(\alpha)$ – регулярные функции без нулей в областях E_\pm соответственно и непрерывные вплоть до границы (в том числе – на бесконечности).

Определение 1.4 [49] Факторизация называется канонической, когда для $K(\alpha) \in \mathbf{E}$, $K^\pm(\alpha) \in \mathbf{E}_\pm$ справедливо также $[K^\pm(\alpha)]^{-1} \in \mathbf{E}_\pm$.

Теорема 1.2 [49] Пусть функция $\ln K(\alpha)$ ($\alpha = \zeta + i\tau$) удовлетворяет условиям теоремы 1.1 и $K(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-\kappa})$, $\kappa > 0$, в ω^* равномерно по τ при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Тогда для $K(\alpha)$ существует представление вида (1.1.3), где

$$K^+(\alpha) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_-} \frac{\ln K(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi \right], \quad \alpha \in E_+; \quad (1.1.4)$$

$$K^-(\alpha) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_+} \frac{\ln K(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi \right], \quad \alpha \in E_-.$$

Здесь $K^\pm(\alpha)$ – регулярные ограниченные функции, не имеющие нулей соответственно в областях E_\pm .

В условиях теоремы 1.2 факторизация является канонической.

При решении статических контактных задач рассматриваемые функции не имеют особых точек и нулей на вещественной оси и факторизацию таких функций можно осуществлять относительно вещественной оси. При исследовании динамических задач подлежащие факторизации функции имеют вещественные нули и особенности (полюсы и точки ветвления). В таком случае факторизация проводится относительно некоторого контура, разделяющего плоскость на области E_+ и E_- , почти всюду совпадающего с вещественной осью, за исключением участка, содержащего вещественные особенности $K(\alpha)$, которые обходятся контуром, оставаясь в E_+ или E_- .

При решении практических задач зачастую можно ограничиться использованием приближенной факторизации функций. В таких случаях подлежащую факторизации функцию можно аппроксимировать рациональной.

Рассмотрим случай, когда подлежащие факторизации функции имеют нули и особенности типа полюсов на вещественной оси. Введем в рассмотрение функцию

$$\Pi(\alpha) = \prod_j \frac{(\alpha - z_j^+)^{q_j^+} (\alpha - z_j^-)^{q_j^-}}{(\alpha - p_j^+)^{r_j^+} (\alpha - p_j^-)^{r_j^-}}, \quad \Pi(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-1}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad \text{где}$$

числа q_k^\pm соответствуют порядкам положительных и отрицательных нулей, r_k^\pm – полюсов (q_j^\pm, r_j^\pm будут дробными для точек ветвления). Функцию $K(\alpha)$ можно представить следующим образом:

$$K(\alpha) = K_0(\alpha)\Pi(\alpha), \quad (1.1.5)$$

$$K_0(\alpha) = K(\alpha)\Pi^{-1}(\alpha).$$

В случае, когда уже построена факторизация функции $K_0(\alpha) = K_0^+(\alpha)K_0^-(\alpha)$, для $K(\alpha)$ справедливо представление вида [39]

$$K^\pm(\alpha) = K_0^\pm(\alpha)\Pi_\pm(\alpha), \quad \Pi_\pm(\alpha) = \prod_j \frac{(\alpha - z_j^\pm)^{q_j^\pm}}{(\alpha - p_j^\pm)^{r_j^\pm}}.$$

Пусть теперь функция $\bar{K}(\alpha)$, регулярная в ω^* (ω^* содержит вещественную ось) и не имеющая нулей в этой области, имеет асимптотическое поведение на вещественной оси $\bar{K}(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-m})$, $\alpha \rightarrow \pm\infty$, $m > 0$. Эту функцию можно представить в виде $\bar{K}(\alpha) = K_1(\alpha) + \alpha K_2(\alpha)$, где $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$ – четные [39]

$$2K_1(\alpha) = \bar{K}(\alpha) + \bar{K}(-\alpha), \quad 2\alpha K_2(\alpha) = \bar{K}(\alpha) - \bar{K}(-\alpha).$$

Введем преобразование переменной, переводящее вещественную полуось $\alpha \in [0, \infty]$ в отрезок $x \in [0, 1]$, $\alpha = \sqrt{\frac{A^2 x}{1-x}} > 0$, $x = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + A^2}$, $A > 0$.

Полученные таким образом функции $h_k(x) = K_k\left(\sqrt{\frac{A^2 x}{1-x}}\right)$ ($k = 1, 2$) являются непрерывными при $x \in [0, 1]$ и могут быть аппроксимированы полиномами Бернштейна

$$h_k(x) \approx h_k^*(x) = \sum_{l=0}^{N_A} h_k\left(\frac{l}{N_A}\right) C_{N_A}^l x^l (1-x)^{N_A-l}.$$

Обратная замена переменных приводит к функциям $K_k^*(\alpha) = h_k^*\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + A^2}\right)$, $\bar{K}^*(\alpha) = K_1^*(\alpha) + \alpha K_2^*(\alpha)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. При этом выполняется условие $|h_1(x) - h_1^*(x)| < \varepsilon(1-x)^\gamma$, $|h_2(x) - h_2^*(x)| < \varepsilon(1-x)^{0,5+\gamma}$, $\gamma < \frac{m}{2}$, если число N_A выбирается достаточно большим. Можно показать [39], что при этом справедливо следующее неравенство:

$$|\bar{K}(\alpha) - \bar{K}^*(\alpha)| |\bar{K}^{-1}(\alpha)| (1 + |\alpha|)^{2\gamma} \leq \varepsilon (1 + A)(1 + A^{2\gamma}) \chi^{-1}, \quad \chi = \min_{\alpha \in [-\infty, +\infty]} |\bar{K}(\alpha)|.$$

Тогда $\bar{K}(\alpha) \approx \bar{K}^*(\alpha)$ при $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, где рациональная функция $\bar{K}^*(\alpha)$ имеет вид

$$\bar{K}^*(\alpha) = \frac{\prod_{j=1}^{N^+} (\alpha - \zeta_j^+)^{k_j^+} \prod_{j=1}^{N^-} (\alpha - \zeta_j^-)^{k_j^-}}{(\alpha - iA)^{N_A} (\alpha + iA)^{N_A}},$$

ζ_j^\pm – нули числителя $\bar{K}^*(\alpha)$, лежащие выше (+) и ниже (–) вещественной оси; k_j^\pm – их кратности; $\sum_{j=1}^{N^+} k_j^+ + \sum_{j=1}^{N^-} k_j^- = 2N_A$. При достаточно малом ε (например, $\varepsilon < \chi/2$) среди ζ_k^\pm нет вещественных. Таким образом,

$$\bar{K}^*(\alpha) = \bar{K}_+(\alpha) \bar{K}_-(\alpha), \quad \bar{K}_\pm(\alpha) = \frac{\prod_{k=1}^{N^\pm} (\alpha - \zeta_k^\pm)^{k_j^\pm}}{(\alpha \mp iA)^{N_A}}.$$

При этом $\bar{K}^\pm(\alpha) \approx \bar{K}_\pm(\alpha)$.

Факторизация матриц-функций имеет ту же алгебраическую основу. Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}(\alpha) = \{a_{kn}(\alpha)\}_1^N$, имеющую в качестве элементов непрерывные на контуре σ функции. Считается, что матрица $\mathbf{A}(\alpha)$ факторизована левосторонне (правосторонне) относительно заданного контура σ [39, 49], если найдены две неособенные матрицы $\mathbf{A}_-(\alpha) = \{a_{kn}^-(\alpha)\}_1^N$, $\mathbf{A}_+(\alpha) = \{a_{kn}^+(\alpha)\}_1^N$ с элементами, регулярными соответственно в областях $E_- (-)$ и $E_+ (+)$,

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A}_+(\alpha) \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{A}_-(\alpha) \quad (\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A}_-(\alpha) \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{A}_+(\alpha)),$$

где $\mathbf{D}(\alpha)$ – диагональная матрица-функция вида

$$\mathbf{D}(\alpha) = \{u_0^{k_j} \delta_{ij}\}_1^N, \quad u_0 = \frac{\alpha - i}{\alpha + i}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Индексы $\kappa_j \in \mathbb{Z}$, $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_N$.

Теорема 1.3 [39, 49] Пусть \mathbf{E} – произвольная \mathbb{R} -алгебра. Матрица-функция с элементами из \mathbf{E} и определителем, отличным от нуля, допускает правостороннюю (левостороннюю) каноническую факторизацию, тогда и только тогда, когда \mathbf{E} – распадающаяся алгебра.

Методы факторизации матриц детально изложены в [39, 49, 126], далее будет представлен один из возможных подходов.

1.2 О дифференциальной факторизации матриц-функций

В настоящем параграфе представлен метод дифференциальной факторизации, применяемый специально при факторизации коэффициентов функциональных уравнений. Этот подход отличается от описанного в [39, 49] прежде всего тем, что факторизуется не мероморфная матрица-функция, а целая или полиномиальная. Если для факторизации матриц-функций одного комплексного переменного существует довольно много численных алгоритмов ее осуществления, то для случая многих комплексных переменных таковых практически нет. Кроме того, факторизационные подходы к исследованию и решению задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП) требуют факторизации матриц-функций с элементами в виде полиномиальных аналитических функций нескольких комплексных переменных. Эти обстоятельства определяют потребность получения формул приближенной факторизации таких матриц.

Пусть в пространстве N комплексных переменных α_k , $k = \overline{1, N}$, рассматривается матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha)$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$), элементами которой являются целые функции. Известно, что для левосторонней факторизации мероморфной матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ по переменной α_n относительно некоторой замкнутой кривой Γ_n , разделяющей односвязные области λ_+ и λ_- , необходимо факторизовать некоторую целую функцию –

общий знаменатель всех элементов матрицы $\mathbf{K}(\alpha)$, а также матрицу-функцию, элементы которой – целые функции. Для последней требуется построить представление вида

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \mathbf{K}_+(\alpha_n)\mathbf{K}_-(\alpha_n). \quad (1.2.1)$$

При этом в (1.2.1) элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ N комплексных переменных рассматриваются в качестве функций переменной α_n при фиксированных вещественных значениях остальных α_k ($k \neq n$). Матрица-функция $\mathbf{K}_+(\alpha_n)$ должна быть неособенной и иметь регулярные в области λ_+ элементы, $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$ должна иметь те же свойства в λ_- (дополнении λ_+). Кроме того, полученные в результате факторизации элементы матриц-функций в своих областях регулярности должны иметь определенное поведение на бесконечности.

Пусть в общем случае элементы рассматриваемых матриц-функций $K_{mp}(\alpha)$, $m, p = \overline{1, M}$, являются целыми функциями α_k , $k = \overline{1, N}$, обращающимися в нуль на аналитических множествах многих комплексных переменных. Формально описание этих множеств можно представить в разрешенном относительно переменной α_n виде для вещественных значений остальных переменных

$$\alpha_{ns} = \alpha_{ns}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_N) = \alpha_{ns}(\alpha'), \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.2.2)$$

Здесь штрихом обозначено исключение переменной с индексом n . Далее $\alpha_{ns}(\alpha')$ из представления (1.2.2) будем называть нулями целых функций, определяющими в терминах одной комплексной переменной ее тип и порядок [127, 128]. Для простоты тип полагается не выше σ , порядок считается первым. При этом определитель матрицы-функции $\Delta(\alpha)$ является целой функцией того же порядка и типа – не выше $M\sigma$.

Представленные формулы факторизации получены, опираясь на результаты работы [129].

Введем следующие обозначения для нулей определителя матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$:

$$z_{sk}^{\pm} = \alpha_{sk}^{\pm}(\alpha') \pi s + o(1), \quad s \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.2.3)$$

где z_{sk}^+ – нули определителя, принадлежащие области λ_+ , z_{sk}^- – принадлежащие области λ_- .

Здесь функции $\alpha_{sk}^{\pm}(\alpha')$ – ограниченные при $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и непрерывные. При этом количество нулей может быть ограниченным в случае, если матрица $\mathbf{K}(\alpha)$ – полиномиальная. Асимптотика (1.2.3) нулей указывает на то, что порядок целых функций принят во внимание.

Рассмотрим канонические произведения, сходящиеся абсолютно и имеющие вид

$$\Phi_{k\pm}(\alpha_n) = \gamma_k(\alpha_n) \prod_{s=1}^{S_k} \left(1 - \frac{\alpha_n}{z_{sk}^{\mp}} \right) e^{\mp \frac{\alpha_n}{z_{sk}^{\pm}}}, \quad k = \overline{1, N}, \quad S_k \leq \infty, \quad (1.2.4)$$

где $\gamma_k(\alpha_n)$ – не имеющие нулей по параметру α_n целые функции.

Произведения (1.2.4) будут конечными, если матрицы-функции, подлежащие факторизации, являются полиномиальными. Пусть имеет место представление

$$K(\alpha_n) = \det \mathbf{K}(\alpha_n) = \prod_{p=1}^M \Phi_{p+}(\alpha_n) \Phi_{p-}(\alpha_n), \quad K(\alpha_n) = K_+(\alpha_n) K_-(\alpha_n),$$

$$\text{т. о. } K_+(\alpha_n) = \prod_{p=1}^M \Phi_{p+}(\alpha_n), \quad K_-(\alpha_n) = \prod_{p=1}^M \Phi_{p-}(\alpha_n).$$

Для матриц-функций $\mathbf{K}_m(\alpha)$ порядка $M - 1$, получаемых из $\mathbf{K}(\alpha)$ вычеркиванием столбца и строки с номером m , существуют обратные $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha)$,

если определители $\mathbf{K}_m(\alpha)$ отличны от тождественного нуля. Обратная матрица-функция $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha)$ может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha_n) = D_m^{-1}(\alpha_n) \left\| D_{ps}(m, \alpha_n) \right\|, \quad p \neq m, \quad s \neq m, \quad D_m(\alpha_n) = \det \mathbf{K}_m(\alpha_n). \quad (1.2.5)$$

При этом считается, что $D_m(z_{sp}^+) \neq 0$.

Введем функции вида

$$R_{pm}(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \sum_{s=1}^N \frac{{}'D_{ps}(m, \eta) K_{sm}(\eta) d\eta}{D_m(\eta) \Phi_{m-}(\eta) (\eta - \alpha_n)}, \quad p = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, M, \quad \alpha_n \in \lambda_-. \quad (1.2.6)$$

Штрих здесь означает, что член суммы с номером $s = m$ пропускается. Контур Γ ограничивает область, содержащую нули $\Phi_{m-}(\eta)$, расположенные в λ_+ , и отделяет области расположения нулей функции $D_m(\alpha_n)$.

Введем обозначение $\mathbf{P}_m(\alpha_n)$ для матрицы-функции порядка M , у которой только m -й столбец содержит элементы $P_{pm} = R_{pm}$ ($p = \overline{1, M}$), отличные от нуля. При этом диагональные элементы $P_{jj} = 1$ ($j \neq m$), $P_{mm} = \Phi_{m-}^{-1}$. В случае расходимости интеграла (1.2.6) в качестве P_{mm} можно принять $\Phi_{m-}^{-1} \Phi_{m+}^{-1}$.

Введем следующее обозначение:

$$\left[\mathbf{K}(\alpha_n) \right]_m \mathbf{P}_m(\alpha_n) = \mathbf{K}(\alpha_n) \mathbf{P}_m(\alpha_n). \quad (1.2.7)$$

В (1.2.7) для построения описанной выше матрицы-функции $\mathbf{P}_m(\alpha_n)$ используются элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_n)$. Применяя указанную операцию, представим матрицу-функцию $\mathbf{K}(\alpha_n)$ в виде

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \left[\begin{array}{c} \dots \left[\begin{array}{c} \mathbf{K} \\ \mathbf{P}_1 \end{array} \right]_1 \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \dots \mathbf{P}_L \end{array} \right]_3 \dots \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_M \mathbf{P}_M^{-1} \dots \mathbf{P}_L^{-1} \mathbf{P}_{L-1}^{-1} \dots \mathbf{P}_1^{-1} \end{array} \right]_M \end{array} \right]_M.$$

Из последней формулы видно, что $\mathbf{K}(\alpha_n)$ индуцирует согласно (1.2.6) матрицу-функцию \mathbf{P}_1 , которая в свою очередь индуцирует \mathbf{P}_1^{-1} . Далее матрица-функция $\mathbf{K}\mathbf{P}_1$ индуцирует \mathbf{P}_2 , а последняя – \mathbf{P}_2^{-1} и т. д.

Теорема 1.4 [129] Матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha_n)$ допускает представление

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \mathbf{K}_+(\alpha_n) \mathbf{K}_-(\alpha_n),$$

где

$$\mathbf{K}_+(\alpha_n) = \left[\begin{array}{c} \dots \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{K} \\ \mathbf{P}_1 \end{array} \right]_1 \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \dots \mathbf{P}_{L-1} \end{array} \right]_3 \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_L \end{array} \right]_L \end{array} \right] \equiv \mathbf{K}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\dots\mathbf{P}_L,$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha_n) = \mathbf{P}_L^{-1}\mathbf{P}_{L-1}^{-1}\dots\mathbf{P}_1^{-1}, \quad L \geq 1.$$

Выбор значения L определяется требованиями задачи. Меньшим значениям L соответствует меньшее число столбцов матрицы-функции $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$, имеющих множители, содержащие нули факторизованной функции определителя $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$. В таком случае в результате факторизации получаются наиболее простые матрицы-функции. Однако это приводит к необходимости устранения разницы в поведении элементов некоторых столбцов на бесконечности при построении канонической факторизации.

1.3 Решение некоторых функциональных уравнений методом Винера – Хопфа

Метод Винера – Хопфа разрабатывался для решения интегральных уравнений на полупрямой специального вида [125].

При решении дифференциальных уравнений в частных производных контактных задач и систем в полуплоскостях $x_1 > 0$, $-\infty < x_2 < \infty$ и $x_1 < 0$, $-\infty < x_2 < \infty$ с помощью преобразования Фурье получают функциональные уравнения с комплексными переменными, которые решаются методом аналитического продолжения.

Рассмотрим функциональное уравнение вида

$$K_1(\alpha_1, \alpha_2)\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2) + K_2(\alpha_1, \alpha_2)\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2) + F(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \quad (1.3.1)$$

Уравнение (1.3.1) должно выполняться при $\alpha_2 \in R$ в некоторой области ω^* комплексной плоскости α_1 , содержащей контур σ . $K_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $K_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $F(\alpha_1, \alpha_2)$ – заданные регулярные функции при $\alpha_1 \in \omega^*$, $\alpha_2 \in R$, функции $\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2)$, $\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2)$ при $\alpha_2 \in R$ должны быть регулярны соответственно в области E_+ , расположенной выше контура, и E_- , расположенной ниже σ , и удовлетворять определенным условиям на бесконечности в своих областях регулярности.

Для решения (1.3.1) методом Винера – Хопфа в первую очередь следует факторизовать функцию $K(\alpha_1, \alpha_2) = K_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)K_1(\alpha_1, \alpha_2)$ в виде произведения, т. е. построить регулярную в области E_+ функцию K_+ , не имеющую там нулей, и функцию K_- , обладающую теми же свойствами в области E_- , вида

$$K_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)K_1(\alpha_1, \alpha_2) = K_-(\alpha_1, \alpha_2)K_+(\alpha_1, \alpha_2). \quad (1.3.2)$$

После умножения на $K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$ уравнение (1.3.1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} K_+(\alpha_1, \alpha_2)\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2) + K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2) + \\ + K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)K_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)F(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Далее свободный член полученного уравнения (1.3.3) следует факторизовать относительно контура σ в виде суммы

$$K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)K_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)F(\alpha_1, \alpha_2) = \{K_-^{-1}K_2^{-1}F\}^+(\alpha_1, \alpha_2) + \{K_-^{-1}K_2^{-1}F\}^-(\alpha_1, \alpha_2).$$

Используя последнее представление, уравнение (1.3.3) можно преобразовать, перенеся в правую часть слагаемые, регулярные ниже контура σ , а в левую – выше контура σ . Перегруппировав слагаемые, введем новую функцию $J(\alpha_1, \alpha_2)$, определяемую равенствами

$$\begin{aligned} J(\alpha_1, \alpha_2) &\equiv K_+(\alpha_1, \alpha_2)\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2) + \{K_-^{-1}K_2^{-1}F\}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \\ &= -K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2) - \{K_-^{-1}K_2^{-1}F\}^-(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Изначально функция $J(\alpha_1, \alpha_2)$ определена в области $\alpha_1 \in \omega^*$, $\alpha_2 \in R$ и регулярна в данной области. Однако функция $K_+(\alpha_1, \alpha_2)\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2) + \{K_-^{-1}K_2^{-1}H\}^+(\alpha_1, \alpha_2)$ определена и регулярна при $\alpha_1 \in E_+$, $\alpha_2 \in R$, а функция $-K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2) - \{K_-^{-1}K_2^{-1}H\}^-(\alpha_1, \alpha_2)$ определена и регулярна при $\alpha_1 \in E_-$, $\alpha_2 \in R$. Тогда аналитическим продолжением $J(\alpha_1, \alpha_2)$ может быть определена на всей комплексной плоскости α_1 при $\alpha_2 \in R$. Кроме того, она является регулярной во всей комплексной плоскости параметра α_1 при $\alpha_2 \in R$.

Рассматриваемые далее в настоящей работе дифференциальные уравнения сводятся к функциональным уравнениям вида (1.3.1), причем справедливы следующие оценки:

$$\left| K_+(\alpha_1, \alpha_2)\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2) + \{K_-^{-1}K_2^{-1}F\}^+(\alpha_1, \alpha_2) \right| < |\alpha_1|^p C_1(\alpha_2), \quad |\alpha_1| = |\zeta + i\tau| \rightarrow \infty, \\ \tau > \tau_-, \quad \alpha_2 \in R;$$

$$\left| K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2) + \{K_-^{-1}K_2^{-1}H\}^-(\alpha_1, \alpha_2) \right| < |\alpha_1|^q C_2(\alpha_2), \quad |\alpha_1| = |\zeta + i\tau| \rightarrow \infty, \\ \tau < \tau_+, \quad \alpha_2 \in R.$$

Здесь $p < 0$ и $q < 0$. Значит, $J(\alpha_1, \alpha_2)$ – регулярная во всей комплексной плоскости параметра α_1 функция, стремящаяся к нулю при $|\alpha_1| \rightarrow \infty$ и $\alpha_2 \in R$. Тогда на основе приведенных оценок по обобщенной теореме Лиувилля

[127, 128] можно заключить, что $J(\alpha_1, \alpha_2) \equiv 0$ при $\alpha_2 \in R$. Таким образом, приходим к системе

$$K_+(\alpha_1, \alpha_2)\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2) + \{K_-^{-1}K_2^{-1}F\}^+(\alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

$$K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2) + \{K_-^{-1}K_2^{-1}F\}^-(\alpha_1, \alpha_2) = 0.$$

Из этих соотношений определяются искомые функции $\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\Phi_+(\alpha_1, \alpha_2) = -K_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\{K_-^{-1}K_2^{-1}H\}^+(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\Psi_-(\alpha_1, \alpha_2) = -K_-(\alpha_1, \alpha_2)\{K_-^{-1}K_2^{-1}F\}^-(\alpha_1, \alpha_2).$$

Идея метода Винера – Хопфа послужила развитию целого ряда приближенных методов решения практически важных задач, и всякий раз, когда при решении используется факторизация функций или матриц-функций в виде произведения, будет справедливо утверждать, что решение основано на методе Винера – Хопфа [125].

1.4 Дифференциальный метод факторизации

Созданный Винером и Хопфом интегральный метод факторизации тесно связан с решением интегральных уравнений граничных задач, как правило, со смешанными граничными условиями [38]. Однако оставался актуальным вопрос о возможности прямого применения факторизационных методов к граничным задачам, исключая их преобразования к интегральным уравнениям посредством интегральных преобразований. Такой метод был создан в Кубанском госуниверситете [71, 130–132]. Применение внешнего анализа, дифференциальной факторизации функций и матриц-функций позволили эффективно строить интегральные уравнения для тел произвольной формы при любых граничных условиях. Идеи

дифференциального метода факторизации оказались особенно удобными при сочетании этого метода с методами собственных векторных функций [133].

В настоящей работе этот метод развивается применительно к пространственным динамическим и статическим задачам о контактном взаимодействии пластин, моделирующих литосферные плиты или треснувшие покрытия.

Рассмотрим граничную задачу для блочной структуры общего вида, описываемую системами неоднородных линейных ДУЧП с постоянными коэффициентами произвольного порядка [74, 130]. Пусть Ω – область, занимаемая всей блочной структурой, разбита на выпуклые подобласти Ω_l с границами $\partial\Omega_l$ ($l = \overline{1, L}$), соответствующие отдельным блокам. В каждой Ω_l задана система

$$\mathbf{K}_l(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_l = \mathbf{g}_l(\mathbf{x}),$$

$$\boldsymbol{\varphi}_l = \{\varphi_{l1}, \varphi_{l2}, \dots, \varphi_{lP}\}, \mathbf{g}_l = \{g_{l1}, g_{l2}, \dots, g_{lP}\}, \partial x_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

которую можно записать в следующем виде:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P A_{spmnk}^l \varphi_{px_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = g_{ls}(\mathbf{x}), s = \overline{1, P}, \mathbf{x} \in \Omega_l, l = \overline{1, L}, A_{spmnk}^l = \text{const}. \quad (1.4.1)$$

К системам (1.4.1), описывающим состояние отдельных блоков структуры, необходимо добавить условия сопряжения блоков между собой на границах в областях их контакта $\mathbf{x} \in \partial\Omega_l \cap \partial\Omega_m$, $l, m = \overline{1, L}$,

$$\mathbf{R}_l(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_l + \mathbf{R}_m(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_m = \mathbf{f}_{lm}, \mathbf{f}_{lm} = \{f_{lms}\} \quad (1.4.2)$$

или

$$\sum_{j=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{K_1} \sum_{p=1}^P \left[B_{spjnk}^l \varphi_{bp x_1 x_2 x_3}^{(j)(n)(k)} + B_{spjnk}^m \varphi_{dp x_1 x_2 x_3}^{(j)(n)(k)} \right] = f_{lms}(\mathbf{x}), 1 \leq l < m \leq L,$$

$$s = \overline{1, P_0}, P_0 \geq P, M_1 < M, N_1 < N, K_1 < K, \partial\Omega_l \cap \partial\Omega_m \neq \emptyset.$$

На участках блочных границ, не контактирующих с другими блоками $\mathbf{x} \in \partial\Omega_l \setminus \left(\bigcup_{m \neq l} \partial\Omega_m \right)$, $l = \overline{1, L}$, задаются граничные условия, записываемые в виде

$$\mathbf{L}_l(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3) \boldsymbol{\varphi}_l = \mathbf{f}_l, \quad \mathbf{f}_l = \{f_{ls}\}, \quad l = \overline{1, L} \quad (1.4.3)$$

или

$$\sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{K_1} \sum_{p=1}^P \left[C_{spmkn}^b \varphi_{bp}^{(m)(n)(k)} \right] = f_{ls}, \quad s = \overline{1, P_0}.$$

В задаче (1.4.1)–(1.4.3) отыскиваемое решение $\boldsymbol{\varphi}_l = \{\varphi_{pl}\}$ и заданные вектор-функции \mathbf{g}_l , \mathbf{f}_l , \mathbf{f}_{lm} принадлежат некоторому пространству медленно растущих функций $\mathbf{H}_s(\Omega)$ [74, 130–132].

Применительно к общей граничной задаче вида (1.4.1) с краевыми условиями (1.4.2), (1.4.3), описывающей взаимодействие L фрагментов разнотипных пластин, алгоритм метода включает следующие шаги:

1. Построение функционального уравнения:

$$\mathbf{K}_l(\boldsymbol{\alpha}^v) \boldsymbol{\Phi}_l(\boldsymbol{\alpha}^v) = \iint_{\partial\Omega_l} \boldsymbol{\omega}_l^v - \mathbf{G}_l(\boldsymbol{\alpha}^v), \quad \boldsymbol{\Phi}_l(\boldsymbol{\alpha}^v) = \mathbf{V}_3 \mathbf{u}_l^v,$$

где матрица-функция $\mathbf{K}_l(\boldsymbol{\alpha}^v) = \left\| k_{lmn}(\boldsymbol{\alpha}^v) \right\|$ – полиномиальная, $\boldsymbol{\alpha}^v = \{\alpha_i^v\}$ ($i = \overline{1, 3}$) имеет порядок P в v -й локальной системе координат, $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{V}_3 \boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{G} = \mathbf{V}_3 \mathbf{g}$, \mathbf{V}_3 – оператор трехмерного интегрального преобразования Фурье

$$\mathbf{V}_3 \boldsymbol{\Psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Компонентами вектора внешних форм $\boldsymbol{\omega}$ являются значения на границе $\partial\Omega_l$ искомого решения $\boldsymbol{\varphi}$, а также его нормальных производных (как неизвестных, так и описываемых граничными условиями), $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{k=1}^3 x_k \alpha_k$.

2. Факторизацию коэффициентов функционального уравнения по параметру α_3^v :

$$\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_{l+}(\alpha_3^v) \mathbf{K}_{l-}(\alpha_3^v), \quad \mathbf{K}_{l-}(\alpha_3^v) \Phi_l = \mathbf{K}_{l+}^{-1}(\alpha_3^v) \left[\iint_{\partial\Omega_l} \omega_l^v - \mathbf{G}_l \right].$$

3. Вычисление формы-вычета Лере и построение псевдодифференциального уравнения (ПДУ):

$$\lim_{\alpha_3^v \rightarrow z_{lj-}^v} \mathbf{K}_{l+}^{-1}(\alpha_3^v) \left[\iint_{\partial\Omega_l} \omega_l^v - \mathbf{G}_l(\alpha_3^v) \right] (\alpha_3^v - z_{lj-}^v) = 0, \quad lj- = \overline{1, \tilde{N}_-},$$

$$z_{lj-}^v - \text{нули } \det \mathbf{K}_l(\alpha_3^v), \quad (\operatorname{Im} z_{lj-}^v < 0);$$

4. Вывод из ПДУ интегрального уравнения граничной задачи и его решение:

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\Omega_{mv}} \mathbf{k}_n^v(x_1^v - \xi_1^v, x_2^v - \xi_2^v) \boldsymbol{\tau}_n^v(\xi_1^v, \xi_2^v) d\xi_1^v d\xi_2^v + \\ & + \sum_{\kappa=1, \kappa \neq v}^{P_{\Omega, n}} \iint_{\partial\Omega_{m\kappa}} \mathbf{k}_n^{v\kappa}(x_1^v, \xi_1^\kappa, x_2^v, \xi_2^\kappa) \boldsymbol{\tau}_n^\kappa(\xi_1^\kappa, \xi_2^\kappa) d\xi_1^\kappa d\xi_2^\kappa = \\ = & \Phi_n^v(x_1^v, x_2^v) + \sum_{\kappa=1, \kappa \neq v}^{P_{\Omega, n}} \iint_{\partial\Omega_{m\kappa}} \mathbf{g}_n^{v\kappa}(x_1^v, \xi_1^\kappa, x_2^v, \xi_2^\kappa) \Phi_n^\kappa(\xi_1^\kappa, \xi_2^\kappa) d\xi_1^\kappa d\xi_2^\kappa, \quad (x_1^v, x_2^v) \in \partial\Omega_{mv} \end{aligned}$$

неконтактирующих участков границ ($0 \leq v \leq P_{\Omega, n}$),

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\Omega_{mv}} \mathbf{k}_p^v(x_1^v - \xi_1^v, x_2^v - \xi_2^v) \boldsymbol{\tau}_l^v(\xi_1^v, \xi_2^v) d\xi_1^v d\xi_2^v + \\ & + \sum_{\kappa=1, \kappa \neq v}^{P_1} \iint_{\partial\Omega_{m\kappa}} \mathbf{k}_p^{v\kappa}(x_1^v, \xi_1^\kappa, x_2^v, \xi_2^\kappa) \boldsymbol{\tau}_p^\kappa(\xi_1^\kappa, \xi_2^\kappa) d\xi_1^\kappa d\xi_2^\kappa + \\ & + \sum_{\kappa=1, \kappa \neq v}^{P_2} \iint_{\partial\Omega_{np\kappa}} \mathbf{k}_p^{v\kappa}(x_1^v, \xi_1^\kappa, x_2^v, \xi_2^\kappa) \boldsymbol{\tau}_n^\kappa(\xi_1^\kappa, \xi_2^\kappa) d\xi_1^\kappa d\xi_2^\kappa = \Phi_l^v(x_1^v, x_2^v) + \\ & + \sum_{\kappa=1, \kappa \neq v}^{P_1} \iint_{\partial\Omega_{p\kappa}} \mathbf{g}_p^{v\kappa}(x_1^v, \xi_1^\kappa, x_2^v, \xi_2^\kappa) \Phi_p^\kappa(\xi_1^\kappa, \xi_2^\kappa) d\xi_1^\kappa d\xi_2^\kappa + \\ & + \sum_{\kappa=1, \kappa \neq v}^{P_2} \iint_{\partial\Omega_{np\kappa}} \mathbf{g}_p^{v\kappa}(x_1^v, \xi_1^\kappa, x_2^v, \xi_2^\kappa) \Phi_n^\kappa(\xi_1^\kappa, \xi_2^\kappa) d\xi_1^\kappa d\xi_2^\kappa, \quad 1 \leq v \leq P_1 + P_2, \end{aligned}$$

где $l = p$, $m = p$, если $(x_1^v, x_2^v) \in \partial\Omega_{pv}$, $l = n$, $m = np$ при $(x_1^v, x_2^v) \in \partial\Omega_{npv}$, P_1 , P_2 – числа разбиений единицы соответственно для неконтактирующего и контактирующего участков границы $\partial\Omega_{pv}$.

5. Представление общего решения:

$$\varphi_l^v \approx V_3^{-1} \left(\mathbf{K}_l^{-1}(\alpha^v) \iint_{\partial\Omega_l} \omega_l^v \right), \quad l = n, p.$$

При исследовании задач для сред с дефектами меньших размерностей дефекты следует рассматривать в качестве границ блоков, в таком случае удается реализовать однотипный алгоритм решения задач в блочных структурах. Блоки, характеризующиеся сложной формой, могут быть разбиты на составляющие, имеющие плоские границы, называемые блочными элементами [75, 76, 104].

1.5 Об особенностях топологического подхода теории блочных структур при наличии блоков разных размерностей

Дифференциальный метод факторизации, метод блочного элемента в совокупности с топологическими методами позволили значительно упростить алгоритм решения граничных задач для блочных структур. Это достигается тем, что совокупность составляющих блочной структуры рассматривается как покрытие топологического пространства с топологией индуцированного шарами евклидова пространства. Объектами топологического пространства являются как геометрические области блочной структуры, так и вектор-функции, заданные на этих областях. Топологическое пространство вектор-функций вводится применением метода блочного элемента, который позволяет осуществлять сопряжение вектор-функций на блоках-носителях и самих блоков методом топологической склейки.

Самостоятельный интерес представляет случай разноразмерной блочной структуры, описывающий, например, двумерные пластины с разломами на поверхности трехмерного основания. Такие задачи возникают при моделировании геофизических структур в сейсмологии, а также в инженерной практике при изучении поведения материалов и элементов строительных конструкций. В работах [107, 109, 134] задачи для упругих сред с покрытиями изучались с помощью метода блочного элемента.

Рассмотрим установившийся колебательный процесс упругой среды с покрытием, описываемый граничной задачей для пластины на трехмерной подложке. Такая система может рассматриваться в качестве разноразмерной блочной структуры. Пластина-покрытие может состоять из контактирующих фрагментов, в том числе разнотипных. Структура из горизонтально ориентированных блоков-пластин является простейшей моделью литосферных плит.

Обозначим область, занимаемую покрытием, через Ω и разобьем ее на однородные блоки. При наличии на фрагментах пластины дефектов типа трещин, последние также принимаются в качестве границ блоков. В результате получим совокупность структурных элементов $\Omega = \bigcup_{n=1}^{N_1} \Omega_n$ (N_1 – количество блоков), условия на границах которых определяются типом контакта. Различные граничные условия для пластин описаны в [83, 85] и приведены во второй главе настоящей работы.

Будем рассматривать описанную пластину-покрытие в качестве двумерного многообразия с краем и представим уравнения движения покрытия в принятых обозначениях для механических характеристик пластин и перемещений $\mathbf{u} = \{u_j\}$ ($j = \overline{1,3}$), где u_1, u_2 – перемещения точек срединной поверхности по ортогональным направлениям в горизонтальной плоскости, u_3 – прогиб срединной поверхности [135, 136]. В результате

линеаризации уравнений, выведенных в [83], уравнения движения плоского покрытия для установившегося с частотой ω режима колебаний примут вид

$$\mathbf{R}_n(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_n - \mathbf{E}_n \mathbf{g}_n = -\varepsilon_{5n} \mathbf{t}_n, \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (1.5.1)$$

Здесь $\mathbf{E}_n = \text{diag} \{-\varepsilon_{5n}, -\varepsilon_{5n}, \varepsilon_{5n}\}$, $\mathbf{t}_n = \{t_{jn}\}$ – вектор внешних давлений, $\mathbf{g}_n = \{g_{jn}\}$ – вектор контактных напряжений, $j = \overline{1, 3}$,

$$g_{1n} = \mu_n \left(\frac{\partial u_{1n}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3n}}{\partial x_1} \right), \quad g_{2n} = \mu_n \left(\frac{\partial u_{2n}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3n}}{\partial x_2} \right),$$

$$g_{3n} = \lambda_n \left(\frac{\partial u_{1n}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2n}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{3n}}{\partial x_3} \right) + 2\mu_n \frac{\partial u_{3n}}{\partial x_3}, \quad \text{при } x_3 = 0,$$

$\varepsilon_{5n} = \frac{1 - \nu_n^2}{E_n h_n}$, λ_n, μ_n – параметры Ляме, ν_n – коэффициент Пуассона, E_n – модуль Юнга, h_n – толщина, ρ_n – плотность n -го блока пластины-покрытия.

Вид элементов матриц $\mathbf{R}_n(\partial x_1, \partial x_2)$ представлен во второй главе.

Замечание 1.5.1 Уравнения (1.5.1) для каждого n записаны в локальной системе координат x_1^n, x_2^n, x_3^n , но ввиду очевидных значений индексов в рассматриваемых формулах ради краткости они опускаются.

После применения двумерного преобразования Фурье система (1.5.1) примет вид

$$\mathbf{R}_n(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{U}_n(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{E}_n \mathbf{G}_n(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_{5n} \mathbf{T}_n(\alpha_1, \alpha_2), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (1.5.2)$$

где $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_2 \mathbf{u}_n$, $\mathbf{G}_n = \mathbf{V}_2 \mathbf{g}_n$, $\mathbf{T}_n = \mathbf{V}_2 \mathbf{t}_n$, \mathbf{V}_2 – двумерный оператор преобразования Фурье

$$\mathbf{V}_2(\alpha_1, \alpha_2) \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x_1, x_2) e^{i(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)} dx_1 dx_2.$$

Деформируемая подложка может моделироваться по-разному, могут рассматриваться: упругое полупространство (в том числе слоистое), слой или

пакет слоев, трехмерная блочная структура и пр. В качестве простейшей модели можно принять основание Винклера.

Для всех указанных типов оснований можно выписать интегральные соотношения, связывающие перемещения $\mathbf{u} = \{u_j\}$ и напряжения $\mathbf{g} = \{g_j\}$ ($j = \overline{1,3}$) на их поверхности (при $x_3 = 0$)

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2, 0) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.5.3)$$

Здесь $\mathbf{K} = \|K_{mn}\|_{m,n=1}^3$, $\mathbf{G} = \mathbf{V}_2 \mathbf{g}$.

Для упругих оснований $K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ – мероморфные функции двух комплексных переменных α_1, α_2 , $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0) \sim O(\alpha^{-1})$ при $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty$. Выбор контуров σ_1, σ_2 определяется условиями принципа предельного поглощения. Примеры их для различных сред приведены в работах [49, 50]. Кроме того, для сложных моделей сред соотношения (1.5.3), называемые функциями влияния, могут быть получены путем экспериментов.

Рассмотрим скалярный случай вертикальных колебаний для каждого отдельного блока покрытия [107, 134]. Функциональное уравнение для n -го блока принимает вид

$$\begin{aligned} R_{33}^n(-i\alpha_1^n, -i\alpha_2^n) U_{3n} &\equiv \left[\varepsilon_{3n} \left((\alpha_1^n)^2 + (\alpha_2^n)^2 \right) - \varepsilon_{4n} \right] U_{3n} = \\ &= \varepsilon_{5n} (G_{3n} - T_{3n}) - \int_{\partial\Omega_n} \omega_n, \quad n = \overline{1, N_1}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Здесь $U_{3n} = \mathbf{V}_2 u_{3n}$, $G_{3n} = \mathbf{V}_2 g_{3n}$, $T_{3n} = \mathbf{V}_2 t_{3n}$, ω_j – внешняя форма вида

$$\omega_n = \varepsilon_{3n} e^{i(\alpha_1^n x_1 + \alpha_2^n x_2)} \left[- \left(\frac{\partial^3 u_{3n}}{\partial (x_2^n)^3} - i\alpha_2^n \frac{\partial^2 u_{3n}}{\partial (x_2^n)^2} - (\alpha_2^n)^2 \frac{\partial u_{3n}}{\partial x_2^n} + i(\alpha_2^n)^3 u_{3n} + 2 \frac{\partial^3 u_{3n}}{\partial (x_1^n)^2 \partial x_2^n} - \right. \right.$$

$$\left. -2i\alpha_2^n \frac{\partial^2 u_{3n}}{\partial (x_1^n)^2} \right) dx_1^n + \left(\frac{\partial^3 u_{3n}}{\partial (x_1^n)^3} - i\alpha_1^n \frac{\partial^2 u_{3n}}{\partial (x_1^n)^2} - (\alpha_1^n)^2 \frac{\partial u_{3n}}{\partial x_1^n} + i(\alpha_1^n)^3 u_{3n} \right) dx_2^n \right], \quad (1.5.5)$$

где характеристики n -й пластины: $\varepsilon_{3n} = \frac{h_n^2}{12}$, $\varepsilon_{4n} = \omega^2 \rho_n \frac{1 - \nu_n^2}{E_n}$, $\varepsilon_{5n} = \frac{1 - \nu_n^2}{E_n h_n}$; h_n – толщина; ρ_n – плотность; ν_n – коэффициент Пуассона; E_n – модуль Юнга. Как было указано ранее, g_{3n} , t_{3n} – контактные напряжения под покрытием и внешние нагрузки, действующие в направлении оси Ox_3^n локальной системы координат в области Ω_n , соответственно, ω – частота колебаний.

Следуя алгоритму дифференциального метода факторизации, описанному в параграфе 1.4, необходимо внести заданные на границах блоков условия в представления псевдодифференциальных уравнений, построенных с учетом требования автоморфизма применительно к функциональным уравнениям (1.5.3) [137]. При этом необходимо определить корни элементов $R_{33}^n(-i\alpha_1^n, -i\alpha_2^n)$, а затем найти и приравнять к нулю соответствующие им формы-вычеты Лере.

Пусть часть границы блока $\partial\Omega_{nk}$ представляет собой прямую, соответствующая внешняя форма (1.5.5) принимает следующий вид [107]:

$$\begin{aligned} \omega_{nk} = & -\varepsilon_{3n} e^{i(\alpha_1^{nk} x_1^{nk} + \alpha_2^{nk} x_2^{nk})} \left(i\alpha_2^{nk} \frac{M_{nk}}{D_n} - \frac{Q_{nk}}{D_n} - \left[(\alpha_2^{nk})^2 + \nu_n (\alpha_1^{nk})^2 \right] \frac{\partial u_{3nk}}{\partial x_2^{nk}} + \right. \\ & \left. + i\alpha_2^{nk} \left[(\alpha_2^{nk})^2 + (2 - \nu_n) (\alpha_1^{nk})^2 \right] u_{3nk} \right) dx_1^{nk}, \end{aligned}$$

где на части границы $\partial\Omega_{nk}$ в локальной системе координат

$$M_{nk} = -D_n \left(\frac{\partial^2 u_{3nk}}{\partial (x_1^{nk})^2} + \nu_n \frac{\partial^2 u_{3nk}}{\partial (x_2^{nk})^2} \right) \quad \text{описывает} \quad \text{изгибающий} \quad \text{момент;}$$

$$Q_{nk} = -D_n \left(\frac{\partial^3 u_{3nk}}{\partial (x_2^{nk})^3} + (2 - \nu_n) \frac{\partial^3 u_{3nk}}{\partial (x_1^{nk})^2 \partial x_2^{nk}} \right) - \text{поперечная сила}; \quad D_n = \frac{E_n h_n^2}{12(1 - \nu_n^2)}$$

– жесткость занимающей область Ω_n пластины.

Построенная на прямом участке границы $\partial\Omega_{nk}$ группа псевдодифференциальных уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & V_1^{-1}(x_1^{nk}) \left\{ - \int_{\partial\Omega_{nk}} \left(i\alpha_{21-}^{nk} \frac{M_{nk}}{D_n} - \frac{Q_{nk}}{D_n} - \left[(\alpha_{21-}^{nk})^2 + \nu_n (\alpha_1^{nk})^2 \right] \frac{\partial u_{3nk}}{\partial x_2^{nk}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + i\alpha_{21-}^{nk} \left[(\alpha_{21-}^{nk})^2 + (2 - \nu_j) (\alpha_1^{nk})^2 \right] u_{3nk} \right) e^{i\alpha_1^{nk} x_1^{nk}} dx_1^{nk} + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_{5n} V_2 [g_{3nk} - t_{3nk}] + \int_{\partial\Omega_n \setminus \partial\Omega_{nk}} \omega_n \right\} = 0, \quad \alpha_2^{nk} = \alpha_{21-}^{nk}, \quad x_1^{nk} \in \partial\Omega_{nk}; \\ & V_1^{-1}(x_1^{nk}) \left\{ - \int_{\partial\Omega_{nk}} \left(i\alpha_{22-}^{nk} \frac{M_{jk}}{D_n} - \frac{Q_{jk}}{D_n} - \left[(\alpha_{22-}^{nk})^2 + \nu_n (\alpha_1^{nk})^2 \right] \frac{\partial u_{3nk}}{\partial x_2^{nk}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + i\alpha_{22-}^{nk} \left[(\alpha_{22-}^{nk})^2 + (2 - \nu_n) (\alpha_1^{nk})^2 \right] u_{3nk} \right) e^{i\alpha_1^{nk} x_1^{nk}} dx_1^{nk} + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_{5n} V_2 [g_{3nk} - t_{3nk}] + \int_{\partial\Omega_n \setminus \partial\Omega_{jn}} \omega_n \right\} = 0, \quad \alpha_2^{nk} = \alpha_{22-}^{nk}, \quad x_1^{nk} \in \partial\Omega_{nk}, \end{aligned}$$

V^{-1} – оператор обращения Фурье.

При этом в подынтегральных функциях принято

$$\alpha_{21-}^{nk} = -i \sqrt{(\alpha_1^{nk})^2 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{4n}}{\varepsilon_{3n}}}}; \quad \alpha_{22-}^{nk} = -i \sqrt{(\alpha_1^{nk})^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{4n}}{\varepsilon_{3n}}}}.$$

Для криволинейных участков границ может быть построена кусочно-линейная аппроксимация, тогда для каждого прямолинейного участка группы псевдодифференциальных уравнений будут иметь аналогичный вид. При-

чем главный оператор псевдодифференциальных уравнений содержит все типы граничных условий, возможных для рассматриваемого случая вертикальных колебаний пластин.

Выписав псевдодифференциальные уравнения для всех участков границы и внеся в эти уравнения заданные граничные условия, приходим к системе интегральных уравнений, решив которую, получим в каждом плоском блоке представление решения в следующем виде:

$$u_{3n} = V_2^{-1} \left[R_n^{-1}(-i\alpha_1^n, -i\alpha_2^n) \left(\varepsilon_{5n} V_2 [g_{3n} - t_{3n}] - \int_{\partial\Omega_n} \omega_n \right) \right], \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (1.5.6)$$

где V_2^{-1} – двумерный оператор обращения Фурье.

Построенные таким образом выражения для амплитуд перемещений u_{3n} при вертикальных колебаниях составной двумерной блочной структуры далее следует приравнять к значениям амплитуд перемещения подложки (1.5.3) (при их идеальном контакте) в области $(x_1, x_2) \in \Omega_n$ при $x_3 = 0$. Полученные в результате интегральные уравнения позволят определить напряжения в областях контакта покрытия и подложки.

Для исследования общего случая колебаний плоских горизонтально ориентированных блоков на деформируемом основании также может быть применен изложенный подход. Рассмотренный метод решения задач для составных плоских покрытий в моделях сейсмологии позволяет оценивать напряжения различных участков земной коры, а также исследовать краевые эффекты вблизи стыковочных границ элементов литосферных структур. Решение граничной задачи для системы уравнений (1.5.1) с использованием данных мониторинговой информации, в том числе и приемников GPS/ГЛОНАСС, позволит оценивать концентрацию напряжений в моделируемых литосферных структурах.

В настоящей диссертации разработан прямой метод исследования и решения трехмерных граничных задач для покрытий с прямолинейными раз-

ломами. Данный метод облегчает построение представлений решений и обобщает результаты работ [106–108, 110–115] на пространственный случай с учетом кратности корней (в статической задаче), что не было достигнуто ранее.

2 ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О ПОВЕДЕНИИ РАЗНОТИПНЫХ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПЛАСТИН НА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОДЛОЖКЕ

Количество моделей покрытий, применяемых для расчета элементов конструкций в технике и строительстве, а также природных и искусственных материалов, достаточно велико. Исследования теории пластин можно разделить на несколько групп [56]: прикладные теории, для которых наиболее характерными являются подходы С.А. Амбарцумяна, Х.М. Муштари, С.П. Тимошенко, Э. Рейсснера и др.; теории, построенные на основе аппроксимации отрезками рядов решений основных уравнений теории упругости, где наиболее известны работы И.Н. Векуа, Б.Л. Пелеха и др.; теории, построенные посредством интегрирования уравнений теории упругости, где прежде всего следует отметить работы И.И. Воровича, А.И. Лурье, А.Л. Гольденвейзера, Г.И. Петрашеня.

Результаты изучения границ применимости выведенных из уравнений теории упругости одномерных и двумерных приближенных моделей отражены в многочисленных работах В.М. Александрова, А.С. Вольмира, В.В. Понятовского и др.

В настоящей главе рассматриваются задача о гармонических колебаниях системы, состоящей из упругого основания и составного покрытия, и статическая задача для той же структуры в рамках линейной теории упругости.

2.1 Постановка задач для покрытия

Особенность задач для тонких оболочек и пластин – сведение трехмерных уравнений теории упругости к уравнениям для двух пространственных координат.

Для однородного однослойного покрытия, занимающего область Ω , свяжем координатную плоскость x_1Ox_2 с его срединной поверхностью. В [83]

описаны нелинейные уравнения движения двумерных деформируемых пластин с усредненными по толщине свойствами в перемещениях. В результате линеаризации этих уравнений приходим к системе

$$\mathbf{R}_0(\partial x_1, \partial x_2)\mathbf{u}(x_1, x_2, t) - \mathbf{E}\mathbf{p}(x_1, x_2, t) = \zeta \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x_1, x_2, t)}{\partial t^2}, \quad (2.1.1)$$

$$(x_1, x_2) \in \Omega.$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор перемещений точек срединной поверхности покрытия, $u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2(x_1, x_2, t)$ – соответственно перемещения по направлениям осей Ox_1 , Ox_2 , $u_3(x_1, x_2, t)$ – по нормали к плоскости x_1Ox_2 ; $\mathbf{R}_0(\partial x_1, \partial x_2)$ – матричный дифференциальный оператор с

элементами: $R_{0,11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $R_{0,22} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$, $R_{0,12} = R_{0,21} = \varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$,

$$R_{0,13} = R_{0,23} = R_{0,31} = R_{0,32} = 0, \quad R_{0,33} = \varepsilon_3 \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right); \quad \varepsilon_1 = \frac{1-\nu}{2},$$

$\varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{h^2}{12}$, $\zeta_1 = \zeta_2 = -\zeta_3 = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}$. В (2.1.1) \mathbf{E} – диагональная

матрица, у которой $e_{11} = e_{22} = -\varepsilon_5$, $e_{33} = \varepsilon_5$; $\varepsilon_5 = \frac{1-\nu^2}{Eh}$; $\mathbf{p}(x_1, x_2, t) = \{p_j\}$

$(j = \overline{1,3})$ – вектор нагрузок; E , ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона, ρ – плотность пластины-покрытия, h – толщина пластины.

Если компоненты вектора нагрузки p_j ($j = \overline{1,3}$) представить в виде суммы контактных напряжений g_j , действующих со стороны упругого основания на нижнюю часть покрытия (на площадках с внешней нормалью, направленной по оси Ox_3), и действующих на верхнюю сторону покрытия нагрузок t_j

$$p_j = g_j + t_j \quad (j = 1, 2), \quad p_3 = g_3 - t_3,$$

то соотношения (2.1.1) запишутся в виде

$$\mathbf{R}_0(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2, t) - \mathbf{E} \mathbf{g}(x_1, x_2, t) = \mathbf{b}(x_1, x_2, t) + \zeta \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x_1, x_2, t)}{\partial t^2}, (x_1, x_2) \in \Omega,$$

где $\mathbf{b} = -\varepsilon_5 \mathbf{t}$, $\mathbf{t} = \{t_k\}$ ($k = \overline{1,3}$) – вектор воздействий на верхнюю границу пластины, $\mathbf{g} = \{g_k\}$ – вектор контактных напряжений, действующих на ее нижнюю границу со стороны подложки.

Если область Ω , занимаемая покрытием, является ограниченной (полуограниченной), на $S = \partial\Omega$ задаются граничные условия, различные формулировки которых описаны в [83, 85]. В случае составного покрытия, состоящего из разнотипных пластин, $\Omega = \bigcup_l \Omega_l$. Тогда уравнения (2.1.1) записываются для каждого l , на стыковочных границах Ω_l также задаются условия контакта составляющих покрытия.

В общем случае исследование поведения литосферных структур, имеющих сложную форму и рельефную поверхность, представляет значительные трудности. Однако использование метода блочного элемента [72, 75] позволяет перейти к анализу блоков с прямолинейными границами.

В настоящей работе две протяженных плиты на деформируемом основании моделируются взаимодействующими вдоль прямолинейной границы полубесконечными пластинами. При этом, не нарушая общности, можно считать, что граница между пластинами описывается уравнением $x_1 = \text{const}$. Тогда возможные граничные условия можно записать в следующем виде:

- граничные точки пластины не получают нормальных (по направлению нормали к срединной поверхности, т. е. по оси Ox_3) перемещений

$$u_3|_{x_1=0} = 0; \quad (2.1.2)$$

- граничные точки пластины не перемещаются в срединной плоскости по направлению нормали к границе (по оси Ox_1)

$$u_1|_{x_1=0} = 0; \quad (2.1.3)$$

- край пластины зашпелен и касательная к срединной поверхности не поворачивается вокруг оси Ox_2

$$\left. \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0; \quad (2.1.4)$$

- край оперт шарнирно (т. е. изгибающий момент равен нулю)

$$M_{x_1}|_{x_1=0} = 0, \quad (2.1.5)$$

здесь $M_{x_1} = -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right)$, $D = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}$ – жесткость пластины, условие

(2.1.5) также может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0; \quad (2.1.6)$$

- край пластины не смещается вдоль граничной линии (по оси Ox_2)

$$u_2|_{x_1=0} = 0; \quad (2.1.7)$$

- граничные точки пластины перемещаются вдоль оси Ox_3 свободно, т. е. давление на подкрепляющее ребро равно нулю

$$R_{x_1}|_{x_1=0} = 0,$$

где использованы обозначения:

$$R_{x_1} = Q_{x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} + N_{x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + T \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \text{ – давление,}$$

$$Q_{x_1} = -D \frac{\partial(\Delta u_3)}{\partial x_1} \text{ – поперечная сила, } H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ – крутящий момент,}$$

$$N_{x_1} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right) \right] - \text{нормальное усилие,}$$

$$T = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) - \text{касательное усилие;}$$

- незагруженный край пластины свободно смещается по направлению нормали к границе (по оси Ox_1), т. е. нормальное усилие равно нулю

$$N_{x_1} \Big|_{x_1=0} = 0; \quad (2.1.8)$$

- незагруженный край пластины свободно смещается вдоль границы (по оси Ox_2), т. е. касательное усилие равно нулю

$$T \Big|_{x_1=0} = 0. \quad (2.1.9)$$

Использование гипотезы прямых нормалей требует задания четырех граничных условий для каждой точки границы [83]. Кроме того, для системы уравнений (2.1.1) нужно задать начальные ($t = 0$) условия

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{u}_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial \mathbf{u}(x_1, x_2, 0)}{\partial t} = \mathbf{v}_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Замечание 2.1.1 При формулировке граничных условий, относящихся к границе $x_2 = \text{const}$, следует провести взаимные замены $x_1 \leftrightarrow x_2$ и $u_1 \leftrightarrow u_2$.

Если покрытие представляет собой совокупность контактирующих пластин, то в каждом конкретном случае вид граничных условий соответствует характеру взаимодействия в зоне их контакта. Так, для жесткого контакта без проскальзывания в точках границы должны выполняться условия равенства перемещений и напряжений и т. п.

Для установившегося режима колебаний (с частотой ω) пластины соотношения (2.1.1) принимают вид

$$\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) - \mathbf{Eg}(x_1, x_2) = \mathbf{b}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2.1.10)$$

$$\text{где } R_{jk} = R_{0,jk} \quad (j \neq k), \quad R_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_4, \quad R_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_4,$$

$$R_{33} = \varepsilon_3 \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_4, \quad \varepsilon_4 = \frac{\omega^2 \rho (1 - \nu^2)}{E}.$$

Статическому случаю соответствуют уравнения

$$\mathbf{R}_0(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) - \mathbf{Eg}(x_1, x_2) = \mathbf{b}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (2.1.11)$$

Вместо однослойной пластины, занимающей область Ω , могут быть рассмотрены слоистые пластины (пакеты пластин).

В работах [46, 138] представлены различные подходы к решению статических и динамических задач для слоистых пластин и оболочек конечных размеров, так в [138] рассматриваются задачи изгиба и колебаний несимметричных по толщине трехслойных пластин круговой формы, в [46] приведены результаты моделирования деформирования упругопластических слоистых плит на оправках. В работе [139] в качестве модели протяженного двухслойного покрытия рассматривается пакет из двух упругих слоев небольшой толщины.

Подход к построению модели многослойных протяженных пластин с учетом отмеченной в начале этого параграфа особенности перехода от трехмерной теории упругости к двумерной для пластин и оболочек приводит к модели однослойной пластины с приведенными механическими характеристиками [84]. Задачи для таких пластин на упругом основании могут быть решены по той же схеме, что и задачи для однородных, в соответствии с рассматриваемым режимом (нестационарный, установившийся или статический).

Далее будут рассмотрены случай установившихся с частотой ω колебаний и статический случай взаимодействия двух полуограниченных пластин на упругом основании.

2.2 Постановка задач для подложки

В качестве модели подложки может рассматриваться основание Винклера или упругая среда. В случае если принята модель изотропной упругой среды, движение ее в перемещениях описывается уравнениями Ляме вида

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2.2.1)$$

где λ , μ – упругие модули среды, ρ – плотность, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_j\}$ ($j = \overline{1,3}$) вектор перемещений точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Начальные условия определяют перемещения и скорости точек упругой среды в момент времени $t = 0$

$$u_j(\mathbf{x}, 0) = u_j^{(0)}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = v_j^{(0)}(\mathbf{x}), \quad j = \overline{1,3}. \quad (2.2.2)$$

Пусть введена декартова прямоугольная система координат. Для среды типа слоя или пакета слоев, верхняя грань которого совпадает с плоскостью $x_1 O x_2$, задается одно из условий на нижней грани. Например, если нижнее основание ($x_3 = -H < 0$) жестко сцеплено с недеформируемой средой, то

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, -H, t) = 0, \quad (-\infty < x_1, x_2 < +\infty), \quad (2.2.3)$$

контакт без трения описывается следующими условиями:

$$u_3(x_1, x_2, -H, t) = 0, \quad g_1(x_1, x_2, -H, t) = g_2(x_1, x_2, -H, t) = 0.$$

Для упругой среды в виде пакета слоев без внутренних дефектов $\{(x_1, x_2, x_3): -\infty \leq x_1, x_2 \leq +\infty, h_{k-1} \leq x_3 \leq h_k\}$ ($h_0 < \dots < h_N = 0$) в плоскостях раздела слоев задаются условия идеального контакта (непрерывность векторов напряжений и перемещений)

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\big|_{x_3=h_k-0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\big|_{x_3=h_k+0}, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty, \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\big|_{x_3=h_k-0} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\big|_{x_3=h_k+0}, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty. \quad (2.2.5)$$

Для установившихся (с частотой ω) колебаний уравнения (2.2.1) примут вид

$$(\lambda + \mu)\text{graddiv}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0. \quad (2.2.6)$$

Статическому случаю соответствуют уравнения

$$(\lambda + \mu)\text{graddiv}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = 0. \quad (2.2.7)$$

Примеры постановок задач для различных моделей упругой среды приведены в монографиях [37, 39, 50, 54, 55].

Для упругого основания соотношения между перемещениями и напряжениями на его поверхности имеют вид (1.5.3). Методы построения и вид матриц Грина для различных типов упругих подложек приводятся в работах И.И. Воровича, В.А. Бабешко, О.Д. Пряхиной, А.В. Смирновой, Е.В. Глушкова, Н.В. Глушковой, В.В. Калинин и др.

Пусть для упругого однородного слоя с плоско-параллельными границами на поверхности ($x_3 = 0$) заданы усилия \mathbf{g} , а нижняя грань ($x_3 = -H$) жестко закреплена $\mathbf{u}(x_1, x_2, -H) = 0$. Тогда [140]

$$\mathbf{K} = \left[(\mathbf{D}_1^+)^{-1} \mathbf{L}_2^+ - (\mathbf{D}_1^-)^{-1} \mathbf{L}_2^- \right]^{-1} \left[(\mathbf{D}_1^+)^{-1} \mathbf{D}_2^+ - (\mathbf{D}_1^-)^{-1} \mathbf{D}_2^- \right], \quad (2.2.8)$$

где $\mathbf{D}_l^\pm = \mathbf{E}_l^\pm \mathbf{D}_\pm$, $\mathbf{L}_l^\pm = \mathbf{E}_l^\pm \mathbf{L}_\pm$ ($l = 1, 2$),

$$\mathbf{E}_l^\pm = \begin{pmatrix} e^{\pm i\alpha_{31}h_l} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pm i\alpha_{32}h_l} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pm i\alpha_{33}h_l} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_\pm = -\frac{i}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & \pm \frac{\alpha_{31}}{2} \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \pm\alpha_{32} & 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm\alpha_1\alpha_{31} & \pm\alpha_2\alpha_{31} & s \\ \pm\alpha_2\alpha_{32} & \mp\alpha_1\alpha_{32} & 0 \\ 2s + \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 & \mp 2\alpha_1\alpha_{32} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{3k} = \sqrt{\gamma_k^2 - \alpha^2}, \quad k = 1, 2;$$

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2; \quad \gamma_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\mu + \lambda}}, \quad \gamma_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad s = \frac{\gamma_2^2}{2} - \alpha^2; \quad \rho - \text{плотность, } \lambda, \mu -$$

параметры Ляме слоя; ω – частота колебаний. Во введенной системе координат $x_3 = h_j$ ($j = \overline{1, 2}$), $h_1 < h_2 = 0$ – границы слоя ($h_1 = -H$, $h_2 = 0$).

Для основания Винклера перемещения \mathbf{u} пропорциональны напряжениям \mathbf{g} , а матрица $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ – диагональная с постоянными вещественными коэффициентами.

Контакт покрытия и упругой подложки полагается идеальным, т. е. векторы амплитуд перемещений и напряжений в областях их контакта непрерывны

$$\mathbf{u}_1(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2), \quad \mathbf{g}_1(x_1, x_2) = \mathbf{g}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (2.2.9)$$

Здесь индекс (1) соответствует перемещениям и напряжениям покрытия.

2.3 Динамическая задача для контактирующих пластин на деформируемой подложке

Рассмотрим задачу для двух контактирующих упругих пластин на поверхности деформируемой подложки, совершающих колебания под действием локализованной поверхностной нагрузки. Процесс колебаний будем считать установившимся (с частотой ω). При этом могут рассматриваться различные модели подложки: упругая среда (однородная, слоистая, блочная), основание Винклера.

Введем декартову систему координат таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена по нормали к поверхности системы покрытие/подложка, а ось Ox_2 совпадала с границей между пластинами. Обозначим правую полуось Ox_1 плоскости $x_3 = 0$ (поверхности рассматриваемой структуры) через $\Omega_1 = \{x_1 : 0 < x_1 < \infty\}$, а левую – $\Omega_2 = \{x_1 : -\infty < x_1 < 0\}$. Тогда одна из пластин занимает область $\{(x_1, x_2) : x_1 \in \Omega_1, x_2 \in R\}$, другая – $\{(x_1, x_2) : x_1 \in \Omega_2, x_2 \in R\}$ (рисунок 2).

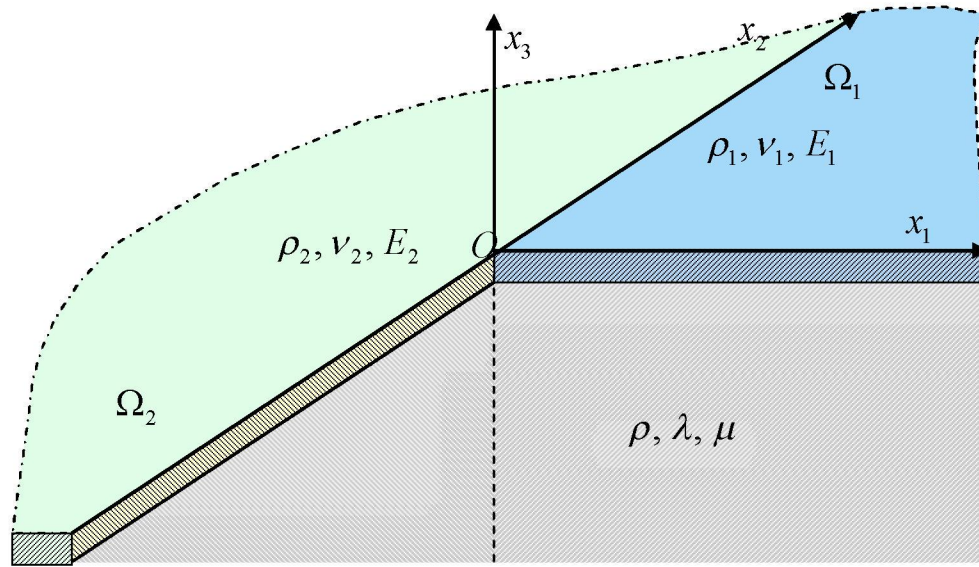


Рисунок 2 – Структура упругой среды с составным покрытием

Уравнения (2.1.10) колебаний для полуограниченных пластин, расположенных соответственно в областях $\{(x_1, x_2) : x_1 \in \Omega_j, x_2 \in R\}$, $j = 1, 2$, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_{j1}}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2 u_{j1}}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j4} u_{j1} + \varepsilon_{j2} \frac{\partial^2 u_{j2}}{\partial x_1 \partial x_2} + \varepsilon_{j5} g_{j1} = -\varepsilon_{j5} t_{j1}, \\
 & \varepsilon_{j2} \frac{\partial^2 u_{j1}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_{j2}}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2 u_{j2}}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j4} u_{j2} + \varepsilon_{j5} g_{j2} = -\varepsilon_{j5} t_{j2}, \\
 & \varepsilon_{j3} \left(\frac{\partial^4 u_{j3}}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_{j3}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_{j3}}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_{j4} u_{j3} - \varepsilon_{j5} g_{j3} = -\varepsilon_{j5} t_{j3}, \\
 & x_1 \in \Omega_j, x_2 \in R, j = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_j = \{u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}\}$ – вектор амплитуд перемещений точек срединной поверхности j -й пластины; $\varepsilon_{j1} = \frac{1-\nu_j}{2}$, $\varepsilon_{j2} = \frac{1+\nu_j}{2}$, $\varepsilon_{j3} = \frac{h_j^2}{12}$, $\varepsilon_{j4} = \omega^2 \rho_j \frac{1-\nu_j^2}{E_j}$, $\varepsilon_{j5} = \frac{1-\nu_j^2}{E_j h_j}$; ρ_j – плотность, ν_j – коэффициенты Пуассона, E_j – модуль Юнга материала j -й пластины; h_j – толщина пластины с номером j ; $\mathbf{t}_j = \{t_{jk}\}$ ($k = \overline{1,3}$) – вектор воздействий на верхнюю границу пластины, $\mathbf{g}_j = \{g_{jk}\}$ – вектор напряжений, действующих на ее нижнюю границу со стороны подложки.

Система уравнений (2.3.1) может быть переписана в матричном виде

$$\mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R, \quad (2.3.2)$$

где элементы операторов \mathbf{R}_j ($j = 1, 2$) имеют вид $R_{11}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j4}$,

$$R_{22}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j4}, \quad R_{12}^j = R_{21}^j = \varepsilon_{j2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad R_{13}^j = R_{23}^j = R_{31}^j = R_{32}^j = 0,$$

$$R_{33}^j = \varepsilon_{j3} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_{j4}. \quad \text{Матрица} \quad \mathbf{E}_j = \text{diag} \{ -\varepsilon_{j5}, -\varepsilon_{j5}, \varepsilon_{j5} \},$$

$$\mathbf{b}_j = -\varepsilon_{j5} \mathbf{t}_j.$$

Рассматривается условие жесткого сцепления пластин с упругим основанием (2.2.9), при котором амплитуды векторов перемещений и напряжений непрерывны на границах между покрытием и подложкой в областях их контакта

$$\mathbf{u}_j(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2), \quad \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{g}(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R. \quad (2.3.3)$$

Здесь из (2.2.8) для упругого однородного слоя с плоскопараллельными границами, когда на поверхности ($x_3 = 0$) заданы усилия \mathbf{g} , а на нижней грани ($x_3 = -H$) – одно из условий, описанных в параграфе 2.2,

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{k}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \mathbf{g}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\mathbf{k}(x_1, x_2) = \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Функции влияния могут быть записаны также в виде (1.5.3) или в образах Фурье

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.3.4)$$

где $\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{g}(x_1, x_2, 0)$, $\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{u}(x_1, x_2, 0)$,
 $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0)$.

При этом известно, что элементы $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^N$ обладают следующими свойствами [39, 49, 50]:

– элементы $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$ – функции двух комплексных переменных, допускающие представление вида

$$K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^{m(i,j)} P_{ij}^k(\alpha_1, \alpha_2) R_{ij}^k(\alpha), \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad m(i, j) < \infty,$$

где $P_{ij}^k(\alpha_1, \alpha_2)$ являются полиномами переменных α_1, α_2 , $R_{ij}^k(\alpha)$ – функциями переменной α , такими что $\det \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \Delta(\alpha)$ – функция только параметра α ($\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$).

– число вещественных полюсов $R_{ij}^k(\alpha)$, $\Delta(\alpha)$ конечно, остальные полюса являются комплексными и имеют точку сгущения на бесконечности; $\Delta(\alpha) \neq 0$ для $\alpha_1 \in \sigma_1, \alpha_2 \in \sigma_2$.

– $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$ при $|B_\gamma| \rightarrow \infty, 0 \leq \gamma < 2\pi$ имеют асимптотику вида [49]

$$\begin{aligned} |B_\gamma| K_{ij}(A_\gamma \cos \gamma - B_\gamma \sin \gamma, A_\gamma \cos \gamma + B_\gamma \sin \gamma) = \\ = \left[a_{ij}(A_\gamma, \gamma) + b_{ij}(A_\gamma, \gamma) \operatorname{sign} B_\gamma \right] \left[1 + O(B_\gamma^{-1}) \right], \end{aligned}$$

$$R_{ij}^k(\alpha) = \left[c_{ij}^k |\alpha|^{\theta_1^k(i,j)} + d\alpha^{\theta_2^k(i,j)} \right] \left[1 + O(\alpha^{-1}) \right],$$

$\alpha_1 = A_\gamma \cos \gamma - B_\gamma \sin \gamma$, $\alpha_2 = A_\gamma \cos \gamma + B_\gamma \sin \gamma$, где a_{ij} , b_{ij} – функции, ограниченные по обоим переменным, $\theta_{1,2}^k(i,j) < 0$.

В области контакта пластин (при $x_1 = 0$, $-\infty < x_2 < +\infty$) задаются граничные условия, описываемые соотношениями вида

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0+0} + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0-0} = \mathbf{f}(x_2). \quad (2.3.5).$$

Здесь $\mathbf{L}_j(\partial x_1, \partial x_2)$ ($j=1,2$) – заданные дифференциальные операторы. Вид этих операторов, а также функции $\mathbf{f}(x_2)$ определяются типом взаимодействия пластин в области стыковки. Для каждой пластины требуется удовлетворить четырем условиям на границе, различные варианты условий представлены в работах А.С. Вольмира и А.Л. Гольденвейзера [83, 85] и приведены в параграфе 2.2. В общем случае \mathbf{L}_j ($j=1,2$) можно представить как матричные операторы 4×3 .

Решение на бесконечности должно быть ограниченным. Положение контуров σ_1 , σ_2 определяется принципом предельного поглощения, состоящим в добавлении в уравнения движения членов, описывающих внутреннее трение, принятых в виде малых скоростей $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ ($\varepsilon > 0$), вводимых в правую часть уравнений. Впоследствии осуществляется переход к среде без поглощения путем устремления параметра ε к нулю [37–39].

2.4 Метод собственных функций в решении задачи об установившихся колебаниях составного покрытия на упругом основании

Применение приведенного в первой главе топологического метода даже для классических границ, в том числе прямолинейных, является весьма

сложным. Ниже для плит с прямолинейными границами описывается новый метод, обеспечивающий возможность более быстрого проведения численных расчетов, используемый при исследовании комплекса граничных задач, описывающих взаимодействие литосферных плит по прямолинейному участку границы.

Рассмотрим предлагаемый в работе новый подход на примере решения описанной в параграфе 2.3 задачи. В отличие от традиционно применяемых при исследовании описанных задач методов, требующих выноса дифференциального оператора из интегрального уравнения, использованных в работах [112, 113], развиваемый подход, называемый методом собственных функций [107, 114], существенно облегчает построение интегрального уравнения, а также удовлетворение граничных условий.

Рассмотрим трехмерный случай. Применим к уравнениям колебания пластин (2.3.2) преобразование Фурье по переменной x_2 , в результате получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) следующего вида:

$$\mathbf{R}_j(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2) - \mathbf{E}_j\bar{\mathbf{g}}_j(x_1, \alpha_2) = \bar{\mathbf{b}}_j(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R, \quad (2.4.1)$$

где $j = 1, 2$. Черта соответствует образам Фурье по переменной x_2

$$\bar{\mathbf{w}}_j(x_1, \alpha_2) = \mathbf{V}(\alpha_2)\mathbf{w}_j(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_j(x_1, x_2) e^{ix_2\alpha_2} dx_2,$$

$$\mathbf{w}_j(x_1, x_2) = \mathbf{V}^{-1}(x_2)\bar{\mathbf{w}}_j(x_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{w}}_j(x_1, \alpha_2) e^{-ix_2\alpha_2} d\alpha_2, \quad \mathbf{w} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{g}, \mathbf{b}\}.$$

Для построения решения системы ОДУ (2.4.1) решим сначала однородную систему [141], для этого проведем следующие преобразования. Вводя векторы $\mathbf{Y}_j = \{\bar{u}_{j1}, \bar{u}'_{j1}, \bar{u}_{j2}, \bar{u}'_{j2}\}$, где $\bar{u}'_{jk} = \frac{d\bar{u}_{jk}}{dx_1}$ ($j, k = 1, 2$), первые два уравнения однородной системы, соответствующей (2.4.1), для каждого j можно переписать в форме

$$\frac{d\mathbf{Y}_j}{dx_1} = \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_j, \text{ где } \mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21}^j & 0 & 0 & a_{24}^j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42}^j & a_{43}^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.2)$$

$$a_{21}^j = \varepsilon_{j1} \alpha_2^2 - \varepsilon_{j4}, \quad a_{24}^j = i \varepsilon_{j2} \alpha_2, \quad a_{42}^j = \frac{i \varepsilon_{j2} \alpha_2}{\varepsilon_{j1}}, \quad a_{43}^j = \frac{\alpha_2^2 - \varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j1}}.$$

Собственные значения матрицы \mathbf{A}_j (2.4.2) определяются из уравнения

$\det(\mathbf{A}_j - \gamma \mathbf{I}) = 0$, где \mathbf{I} – единичная матрица размера 4×4 ,

$$\det(\mathbf{A}_j - \gamma \mathbf{I}) = \gamma^4 - \gamma^2 \left[\alpha_2^2 \left(\varepsilon_{j1} + \frac{1 - \varepsilon_{j2}^2}{\varepsilon_{j1}} \right) - \varepsilon_{j4} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{j1}} \right) \right] + \frac{\alpha_2^4 \varepsilon_{j1} - \alpha_2^2 \varepsilon_{j4} (1 + \varepsilon_{j1}) + \varepsilon_{j4}^2}{\varepsilon_{j1}}.$$

В таком случае для каждого j однократные корни характеристического уравнения можно представить как $\gamma_{j1} = r_{j1}$, $\gamma_{j2} = r_{j2}$, $\gamma_{j3} = -r_{j1}$, $\gamma_{j4} = -r_{j2}$. Общее решение однородной системы (2.4.2) при отсутствии кратных корней может быть представлено в виде [141]

$$\mathbf{Y}_j = \sum_{m=1}^4 D_{jm} \mathbf{s}_{jm} e^{\gamma_{jm} x_1}, \quad (2.4.3)$$

где \mathbf{s}_{jm} – собственные векторы, соответствующие γ_{jm} , D_{jm} – произвольные коэффициенты.

Третье уравнение (2.4.1) для каждого j является независимым, его можно записать

$$\varepsilon_{j3} \left(\bar{u}_{j3}^{(IV)} - 2\alpha_2^2 \bar{u}_{j3}'' + \alpha_2^4 \bar{u}_{j3} \right) - \varepsilon_{j4} \bar{u}_{j3} = 0. \quad (2.4.4)$$

Характеристическое уравнение (2.4.3) имеет вид $\varepsilon_{j3} (\xi^2 - \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{j4} = 0$.

Тогда $\pm \zeta_{j1} = \pm \sqrt{\sqrt{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}} + \alpha_2^2}}$, $\pm \zeta_{j2} = \pm i \sqrt{\sqrt{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}} - \alpha_2^2}}$ – корни характеристического

уравнения, а решение однородного уравнения, соответствующего (2.4.3), имеет вид

$$\bar{u}_{0,j3}(x_1, \alpha_2) = C_{31}^j e^{\zeta_{j1} x_1} + C_{32}^j e^{\zeta_{j2} x_1} + C_{33}^j e^{-\zeta_{j1} x_1} + C_{34}^j e^{-\zeta_{j2} x_1}, \quad (2.4.5)$$

где $C_{3n}^j = C_{3n}^j(\alpha_2)$ – произвольные функции ($j = 1, 2; n = \overline{1, 4}$)

Тогда, выбрав из (2.4.3), (2.4.5) ограниченные на бесконечности в соответствующих полуплоскостях и удовлетворяющие условиям принципа предельного поглощения составляющие \bar{u}_{jm} и для единообразия введя для них обозначения $\tilde{C}_{jk} \bar{v}_{km}^{(j)}$ ($m = \overline{1, 3}$), общие решения (2.4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(x_1, \alpha_2) = & V^{-1}(x_1) \left[\mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) (\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{jk}(\alpha_2) \bar{v}_k^{(j)}(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

где

$$\mathbf{R}_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = V_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2) =$$

$$= - \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_2^2 - \varepsilon_{j4} & \varepsilon_{j2} \alpha_1 \alpha_2 & 0 \\ \varepsilon_{j2} \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_2^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_1^2 - \varepsilon_{j4} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{j4} - \varepsilon_{j3} \alpha^4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \frac{1}{\det \mathbf{R}_j} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix},$$

$$\beta_{11} = (\alpha_2^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_1^2 - \varepsilon_{j4})(\varepsilon_{j3} \alpha^4 - \varepsilon_{j4}), \quad \beta_{12} = \beta_{21} = \varepsilon_{j2} \alpha_1 \alpha_2 (\varepsilon_{j4} - \varepsilon_{j3} \alpha^4),$$

$$\beta_{13} = \beta_{31} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0, \quad \beta_{22} = (\alpha_1^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_2^2 - \varepsilon_{j4})(\varepsilon_{j3} \alpha^4 - \varepsilon_{j4}),$$

$$\beta_{33} = (\varepsilon_{j4} - \alpha_1^2 - \varepsilon_{j1} \alpha_2^2)(\alpha_2^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_1^2 - \varepsilon_{j4});$$

$$\mathbf{G}_j = V_2 \mathbf{g}_j, \quad \mathbf{B}_j = V_2 \mathbf{b}_j, \quad \bar{v}_k^{(j)} = \left\{ \bar{v}_{km}^{(j)} \right\}.$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье по переменной x_1 на соответствующих значению j полупрямых, из выражений (2.4.6) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) = & \left\{ \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) \right] \right\}^{\pm} + \\ & + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{jk}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

где $\mathbf{V}_k^{(j)} = \mathbf{V}(\alpha_1) \bar{\mathbf{v}}_k^{(j)}(x_1, \alpha_2)$.

Факторизация производится относительно контура σ , почти всюду совпадающего с вещественной осью, отклоняющегося от нее на отрезке конечной длины, выбираемого в соответствии с принципом предельного поглощения. Верхний знак этажного символа « \pm » соответствует значению $j=1$, нижний – $j=2$. Для проведения факторизации выражений в фигурных скобках в виде суммы по переменной α_1 относительно контура σ в (2.4.7) можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) \right] \right\}^{\pm} = \\ & = \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) \right] - \\ & - \left\{ \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) \right] \right\}^{\mp}. \end{aligned}$$

Применяя формулы (1.1.2) и используя теорию вычетов [127, 128], построим

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) \right] \right\}^{\mp} = \\ & = \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{jl}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(q_{jl}, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(q_{jl}, \alpha_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Здесь $\mathbf{R}_{jl}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 - q_{jl})^{-1} \text{Res}_{\eta_1=q_{jl}} \mathbf{R}_j^{-1}(-i\eta_1, -i\alpha_2)$, где $q_{jl}(\alpha_2)$ – нули $\det \mathbf{R}_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ по переменной α_1 , лежащие соответственно выше (для $j=1$) и ниже (для $j=2$) контура σ ($l = \overline{1,4}$).

С учетом (2.4.8) трансформанты Фурье амплитуд перемещений $U_j(\alpha_1, \alpha_2)$ имеют представление

$$U_j(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)] - \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{jl}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(q_{jl}, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(q_{jl}, \alpha_2)] + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{jk}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.4.9)$$

Из (2.4.9) можно выразить трансформанты Фурье амплитуд контактных напряжений $\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2)$ на границе покрытия и подложки

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{E}_j^{-1} \mathbf{R}_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_j(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{E}_j^{-1} \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \\ &+ \mathbf{E}_j^{-1} \mathbf{R}_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{jl}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(q_{jl}, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(q_{jl}, \alpha_2)] - \\ &- \mathbf{E}_j^{-1} \mathbf{R}_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{jk}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Условия сопряжения пластин и подложки (2.2.9) в образах Фурье примут вид

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{U}_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.4.11)$$

$$\alpha_1 \in \sigma.$$

Таким образом, используя функциональные соотношения для подложки (2.3.4), выражения для трансформант Фурье амплитуд перемещений (2.4.7) и условия сопряжения пластин с подложкой (2.4.11), получим систему функциональных уравнений относительно искомым Фурье-образов амплитуд напряжений $\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{K}\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{j=1}^2 \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)] - \\ &- \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{l1}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_1 \mathbf{G}_1(q_{l1}, \alpha_2) + \mathbf{B}_1(q_{l1}, \alpha_2)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{2l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_2 \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) + \mathbf{B}_2(q_{2l}, \alpha_2)] + \\
& + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.4.12)
\end{aligned}$$

Из соотношений (2.3.4), (2.4.8) и (2.4.11) можно получить и систему функциональных уравнений относительно искомых Фурье-образов амплитуд перемещений $\mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 &= \sum_{j=1}^2 \mathbf{K} \mathbf{E}_j^{-1} (\mathbf{R}_j \mathbf{U}_j - \mathbf{B}_j) - \\
& - \mathbf{K} \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{K} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2) + \\
& + \mathbf{K} \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{R}_1 \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{1l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_1 \mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \mathbf{B}_1(q_{1l}, \alpha_2)] + \\
& + \mathbf{K} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{R}_2 \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{2l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_2 \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) + \mathbf{B}_2(q_{2l}, \alpha_2)]. \quad (2.4.13)
\end{aligned}$$

Преобразуем систему (2.4.12), сгруппировав слагаемые, содержащие функции $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 \mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{K}_2 \mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{j=1}^2 \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) - \\
& - \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{1l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_1 \mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \mathbf{B}_1(q_{1l}, \alpha_2)] - \\
& - \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{2l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_2 \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) + \mathbf{B}_2(q_{2l}, \alpha_2)] + \\
& + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{K}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \pm [\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{E}_j]$. Как и ранее, верхний знак этажного символа « \pm » соответствует значению $j = 1$, нижний – $j = 2$.

Умножим полученную систему на матрицу-функцию $\mathbf{K}_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$. Таким образом, получим систему функциональных уравнений, которая, учитывая регулярность вектор-функций $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_1^+(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_2^-(\alpha_1, \alpha_2)$ по α_1 соответственно выше и ниже контура σ , может быть решена методом Винера – Хопфа

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}_1^+ + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{G}_2^- = \mathbf{B}(\alpha_1, \alpha_2) - \\ & - \sum_{l=1}^4 \left[\mathbf{M}_{1l}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \mathbf{M}_{2l}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^4 \left[\tilde{\mathbf{C}}_{1k}(\alpha_2)\mathbf{N}_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{\mathbf{C}}_{2k}(\alpha_2)\mathbf{N}_{2k}(\alpha_1, \alpha_2) \right], \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

где

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{K}}(\alpha_1, \alpha_2) = -\mathbf{K}_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{K}_2(\alpha_1, \alpha_2); \\ & \mathbf{B} = \mathbf{K}_1^{-1} \sum_{j=1}^2 \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) - \\ & - \mathbf{K}_1^{-1} \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{1l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{B}_1(q_{1l}, \alpha_2) - \mathbf{K}_1^{-1} \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{2l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{B}_2(q_{2l}, \alpha_2), \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{jl}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{R}_{jl}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{E}_j, \quad \mathbf{N}_{jk}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad k, l = \overline{1, 4}.$$

Факторизовав матрицу-функцию $\tilde{\mathbf{K}}(\alpha_1, \alpha_2)$ по α_1 относительно контура σ в виде произведения $\tilde{\mathbf{K}}(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+(\alpha_1, \alpha_2)\tilde{\mathbf{K}}_-(\alpha_1, \alpha_2)$ и умножив (2.4.14) на матрицу-функцию $\tilde{\mathbf{K}}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$, приходим к соотношениям вида

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1}\mathbf{G}_1^+ + \tilde{\mathbf{K}}_-\mathbf{G}_2^- = \tilde{\mathbf{B}}(\alpha_1, \alpha_2) - \\ & - \sum_{l=1}^4 \left[\tilde{\mathbf{M}}_{1l}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \tilde{\mathbf{M}}_{2l}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^4 \left[\tilde{\mathbf{C}}_{1k}(\alpha_2)\tilde{\mathbf{N}}_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{\mathbf{C}}_{2k}(\alpha_2)\tilde{\mathbf{N}}_{2k}(\alpha_1, \alpha_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

где $\tilde{\mathbf{B}}(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{B}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\tilde{\mathbf{M}}_{jl}(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{M}_{jl}(\alpha_1, \alpha_2)$,

$$\tilde{\mathbf{N}}_{jl}(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1} \mathbf{N}_{jl}(\alpha_1, \alpha_2), \quad j=1,2, \quad l=\overline{1,4}.$$

Факторизуя в виде суммы по параметру α_1 относительно контура σ слагаемые, стоящие в правой части (2.4.15), получим

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1} \mathbf{G}_1^+ + \tilde{\mathbf{K}}_- \mathbf{G}_2^- = \{\tilde{\mathbf{B}}\}^+ + \{\tilde{\mathbf{B}}\}^- - \\ & - \sum_{l=1}^4 \left[\left(\{\tilde{\mathbf{M}}_{1l}\}^+ + \{\tilde{\mathbf{M}}_{1l}\}^- \right) \mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \left(\{\tilde{\mathbf{M}}_{2l}\}^+ + \{\tilde{\mathbf{M}}_{2l}\}^- \right) \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^4 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \left(\{\tilde{\mathbf{N}}_{1k}\}^+ + \{\tilde{\mathbf{N}}_{1k}\}^- \right) + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \left(\{\tilde{\mathbf{N}}_{2k}\}^+ + \{\tilde{\mathbf{N}}_{2k}\}^- \right) \right]. \end{aligned}$$

При этом стоящие в левой части $\tilde{\mathbf{K}}_+^{-1} \mathbf{G}_1^+$ и $\tilde{\mathbf{K}}_- \mathbf{G}_2^-$ являются регулярными соответственно выше и ниже контура σ . Перенося в левую часть системы все регулярные выше контура σ слагаемые, а в правую – слагаемые, регулярные ниже σ , согласно схеме метода Винера – Хопфа, приходим к следующим системам функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1} \mathbf{G}_1^+ &= \{\tilde{\mathbf{B}}\}^+ - \sum_{l=1}^4 \left[\{\tilde{\mathbf{M}}_{1l}\}^+ \mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \{\tilde{\mathbf{M}}_{2l}\}^+ \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^4 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{1k}\}^+ + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{2k}\}^+ \right], \\ \tilde{\mathbf{K}}_- \mathbf{G}_2^- &= \{\tilde{\mathbf{B}}\}^- - \sum_{l=1}^4 \left[\{\tilde{\mathbf{M}}_{1l}\}^- \mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \{\tilde{\mathbf{M}}_{2l}\}^- \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^4 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{1k}\}^- + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{2k}\}^- \right]. \end{aligned}$$

Последние соотношения позволяют получить выражения для Фурье-образов амплитуд контактных напряжений $\mathbf{G}_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{G}_j^0(\alpha_1, \alpha_2) - \sum_{l=1}^4 \left[\mathbf{P}_{1l}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \mathbf{P}_{2l}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^4 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \mathbf{G}_{1k}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \mathbf{G}_{2k}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) \right], \quad (2.4.16) \end{aligned}$$

где $\mathbf{G}_1^0(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+ \{\tilde{\mathbf{B}}\}^+$, $\mathbf{G}_2^0(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_-^{-1} \{\tilde{\mathbf{B}}\}^-$, $\mathbf{G}_{nk}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+(\alpha_1, \alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{nk}\}^+$,
 $\mathbf{G}_{nk}^-(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{nk}\}^-$, $\mathbf{P}_{nl}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+ \{\tilde{\mathbf{M}}_{nl}\}^+$, $\mathbf{P}_{nl}^-(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_-^{-1} \{\tilde{\mathbf{M}}_{nl}\}^-$,
 $n=1,2$. В (2.4.16), как и ранее, верхний знак этажного символа « \pm »
соответствует значению $j=1$, нижний – $j=2$.

В соотношения (2.4.16) входят неизвестные вектор-функции $\mathbf{G}_j(q_{jl}(\alpha_2), \alpha_2)$, $l=\overline{1,4}$. Для их определения подставим в выражение для $\mathbf{G}_1^+(\alpha_1, \alpha_2)$ из (2.4.16) последовательно вместо α_1 значения q_{1l} , а в выражение для $\mathbf{G}_1^-(\alpha_1, \alpha_2)$ – q_{2l} ($l=\overline{1,4}$). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных $\mathbf{G}_j(q_{jl}(\alpha_2), \alpha_2)$, разрешив которую найдем выражения $\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2)$. Последние в свою очередь могут быть подставлены в (2.4.9).

Тогда $\mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{U}}_j^0(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.4.17)$$

где

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^0(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{E}_j \mathbf{G}_j^0(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{E}_j \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) - \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{jl}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{B}_j(q_{jl}, \alpha_2) -$$

$$- \sum_{l=1}^4 \left[(\mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{E}_j \mathbf{P}_{1l}^{\pm} + \mathbf{R}_{1l}^{-1} \mathbf{E}_1) \mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + (\mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{E}_j \mathbf{P}_{2l}^{\pm} + \mathbf{R}_{2l}^{-1} \mathbf{E}_2) \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2) \right],$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{E}_j \mathbf{G}_{1k}^{\pm} + \mathbf{V}_k^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{E}_j \mathbf{G}_{2k}^{\pm} + \mathbf{V}_k^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Неизвестными здесь являются только произвольные функции $\tilde{C}_{jk}(\alpha_2)$, $j=1,2$, $k=\overline{1,4}$. Значения произвольных функций $\tilde{C}_{jk}(\alpha_2)$ могут быть найдены с помощью граничных условий, заданных соотношениями (2.3.5).

К выражениям (2.4.17) для $\mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2)$ нужно применить обратное преобразование Фурье $\mathbf{V}^{-1}(x_1)$ по параметру α_1

$$\bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2) = \bar{\mathbf{u}}_j^0(x_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^4 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{jk}^{(1)}(x_1, \alpha_2) + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{jk}^{(2)}(x_1, \alpha_2) \right], \quad (2.4.18)$$

где $\bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1) \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2)$, $\bar{\mathbf{u}}_j^0(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1) \tilde{\mathbf{U}}_j^0(\alpha_1, \alpha_2)$,
 $\bar{\mathbf{u}}_{jk}^{(n)}(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1) \tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2)$.

В результате применения к граничным условиям (2.3.5) преобразования Фурье по переменной x_2 получим [112]

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_1(0, \alpha_2) + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_2(0, \alpha_2) = \mathbf{F}(\alpha_2). \quad (2.4.19)$$

Подставляя (2.4.18) в соотношение (2.4.19), приходим к линейной алгебраической системе относительно неизвестных $\tilde{C}_{jk}(\alpha_2)$ ($j=1,2, k=\overline{1,4}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \left[\mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{1k}^{(1)}(0, \alpha_2) + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{2k}^{(1)}(x_1, \alpha_2) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \left[\mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{1k}^{(2)}(0, \alpha_2) + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{2k}^{(2)}(x_1, \alpha_2) \right] = \\ & = \mathbf{F}(\alpha_2) - \mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_1^0(0, \alpha_2) - \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_2^0(0, \alpha_2). \end{aligned}$$

Решив полученную систему, подставим найденные значения коэффициентов $\tilde{C}_{jk}(\alpha_2)$ в представления $\bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2)$. Окончательное решение рассматриваемой задачи может быть получено путем применения обратного преобразования Фурье $V^{-1}(x_2)$ по параметру α_2 к $\bar{\mathbf{u}}_1(x_1, \alpha_2)$ для $x_1 > 0$ и к $\bar{\mathbf{u}}_2(x_1, \alpha_2)$ – при $x_1 < 0$

$$\mathbf{u}_j(x_1, x_2) = V^{-1}(x_2) \bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R.$$

Замечание 2.4.1 Основные сложности при решении задачи связаны с проведением факторизации матриц. Методы приближенной факторизации матриц, в том числе полиномиальных, описаны в параграфах 1.1, 1.2 первой главы.

2.5 Статическая задача для разнотипных пластин на деформируемой подложке

Рассмотрим применение метода собственных функций к решению статической задачи о взаимодействии составного покрытия и упругой подложки. Выписывая уравнение (2.1.11) для каждой из пластин, получим систему

$$\mathbf{R}_{0j}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R. \quad (2.5.1)$$

На границе между покрытием и подложкой в областях их контакта заданы условия (2.3.3), в области контакта пластин – (2.3.5).

На поверхности упругого основания аналогично (2.3.4) заданы соотношения

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.5.2)$$

Свойства элементов матриц Грина статических задач $\mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2)$ описаны в [38].

Применим к уравнениям для смещений пластин (2.5.1) преобразование Фурье по переменной x_2 , в результате получим системы ОДУ следующего вида:

$$\mathbf{R}_{0j}(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2) - \mathbf{E}_j \bar{\mathbf{g}}_j(x_1, \alpha_2) = \bar{\mathbf{b}}_j(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R, \quad (2.5.3)$$

где $j = 1, 2$. Черта соответствует образам Фурье по переменной x_2 .

Для построения общего решения однородной системы, соответствующей (2.5.3), воспользуемся схемой, представленной в параграфе 2.4. Вводя

векторы $\mathbf{Y}_{0j} = \{\bar{u}_{j1}, \bar{u}'_{j1}, \bar{u}_{j2}, \bar{u}'_{j2}\}$, где $\bar{u}'_{jk} = \frac{d\bar{u}_{jk}}{dx_1}$ ($j, k = 1, 2$), первые два уравне-

ния однородной системы для каждого j можно переписать в форме, аналогичной (2.4.2),

$$\frac{d\mathbf{Y}_{0j}}{dx_1} = \mathbf{A}_{0j} \mathbf{Y}_{0j}, \quad \text{где } a_{21}^{0j} = \varepsilon_{1j} \alpha_2^2, \quad a_{24}^{0j} = a_{24}^j, \quad a_{42}^{0j} = a_{42}^j, \quad a_{43}^j = \frac{\alpha_2^2}{\varepsilon_{1j}}. \quad (2.5.4)$$

Найдем корни характеристического уравнения $\det(\mathbf{A}_{0j} - \gamma \mathbf{I}) = 0$

$$\gamma^4 - \gamma^2 \alpha_2^2 \left(\varepsilon_{j1} + \frac{1 - \varepsilon_{j2}^2}{\varepsilon_{j1}} \right) + \alpha_2^4 = (\gamma^2 - \alpha_2^2)^2 = 0.$$

Для каждого j корни характеристического уравнения можно представить как $\gamma_{j1} = |\alpha_2|$, $\gamma_{j2} = -|\alpha_2|$, где каждый из корней имеет кратность 2. Обозначим $\lambda = |\alpha_2|$. Тогда общее решение однородной системы (2.5.4) запишется в виде [141]

$$\mathbf{Y}_{0j} = \{Y_k^{0j}\}, Y_k^{0j} = (C_{jk}^{(1)} + C_{jk}^{(2)} x_1) e^{\lambda x_1} + (D_{jk}^{(1)} + D_{jk}^{(2)} x_1) e^{-\lambda x_1}, k = \overline{1,4}, \quad (2.5.5)$$

где $D_{jk}^{(m)}$, $C_{jk}^{(m)}$ – произвольные коэффициенты ($m = 1, 2$).

Из (2.5.4) можно положить $D_{j2}^{(4)} = \bar{D}_{j1}$, $D_{j1}^{(4)} = \bar{D}_{j2}$, $C_{j2}^{(4)} = \bar{C}_{j1}$, $C_{j1}^{(4)} = \bar{C}_{j2}$, где \bar{C}_{j1} , \bar{C}_{j2} , \bar{D}_{j1} , \bar{D}_{j2} – произвольные коэффициенты. Тогда

$$\begin{aligned} D_{j1}^{(1)} &= \frac{-i2\alpha_2}{\lambda^3 \varepsilon_{j2}} \bar{D}_{j1} + \frac{i\alpha_2 \bar{D}_{j2}}{\lambda^2}, & D_{j2}^{(1)} &= \frac{-i\alpha_2 \bar{D}_{j1}}{\lambda^2}, & D_{j1}^{(2)} &= \frac{i\alpha_2 (1 + \varepsilon_{j1})}{\lambda^2 \varepsilon_{j2}} \bar{D}_{j1} - \frac{i\alpha_2 \bar{D}_{j2}}{\lambda}, \\ D_{j2}^{(2)} &= \frac{-i\alpha_2 \bar{D}_{j1}}{\lambda}, & D_{j1}^{(3)} &= \frac{-\bar{D}_{j1}}{\lambda^2} - \frac{\bar{D}_{j2}}{\lambda}, & D_{j2}^{(3)} &= \frac{-\bar{D}_{j1}}{\lambda}, & C_{j1}^{(1)} &= \frac{-i2\alpha_2}{\lambda^3 \varepsilon_{j2}} \bar{C}_{j1} + \frac{i\alpha_2 \bar{C}_{j2}}{\lambda^2}, \\ C_{j2}^{(1)} &= \frac{i\alpha_2 \bar{C}_{j1}}{\lambda^2}, & C_{j1}^{(2)} &= -\frac{i\alpha_2 (1 + \varepsilon_{j1})}{\lambda^2 \varepsilon_{j2}} \bar{C}_{j1} + \frac{i\alpha_2 \bar{C}_{j2}}{\lambda}, & C_{j2}^{(2)} &= \frac{i\alpha_2 \bar{C}_{j1}}{\lambda}, & C_{j1}^{(3)} &= \frac{-\bar{C}_{j1}}{\lambda^2} + \frac{\bar{C}_{j2}}{\lambda}, \\ C_{j2}^{(3)} &= \frac{\bar{C}_{j1}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Третье уравнение (2.5.3) для каждого j является независимым, его можно записать

$$\varepsilon_{j3} \left(\bar{u}_{j3}^{(IV)} - 2\alpha_2^2 \bar{u}_{j3}'' + \alpha_2^4 \bar{u}_{j3} \right) = 0. \quad (2.5.6)$$

Характеристическое уравнение (2.5.6) имеет вид $(\xi^2 - \alpha_2^2)^2 = 0$. Особенностью статической задачи является наличие кратных корней характеристического уравнения. Для каждого j (2.5.6) имеем два корня $\xi_{j1} = \lambda$, $\xi_{j2} = -\lambda$ кратности 2, где $\lambda = |\alpha_2|$. Решение однородного уравнения, соответствующего (2.5.6), имеет вид

$$\bar{u}_{0,j3}(x_1, \alpha_2) = (C_{31}^j + C_{32}^j x_1) e^{\lambda x_1} + (C_{33}^j + C_{34}^j x_1) e^{-\lambda x_1}, \quad (2.5.7)$$

где $C_{3n}^j = C_{3n}^j(\alpha_2)$ – произвольные функции ($j = 1, 2; n = \overline{1, 4}$).

Выберем из (2.5.5), (2.5.7) ограниченные на бесконечности в соответствующих полуплоскостях составляющие \bar{u}_{jm} . Например, для $j = 1$

$$\bar{\mathbf{u}}_{01} = \tilde{C}_{11} \begin{pmatrix} f_{11}^{(1)}(x_1, \alpha_2) \\ f_{12}^{(1)}(x_1, \alpha_2) \\ f_{13}^{(1)}(x_1, \alpha_2) \end{pmatrix} e^{-\lambda x_1} + \tilde{C}_{12} \begin{pmatrix} f_{21}^{(1)}(\alpha_2) \\ f_{22}^{(1)}(\alpha_2) \\ f_{23}^{(1)}(\alpha_2) \end{pmatrix} e^{-\lambda x_1},$$

$$\text{где } f_{11}^{(1)} = \frac{-i2\alpha_2}{\lambda^3 \varepsilon_{j2}} - \frac{i\alpha_2 x_1}{\lambda^2}, \quad f_{12}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{x_1}{\lambda}, \quad f_{13}^{(1)} = x_1, \quad f_{21}^{(1)} = \frac{i\alpha_2}{\lambda^2}, \quad f_{22}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda},$$

$$f_{23}^{(1)} = 1.$$

Для единообразия введем для компонент выбранных решений однородных систем обозначения $\tilde{C}_{jk} \bar{\mathbf{v}}_{km}^{(j)}$ ($m = \overline{1, 3}$), где $\bar{\mathbf{v}}_{km}^{(j)} = f_{km}^{(j)} e^{\pm \lambda x_1}$, $f_{1m}^{(j)}$ линейно зависят от x_1 , $\tilde{C}_{jk} = \tilde{C}_{jk}(\alpha_2)$ – произвольные функции ($j, k = 1, 2$).

Тогда общие решения (2.5.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2) = & V^{-1}(x_1) \left[\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) (\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^2 \tilde{C}_{jk}(\alpha_2) \bar{\mathbf{v}}_k^{(j)}(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

$$\text{Здесь } \mathbf{R}_{0j}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = V_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{R}_{0j}(\partial x_1, \partial x_2) =$$

$$= - \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_2^2 & \varepsilon_{j2} \alpha_1 \alpha_2 & 0 \\ \varepsilon_{j2} \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_2^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{j3} \alpha^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \frac{1}{\det \mathbf{R}_{0j}} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix},$$

$$\beta_{11} = \varepsilon_{j3} \alpha^4 (\alpha_2^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_1^2), \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -\varepsilon_{j2} \varepsilon_{j3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha^4, \quad \beta_{13} = \beta_{31} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0,$$

$$\beta_{22} = \varepsilon_{j3} \alpha^4 (\alpha_1^2 + \varepsilon_{j1} \alpha_2^2), \quad \beta_{33} = -\varepsilon_{j1} \alpha^4, \quad \det \mathbf{R}_{0,j} = \varepsilon_{j3} \varepsilon_{j1} \alpha^8, \quad \bar{\mathbf{v}}_k^{(j)} = \left\{ \bar{\mathbf{v}}_{km}^{(j)} \right\}.$$

Тогда $\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ можно представить как

$$\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \frac{1}{\varepsilon_{j3}\varepsilon_{j1}\alpha^4} \begin{pmatrix} \varepsilon_{j3}(\alpha_2^2 + \varepsilon_{j1}\alpha_1^2) & -\varepsilon_{j2}\varepsilon_{j3}\alpha_1\alpha_2 & 0 \\ -\varepsilon_{j2}\varepsilon_{j3}\alpha_1\alpha_2 & \varepsilon_{j3}(\alpha_1^2 + \varepsilon_{j1}\alpha_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{j1} \end{pmatrix}.$$

Используя интегральное преобразование Фурье по переменной x_1 на соответствующих значению j полупрямых, из выражений (2.5.8) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) = & \left\{ \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)] \right\}^{\pm} + \\ & + \sum_{k=1}^2 \tilde{C}_{jk}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

где $\mathbf{V}_k^{(j)} = \mathbf{V}(\alpha_1) \bar{\mathbf{v}}_k^{(j)}(x_1, \alpha_2)$.

Для факторизации выражений в фигурных скобках в виде суммы по переменной α_1 относительно вещественной оси воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)] \right\}^{\pm} = \\ & = \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)] - \\ & - \left\{ \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)] \right\}^{\mp}. \end{aligned}$$

Используя теорию вычетов [102, 103], построим

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)] \right\}^{\mp} = \quad (2.5.10) \\ & = \tilde{\mathbf{R}}_{0,j1}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)] + \\ & + \tilde{\mathbf{R}}_{0,j2}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_j \mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) + \mathbf{B}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{R}}_{0,j1}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 \mp i\lambda)^{-1} \operatorname{Res}_{\eta=\pm i\lambda} \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\eta_1, -i\alpha_2) +$$

$$+(\alpha_1 \mp i\lambda)^{-2} \left[\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\eta_1, -i\alpha_2)(\eta_1 \mp i\lambda)^2 \right] \Big|_{\eta_1 = \pm i\lambda},$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{0,j,2}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 \mp i\lambda)^{-1} \left[\mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\eta_1, -i\alpha_2)(\eta_1 \mp i\lambda)^2 \right] \Big|_{\eta_1 = \pm i\lambda},$$

$$\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) = \frac{d\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2)}{d\alpha_1} \Big|_{\alpha_1 = \pm i\lambda}, \quad \mathbf{B}_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) = \frac{d\mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)}{d\alpha_1} \Big|_{\alpha_1 = \pm i\lambda}.$$

С учетом (2.5.10) трансформанты Фурье перемещений $\mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2)$ имеют представление

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \tilde{\mathbf{C}}_{jk}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2) - \tilde{\mathbf{R}}_{0,j,1}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\pm i\lambda, \alpha_2) \right] - \\ &- \tilde{\mathbf{R}}_{0,j,2}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) + \mathbf{B}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Здесь, как и везде ранее, верхний знак этажных символов « \pm », « \mp » соответствует значению $j=1$, нижний – $j=2$.

Условия сопряжения пластин и подложки в образах Фурье примут вид (2.4.11) для $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.

Следуя схеме, изложенной в предыдущем параграфе, получим систему функциональных уравнений относительно искомым Фурье-образов напряжений $\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{K}\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{j=1}^2 \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \tilde{\mathbf{C}}_{1k}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^2 \tilde{\mathbf{C}}_{2k}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2) - \\ &- \tilde{\mathbf{R}}_{0,11}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left[\mathbf{E}_1 \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) + \mathbf{B}_1(i\lambda, \alpha_2) \right] - \tilde{\mathbf{R}}_{0,21}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left[\mathbf{E}_2 \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) + \mathbf{B}_2(-i\lambda, \alpha_2) \right] - \\ &- \tilde{\mathbf{R}}_{0,12}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left[\mathbf{E}_1 \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) + \mathbf{B}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) \right] - \end{aligned}$$

$$-\tilde{\mathbf{R}}_{0,22}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \left[\mathbf{E}_2 \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) + \mathbf{B}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) \right]. \quad (2.5.12)$$

Группируя слагаемые, содержащие функции $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ в (2.5.12), вводя обозначения $\mathbf{K}_{0j}(\alpha_1, \alpha_2) = \pm \left[\mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{E}_j \right]$ и умножая полученные соотношения на матрицу-функцию $\mathbf{K}_{01}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$, получим систему функциональных уравнений, которая, учитывая регулярность вектор-функций $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_1^+(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_2^-(\alpha_1, \alpha_2)$ по α_1 соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, может быть решена методом Винера – Хопфа

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1^+ + \tilde{\mathbf{K}}_0 \mathbf{G}_2^- = & \mathbf{B}_0(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^2 \left[\tilde{\mathbf{C}}_{1k}(\alpha_2) \mathbf{N}_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{\mathbf{C}}_{2k}(\alpha_2) \mathbf{N}_{2k}(\alpha_1, \alpha_2) \right] - \\ & - \mathbf{P}_{11}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \mathbf{P}_{21}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) - \\ & - \mathbf{P}_{12}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) - \mathbf{P}_{22}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2). \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}}_0(\alpha_1, \alpha_2) = -\mathbf{K}_{01}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{K}_{02}(\alpha_1, \alpha_2);$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{K}_{01}^{-1} \sum_{j=1}^2 \mathbf{R}_{0j}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) -$$

$$-\mathbf{K}_{01}^{-1} \sum_{j=1}^2 \left[\tilde{\mathbf{R}}_{0,j1}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{B}_j(\pm i\lambda, \alpha_2) + \tilde{\mathbf{R}}_{0,j2}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{B}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) \right],$$

$$\mathbf{N}_{jk}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}_{01}^{-1} \mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{P}_{jl}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}_{01}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{\mathbf{R}}_{0,jl}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{E}_j.$$

Факторизовав матрицу-функцию $\tilde{\mathbf{K}}_0(\alpha_1, \alpha_2)$ по α_1 относительно вещественной оси в виде произведения $\tilde{\mathbf{K}}_0(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_{0,+}(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{\mathbf{K}}_{0,-}(\alpha_1, \alpha_2)$, умножив (2.5.13) на матрицу-функцию $\tilde{\mathbf{K}}_{0,+}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$ и факторизуя в виде суммы по параметру α_1 слагаемые, стоящие в правой части полученных соотношений, будем иметь

$$\tilde{\mathbf{K}}_{0,+}^{-1} \mathbf{G}_1^+ + \tilde{\mathbf{K}}_{0,-} \mathbf{G}_2^- = \{ \tilde{\mathbf{B}}_0 \}^+ + \{ \tilde{\mathbf{B}}_0 \}^- +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^2 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \left(\{\tilde{\mathbf{N}}_{1k}\}^+ + \{\tilde{\mathbf{N}}_{1k}\}^- \right) + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \left(\{\tilde{\mathbf{N}}_{2k}\}^+ + \{\tilde{\mathbf{N}}_{2k}\}^- \right) \right] - \\
& - \left(\{\mathbf{P}_{11}\}^+ + \{\mathbf{P}_{11}\}^- \right) \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \left(\{\mathbf{P}_{21}\}^+ + \{\mathbf{P}_{21}\}^- \right) \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) - \\
& - \left(\{\mathbf{P}_{12}\}^+ + \{\mathbf{P}_{12}\}^- \right) \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) - \left(\{\mathbf{P}_{22}\}^+ + \{\mathbf{P}_{22}\}^- \right) \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2),
\end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{B}}_0(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_{0,+}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{B}_0(\alpha_1, \alpha_2)$, $\tilde{\mathbf{N}}_{jl}(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_{0,+}^{-1} \mathbf{N}_{jl}(\alpha_1, \alpha_2)$, $j, l = 1, 2$.

При этом стоящие в левой части $\tilde{\mathbf{K}}_{0,+}^{-1} \mathbf{G}_1^+$ и $\tilde{\mathbf{K}}_{0,-}^{-1} \mathbf{G}_2^-$ являются регулярными соответственно в верхней и нижней полуплоскости. Перенос в левую часть системы все регулярные в верхней полуплоскости слагаемые, а в правую – слагаемые, регулярные в нижней полуплоскости, согласно схеме метода Винера – Хопфа, приходим к следующим системам функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}_{0,+}^{-1} \mathbf{G}_1^+ &= \{\tilde{\mathbf{B}}_0\}^+ - \{\mathbf{P}_{11}\}^+ \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \{\mathbf{P}_{21}\}^+ \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) - \\
& - \{\mathbf{P}_{12}\}^+ \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) - \{\mathbf{P}_{22}\}^+ \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) + \\
& + \sum_{k=1}^2 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{1k}\}^+ + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{2k}\}^+ \right], \\
\tilde{\mathbf{K}}_{0,-}^{-1} \mathbf{G}_2^- &= \{\tilde{\mathbf{B}}_0\}^- - \{\mathbf{P}_{11}\}^- \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \{\mathbf{P}_{21}\}^- \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) - \\
& - \{\mathbf{P}_{12}\}^- \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) - \{\mathbf{P}_{22}\}^- \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) + \\
& + \sum_{k=1}^2 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{1k}\}^- + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{2k}\}^- \right].
\end{aligned}$$

Построенные соотношения позволяют получить выражения для Фурье-образов контактных напряжений $\mathbf{G}_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{G}_j^0(\alpha_1, \alpha_2) - \tilde{\mathbf{P}}_{11}^\pm \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \tilde{\mathbf{P}}_{21}^\pm \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) - \\
& - \tilde{\mathbf{P}}_{12}^\pm \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) - \tilde{\mathbf{P}}_{22}^\pm \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) + \\
& + \sum_{k=1}^2 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \mathbf{G}_{1k}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \mathbf{G}_{2k}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) \right], \quad (2.5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathbf{G}_1^0(\alpha_1, \alpha_2) &= \tilde{\mathbf{K}}_{0,+} \{\tilde{\mathbf{B}}_0\}^+, \mathbf{G}_2^0(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_{0,-}^{-1} \{\tilde{\mathbf{B}}_0\}^-, \mathbf{G}_{nk}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_{0,+}(\alpha_1, \alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{nk}\}^+, \\ \mathbf{G}_{nk}^-(\alpha_1, \alpha_2) &= \tilde{\mathbf{K}}_{0,-}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \{\tilde{\mathbf{N}}_{nk}\}^-, \tilde{\mathbf{P}}_{nl}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_{0,+}(\alpha_1, \alpha_2) \{\mathbf{P}_{nl}\}^+, \\ \tilde{\mathbf{P}}_{nl}^-(\alpha_1, \alpha_2) &= \tilde{\mathbf{K}}_{0,-}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \{\mathbf{P}_{nl}\}^-, \quad k, l, n = 1, 2. \end{aligned}$$

В (2.5.14) верхний знак этажного символа « \pm » соответствует значению $j = 1$, нижний – $j = 2$.

Для определения входящих в (2.5.14) неизвестных вектор-функций $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$, $\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)$ подставим в выражение для $\mathbf{G}_1^+(\alpha_1, \alpha_2)$ из (2.5.14) вместо α_1 значения $i\lambda$, а в выражение для $\mathbf{G}_1^-(\alpha_1, \alpha_2)$ – $-i\lambda$. Затем продифференцируем соотношения (2.5.14) по параметру α_1 и подставим в результирующие соотношения для $\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2)$ вместо α_1 значение $i\lambda$, в $\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2)$ подставим $-i\lambda$ вместо α_1 . В совокупности получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$, $\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)$, разрешив которую, найдем выражения $\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2)$, последние в свою очередь могут быть подставлены в (2.5.9).

Далее схема решения совпадает с описанной в параграфе 2.4 для установившихся колебаний пластин.

2.6 Об особенностях перехода от задачи для установившихся колебаний к статической

В ходе исследований, выполненных совместно с Колесниковым М.Н., ранее было обнаружено, что в процессе вычисления параметров решения граничных задач для случая гармонических воздействий при стремлении частоты колебаний к нулю происходит усложнение вычислений, приводящее к резкому накоплению ошибки. Это связано с наличием в ряде соотношений параметров, полученных в результате вычисления вычетов в однократных полюсах. При стремлении частоты к нулю эти члены резко возрастают, что

вызвано наличием в них неопределенности, просто разрешить которую не удастся в связи со сложностью членов числителя, распределенных в разных выражениях. Ниже показан подход, позволяющий преодолеть эту сложность и построить разложение граничной задачи для малых частот.

Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях двух полуограниченных пластин на деформируемой подложке для малых частот. Уравнения, описывающие колебания пластин, имеют вид (2.3.2), где $\mathbf{u}_j(x_1, x_2) \equiv \mathbf{u}_j(x_1, x_2, \omega)$ и $\mathbf{g}_j(x_1, x_2) \equiv \mathbf{g}_j(x_1, x_2, \omega)$ – векторы амплитуд перемещений и контактных напряжений, действующих на нижнюю границу пластины с номером j ($j=1,2$) со стороны упругой подложки; $\mathbf{t}_j(x_1, x_2) \equiv \mathbf{t}_j(x_1, x_2, \omega)$ – вертикальная нагрузка, действующая сверху на j -ю пластину.

Уравнения (2.3.2) содержат члены, зависящие от ω^2 . В уравнения Ляме для установившихся колебаний (2.2.6), из которых выводятся соотношения между напряжениями и перемещениями на поверхности упругой подложки (2.3.4), также входят слагаемые, содержащие в качестве множителя ω^2 .

Для построения приближенного решения при малых значениях ω разложим неизвестные амплитуды перемещений и напряжений в ряд по четным степеням ω , удерживая в разложении члены второго порядка,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j(x_1, x_2, \omega) &= \mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2), \\ \mathbf{g}_j(x_1, x_2, \omega) &= \mathbf{g}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{g}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2).\end{aligned}\tag{2.6.1}$$

Подставляя разложения (2.6.1) в (2.3.2), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{j0}(\partial x_1, \partial x_2)(\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2) - \omega^2 \rho_j \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) - \\ - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_{j0}(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{2.6.2}$$

$$x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R, \quad j = 1, 2.$$

Аналогично для уравнений Ляме (2.2.6) будем иметь

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x})\omega^2) + \mu \Delta(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x})\omega^2) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + o(\omega^2) = 0. \quad (2.6.3)$$

При этом рассматриваются условия жесткого сцепления пластин с упругим основанием на границах между покрытием и подложкой в областях их контакта

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2) &= \mathbf{u}_0(x_1, x_2) + \mathbf{u}_1(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2), \\ \mathbf{g}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{g}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2) &= \mathbf{g}_0(x_1, x_2) + \mathbf{g}_1(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2), \\ x_1 &\in \Omega_j, \quad x_2 \in R. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

В области контакта пластин (при $x_1 = 0$, $-\infty < x_2 < +\infty$) задаются граничные условия, описываемые соотношениями вида (2.3.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2)(\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2) \Big|_{x_1=0+0} + \\ + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2)(\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2) \Big|_{x_1=0-0} = \mathbf{f}(x_2). \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Сопоставляя составляющие (2.6.1)–(2.6.5) при одинаковых степенях ω^2 , получим серию решаемых последовательно статических задач, первая из которых совпадает с рассмотренной в параграфе 2.5,

$$\mathbf{R}_{j0}(\partial x_1, \partial x_2)\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_{j0}(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R, \quad j = 1, 2,$$

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2)\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0+0} + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2)\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0-0} = \mathbf{f}(x_2),$$

$$\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) = \mathbf{u}_0(x_1, x_2), \quad \mathbf{g}_{j0}(x_1, x_2) = \mathbf{g}_0(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R,$$

где

$$\mathbf{u}_0(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}_0(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Уравнения смещений пластин для следующей задачи принимают вид

$$\mathbf{R}_{j_0}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_{j_1}(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_{j_1}(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2) + \omega^2 \rho_j \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \mathbf{u}_{j_0}(x_1, x_2),$$

где $\mathbf{u}_{j_0}(x_1, x_2)$ находится на предыдущем этапе.

При этом функции влияния (1.5.3) строятся уже исходя из неоднородных стационарных уравнений Ляме для упругого основания

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) + \mu \Delta \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = -\rho \omega^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

В силу положительной определенности оператора граничной задачи статической теории упругости в пространстве обобщенных решений Соболева, используя результаты работы [39], нетрудно доказать, что при малых частотах рассматриваемая граничная задача разрешима и метод последовательных приближений для нее сходится. Таким образом, предложенные в работе методы позволяют исследовать задачи о колебаниях покрытий в статическом и динамическом режимах.

3 НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПЛАСТИН НА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОДЛОЖКЕ

Для ряда задач теории пластин с прямолинейными границами может быть использован упрощенный метод блочного элемента [105, 109, 142]. В отличие от приведенного в [103, 109–111], в настоящей работе на примере скалярного случая вертикальных воздействий использован подход, не требующий преобразования дифференциального оператора системы [116–121]. В данной главе рассматривается задача о вертикальных колебаниях пластин на поверхности упругой подложки и статическая задача для той же структуры. В качестве подложки выбран упругий слой, в роли внешних воздействий – сосредоточенная нагрузка, действующая на одну из пластин.

3.1 Трехмерная задача об установившихся колебаниях составной пластины с разломом

В рассматриваемом случае уравнения (2.3.2), описывающие колебания пластин, принимают следующий вид:

$$R_j(\partial x_1, \partial x_2)u_j(x_1, x_2) - \varepsilon_{j5}g_j(x_1, x_2) = b_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R, \quad (3.1.1)$$

где заданы области $\Omega_1 = \{x_1 : x_1 > 0\}$, $\Omega_2 = \{x_1 : x_1 < 0\}$; $u_j(x_1, x_2) \equiv u_{j3}(x_1, x_2)$ и $g_j(x_1, x_2) \equiv g_{j3}(x_1, x_2)$ – вертикальная компонента амплитуды соответственно перемещения и контактного напряжения, действующего на нижнюю границу пластины с номером j ($j=1,2$) со стороны упругой подложки;

$$R_j(\partial x_1, \partial x_2) \equiv R_{33}^j = \varepsilon_{j3} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_{j4}; \quad b_j(x_1, x_2) = -\varepsilon_{j5}t_j(x_1, x_2);$$

$t_j(x_1, x_2) \equiv t_{j3}(x_1, x_2)$ – вертикальная нагрузка, действующая сверху на j -ю пластину.

Будем считать $t_1(x_1, x_2) = A\delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0)$, (x_1^0, x_2^0) – координаты сосредоточенного источника воздействия, $x_1^0 \in \Omega_1$, $A > 0$ – заданная интенсивность нагрузки, $t_2(x_1, x_2) \equiv 0$.

В области контакта пластин ($x_1 = 0$) при $-\infty < x_2 < +\infty$ задаются граничные условия, общий вид которых может быть описан соотношением

$$L_{1k}(\partial x_1, \partial x_2)u(0+0, x_2) + L_{2k}(\partial x_1, \partial x_2)u(0-0, x_2) = f_k(x_2), \quad k = \overline{1, 4}. \quad (3.1.2)$$

Характер взаимодействия пластин в области их стыковки определяет структуру дифференциальных операторов $L_{jk}(\partial x_1, \partial x_2)$ ($j = 1, 2$) и вид функций $f_k(x_2)$. Различные варианты граничных условий приведены в параграфе 2.1.

Интегральные соотношения для упругой подложки в условиях исследуемой задачи принимают вид

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) g(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2,$$

где $u(x_1, x_2)$ – перемещения, $g(x_1, x_2)$ – напряжения на верхней границе подложки; функция Грина $K(\alpha_1, \alpha_2) \equiv K_{33}(\alpha_1, \alpha_2)$, где K_{33} – элемент с индексом (3,3) матрицы $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ при $x_3 = 0$, заданной соотношением (2.2.8). Матрицы Грина динамических задач приведены в [37, 50] и др.

В принятых в параграфе 2.2 обозначениях

$$K_{33} = \frac{\alpha_{31}\gamma_2^2}{4\Delta\mu} \left(\alpha^2 \sin(\alpha_{32}H) \cos(\alpha_{31}H) + \alpha_{32}\alpha_{31} \cos(\alpha_{32}H) \sin(\alpha_{31}H) \right),$$

$$\Delta = \frac{\alpha_{31}\alpha_{32}}{8} \left[\left(\gamma_2^4 + 4(\alpha^2 - s)^2 \right) (\cos(\alpha_{31}H) \cos(\alpha_{32}H) + 1) - 8(\alpha^2 - s)^2 \right] -$$

$$-\alpha_1^2 (s^2 + \alpha_{31}^2 \alpha_{32}^2) \sin(\alpha_{31} H) \sin(\alpha_{32} H),$$

где H – толщина упругого слоя.

Таким образом, для рассматриваемой модели подложки функциональное соотношение (2.3.4) имеет вид

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2) G(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.1.3)$$

где $U(\alpha_1, \alpha_2) = V_2[u(x_1, x_2)]$, $G(\alpha_1, \alpha_2) = V_2[g(x_1, x_2)]$.

Функция $K(\alpha_1, \alpha_1)$ обладает следующими свойствами [37, 39, 49, 50]:

– $K(\alpha_1, \alpha_1) = K(\alpha)$ является четной функцией параметра α мероморфной в комплексной плоскости α ;

– $K(\alpha)$ обладает конечным числом вещественных нулей $\pm z_k$ и полюсов $\pm p_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) и счетным множеством комплексных нулей и полюсов ($k = N + 1, \dots, \infty$), имеющих точку сгущения в секторе малого угла, содержащего мнимую ось;

– на бесконечности $K(\alpha)$ имеет асимптотику $K(\alpha) = d_1 |\alpha|^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha| \rightarrow \infty$, $d_1 = \text{const}$.

Условие идеального контакта пластин и подложки определяет непрерывность перемещений и напряжений на границе покрытие/подложка:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2), \quad g_1(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad x_1 > 0, \quad -\infty < x_2 < +\infty; \\ u_2(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2), \quad g_2(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad x_1 < 0; \quad -\infty < x_2 < +\infty. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Воспользовавшись в (3.1.1) преобразованием Фурье по переменной x_2 , получим

$$R_j(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_j(x_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5} \bar{g}_j(x_1, \alpha_2) = \bar{b}_j(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R, \quad (3.1.5)$$

где черта соответствует образам Фурье по переменной x_2 описанных ранее функций.

Решения (3.1.5), ограниченные в соответствующих полуплоскостях и удовлетворяющие условию принципа предельного поглощения, запишутся для $\alpha_2 \in R$ в виде

$$\bar{u}_j(x_1, \alpha_2) = C_{j1} e^{\mp q_{j1} x_1} + C_{j2} e^{\pm i q_{j2} x_1} + V^{-1}(x_1) \left[\left(R_j(\alpha_1, \alpha_2) \right)^{-1} \left(\varepsilon_{j5} G_j(\alpha_1, \alpha_2) + B_j(\alpha_1, \alpha_2) \right) \right], \quad x_1 \in \Omega_j, \quad (3.1.6)$$

где $C_{jk} = C_{jk}(\alpha_2)$ – произвольные коэффициенты; $B_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_{j5} A e^{i(\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0)}$, $B_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0$; $q_{j1}, i q_{j2}$ – корни уравнений $\varepsilon_{j3} (\xi^2 - \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{j4} = 0$.

При этом $q_{j1} = \sqrt{\sqrt{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}} + \alpha_2^2}}$, $q_{j1} \in R$ ($q_{j1} > 0$); $q_{j2} = \sqrt{\alpha_2^2 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}}}}$ при $\alpha_2 < -\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}}}$ и $\alpha_2 > \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}}}$, в данном случае $q_{j2} \in R$ ($q_{j2} > 0$) и $i q_{j2}$ определяет мнимую величину, при $-\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}}} < \alpha_2 < \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}}}$ корень $q_{j2} = i \sqrt{\sqrt{\frac{\varepsilon_{j4}}{\varepsilon_{j3}} - \alpha_2^2}}$ мнимый, $\text{Im} q_{j2} > 0$, на этом интервале изменения параметра α_2 корень $i q_{j2} \in R$ и $i q_{j2} < 0$.

Верхний знак в этажных символах « \pm », « \mp » формулы (3.1.6) и далее соответствует значению $j = 1$, нижний – $j = 2$.

Применяя к полученным выражениям для трансформант амплитуд вертикальных смещений (3.1.6) преобразование Фурье (по x_1) по соответствующим полупрямым, получим

$$U_j(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\varepsilon_{j5} G_j(\alpha_1, \alpha_2) + B_j(\alpha_1, \alpha_2)}{R_j} + W_j(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.1.7)$$

$$W_j(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\pm i C_{j1}}{\alpha_1 \pm i q_{j1}} + \frac{\pm i C_{j2}}{\alpha_1 \pm q_{j2}} \mp \quad (3.1.8)$$

$$\mp \frac{1}{2(q_{j1}^2 + q_{j2}^2)\varepsilon_{j3}} \left[\frac{\varepsilon_{j5} G_j(\pm q_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1 \mp q_{j2})} + \frac{i\varepsilon_{j5} G_j(\pm i q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1 \mp i q_{j1})} + \frac{B_j(\pm q_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1 \mp q_{j2})} + \frac{iB_j(\pm i q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1 \mp i q_{j1})} \right], \alpha_1 \in \sigma, \alpha_2 \in R.$$

Из последнего соотношения можно выразить преобразования Фурье амплитуд контактных напряжений на нижних поверхностях пластин

$$G_j(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_j U_j(\alpha_1, \alpha_2) - B_j(\alpha_1, \alpha_2)}{\varepsilon_{j5}} + Y_j(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.1.9)$$

$$Y_j(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{R_j}{\varepsilon_{j5}} \left(\frac{\pm i C_{j1}}{\alpha_1 \pm i q_{j1}} - \frac{\pm i C_{j2}}{\alpha_1 \pm q_{j2}} \right) \pm \frac{R_j}{2(q_{j1}^2 + q_{j2}^2)\varepsilon_{j3}} \left[\frac{G_j(\pm q_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1 \mp q_{j2})} + \frac{iG_j(\pm i q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1 \mp i q_{j1})} + \frac{B_j(\pm q_{j2}, \alpha_2)}{\varepsilon_{j5} q_{j2}(\alpha_1 \mp q_{j2})} + \frac{iB_j(\pm i q_{j1}, \alpha_2)}{\varepsilon_{j5} q_{j1}(\alpha_1 \mp i q_{j1})} \right], \alpha_1 \in \sigma, \alpha_2 \in R. \quad (3.1.10)$$

Здесь, как и ранее, верхний знак в этажных символах « \pm » соответствует значению $j=1$, нижний – $j=2$.

Условия сопряжения пластин с подложкой (3.1.4) в преобразованиях Фурье принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \alpha_2) &= U_1(\alpha_1, \alpha_2) + U_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ G(\alpha_1, \alpha_2) &= G_1(\alpha_1, \alpha_2) + G_2(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Из уравнения (3.1.1), соотношений для трансформант Фурье амплитуд напряжений и перемещений (3.1.3) и условий сопряжения пластин и подложки в образах Фурье (3.1.11) после ряда преобразований приходим к уравнению

$$K_1(\alpha_1, \alpha_2)G_1^+(\alpha_1, \alpha_2) = K_2(\alpha_1, \alpha_2)G_2^-(\alpha_1, \alpha_2) + F(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.1.12)$$

где

$$G_1^+(\alpha_1, \alpha_2) \equiv G_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_1(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2,$$

$$G_2^-(\alpha_1, \alpha_2) \equiv G_2(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 g_2(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

Для рассматриваемого случая установившихся колебаний в (3.1.12)

$$K_j(\alpha_1, \alpha_2) = \pm \left(K(\alpha_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5} (R_j)^{-1} \right), \quad (3.1.13)$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^2 \left[B_j(\alpha_1, \alpha_2) (R_j)^{-1} + W_j(\alpha_1, \alpha_2) \right]. \quad (3.1.14)$$

Здесь $R_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \varepsilon_{j3} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{j4}$. В дальнейшем может быть использовано

представление $R_j(\alpha_1, \alpha_1) = \varepsilon_{j3} (\alpha_1 - iq_{j1})(\alpha_1 - q_{j2})(\alpha_1 + iq_{j1})(\alpha_1 + q_{j2})$, где

$$q_{jk} = q_{jk}(\alpha_2), \quad j, k = 1, 2.$$

Полученное функциональное уравнение (3.1.12) в [109] названо нагруженным уравнением Винера – Хопфа в связи с наличием неизвестных $G_j(\pm q_{j2}, \alpha_2)$, $G_j(\pm iq_{j1}, \alpha_2)$, нуждающихся в дополнительном определении.

В работах [109, 114] реализован метод решения функционального уравнения для Фурье-образов амплитуд напряжений. В работе [116] представлены результаты решения задачи на основе функционального уравнения для Фурье-образов амплитуд перемещений, которое также может быть получено из соотношений (3.1.1), (3.1.3), (3.1.11),

$$M_1(\alpha_1, \alpha_2)U_1^+(\alpha_1, \alpha_2) = M_2(\alpha_1, \alpha_2)U_2^-(\alpha_1, \alpha_2) + D(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.1.15)$$

где

$$U_1^+(\alpha_1, \alpha_2) \equiv U_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_1(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2;$$

$$U_2^-(\alpha_1, \alpha_2) \equiv U_2(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 u_2(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2;$$

$$M_j = \pm (K^{-1} - R_j \varepsilon_j^{-1}); \quad D(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^2 [Y_j(\alpha_1, \alpha_2) - \varepsilon_j^{-1} B_j(\alpha_1, \alpha_2)].$$

Далее будем рассматривать уравнение (3.1.12). Из (3.1.12), (3.1.8) трудно получить представление вида

$$\begin{aligned} G_1^+ + \tilde{K} G_2^- = K_1^{-1} & \left(\frac{\tilde{C}_{11}}{\alpha_1 + iq_{11}} + \frac{\tilde{C}_{12}}{\alpha_1 + q_{12}} + \frac{\tilde{C}_{21}}{\alpha_1 - iq_{21}} + \frac{\tilde{C}_{22}}{\alpha_1 - q_{22}} - \right. \\ & - \frac{\varepsilon_{15} \tilde{A} e^{i\alpha_1 x_1^0}}{R_1} + \frac{\varepsilon_{15}}{2(q_{11}^2 + q_{12}^2) \varepsilon_{13}} \left[\frac{\tilde{A} e^{iq_{12} x_1^0} - G_1^+(q_{12}, \alpha_2)}{q_{12}(\alpha_1 - q_{12})} + i \frac{\tilde{A} e^{-q_{11} x_1^0} - G_1^+(iq_{11}, \alpha_2)}{q_{11}(\alpha_1 - iq_{11})} \right] + \\ & \left. + \frac{\varepsilon_{25}}{2(q_{21}^2 + q_{22}^2) \varepsilon_{23}} \left[\frac{G_2^(-q_{22}, \alpha_2)}{q_{22}(\alpha_1 + q_{22})} + \frac{iG_2^(-iq_{21}, \alpha_2)}{q_{21}(\alpha_1 + iq_{21})} \right] \right), \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

где $\tilde{K} = -K_1^{-1} K_2$, $\tilde{C}_{jk} = \pm i C_{jk}$ ($j, k = 1, 2$), $\tilde{A} \equiv \tilde{A}(\alpha_2) = A e^{i\alpha_2 x_2^0}$.

Факторизуем \tilde{K} в виде произведения $K = \tilde{K}_+ \tilde{K}_-$ и умножим правую и левую части (3.1.16) на K_+^{-1} [38, 49]. Так как для решения полученного функционального уравнения необходимо осуществлять факторизацию функций по параметру α_1 , обозначим для краткости функции в правой части (3.1.16), стоящие перед постоянными коэффициентами, через $N_{mn}(\alpha_1, \beta)$:

$$N_{11}(\alpha_1, \beta) = \tilde{K}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) K_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) (\alpha_1 + i\beta)^{-1}, \quad N_{12}(\alpha_1, \beta) = \tilde{K}_+^{-1} K_1^{-1}(\alpha_1 + \beta)^{-1},$$

$$N_{21}(\alpha_1, \beta) = \tilde{K}_+^{-1} K_1^{-1}(\alpha_1 - i\beta)^{-1}, \quad N_{22}(\alpha_1, \beta) = \tilde{K}_+^{-1} K_1^{-1}(\alpha_1 - \beta)^{-1}.$$

Обозначим также множители перед функциями $N_{mn}(\alpha_1, \beta)$ через γ_{mn}

$$(m, n = 1, 2), \quad \text{где} \quad \gamma_{mn} = \frac{(-1)^n \varepsilon_{m5}}{2q_{mn}(q_{m1}^2 + q_{m2}^2) \varepsilon_{m3}}. \quad \text{Функцию внешнего воздействия}$$

обозначим через $B(\alpha_1, \alpha_2)$, где

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_{15} \tilde{A} \tilde{K}_+^{-1} K_1^{-1} \left(\frac{e^{i\alpha_1 x_1^0}}{R_1} - \frac{1}{2(q_{11}^2 + q_{12}^2) \varepsilon_{13}} \left[\frac{e^{iq_{12} x_1^0}}{q_{12}(\alpha_1 - q_{12})} + \frac{ie^{-q_{11} x_1^0}}{q_{11}(\alpha_1 - iq_{11})} \right] \right).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \tilde{K}_+^{-1} G_1^+(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{K}_- G_2^-(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} N_{jk}(\alpha_1, q_{jk}) + B(\alpha_1, \alpha_2) + \\ &+ \gamma_{12} N_{12}(\alpha_1, -q_{12}) G_1^+(q_{12}, \alpha_2) + \gamma_{22} N_{22}(\alpha_1, -q_{22}) G_2^-(q_{22}, \alpha_2) + \\ &+ i\gamma_{11} N_{11}(\alpha_1, -q_{11}) G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) + i\gamma_{21} N_{21}(\alpha_1, -q_{21}) G_2^-(iq_{21}, \alpha_2). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Применяя известный алгоритм для решения функциональных уравнений Винера – Хопфа (факторизуя в виде суммы правую часть уравнения (3.1.17)), в итоге приходим к представлениям решений в форме

$$\begin{aligned} G_1^+(\alpha_1, \alpha_2) &= \tilde{K}_+ \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(\alpha_1, q_{jk})\}^+ + \{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^+ + \right. \\ &+ \gamma_{12} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) \{N_{12}(\alpha_1, -q_{12})\}^+ + \gamma_{22} G_2^-(q_{22}, \alpha_2) \{N_{22}(\alpha_1, -q_{22})\}^+ \\ &\left. + i\gamma_{11} G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) \{N_{11}(\alpha_1, -q_{11})\}^+ + i\gamma_{21} G_2^-(iq_{21}, \alpha_2) \{N_{21}(\alpha_1, -q_{21})\}^+ \right); \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$\begin{aligned} G_2^-(\alpha_1, \alpha_2) &= \tilde{K}_-^{-1} \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(\alpha_1, q_{jk})\}^- + \{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^- + \right. \\ &+ \gamma_{12} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) \{N_{12}(\alpha_1, -q_{12})\}^- + \gamma_{22} G_2^-(q_{22}, \alpha_2) \{N_{22}(\alpha_1, -q_{22})\}^- \\ &\left. + i\gamma_{11} G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) \{N_{11}(\alpha_1, -q_{11})\}^- + i\gamma_{21} G_2^-(iq_{21}, \alpha_2) \{N_{21}(\alpha_1, -q_{21})\}^- \right). \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Для проведения факторизации по α_1 относительно выбранного согласно принципу предельного поглощения контура σ функцию $K(\alpha_1, \alpha_2)$ представим в виде $K = S(\alpha_1, \alpha_2) \Pi(\alpha_1, \alpha_2)$ [39, 49]. В качестве S воспользуемся функцией $S(\alpha_1, \alpha_2) = d_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + d^2}$, $d^2(\alpha_2) = d_2^2 + \alpha_2^2$, где $d_1 = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \alpha K(\alpha_1, \alpha_2)$,

$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. При этом параметр d_2 выбирается достаточно большим [50]. Для численной реализации можно положить $d_2 = 10$. Поведение $S(\alpha_1, \alpha_2)$ совпадает с поведением функции K на бесконечности, и функция $S(\alpha_1, \alpha_2)$ не имеет особых точек на вещественной оси. Функция $\Pi(\alpha_1, \alpha_2) = S^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)K(\alpha_1, \alpha_2)$ имеет те же особенности, что и K , кроме того, $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \Pi(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ и она может быть приближена рациональной функцией

$$\Pi(\alpha_1, \alpha_2) \approx \Pi^*(\alpha_1, \alpha_2) = \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - \tilde{z}_k^2)(\alpha^2 - \tilde{p}_k^2)^{-1}, \quad \tilde{z}_k^2 = z_k^2 - \alpha_2^2, \quad \tilde{p}_k^2 = p_k^2 - \alpha_2^2.$$

Функции K_j ($j=1,2$) в (3.1.13) имеют такое же поведение на бесконечности, как и K . В качестве полюсов они имеют полюса K и нули R_j . Тогда можно представить $K_j = \frac{d_{1j}}{\sqrt{\alpha_1^2 + d^2}} \Pi_j(\alpha_1, \alpha_2)$, где $d_{1j} = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \alpha K_j(\alpha_1, \alpha_2)$,

$$\Pi_j(\alpha_1, \alpha_2) \approx \Pi_j^* = (\alpha_1^2 + q_{j1}^2)^{-1} (\alpha_1^2 - q_{j2}^2)^{-1} \prod_{k=1}^{N_j} (\alpha_1^2 - z_{jk}^2) \prod_{k=1}^N (\alpha_1^2 - \tilde{p}_k^2)^{-1}.$$

Для каждого значения частоты ω рациональные функции Π^* , Π_j^* могут быть аппроксимированы с помощью полиномов Бернштейна [39], как это описано в параграфе 1.1. Помимо этого, можно использовать полиномы Лагранжа или другие функции.

Последовательно полагая в соотношении (3.1.18) $\alpha_1 = q_{12}$ и $\alpha_1 = iq_{11}$, а в (3.1.19) – $\alpha_1 = -q_{22}$ и $\alpha_1 = -iq_{21}$, получим систему алгебраических уравнений для определения $G_j^\pm(\pm q_{j2}, \alpha_2)$, $G_j^\pm(\pm iq_{j1}, \alpha_2)$

$$\begin{aligned} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) = & \tilde{K}_+(q_{12}, \alpha_2) \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(q_{12}, q_{jk})\}^+ + \{B(q_{12}, \alpha_2)\}^+ + \right. \\ & + \gamma_{12} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) \{N_{12}(q_{12}, -q_{12})\}^+ + \gamma_{22} G_2^-(-q_{22}, \alpha_2) \{N_{22}(q_{12}, -q_{22})\}^+ + \\ & \left. + i\gamma_{11} G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) \{N_{11}(q_{12}, -q_{11})\}^+ + i\gamma_{21} G_2^-(-iq_{21}, \alpha_2) \{N_{21}(q_{12}, -q_{21})\}^+ \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) &= \tilde{K}_+(iq_{11}, \alpha_2) \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(iq_{11}, q_{jk})\}^+ + \{B(iq_{11}, \alpha_2)\}^+ + \right. \\
&+ \gamma_{12} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) \{N_{12}(iq_{11}, -q_{12})\}^+ + \gamma_{22} G_2^-(-q_{22}, \alpha_2) \{N_{22}(iq_{11}, -q_{22})\}^+ + \\
&+ i\gamma_{11} G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) \{N_{11}(iq_{11}, -q_{11})\}^+ + i\gamma_{21} G_2^-(-iq_{21}, \alpha_2) \{N_{21}(iq_{11}, -q_{21})\}^+ \left. \right); \\
G_2^-(-q_{22}, \alpha_2) &= \tilde{K}_-^{-1}(-q_{22}, \alpha_2) \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(-q_{22}, q_{jk})\}^- + \{B(-q_{22}, \alpha_2)\}^- + \right. \\
&+ \gamma_{12} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) \{N_{12}(-q_{22}, -q_{12})\}^- + \gamma_{22} G_2^-(-q_{22}, \alpha_2) \{N_{22}(-q_{22}, -q_{22})\}^- + \\
&+ i\gamma_{11} G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) \{N_{11}(-q_{22}, -q_{11})\}^- + i\gamma_{21} G_2^-(-iq_{21}, \alpha_2) \{N_{21}(-q_{22}, -q_{21})\}^- \left. \right); \\
G_2^-(-iq_{21}, \alpha_2) &= \tilde{K}_-^{-1}(-iq_{21}, \alpha_2) \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(-iq_{21}, q_{jk})\}^- + \{B(-iq_{21}, \alpha_2)\}^- + \right. \\
&+ \gamma_{12} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) \{N_{12}(-iq_{21}, -q_{12})\}^- + \gamma_{22} G_2^-(-q_{22}, \alpha_2) \{N_{22}(-iq_{21}, -q_{22})\}^- + \\
&+ i\gamma_{11} G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) \{N_{11}(-iq_{21}, -q_{11})\}^- + i\gamma_{21} G_2^-(-iq_{21}, \alpha_2) \{N_{21}(-iq_{21}, -q_{21})\}^- \left. \right).
\end{aligned}$$

Определив неизвестные из полученной СЛАУ, внесем найденные значения соответственно в правые части (3.1.18), (3.1.19).

Далее для определения амплитуд перемещений $U_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ составляющих покрытия $G_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ вносятся в (3.1.7). К выражениям (3.1.7) после этого нужно применить обратное преобразование Фурье $V^{-1}(x_1)$ по параметру α_1 . В результате получим

$$\bar{u}_j(x_1, \alpha_2) = \bar{u}_j^0(x_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^2 \left[\tilde{C}_{1k}(\alpha_2) \bar{u}_{jk}^{(1)}(x_1, \alpha_2) + \tilde{C}_{2k}(\alpha_2) \bar{u}_{jk}^{(2)}(x_1, \alpha_2) \right], \quad (3.1.20)$$

где

$$\bar{u}_j(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1) U_j(\alpha_1, \alpha_2), \quad \bar{u}_j^0(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1) \tilde{U}_j^0(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{jk}^{(n)}(x_1, \alpha_2) &= V^{-1}(x_1) \tilde{U}_{jk}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2); \\
U_1^{(0)} &= \frac{\varepsilon_{15}}{R_1} \tilde{K}_+ \left(\{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^+ + \gamma_{12} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) \{N_{12}(\alpha_1, -q_{12})\}^+ + \right. \\
&+ \gamma_{22} G_2^-(-q_{22}, \alpha_2) \{N_{22}(\alpha_1, -q_{22})\}^+ + i\gamma_{11} G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) \{N_{11}(\alpha_1, -q_{11})\}^+ + \\
&+ i\gamma_{21} G_2^-(-iq_{21}, \alpha_2) \{N_{21}(\alpha_1, -q_{21})\}^+ \left. \right) + \frac{B_1(\alpha_1, \alpha_2)}{R_1} - \frac{1}{2(q_{11}^2 + q_{12}^2) \varepsilon_{13}} \left[\frac{\varepsilon_{15} G_1(q_{12}, \alpha_2)}{q_{12}(\alpha_1 - q_{12})} + \right. \\
&\left. + \frac{i\varepsilon_{15} G_1(iq_{11}, \alpha_2)}{q_{11}(\alpha_1 - iq_{11})} + \frac{B_1(q_{12}, \alpha_2)}{q_{12}(\alpha_1 - q_{12})} + \frac{iB_1(iq_{11}, \alpha_2)}{q_{11}(\alpha_1 - iq_{11})} \right]; \\
U_2^{(0)} &= \frac{\varepsilon_{25}}{R_2} \tilde{K}_-^{-1} \left(\{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^- + \gamma_{12} G_1^+(q_{12}, \alpha_2) \{N_{12}(\alpha_1, -q_{12})\}^- + \right. \\
&+ \gamma_{22} G_2^-(-q_{22}, \alpha_2) \{N_{22}(\alpha_1, -q_{22})\}^- + i\gamma_{11} G_1^+(iq_{11}, \alpha_2) \{N_{11}(\alpha_1, -q_{11})\}^- + \\
&\left. + i\gamma_{21} G_2^-(-iq_{21}, \alpha_2) \{N_{21}(\alpha_1, -q_{21})\}^- \right) + \\
&+ \frac{1}{2(q_{21}^2 + q_{22}^2) \varepsilon_{23}} \left[\frac{\varepsilon_{25} G_2(-q_{22}, \alpha_2)}{q_{22}(\alpha_1 + q_{22})} + \frac{i\varepsilon_{25} G_2(-iq_{21}, \alpha_2)}{q_{21}(\alpha_1 + iq_{21})} \right]; \\
U_{11}^{(1)} &= \frac{\varepsilon_{15}}{R_1} \tilde{K}_+ \{N_{11}(\alpha_1, q_{11})\}^+ - \frac{1}{\alpha_1 + iq_{11}}, \quad U_{12}^{(1)} = \frac{\varepsilon_{15}}{R_1} \tilde{K}_+ \{N_{12}(\alpha_1, q_{12})\}^+ - \frac{1}{\alpha_1 + q_{12}}, \\
U_{11}^{(2)} &= \frac{\varepsilon_{15}}{R_1} \tilde{K}_+ \{N_{21}(\alpha_1, q_{21})\}^+, \quad U_{12}^{(2)} = \frac{\varepsilon_{15}}{R_1} \tilde{K}_+ \{N_{22}(\alpha_1, q_{22})\}^+, \\
U_{21}^{(1)} &= \frac{\varepsilon_{25}}{R_2} \tilde{K}_-^{-1} \{N_{11}(\alpha_1, q_{11})\}^-, \quad U_{22}^{(1)} = \tilde{C}_{12} \frac{\varepsilon_{25}}{R_2} \tilde{K}_-^{-1} \{N_{12}(\alpha_1, q_{12})\}^-, \\
U_{21}^{(2)} &= \frac{\varepsilon_{25}}{R_2} \tilde{K}_-^{-1} \{N_{21}(\alpha_1, q_{21})\}^- - \frac{1}{\alpha_1 - iq_{21}}, \quad U_{22}^{(2)} = \frac{\varepsilon_{25}}{R_2} \tilde{K}_-^{-1} \{N_{22}(\alpha_1, q_{22})\}^- - \frac{1}{\alpha_1 - q_{22}}.
\end{aligned}$$

Представления трансформант (по x_2) амплитуд перемещений пластин (3.1.6) содержат неизвестные коэффициенты \tilde{C}_{jk} ($j, k = 1, 2$), которые необходимо определить из условий в области контакта (3.1.2) после применения к ним преобразования Фурье по переменной x_2

$$L_{1k}(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_1(0, \alpha_2) + L_{2k}(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_2(0, \alpha_2) = \bar{f}(\alpha_2), \quad k = \overline{1, 4}.$$

Применяя затем к преобразованным выражениям $\bar{u}_j(x_1, \alpha_2)$ обратное преобразование Фурье, получим

$$u_j(x_1, x_2) \approx V^{-1}(x_2)[\bar{u}_j(x_1, \alpha_2)], \quad x_1 \in \Omega_j.$$

Для определения амплитуд напряжений между основанием и покрытием применяем к $G_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ обратное двумерное преобразование Фурье

$$g_j(x_1, x_2) \approx V_2^{-1}(x_1, x_2)[G_j(\alpha_1, \alpha_2)], \quad x_1 \in \Omega_j.$$

При реализации обращения преобразований Фурье амплитуд перемещений и напряжений функции K и K_j в соотношениях (3.1.18), (3.1.19) заменяются их аппроксимациями.

Замечание 3.1.1 Если составляющие покрытия не контактируют между собой, граничные условия вдоль разлома задаются отдельно для каждой пластины. В этом случае колебания от одной части покрытия к другой передаются через упругое основание.

3.2 Задача о статическом взаимодействии пластин на деформируемом основании

Рассматриваемая в данном параграфе граничная задача привела к новому типу функциональных уравнений, ранее не рассматривавшемуся. Ниже построено корректное решение этого функционального уравнения, не встречавшегося в работах специалистов в области факторизации.

Для случая статического взаимодействия покрытия и подложки уравнения прогиба пластин (2.1.11), (2.5.1) примут следующий вид:

$$R_{0j}(\partial x_1, \partial x_2)u_j(x_1, x_2) - \varepsilon_{j5}g_j(x_1, x_2) = b_j(x_1, x_2), \quad (3.2.1)$$

$$x_1 \in \Omega_j, x_2 \in R, j = 1, 2,$$

$$\text{где } R_{0j} = \varepsilon_{j3} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right).$$

Граничные условия в зоне контакта пластин ($x_1 = 0$), составляющих покрытие, при $-\infty < x_2 < +\infty$ задаются соотношением (3.1.2).

В роли подложки может рассматриваться основание Винклера либо упругий слой. В случае винклеровской подстилающей поверхности соотношения между перемещениями и напряжениями на границе с покрытием записуются $g(x_1, x_2) = \frac{u(x_1, x_2)}{\tilde{k}}$, где \tilde{k} – коэффициент постели.

Интегральные соотношения для упругой подложки в условиях исследуемой задачи принимают вид

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_0(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2) g(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2,$$

где функция Грина $K_0(\alpha_1, \alpha_2)$ при условии жесткого закрепления нижнего основания имеет вид [38]

$$K_0(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{(1-\nu) [(3-4\nu) \text{sh}(2\alpha H) - 2\alpha H]}{\alpha D_1(\alpha H)},$$

$$D_1(\alpha H) = (\alpha H)^2 + (1-2\nu)^2 + (1+2(1-2\nu)) \text{ch}^2(\alpha H),$$

в случае контакта без трения $K_0(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4(1-\nu) \text{sh}^2(\alpha H)}{\alpha (\text{sh}(2\alpha H) + 2\alpha H)}$, где

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Приведенные функции $K_0(\alpha_1, \alpha_2)$ обладают следующими свойствами [38]:

– $K_0(\alpha_1, \alpha_2)$ являются мероморфными функциями – отношением двух целых функций, на вещественной оси не имеют нулей и полюсов.

– счетное множество комплексных полюсов ξ_n функций K_0 располагается на четырех ветвях, симметричных относительно вещественной и мнимой осей, аналогичным образом располагается счетное множество комплексных нулей ζ_n .

– абсолютные величины вещественных и мнимых частей нулей и полюсов возрастают с ростом номера, при больших значениях номеров для них имеют место асимптотические формулы (первая четверть)

$$\zeta_n \sim (b_1 \ln n + c_1) + i(d_1 n + e_1),$$

$$\xi_n \sim (b_2 \ln n + c_2) + i(d_2 n + e_2),$$

где b_k, c_k, d_k, e_k – вещественные постоянные.

– для мероморфных функций K_0 справедливо представление

$$K_0(\alpha) = A \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2}{\delta_n^2}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_n^2}\right)}, \quad A = \lim_{\alpha \rightarrow 0} K_0(\alpha),$$

где $\delta_n = -i\zeta_n$, $\gamma_n = -i\xi_n$, ζ_n , ξ_n – соответственно нули и полюса, лежащие в верхней полуплоскости, при этом бесконечное произведение сходится равномерно в области Π_ε для любого сколь угодно малого фиксированного ε , Π_ε – вся плоскость комплексного переменного α , за исключением ε -окрестностей полюсов ξ_n .

Условие идеального контакта пластин и подложки определяет непрерывность перемещений и напряжений на границе покрытие/подложка и описывается соотношениями (3.1.4).

Применим к решению рассматриваемой задачи изложенный выше метод собственных функций. Воспользовавшись в (3.2.1) преобразованием Фурье по переменной x_2 , получим

$$R_{0j}(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_j(x_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5}\bar{g}_j(x_1, \alpha_2) = \bar{b}_j(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R. \quad (3.2.2)$$

Здесь черта соответствует образам Фурье по переменной x_2 описанных выше функций.

Для статического случая ограниченные в соответствующих полуплоскостях решения (3.2.2) примут вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(x_1, \alpha_2) = & (C_{j1} + C_{j2}x_1)e^{\mp\lambda x_1} + \\ & + V^{-1}(x_1) \left[(R_{0j}(-i\alpha_1, -i\alpha_2))^{-1} (\varepsilon_{j5}G_j(\alpha_1, \alpha_2) + B_j(\alpha_1, \alpha_2)) \right], \quad \pm x_1 > 0, \quad (3.2.3) \end{aligned}$$

где $\lambda = |\alpha_2|$, $R_{0j}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \varepsilon_{j3}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2$.

Применяя к полученным выражениям для трансформант вертикальных смещений (3.2.3) преобразование Фурье по соответствующим полупрямым, получим

$$U_j(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\varepsilon_{j5}G_j(\alpha_1, \alpha_2) + B_j(\alpha_1, \alpha_2)}{R_{0j}} + W_j^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} W_j^0(\alpha_1, \alpha_2) = & \frac{\pm iC_{j1}}{\alpha_1 \pm i\lambda} - \frac{\pm C_{j2}}{(\alpha_1 \pm i\lambda)^2} + \\ & + \frac{1}{4\lambda^2\varepsilon_{j3}} \left[\frac{\varepsilon_{j5}G'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 \mp i\lambda)} \pm \frac{i\varepsilon_{j5}G_j(\pm i\lambda, \alpha_2)(\alpha_1 \mp i2\lambda)}{\lambda(\alpha_1 \mp i\lambda)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{B'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 \mp i\lambda)} \pm \frac{iB_j(\pm i\lambda, \alpha_2)(\alpha_1 \mp i2\lambda)}{\lambda(\alpha_1 \mp i\lambda)^2} \right], \quad \alpha_1, \alpha_2 \in R. \quad (3.2.5) \end{aligned}$$

Здесь $\Psi'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) = \left. \frac{d\Psi_j(\alpha_1, \alpha_2)}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1 = \pm i\lambda}$ ($\Psi \in \{G, B\}$), верхний знак в

этажных символах « \pm », « \mp », как было указано выше, соответствует значению $j = 1$, нижний – $j = 2$.

Из последнего соотношения можно выразить преобразования Фурье контактных напряжений на нижних поверхностях пластин

$$G_j(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_{0j}U_j(\alpha_1, \alpha_2) - B_j(\alpha_1, \alpha_2)}{\varepsilon_{j5}} + Y_j^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.2.6)$$

$$Y_j^0(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{R_{0j}}{\varepsilon_{j5}} \left(\frac{\pm iC_{j1}}{\alpha_1 \pm i\lambda} - \frac{\pm C_{j2}}{(\alpha_1 \pm i\lambda)^2} \right) - \frac{R_{0j}}{4\lambda^2 \varepsilon_{j3}} \left[\frac{\varepsilon_{j5} G'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 \mp i\lambda)} \pm \frac{i\varepsilon_{j5} G_j(\pm i\lambda, \alpha_2)(\alpha_1 \mp i2\lambda)}{\lambda(\alpha_1 \mp i\lambda)^2} + \frac{B'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 \mp i\lambda)} \pm \frac{iB_j(\pm i\lambda, \alpha_2)(\alpha_1 \mp i2\lambda)}{\lambda(\alpha_1 \mp i\lambda)^2} \right], \quad \alpha_1, \alpha_2 \in R. \quad (3.2.7)$$

Условия сопряжения пластин с подложкой в преобразованиях Фурье принимают вид (3.1.11).

Из уравнения прогиба пластин (3.2.1), соотношений для трансформант Фурье напряжений и перемещений и условий сопряжения пластин и подложки после ряда преобразований приходим к уравнению вида (3.1.12). Для статического случая соотношения (3.1.13), (3.1.14) запишутся

$$K_{0j}(\alpha_1, \alpha_2) = \pm \left(K_0(\alpha_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5} (R_{0j})^{-1} \right), \quad (3.2.8)$$

$$F_0(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^2 \left[B_j(\alpha_1, \alpha_2) (R_{0j})^{-1} + W_j^0(\alpha_1, \alpha_2) \right]. \quad (3.2.9)$$

Для случая сосредоточенного воздействия на поверхность правой пластины $B_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_{j5} A e^{i(\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0)}$, $B_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0$.

Изложенная в предыдущем параграфе схема преобразования (3.1.12) для статического взаимодействия пластин с подложкой приводит к функциональному уравнению

$$\begin{aligned}
G_1^+(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{K}_0 G_2^-(\alpha_1, \alpha_2) = & K_{01}^{-1} \left(\frac{\tilde{C}_{11}}{\alpha_1 + i\lambda} + \frac{\tilde{C}_{12}}{(\alpha_1 + i\lambda)^2} + \frac{\tilde{C}_{21}}{\alpha_1 - i\lambda} + \frac{\tilde{C}_{22}}{(\alpha_1 - i\lambda)^2} + \right. \\
& - \frac{\varepsilon_{15} \tilde{A} e^{i\alpha_1 x_1^0}}{R_{10}} - \frac{\varepsilon_{15}}{4\lambda^2 \varepsilon_{13}} \left[\frac{i(\alpha_1 - i2\lambda) (\tilde{A} e^{-\lambda x_1^0} - G_1^+(i\lambda, \alpha_2))}{\lambda(\alpha_1 - i\lambda)^2} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(\alpha_1 - i\lambda)} (i\tilde{A} x_1^0 e^{-\lambda x_1^0} - G_{1,\alpha_1}^+(i\lambda, \alpha_2)) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon_{25}}{4\lambda^2 \varepsilon_{23}} \left[\frac{G_{2,\alpha_1}^-(-i\lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 + i\lambda)} - \frac{iG_2^-(-i\lambda, \alpha_2)(\alpha_1 + i2\lambda)}{\lambda(\alpha_1 + i\lambda)^2} \right] \right), \quad (3.2.10)
\end{aligned}$$

где $\tilde{K}_0 = -K_{01}^{-1} K_{02}$, $\tilde{C}_{j1} = \pm i C_{j1}$, $\tilde{C}_{j2} = \mp C_{j2}$, ($j = 1, 2$), $\tilde{A} \equiv \tilde{A}(\alpha_2) = A e^{i\alpha_2 x_2^0}$.

Так же, как и в параграфе 3.1, обозначим для краткости функции в правой части (3.2.10), стоящие перед постоянными коэффициентами, через $N_{mn}(\alpha_1, \beta)$:

$$\begin{aligned}
N_{11}(\alpha_1, \beta) &= \tilde{K}_{0,+}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) K_{01}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) (\alpha_1 + i\beta)^{-1}, \quad N_{12}(\alpha_1, \beta) = \tilde{K}_{0,+}^{-1} K_{01}^{-1} (\alpha_1 + i\beta)^{-2}, \\
N_{21}(\alpha_1, \beta) &= \tilde{K}_{0,+}^{-1} K_{01}^{-1} (\alpha_1 - i\beta)^{-1}, \quad N_{22}(\alpha_1, \beta) = \tilde{K}_{0,+}^{-1} K_{01}^{-1} (\alpha_1 - i\beta)^{-2}.
\end{aligned}$$

Введем также обозначения $M_{m2}(\alpha_1, \beta) = \pm (\alpha_1 \pm i2\beta) N_{m2}(\alpha_1, \beta)$ ($m = 1, 2$). Кроме того, обозначим множители перед функциями N_{mn} , M_{m2} через γ_{mn} ($m, n = 1, 2$), где $\gamma_{mn} = \frac{\varepsilon_{m5}}{4\lambda^{n+1} \varepsilon_{m3}}$. Функцию, характеризующую внешнее воздействие, обозначим через $B(\alpha_1, \alpha_2)$, где

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_{15} \tilde{A} \tilde{K}_{0,+}^{-1} K_{01}^{-1} \left(\frac{e^{i\alpha_1 x_1^0}}{R_{10}} + \frac{ie^{-\lambda x_1^0}}{4\lambda^2 \varepsilon_{13} (\alpha_1 - i\lambda)} \left[x_1^0 + \frac{\alpha_1 - i2\lambda}{\lambda(\alpha_1 - i\lambda)} \right] \right).$$

В результате получим

$$\tilde{K}_{0,+}^{-1} G_1^+(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{K}_{0,-} G_2^-(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} N_{jk}(\alpha_1, \lambda) + B(\alpha_1, \alpha_2) +$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_{11}N_{11}(\alpha_1, -\lambda)G_{1,\alpha_1}^{+'}(i\lambda, \alpha_2) + \gamma_{21}N_{21}(\alpha_1, -\lambda)G_{2,\alpha_1}^{-'}(-i\lambda, \alpha_2) - \\
& -i\gamma_{12}M_{12}(\alpha_1, -\lambda)G_1^+(i\lambda, \alpha_2) - i\gamma_{22}M_{22}(\alpha_1, -\lambda)G_2^-(-i\lambda, \alpha_2). \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Особенность построенного функционального уравнения состоит в появлении неизвестных значений производных. Применяя алгоритм для решения функциональных уравнений Винера – Хопфа (факторизуя в виде суммы правую часть уравнения (3.2.11)), в итоге приходим к представлениям решений в форме

$$\begin{aligned}
G_1^+(\alpha_1, \alpha_2) = & \tilde{K}_{0,+} \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(\alpha_1, \lambda)\}^+ + \{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^+ \right. \\
& +\gamma_{11} \{N_{11}(\alpha_1, -\lambda)\}^+ G_{1,\alpha_1}^{+'}(i\lambda, \alpha_2) + \gamma_{21} \{N_{21}(\alpha_1, -\lambda)\}^+ G_{2,\alpha_1}^{-'}(-i\lambda, \alpha_2) - \\
& \left. - i\gamma_{12} G_1^+(i\lambda, \alpha_2) \{M_{12}(\alpha_1, -\lambda)\}^+ - i\gamma_{22} G_2^-(-i\lambda, \alpha_2) \{M_{22}(\alpha_1, -\lambda)\}^+ \right); \quad (3.2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2^-(\alpha_1, \alpha_2) = & \tilde{K}_{0,-}^{-1} \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(\alpha_1, \lambda)\}^- + \{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^- + \right. \\
& +\gamma_{11} \{N_{11}(\alpha_1, -\lambda)\}^- G_{1,\alpha_1}^{+'}(i\lambda, \alpha_2) + \gamma_{21} \{N_{21}(\alpha_1, -\lambda)\}^- G_{2,\alpha_1}^{-'}(-i\lambda, \alpha_2) - \\
& \left. - i\gamma_{12} G_1^+(i\lambda, \alpha_2) \{M_{12}(\alpha_1, -\lambda)\}^- - i\gamma_{22} G_2^-(-i\lambda, \alpha_2) \{M_{22}(\alpha_1, -\lambda)\}^- \right). \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

Далее применяется алгоритм, изложенный в параграфе 3.1. Однако в отличие от рассмотренной ранее задачи об установившихся колебаниях, в случае статического взаимодействия пластин с подложкой при получении системы для определения неизвестных $G_j^\pm(\pm i\lambda, \alpha_2)$, $G_{j,\alpha_1}^\pm(\pm i\lambda, \alpha_2)$ следует увеличить количество рассматриваемых функциональных уравнений. При этом в соотношение (3.2.12) нужно подставить значение $\alpha_1 = i\lambda$, а в (3.2.13) – значение $\alpha_1 = -i\lambda$. Затем следует продифференцировать (3.2.12), (3.2.13) по параметру α_1

$$\begin{aligned}
G_{1,\alpha_1}^{+'}(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{d\tilde{K}_{0,+}}{d\alpha_1} \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(\alpha_1, \lambda)\}^+ + \{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^+ + \right. \\
&+ \gamma_{11} \{\tilde{N}_{11}(\alpha_1, -\lambda)\}^+ G_{1,\alpha_1}^{+'}(i\lambda, \alpha_2) + \gamma_{21} \{\tilde{N}_{21}(\alpha_1, -\lambda)\}^+ G_{2,\alpha_1}^{-'}(-i\lambda, \alpha_2) - \\
&\left. - i\gamma_{12} \{M_{12}(\alpha_1, -\lambda)\}^+ G_1^+(i\lambda, \alpha_2) - i\gamma_{22} \{M_{22}(\alpha_1, -\lambda)\}^+ G_2^-(i\lambda, \alpha_2) \right) + \\
&+ \tilde{K}_{0,+} \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \frac{d\{N_{jk}(\alpha_1, \lambda)\}^+}{d\alpha_1} + \frac{d\{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^+}{d\alpha_1} + \right. \\
&+ \gamma_{11} \frac{d\{\tilde{N}_{11}(\alpha_1, -\lambda)\}^+}{d\alpha_1} G_{1,\alpha_1}^{+'}(i\lambda, \alpha_2) + \gamma_{21} \frac{d\{\tilde{N}_{21}(\alpha_1, -\lambda)\}^+}{d\alpha_1} G_{2,\alpha_1}^{-'}(-i\lambda, \alpha_2) - \\
&\left. - i\gamma_{12} \frac{d\{M_{12}(\alpha_1, -\lambda)\}^+}{d\alpha_1} G_1^+(i\lambda, \alpha_2) - i\gamma_{22} \frac{d\{M_{22}(\alpha_1, -\lambda)\}^+}{d\alpha_1} G_2^-(i\lambda, \alpha_2) \right); \quad (3.2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{2,\alpha_1}^{-'}(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{d\tilde{K}_{0,-}^{-1}}{d\alpha_1} \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \{N_{jk}(\alpha_1, \lambda)\}^- + \{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^- + \right. \\
&+ \gamma_{11} \{N_{11}(\alpha_1, -\lambda)\}^- G_{1,\alpha_1}^{+'}(i\lambda, \alpha_2) + \gamma_{21} \{N_{21}(\alpha_1, -\lambda)\}^- G_{2,\alpha_1}^{-'}(-i\lambda, \alpha_2) - \\
&\left. - i\gamma_{12} \{M_{12}(\alpha_1, -\lambda)\}^- G_1^+(i\lambda, \alpha_2) - i\gamma_{22} \{M_{22}(\alpha_1, -\lambda)\}^- G_2^-(i\lambda, \alpha_2) \right) + \\
&+ \tilde{K}_{0,-}^{-1} \left(\sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk} \frac{d\{N_{jk}(\alpha_1, \lambda)\}^-}{d\alpha_1} + \frac{d\{B(\alpha_1, \alpha_2)\}^-}{d\alpha_1} + \right. \\
&+ \gamma_{11} \frac{d\{N_{11}(\alpha_1, -\lambda)\}^-}{d\alpha_1} G_{1,\alpha_1}^{+'}(i\lambda, \alpha_2) + \gamma_{21} \frac{d\{N_{21}(\alpha_1, -\lambda)\}^-}{d\alpha_1} G_{2,\alpha_1}^{-'}(-i\lambda, \alpha_2) - \\
&\left. - i\gamma_{12} \frac{d\{M_{12}(\alpha_1, -\lambda)\}^-}{d\alpha_1} G_1^+(i\lambda, \alpha_2) - i\gamma_{22} \frac{d\{M_{22}(\alpha_1, -\lambda)\}^+}{d\alpha_1} G_2^-(i\lambda, \alpha_2) \right). \quad (3.2.15)
\end{aligned}$$

Далее следует произвести описанную выше подстановку в полученные

соотношения: $\alpha_1 = i\lambda$ – в (3.2.14), $\alpha_1 = -i\lambda$ – в (3.2.15). Таким образом, получим замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных $G_j^\pm(\pm i\lambda, \alpha_2)$, $G_{j, \alpha_1}^\pm(\pm i\lambda, \alpha_2)$ ($j=1,2$).

Для проведения факторизации по α_1 относительно вещественной оси $K_0(\alpha_1, \alpha_2)$ аппроксимируется так же, как было описано в параграфе 3.1, но

для построения
$$\Pi^*(\alpha_1, \alpha_2) = \prod_{k=1}^P (\alpha_1^2 - \tilde{\zeta}_{0k}^2) (\alpha_1^2 - \tilde{\tau}_{0k}^2)^{-1} \quad (\tilde{\zeta}_{0k}^2 = \zeta_{0k}^2 - \alpha_2^2,$$

$\tilde{\tau}_{0k}^2 = \tau_{0k}^2 - \alpha_2^2)$ берутся ζ_{0k} , τ_{0k} – комплексные нули и полюса соответственно ($k = \overline{1, P}$). Для достижения приемлемой точности достаточно взять $P=6$.

Функции K_{0j} ($j=1,2$) в (3.2.8) имеют такое же асимптотическое поведение на бесконечности, как и K_0 , и могут быть представлены аналогичным образом.

Определив неизвестные из полученной системы, внесем найденные значения соответственно в правые части (3.2.12), (3.2.13).

Далее схема нахождения перемещений $u_1^+(\alpha_1, \alpha_2)$, $u_2^-(\alpha_1, \alpha_2)$ совпадает с описанной в параграфе 3.1 для установившихся колебаний разнотипных пластин.

Для определения напряжений между основанием и покрытием применим к $G_1^+(\alpha_1, \alpha_2)$, $G_2^-(\alpha_1, \alpha_2)$ обратное двумерное преобразование Фурье, заменяя функции K_0 и K_{0j} их аппроксимациями,

$$g_j(x_1, x_2) \approx V_2^{-1}(x_1, x_2) [G_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2)], \quad x_1 \in \Omega_j.$$

Полученные в данном параграфе соотношения открывают возможность исследования влияния широкого разнообразия граничных условий в области контакта полуплоскостей составного покрытия на состояние системы.

При этом, кроме заданных соотношением (3.1.2) условий контакта, может быть рассмотрено бесконтактное соединение, описываемое любыми из представленных во второй главе граничных условий отдельно для каждой

пластины. Могут быть также заданы условия (в общем случае их четыре) взаимодействия берегов трещины (разлома) в той или иной комбинации.

Замечание 3.2.1 Построенные в параграфах 3.1, 3.2 решения рассмотренных граничных задач позволяют при необходимости проследить этапы процесса разрушения трещины (разлома) от первоначально целой пластины до последующего полного разъединения ее на две полуплоскости.

3.3 Результаты численного исследования задач

В приложении А представлены результаты численного моделирования установившихся колебаний полуограниченных пластин на упругом слое.

На рисунках А1 – А8 приводятся графики комплексных амплитуд перемещений поверхности пластин на упругом основании в случае неизменных свойств системы в направлении оси Ox_2 при различных безразмерных параметрах. Задаваемая при этом безразмерная частота определяется по формуле

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho \omega^2 a^2}{\mu},$$

μ – модуль сдвига, ρ – плотность упругого основания, a – ха-

рактерный линейный размер. На всех графиках (рисунки А1 – А16) по оси ординат отложена величина амплитуды смещения (вещественной части комплексных амплитуд смещений соответствует красный цвет, мнимой – зеленый, а абсолютной величине – синий), по оси абсцисс – приведенная частота $\bar{\omega}$ колебаний. Результаты расчетов комплексных амплитуд смещений получены с помощью метода, изложенного в параграфе 3.1.

Представленные результаты расчетов позволяют оценить влияние свойств пластин, составляющих покрытие, а также характеристик основания на волновое поле на поверхности рассматриваемой структуры. Кроме того, рисунки А1 – А10 иллюстрируют зависимость конфигурации прохождения сигнала через разлом от характера взаимодействия контактирующих пластин.

Для граничных условий рассматриваемой задачи использованы следующие варианты:

- отсутствие смещений края пластины вдоль оси Ox_3

$$u_j \Big|_{x_1=0} = 0, \quad j = 1, 2;$$

- шарнирное опирание края (изгибающий момент равен нулю)

$$M_{j,x_1} \Big|_{x_1=0} \equiv -D_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad j = 1, 2;$$

- свободное смещение края вдоль оси Ox_3 (давление на подкрепляющее ребро равно нулю)

$$Q_{j,x_1} \Big|_{x_1=0} \equiv -D_j \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad j = 1, 2;$$

- защемление края пластины (отсутствуют повороты касательной к срединной поверхности)

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad j = 1, 2;$$

Функция Грина упругого слоя рассматриваемой задачи не имеет вещественных нулей и полюсов в некотором диапазоне частот $0 \leq \bar{\omega} \leq \bar{\omega}_k$, в данном диапазоне частот упругие волны в слое не возникают, при этом значение $\bar{\omega}_k$ определяется физико-механическими параметрами системы. Приведенные графики получены для $\bar{\omega} > \bar{\omega}_k$ при следующих модельных безразмерных параметрах подложки: $\rho = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 0,3$.

На рисунках А1 – А5 представлены результаты комплексных амплитуд для описанных граничных условий и двух соотношений жесткостей пластин при $\bar{\omega} = 2,5$.

Рисунок А1 соответствует условию жесткого сцепления краев пластин

$$\left(u_1 \Big|_{x_1=0} = u_2 \Big|_{x_1=0}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}, \quad D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0}, \quad D_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = D_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} \right)$$

для пластин с характеристиками $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 5$ (а) и $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,2$ (б). Рисунок А2 иллю-

стрирует случай, когда края пластин смещаются свободно $\left(D_j \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = 0 \right.$

поперечные силы, изгибающие моменты $\left. - D_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \right)$ для тех же харак-

теристик пластин покрытия. Рисунок А3 соответствует случаю заземленных

краев $\left(u_j \Big|_{x_1=0} = 0, \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0 \right)$. На рисунке А4 приведены комплексные ампли-

туды смещений при выполнении следующих граничных условий: перемеще-

ния и поперечные силы, действующие на края пластин, непрерывны $u_1 \Big|_{x_1=0} = u_2 \Big|_{x_1=0}$, $D_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = D_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0}$, изгибающие моменты равны нулю

$\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0, j = 1, 2 \right)$.

Рисунок А5 соответствует условиям «вязкого контакта»: изгибающие

моменты в зоне контакта равны нулю $\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \right)$, а действующая на край

пластины поперечная сила пропорциональна разности скоростей контакти-

рующих пластин $D_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = -D_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = ki\omega (u_2(x_1) - u_1(x_1))$. Коэффициент

k принят равным 0,5.

Результаты модельных расчетов демонстрируют зависимость волновой картины на поверхности системы покрытие/подложка от условий контакта, свойств составляющих покрытия и частоты вибрации.

Результаты вычисления комплексных амплитуд перемещений поверхности системы покрытие/подложка совпадают с полученными при решении задачи для установившихся колебаний системы с помощью метода, связанного с преобразованием дифференциального оператора [112, 113].

На рисунках А6 – А10 представлены графики комплексных амплитуд для тех же граничных условий и соотношений жесткости пластин для $\bar{\omega} = 0,96$. С уменьшением частоты вибрации амплитуды смещений поверхности левой пластины в сравнении с правой уменьшаются и влияние свойств пластин становится менее выраженным.

При рассмотрении пространственной задачи самостоятельной задачей становится отыскание нулей и полюсов функций, подлежащих аппроксимации и последующей факторизации. На рисунке А11 приведен пример зависимости параметра α_1 полюса функции $K(\alpha_1, \alpha_2)$ для задачи об установившихся колебаниях пластин на упругом слое, жестко сцепленном с недеформируемым основанием, от параметра α_2 (функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$ представлена в параграфе 3.1). Вещественной части α_1 соответствует линия красного цвета, мнимой – синяя. Рисунок А12 иллюстрирует расположение вещественных полюсов (сплошные линии красного цвета) и нулей (пунктирные линии синего цвета) функции $K(\alpha_1, \alpha_2)$ по параметру α_1 при различных значениях параметра α_2 .

При рассмотрении статической задачи был выполнен комплекс подготовительных исследований, демонстрирующих правильность выполненных построений. Именно, в параграфе 3.2 были рассмотрены играющие решающую роль при построении решений функции $K_{0j}(\alpha_1, \alpha_2)$. В ходе построения решения задачи требуется отыскивать комплексные нули и полюса этих функций по параметру α_1 . С этой целью вычислялись комплексные корни уравнений вида $\bar{K}_0(\alpha) = 0$ и $\bar{K}_0^{-1}(\alpha) = 0$, где $\bar{K}_0 = K_0(\alpha) - \varepsilon(\alpha^2)^{-2}$. Затем нуль по параметру α_1 находился из соотношения $\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 - \alpha_2^2}$ при условиях $\text{Re}\alpha_1 > 0$, $\text{Im}\alpha_1 > 0$ ($\alpha_2 \in R$). Для приближенного нахождения комплексных корней указанных уравнений в выбранной прямоугольной области комплексной плоскости выполнялся расчет значений функции $\bar{K}_0(\alpha)$ ($\bar{K}_0^{-1}(\alpha)$) в

узлах заданной сетки. Рассчитанные значения использовались для геометрического построения линий нулей реальной и мнимой частей функции: $\operatorname{Re} \bar{K}_0 = 0$, $\operatorname{Im} \bar{K}_0 = 0$ ($\operatorname{Re} \bar{K}_0^{-1} = 0$, $\operatorname{Im} \bar{K}_0^{-1} = 0$). Построенное множество точек пересечения этих линий позволяет определить комплексные корни для дальнейшего использования при исследовании и решении различных граничных задач.

В качестве функции K_0 была выбрана функция Грина упругого слоя, лежащего без трения на недеформируемом основании, приведенная в параграфе 3.2. Для отыскания комплексных нулей с наименьшей мнимой частью (обеспечивающих наибольший вклад в решение задачи) рассматривалась окрестность нуля.

На рисунках A13 – A21 представлены результаты нахождения комплексных нулей функции $\bar{K}_0(\alpha)$ по параметру α_1 в зависимости от значения параметра α_2 для различных значений ε и коэффициента Пуассона упругого слоя ν . По оси ординат отложены вещественная (линия красного цвета) и мнимая (линия синего цвета) части α_1 , по оси абсцисс – значения α_2 . Рядом с каждым рисунком представлена таблица рассчитанных значений. Значения ε и ν приведены в подрисуночной подписи. Комплексными нулями функций $K_{0j}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$ являются комплексные нули $K_0^{-1}(\alpha)$ и значения $-i|\alpha_2|$ при $j=1$ и $i|\alpha_2|$ – при $j=2$. Первый комплексный нуль функции K_0^{-1} приведен на рисунке A22.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке методов определения характеристик напряженно-деформированного состояния литосферных структур и изучению влияния характера их взаимодействия на разломах, а также свойств элементов структуры на развитие волнового и деформационного процессов. Рассмотрены трехмерные граничные задачи установившихся колебаний и статического взаимодействия протяженных разнотипных пластин, контактирующих вдоль прямолинейного разлома. В случае статической задачи наличие кратных корней вызвало появление более сложной системы функциональных уравнений Винера – Хопфа, не рассматривавшейся ранее, содержащей в качестве неизвестных не только функции, регулярные в определенных областях, но и их производные, что увеличило количество неизвестных. Удалось построить дополнительные функциональные уравнения и получить замкнутую систему для определения всех неизвестных, разработав тем самым способ решения таких граничных задач.

Основные полученные результаты заключаются в следующем:

1. Разработан метод исследования ранее не изучавшейся трехмерной граничной задачи взаимодействия разнотипных пластин, контактирующих между собой по прямолинейному разлому и одновременно взаимодействующих с деформируемым основанием.

2. На основе разработанного метода представлен способ определения всех основных характеристик напряженно-деформированного состояния блочной структуры, образованной двумя контактирующими пластинами на деформируемом основании, при различных условиях контакта пластин на разломе, исследован наиболее сложный случай граничной задачи, отвечающий статической постановке.

3. Предложен подход к решению динамических задач для малых частот посредством последовательного решения серии статических задач.

4. Разработан и программно реализован алгоритм расчета амплитуд перемещений поверхностей пластин покрытия для случая установившихся колебаний.

5. Вычислены значения ряда параметров, позволяющих ставить и решать конкретные задачи геофизики и теории прочности материалов с дефектными покрытиями.

Практическая значимость состоит в применении результатов для исследования рассмотренного класса задач механики деформируемого твердого тела в ряде проектов, направленных на решение проблемы оценки состояния сейсмоопасных территорий, а также оценки прочности структур с покрытиями в задачах дефектоскопии тел с трудно обнаруживаемыми дефектами. Полученные результаты могут найти применение при решении актуальных проблем широкого круга инженерных задач, связанных с разработкой и применением покрытий.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ДУЧП – дифференциальное уравнение с частными производными;

ПДУ – псевдодифференциальное уравнение;

ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение;

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений;

t – время;

x_1, x_2, x_3 – прямоугольные декартовы координаты;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – параметры преобразования Фурье;

R – вещественная прямая;

ω – частота колебаний;

Ω – двумерная область на плоскости; область, занимаемая пластиной;

μ, λ – упругие коэффициенты Ляме;

ν – коэффициент Пуассона;

E – модуль Юнга;

H – толщина слоя;

ρ – плотность;

\tilde{C} – множество непрерывных на $R = (-\infty, \infty)$ функций f , обладающих свойством $f(-\infty) = f(\infty)$;

$\mathbf{H}_s(\Omega)$ – пространство медленно растущих функций;

σ – контур в комплексной плоскости, выбираемый согласно принципу предельного поглощения и совпадающий с вещественной прямой за исключением отрезка конечной длины;

E_+, E_- – области, расположенные выше (+) и ниже (–) контура, относительно которого производится факторизация;

$F^\pm(\alpha)$ – функция, регулярная выше (+) или ниже (–) выбранного контура;

λ_+, λ_- – односвязные области комплексной плоскости, разделенные кривой

Γ_n ;

$\mathbf{K}_{\pm}(\alpha_n)$ – неособенная матрица с регулярными в области λ_{\pm} элементами;

$\Pi(\alpha, N)$ – рациональная функция;

V, V^{-1} – операторы преобразования и обращения Фурье,

$V(\alpha)[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \equiv F(\alpha)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$,

$V^{-1}(x)[F(\alpha)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} F(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha \equiv f(x)$ – обратное преобразование Фурье

функции $F(\alpha)$;

V_n, V_n^{-1} – операторы преобразования и обращения Фурье размерности n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Изменение окружающей среды и климата: природные и связанные с ними техногенные катастрофы: 8 т. / Пред. ред. кол.: Н.П. Лаверов, Т. 1: Сейсмические процессы и катастрофы / Отв. ред. А.О. Глико. – М.: ИФЗ РАН, 2008. – 404 с.
- 2 Адушкин, В.В. Техногенные процессы в земной коре (опасности и катастрофы) / В.В. Адушкин, С.Б. Трунтаев. – М.: ИНЭК, 2005. – 252 с.
- 3 Адушкин, В.В. Актуальные проблемы геомеханики земной коры / В.В. Адушкин // Вестник ОГГГН РАН. 2001. № 1(16). – URL: http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h_dgggms/1-2001/adushkin.htm#begin (дата обращения: 17.12.2012).
- 4 Статистическая модель сейсмичности и определение базовых сейсмических эффектов / Л.В. Канторович, В.И. Кейлис-Борок, Г.М. Молчан, Е.В. Вилькович // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1974. – № 5. – С. 85–101.
- 5 Костров, Б.В. Механика очага тектонического землетрясения / Б.В. Костров. – М.: Наука, 1975. – 176 с.
- 6 Медведев, С.В. Инженерная сейсмология / С.В. Медведев. – М.: ГОССТРОЙ СССР, 1962. – 284 с.
- 7 Николаев, А.В. Проблемы нелинейной сейсмологии // Проблемы нелинейной сейсмологии / под ред. А.В. Николаева, И.Н. Галкина. – М.: Наука, 1987. – С. 5–20.
- 8 Родионов, Н.В. Очерк геомеханики / Н.В. Родионов. – М.: Научный мир, 1996. – 64 с.
- 9 Садовский, М.А. Естественная кусковатость горной породы / М.А. Садовский // Доклады АН СССР. 1979. – Т. 247, № 4. – С. 829–831.
- 10 Садовский, М.А. О распределении размеров твердых отдельностей / М.А. Садовский // Доклады АН СССР. 1983. – Т. 269, № 1. – С. 69–72.

- 11 Садовский, М.А. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс / М.А. Садовский, Л.Г. Болховитинов, В.Ф. Писаренко. – М.: Наука, 1987. – 104 с.
- 12 Садовский, М.А., Блоковая тектоника литосферы / М.А. Садовский, Л.И. Красный // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 287, № 6. – С. 1451–1454.
- 13 Уломов, В.И. Глобальная упорядоченность сейсмогеодинамических структур и некоторые аспекты сейсмического районирования и долгосрочного прогноза землетрясений / В.И. Уломов // Сейсмичность и сейсмическое районирование Северной Евразии. – М.: ИФЗ РАН, 1993. – Вып. 1. – С. 24–44.
- 14 Чернов, Ю.К. Сильные движения грунта и количественная оценка сейсмической опасности территории / Ю.К. Чернов. – Ташкент: Изд-во ФАН, 1989. – 296 с.
- 15 Ben-Menahem, A. Seismic waves and sources / A. Ben-Menahem, S.J. Singh. – New York: Springer-Verlag, 1981. – 1108 p.
- 16 Brown, S.R. A simplified spring-blocks model of earthquakes / S.R. Brown, C.H. Scholz, J.B. Rundle // Geophys. Res. Lett. 1991. – Vol. 18, № 2. – P. 215–218.
- 17 Ding, E.J. Analytical treatment for a spring-blocks model / E.J. Ding, Y.N. Lu // Phys. Rev. Lett. 1993. – Vol. 70, № 23. – P. 3627–3630.
- 18 Dmowska, R. Fracture theory and its seismological applications. Continuum theories in solid earth physics / R. Dmowska, J.R. Rice // PWN-Polish Scientific Publishers. – Warsaw, 1986. – P. 187–255.
- 19 Карлович, И.А. Геология / И.А. Карлович. – М.: Академический проект, 2002. – 704 с.
- 20 Касахара, К. Механика землетрясений / К. Касахара. – М.: Мир, 1985. – 262 с.
- 21 Кузьмин, Ю.О. Современные суперинтенсивные деформации земной поверхности в зонах платформенных разломов / Ю.О. Кузьмин // Геологическое изучение и использование недр: Информ. сб. – М.: Наука, 1996. – Вып. 4. – С. 43–53.

- 22 Назаров, А.Г. Основы количественного определения интенсивности сильных землетрясений / А.Г. Назаров, С.С. Дарбинян. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1974. – 286 с.
- 23 Притчетт, У. Получение надежных данных сейсморазведки / У. Притчетт. – М.: Мир, 1999. – 450 с.
- 24 Райс, Дж. Механика очага землетрясения / Дж. Райс. – М.: Мир, 1982. – 216 с.
- 25 Уланов, В.И. Динамика земной коры Средней Азии и прогноз землетрясений / В.И. Уланов. – Ташкент: Изд-во ФАН, 1974. – 216 с.
- 26 Аки, К. Количественная сейсмология. Теория и методы: в 2 т. / К. Аки, П. Ричардс – М.: Мир, 1983. – 876 с.
- 27 Алексеев, А.С. О концепции многодисциплинарного прогноза землетрясений с использованием интегрального предвестника / А.С. Алексеев, А.С. Белоносов, В.Е. Петренко // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности. Вычислительная сейсмология. – М.: ГЕОС, 2001. – Вып. 32. – С. 81–97.
- 28 Кузнецов, В.В. Физика горячей Земли / В.В. Кузнецов. – Новосибирск: Наука, 2000. – 365 с.
- 29 Кузнецов, В.В. Физика земных катастрофических явлений / В.В. Кузнецов. – Новосибирск: Наука, 1992. – 96 с.
- 30 Саваренский, Е.Ф. Сейсмические волны / Е.Ф. Саваренский. – М.: Недра, 1972. – 292 с.
- 31 Ритмы сейсмичности Земли / А.Г. Гамбурцев, Н.В. Кондорская, О.В. Олейник, В.И. Французова, Е.А. Хромецкая, Ф.Н. Юдахин // Физика земли. – 2004. – № 5. – С. 95–107.
- 32 Ризниченко, Ю.В. Проблемы сейсмологии / Ю.В. Ризниченко. – М.: Наука, 1985. – 408 с.
- 33 Николаев, А.В. Развитие нетрадиционных методов в геофизике // Физические основы сейсмического метода / А.В. Николаев. – М.: Наука, 1991. – С. 5–17.

- 34 Собисевич, А.Л. Мониторинг слоистых неоднородных сред / А.Л. Собисевич. – М.: ОИФЗ РАН, 2001. – 354 с.
- 35 Собисевич, Л.Е. Волновые процессы и резонансы в геофизике / Л.Е. Собисевич, А.Л. Собисевич. – М.: ОИФЗ РАН, 2001. – 299 с.
- 36 Амензаде, Ю.А. Теория упругости / Ю.А. Амензаде. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
- 37 Бабешко, В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
- 38 Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 455 с.
- 39 Ворович, И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И.И. Ворович, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 319 с.
- 40 Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
- 41 Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
- 42 Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
- 43 Рвачев, В.Л. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей / В.Л. Рвачев, В.С. Проценко. – Киев: Наукова думка, 1977. – 235 с.
- 44 Улитко, А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А.Ф. Улитко. – Киев: Наукова думка, 1979. – 261 с.
- 45 Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 420 с.
- 46 Аннин, Б.Д. Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел / Б.Д. Аннин. – Новосибирск: Изд-во Института гидродинамики, 2005. – 204 с.

- 47 Арутюнян, Н.Х. Контактные задачи теории ползучести / Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров. – Ереван: НАН, 1999. – 320 с.
- 48 Alexandrov, V.M. Three-dimensional contact problems / V.M. Alexandrov, D.A. Pozharskii. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 406 p.
- 49 Бабешко, В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости / В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1984. – 265 с.
- 50 Ворович, И.И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И.И. Ворович, В.А. Бабешко, О.Д. Пряхина. – М.: Научный мир, 1999. – 248 с.
- 51 Горшков, А.Г. Динамические контактные задачи с подвижными границами / А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский. – М.: Наука, 1995. – 352 с.
- 52 Локализация линейных волн / Д.А. Индейцев, Н.Г. Кузнецов, О.В. Мотыгин, Ю.А. Мочалова. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2007. – 344 с.
- 53 Ерофеев, В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В.И. Ерофеев. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
- 54 Калинин, В.В. Динамика поверхности неоднородных сред / В.В. Калинин, Т.И. Белянкова. – М.: Физматлит, 2009. – 312 с.
- 55 Калинин, В.В. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел / В.В. Калинин, Т.И. Белянкова. – М.: Физматлит, 2006. – 272 с.
- 56 Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. – М.: Физматлит, 2001. – 672 с.
- 57 Моссаковский, В.И. Контактные задачи математической теории упругости / В.И. Моссаковский, Н.Е. Качаловская, С.С. Голикова. – Киев: Наукова думка, 1985. – 250 с.

58 Индейцев Д.А. Динамические эффекты в материалах со сложной структурой / Д.А. Индейцев, В.Н. Наумов, Б.Н. Семенов // Известия РАН. – МТТ. – 2007. – № 5. – С. 17–39.

59 Чебаков М.И. Интегральные уравнения контактных задач для трехслойной полосы / М.И. Чебаков, Е.М. Колосова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2012. – № 6 (172). – С. 46–49.

60 Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Телес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 526 с.

61 Зенкевич, О.С. Конечные элементы в аппроксимации / О.С. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 313 с.

62 Белоконь, А.В. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств / А.В. Белоконь, А.В. Наседкин, А.Н. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66., №. 3. – С. 491–501.

63 An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks / F.L. Stazi, E. Budyn, J. Chessa, T. Belytschko // Computational Mechanics. – 2003. – Vol. 31. – P. 38–48.

64 Hypersingular boundary integral equation: Same applications in acoustic and elastic wave scattering / G. Krishnasamy, L.W. Schmerr, T.J. Rudolphi, F.J. Rizzo // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1990. – Vol. 57, № 2. – P. 404–414.

65 Analysis of laminated composite beams and plates with piezoelectric patches using the element-free Galerkin method / K.M. Liew, H.K. Lim, M.J. Tan, X.Q. He // Computational Mechanics. – 2002. – Vol. 29, № 6. – P. 486–497.

66 Ватульян, А.О. Новый метод ГИУ в краевых задачах для эллиптических операторов и его численная реализация / А.О. Ватульян, О.В. Ковалев, А.Н. Соловьев // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7. – № 1. – С. 54–65.

67 Ватульян, А.О. Новая формулировка граничных интегральных уравнений первого рода в электроупругости / А.О. Ватульян, А.Н. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, вып. 6. – С. 1035–1043.

68 Кит, Г.С. Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом слое методом граничных элементов / Г.С. Кит, В.В. Михаськив, О.М. Хай // ПММ. – 2002. – Т. 66, вып. 5. – С. 855–863.

69 Метод слоистых элементов в динамической теории упругости / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, А.А. Еремин, В.В. Михаськив // ПММ. – 2009. – Т. 73, вып. 4. – С. 622–634.

70 Бабешко, В.А. Метод факторизации решения некоторых краевых задач / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко // ДАН. – 2003. – Т. 389, № 2. – С. 184–188.

71 Бабешко, В.А. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2006. – Т. 410, № 2. – С. 168–172.

72 Бабешко, В.А. К теории блочного элемента / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2009. – Т. 427, № 2. – С. 183–187.

73 Бабешко, В.А. О проблеме блочных структур академика М.А. Садовского / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2009. – Т. 427, № 4. – С. 480–485.

74 Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова, М.В. Зарецкая, А.В. Павлова // ДАН. – 2009. – Т. 424, № 1. – С. 36–39.

75 Бабешко, В.А. Некоторые общие свойства блочных элементов / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2012. – Т. 442, № 1. – С. 37–40.

76 Бабешко, В.А. Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2013. – Т. 449, № 6. – С. 657–660.

77 Александров, В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 487 с.

78 Александров, В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев. – М.: Наука, 1993. – 224 с.

79 Горячева, И.Г. Контактные задачи в трибологии / И.Г. Горячева, И.Г. Добычин. – М.: Машиностроение, 1988. – 254 с.

80 Григолюк, Э.И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.

81 Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / под ред. В.Д. Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

82 Векуа, И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И.Н. Векуа. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

83 Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

84 Ворович, И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 376 с.

85 Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

86 Пелех, Б.Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями / Б.Л. Пелех, А.В. Максимук, И.М. Коровайчук. – Киев: Наукова думка, 1988. – 280 с.

87 Саркисян, В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками / В.С. Саркисян. – Ереван: Изд-во Ереван. гос. ун-та, 1983. – 260 с.

88 Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 807 с.

89 Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: URSS, 2009. – 635 с.

- 90 Kaplunov, J.D. Dynamics of thin walled elastic bodies / J.D. Kaplunov, L.Yu. Kossovich, E.V. Nolde. – San Diego: Academic Press, 1998. – 226 p.
- 91 Chandrashekara, K. Theory of Plates / K. Chandrashekara. – Himayat Nagar: Universities Press, 2001. – 410 p.
- 92 Leissa, W. Vibration of Plates / W. Leissa. – New York: American Institute of Physics, 1993. – 353 p.
- 93 Еремеев, В.А. Механика упругих оболочек / В.А. Еремеев, Л.М. Зубов. – М.: Наука, 2008. – 288 с.
- 94 Cheng, Z.-Q. Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates / Z.-Q. Cheng, J.N. Reddy // Proceeding of Royal Society. – 2002. – V. 458. – P. 1499–1518.
- 95 Haddad, M. Equivalence Theory applied to anisotropic thin plates / M. Haddad, Y. Gourinat, M. Charlotte // Scientific Research. Engineering. – 2011. – V. 3. – P. 669–679.
- 96 Verma, K.L. Wave propagation in plates of anisotropic media on the basis exact theory / K.L. Verma // International Journal of Engineering. – 2011. – V. 9(3). – P. 287–294.
- 97 Yuan, F.G. Asymptotic crack-tip fields in an anisotropic plate subjected to bending, twisting moments and transverse shear loads / F.G. Yuan, S. Yang // Composites Science and Technology. –2000. – V. 60. – P. 2489–2502.
- 98 Альтенбах, Х. Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений / Х. Альтенбах, В.А. Еремеев, Н.Ф. Морозов // ДАН – 2009. – Т. 429, № 4, – С. 472 –476.
- 99 Huang, D.W. Size-dependent response of ultra-thin films with surface effects / D.W. Huang // Intern. J. of Solids and Structures.– 2008. – V. 45, № 2. – P. 568 –579.
- 100 Lu, C.F. Size-dependent elastic behavior of FGM ultra-thin films based / C.F. Lu, C.W. Lim, W.Q. Chen // Intern. J. of Solids and Structures.– 2009. – V. 46, № 5. – P. 1176–1185.

101 Duan, H.L. Theory of elasticity at the nanoscale / H.L. Duan, J. Wang, B.L. Karihaloo // *Advances in Applied Mechanics*. – 2008. – V. 42. – P. 1–68.

102 Еремеев, В.А. О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин / В.А. Еремеев, Х. Альтенбах, Н.Ф. Морозов // *ДАН* – 2009. – Т. 424, № 5, – С. 618–620.

103 Babeshko, V. Joint use center for vibroseismic sources / V. Babeshko // *Proceedings of 7th Framework Programme of the European Community for research, technological development and demonstration activities*. – URL: http://rp7.ffg.at/eu-russian_opendays (дата обращения: 19.07.2014).

104 Бабешко, В.А. Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // *ДАН*. – 2013. – Т. 449, № 4. – С. 657–660.

105 Бабешко, В.А. Топологический подход в граничных задачах разных размерностей / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. – 2013. – № 2. – С. 5–9.

106 Метод блочного элемента для гладких границ / В.А. Бабешко, М.Н. Колесников, Е.В. Кашков, В.В. Лозовой, А.В. Плужник, И.С. Телятников, П.Б. Иванов, В.Л. Шестопалов, А.А. Шишкин // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. – 2012. – № 4. – С. 5–9.

107 Развитие новых наукоемких методов мониторинга и прогноза состояния территорий в сейсмоопасных и оползнеопасных зонах / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, И.В. Рядчиков, В.В. Лозовой, А.Г. Федоренко, М.Н. Колесников, И.С. Телятников, Д.В. Грищенко, А.А. Шишкин, С.Б. Уафа, М.С. Власова, М.В. Смирнова // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. – 2013. – № 3. – С. 13–20.

108 Математические методы в проблеме блочных структур / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, А.Г. Федоренко, И.С. Телятников // *Современные проблемы механики и математики: тезисы докладов Международной научной конференции*. Львов: Институт

прикладных проблем механики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т.1. – С. 22–23.

109 О поведении и резонансах некоторых блочных структур сейсмологии и материаловедения / В.А. Бабешко, Е.В. Кириллова, М.Н. Колесников, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, И.С. Телятников, Д.В. Грищенко, В.В. Лозовой, А.В. Плужник, А.А. Шишкин // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2013. – № 1. – С. 6–12.

110 Исследование поведения структурно неоднородных сред с изменяющимися свойствами / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, Е.М. Горшкова, М.В. Зарецкая, А.В. Павлова, И.С. Телятников // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2013. – № 3. – С. 5–12.

111 Block element method for body, localizations and resonances / V.A. Babeshko, O.V. Evdokimova, O.M. Babeshko, E.M. Gorshkova, I.V. Gladskoi, D.V. Grishenko, I.S. Telyatnikov // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2014. – № 2. – С. 13–19.

112 Kolesnikov, M.N. To a problem of vibration of adjoining semi-infinite plates on a surface of elastic medium / M.N. Kolesnikov, I.S. Telyatnikov // Mechanics 2013: Proceedings International School-Conference of Young Scientists dedicated to the 70th anniversary of National Academy of Sciences of Armenia. – Yerevan: Publisher of Yerevan State University of Architecture and Construction, 2013. – P. 261–264.

113 Колесников, М.Н. Колебания граничащих пластин на поверхности упругой среды / М.Н. Колесников, И.С. Телятников // Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах: труды X Всерос. научн. конф. молодых ученых. – Краснодар: КубГУ, 2013. – С. 139–141.

114 Колесников, М.Н. Моделирование материалов с покрытиями / М.Н. Колесников, И.С. Телятников // Природноресурсный потенциал, экология и устойчивое развитие регионов России: материалы XII Междунар. научн.-практ. конф. – Пенза: Изд-во МНИЦ, 2014. – С. 27–31.

115 Механические проблемы в блочных структурах / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, И.С. Телятников, Д.В. Грищенко // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. – С. 31–34.

116 Колесников, М.Н. К моделированию динамики контактирующих литосферных структур / М.Н. Колесников, И.С. Телятников // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты: сборник материалов IX Междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск: Изд-во ЦРНС, 2013. – С. 192–196.

117 Телятников, И.С. Задача о колебаниях неортотропной однородной пластины на упругом основании / И.С. Телятников // Прикладная математика XXI века: материалы XIII объединенной конф. студентов и аспирантов КубГУ. – Краснодар: КубГУ, 2013. – С. 129–130.

118 К проблеме оценки прочности многослойных тонкостенных покрытий, содержащих трещины / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, М.Н. Колесников, А.Г. Федоренко, И.С. Телятников // Великий русский инженер В.Г. Шухов и его научное наследие: материалы Междунар. конф. – Москва: МАКС Пресс, 2013 – С. 18–20.

119 Телятников, И.С. К исследованию задач передачи нагрузки на упругое основание через покрытие / И.С. Телятников, М.В. Смирнова // Инновационное развитие современной науки: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. – С. 225–227.

120 К оценке состояния треснувших покрытий / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, Д.В. Грищенко, И.С. Телятников // NPNJ'2014: материалы X Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях. – М.: Изд-во МАИ, 2014. – С. 305–307.

121 Телятников, И.С. К задачам передачи нагрузки через покрытия / И.С. Телятников // Прикладная математика XXI века: материалы XIV объединенной конф. студентов и аспирантов КубГУ. – Краснодар: КубГУ, 2014. – С. 103–105.

122 Телятников, И.С. К задачам передачи нагрузки на упругое основание через покрытие / И.С. Телятников // Материалы X ежегодной науч. конф. студентов и аспирантов базовых кафедр ЮНЦ. – Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2014. – С. 178–180.

123 Колесников, М.Н. К исследованию влияния разломов на напряженно-деформированное состояние литосферных структур / М.Н. Колесников, И.С. Телятников // Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах: труды XI Всерос. науч. конф. молодых ученых и студентов. – Краснодар: КубГУ, 2014. – С. 144–147.

124 Telyatnikov, I.S. To the problems of oscillations and static interaction of contacting plates on the surface of the elastic layer / I.S. Telyatnikov // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: труды VIII Междунар. конф. – Ереван: Чартарагет, 2014. – С. 481–485.

125 Нобл, Б. Метод Винера – Хопфа / Б. Нобл. – М.: ИЛ, 1962. – 280 с.

126 Гохберг, И.Ц. Уравнения в свертках и прецизионные методы их решения / И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

127 Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1965. – 716 с.

128 Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ: в 2 ч. / Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1985. – Ч. 2. – 400 с.

129 Бабешко, В.А. Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко // ДАН. – 2004. – Т. 399, №1. – С. 163–167.

130 Бабешко, В.А. Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и наноструктурах / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2007. – Т. 415, № 5. – С. 596–599.

131 Бабешко, В.А. Дифференциальный метод факторизации в статических задачах / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2008. – Т. 423, № 6. – С. 748–752.

132 Бабешко, В.А. О дифференциальном методе факторизации в задачах для сплошных сред / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2008. – Т.421. № 1. – С. 37–40.

133 Бабешко, В.А. Собственные векторные функции в блочных элементах / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2012. – Т. 446, № 6. – С. 279–282.

134 К теории прогноза сейсмичности на основе механической концепции, топологический подход / В.А. Бабешко, Д. Ритцер, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, А.Г. Федоренко // ДАН. 2013. – Т.450, № 2. – С. 166–170.

135 Бабешко, В.А. К проблеме исследования материалов с покрытиями / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2006. – Т. 410, №1. – С. 49–52.

136 Бабешко, В.А. К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2006. – Т. 409, №4. – С. 481–485.

137 Бабешко, В.А. Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // ДАН. – 2011. – Т. 438, № 5. – С. 623–625.

138 Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.

139 Контактная прочность двухслойного покрытия при наличии сил трения в области контакта / П.Г. Иваночкин, В.И. Колесников, Б.М. Флек, М.И. Чебаков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2007. – № 1. – С. 183–192.

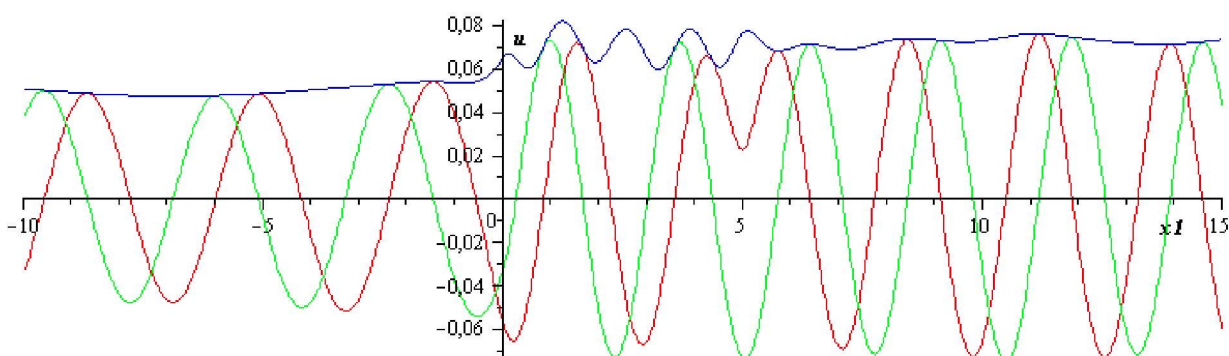
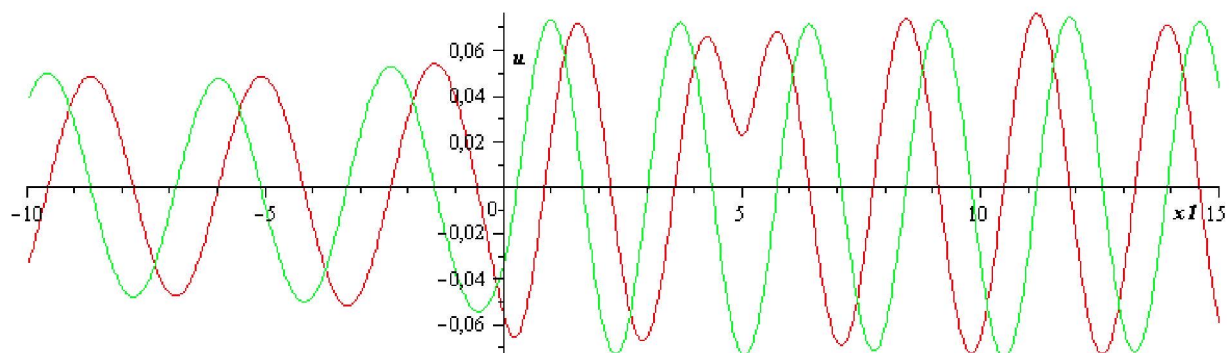
140 Павлова, А.В. К решению динамических задач для слоистого полупространства с дефектами / А.В. Павлова, С.Е. Рубцов // Наука технологии: труды XXIV Росс. Школы. – М.: Изд. РАН, 2004. – С. 283–290.

141 Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц. – М.: URSS, 2006. – 312 с.

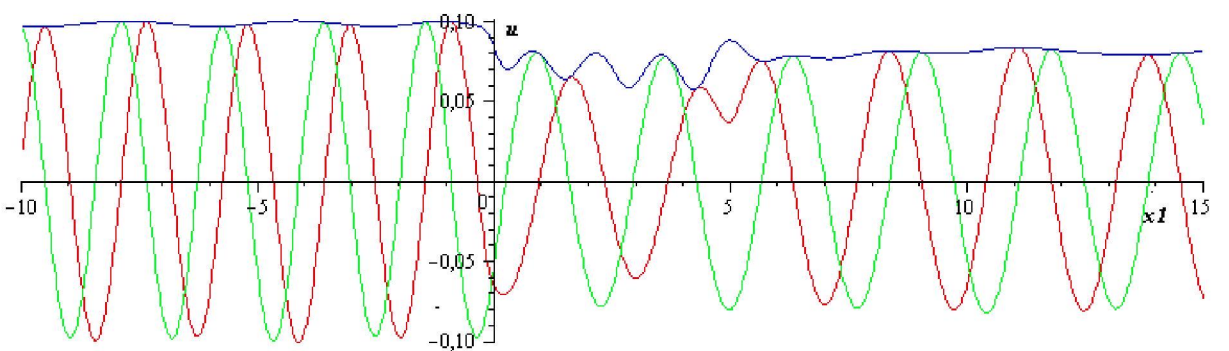
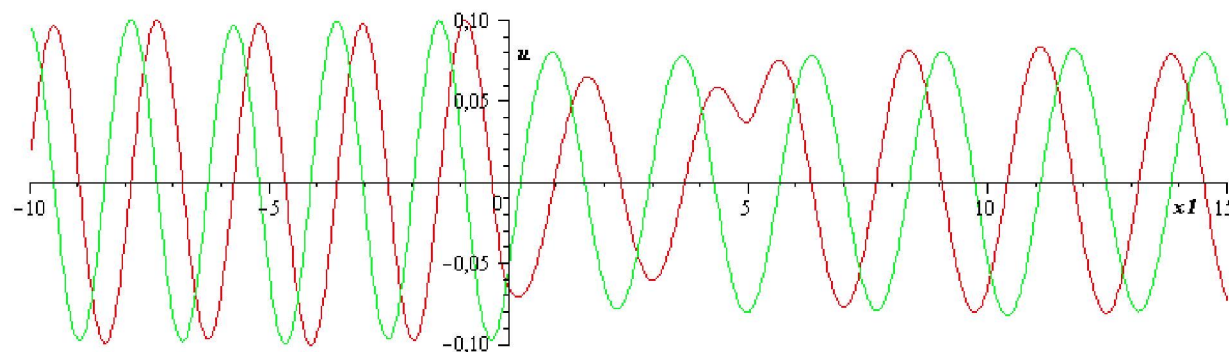
142 Бабешко, В.А. Блочные элементы в теории плит сложной формы / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // Известия РАН. МТТ. – 2012. – № 5. – С. 92–97.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИМЕРЫ И ГРАФИКИ

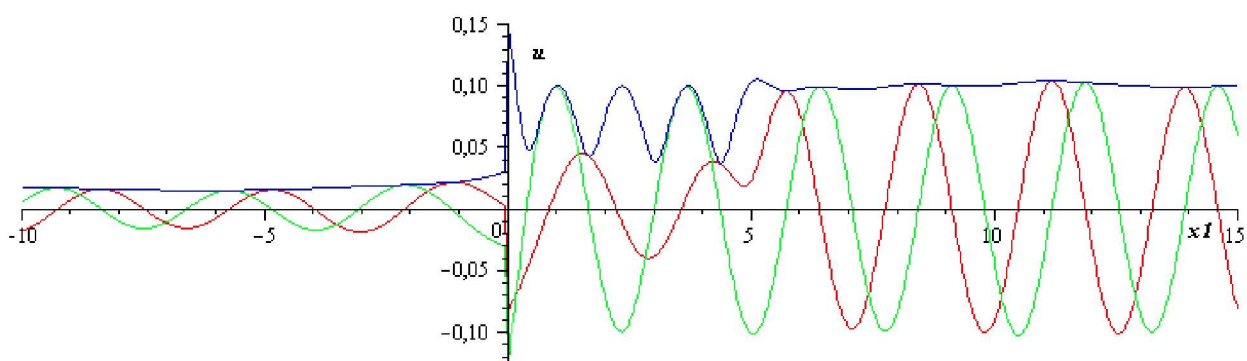
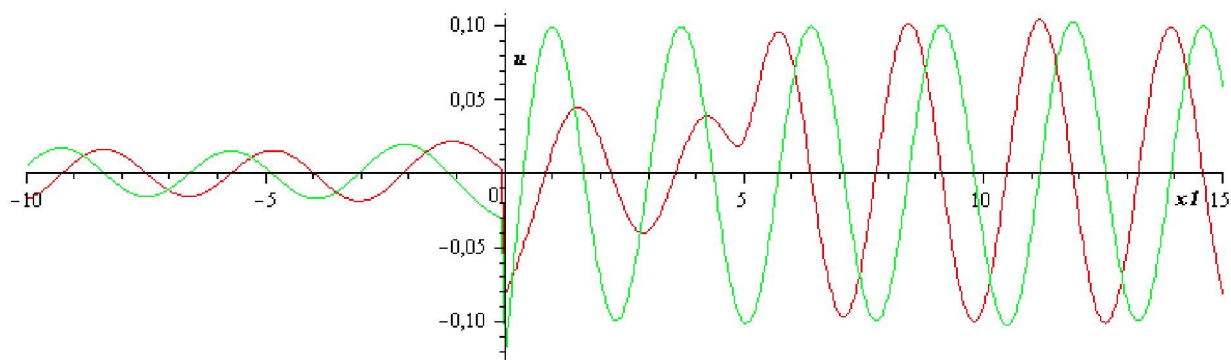


а

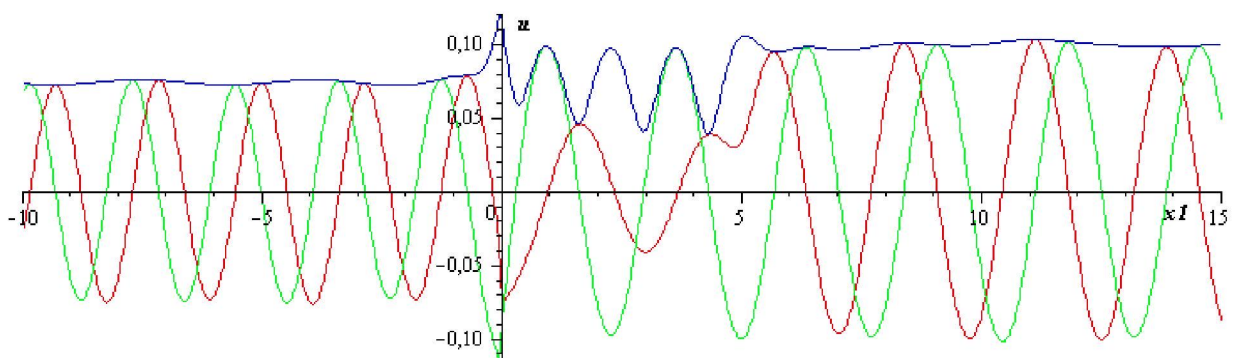
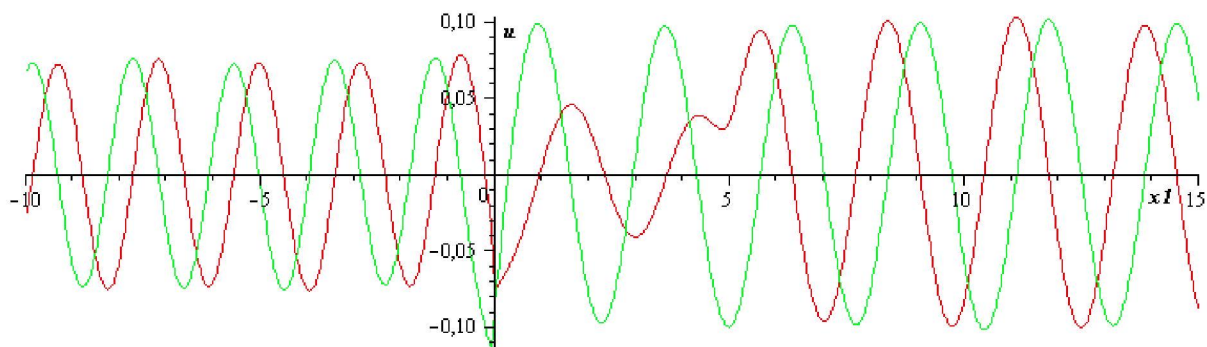


б

Рисунок А1

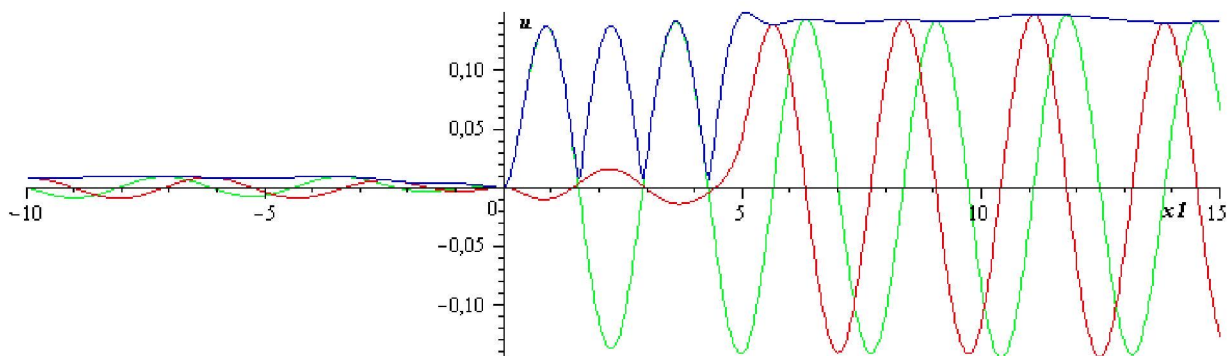
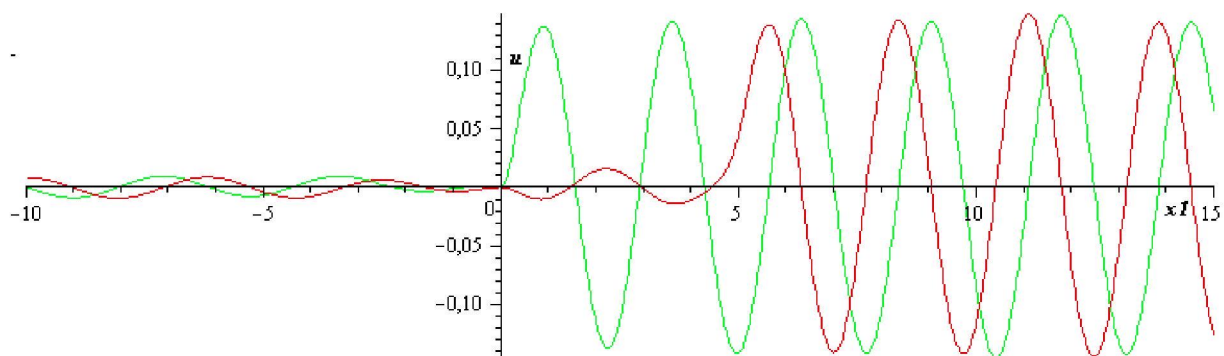


а

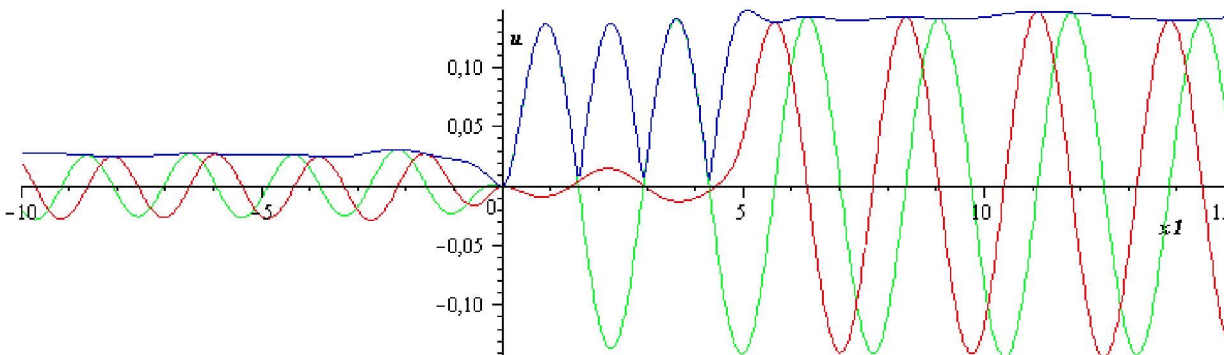
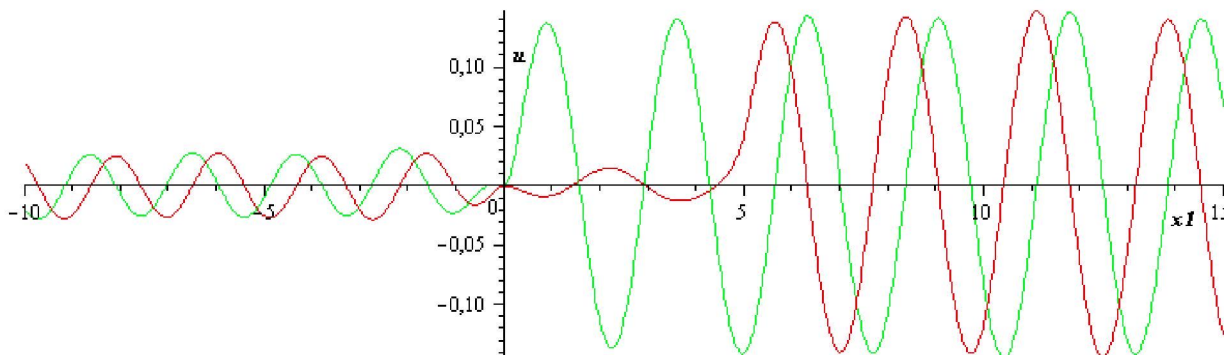


б

Рисунок А2

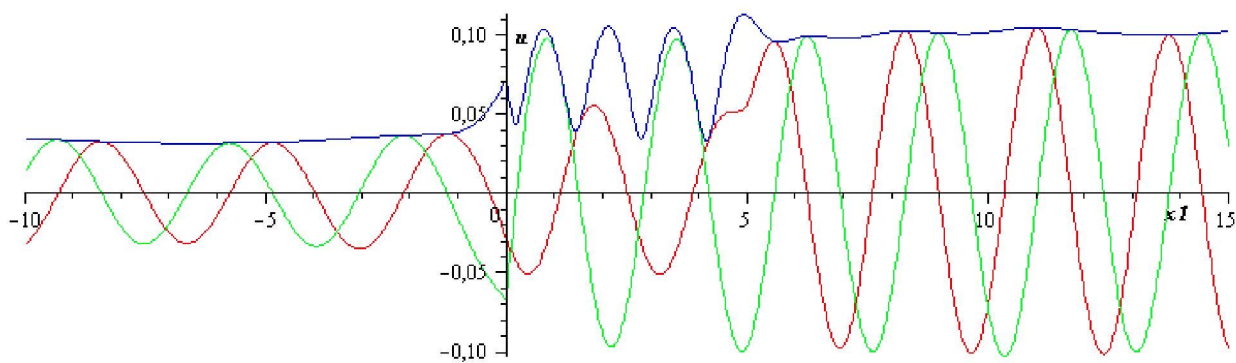
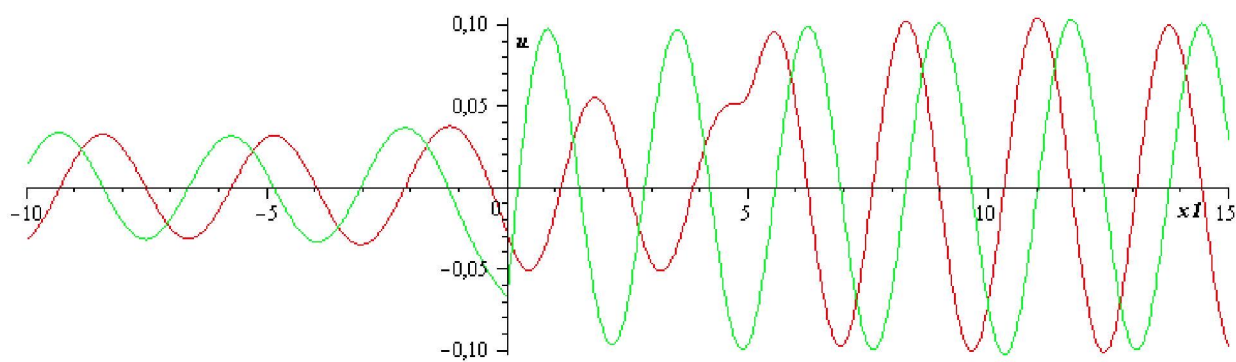


а

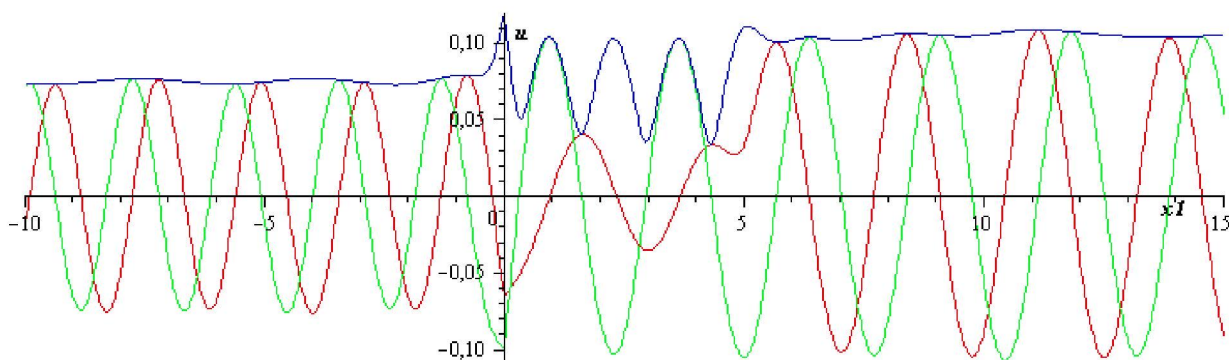
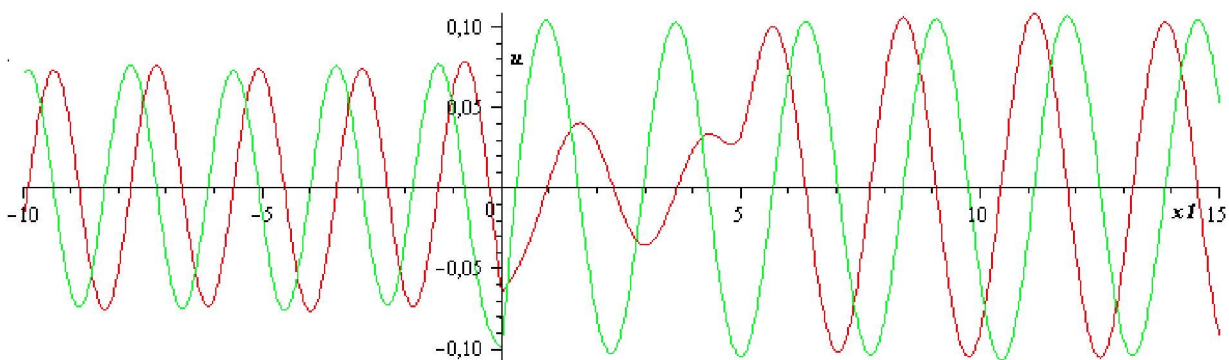


б

Рисунок А3

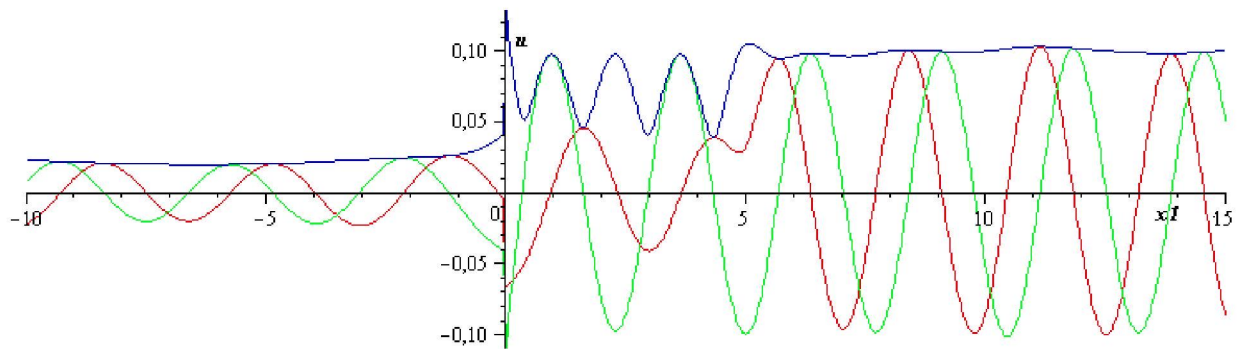
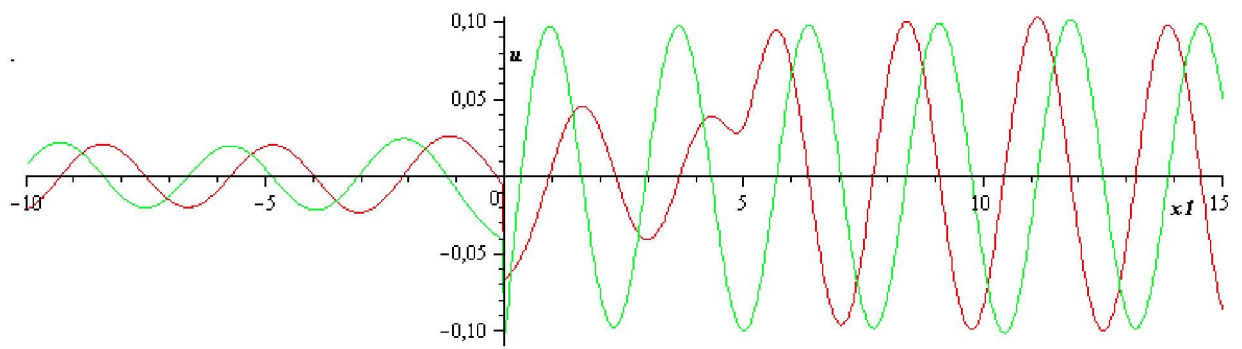


а

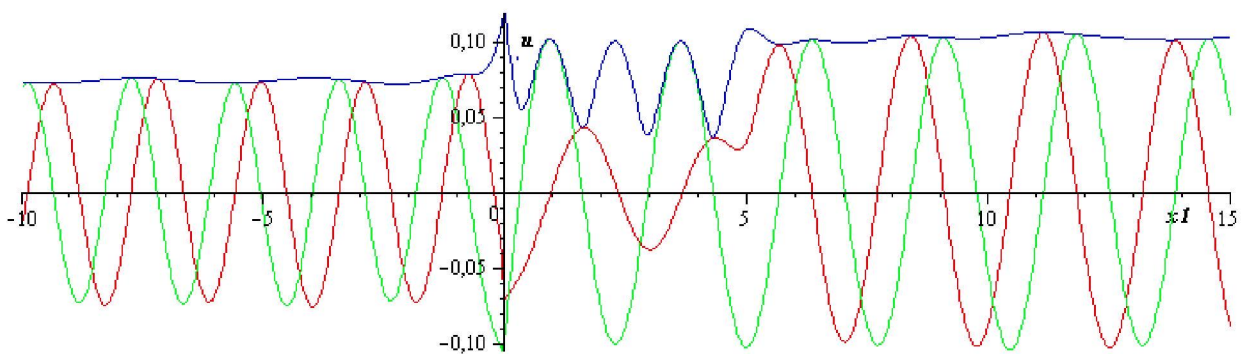
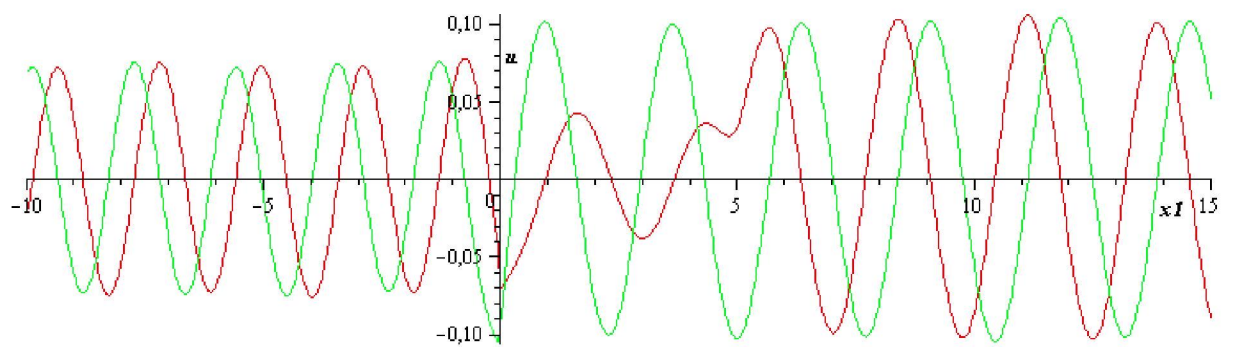


б

Рисунок А4

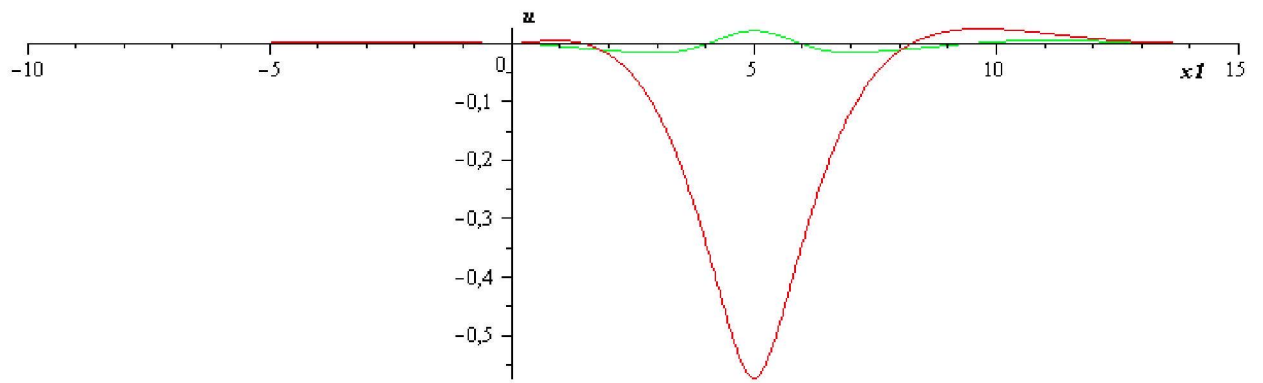


а

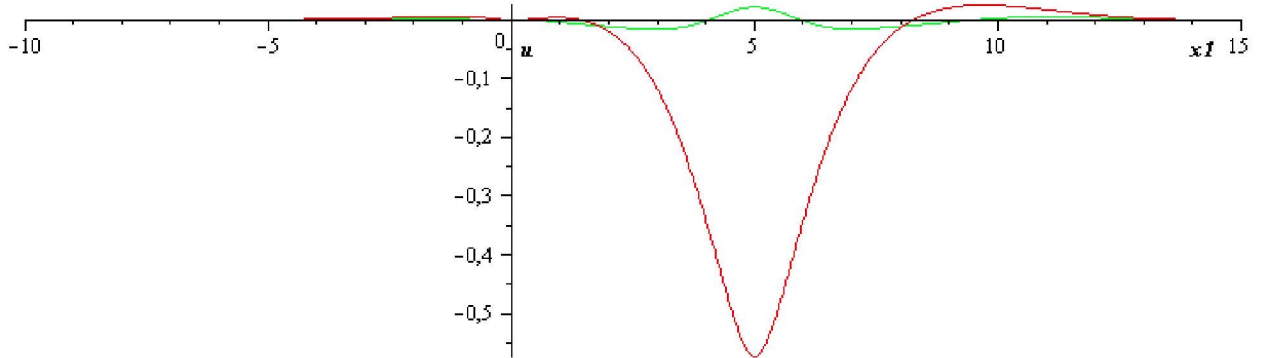


б

Рисунок А5

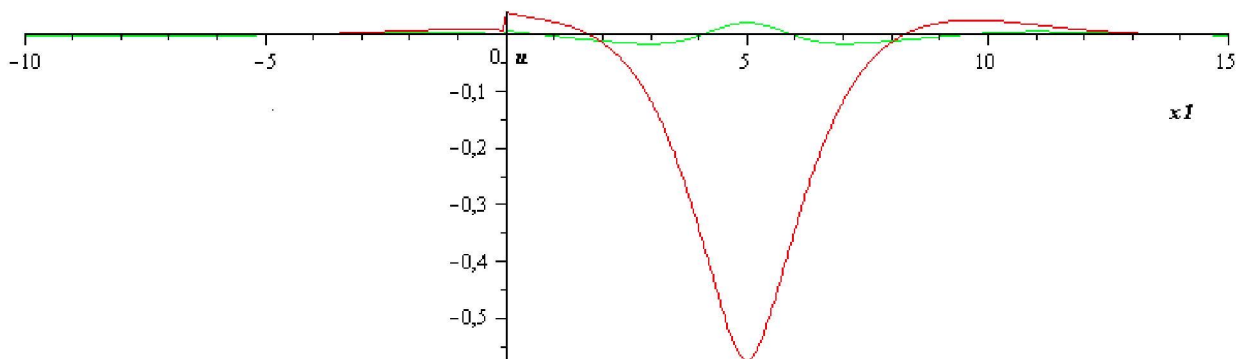


а

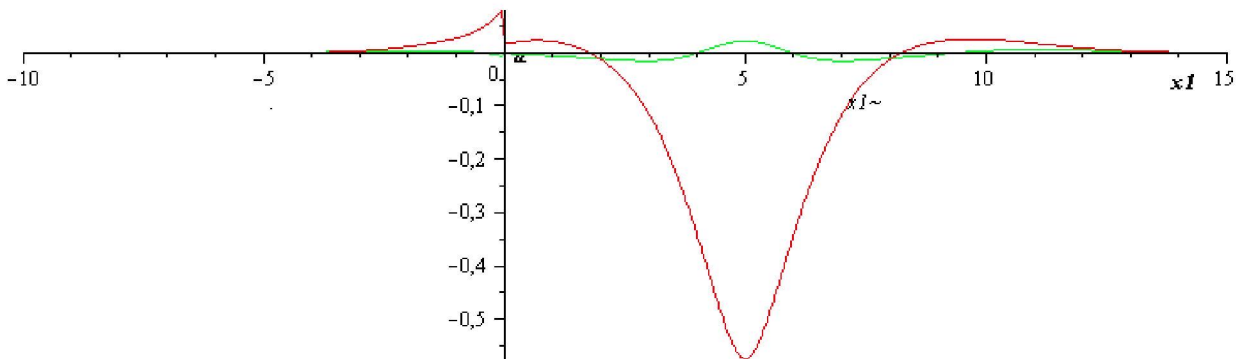


б

Рисунок А6

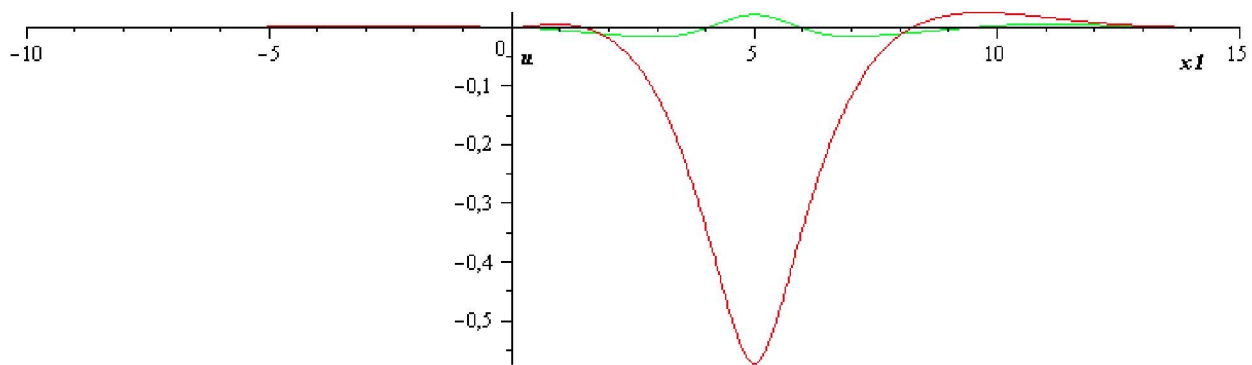


а

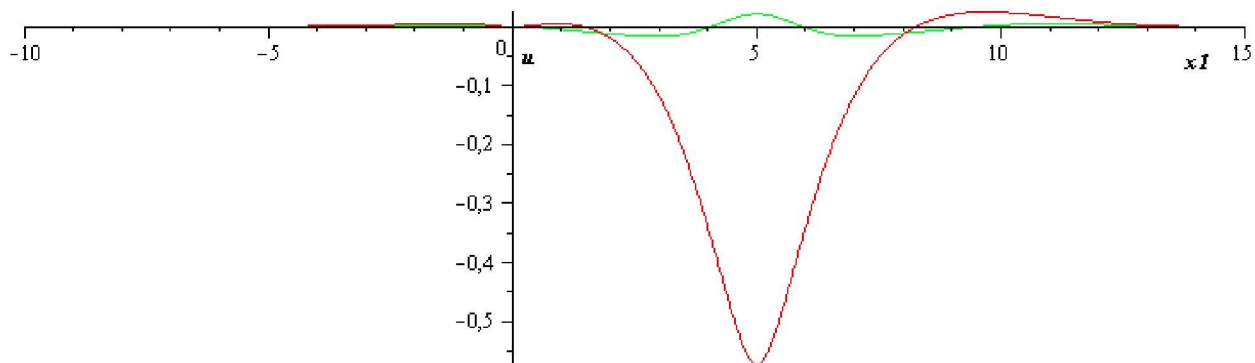


б

Рисунок А7

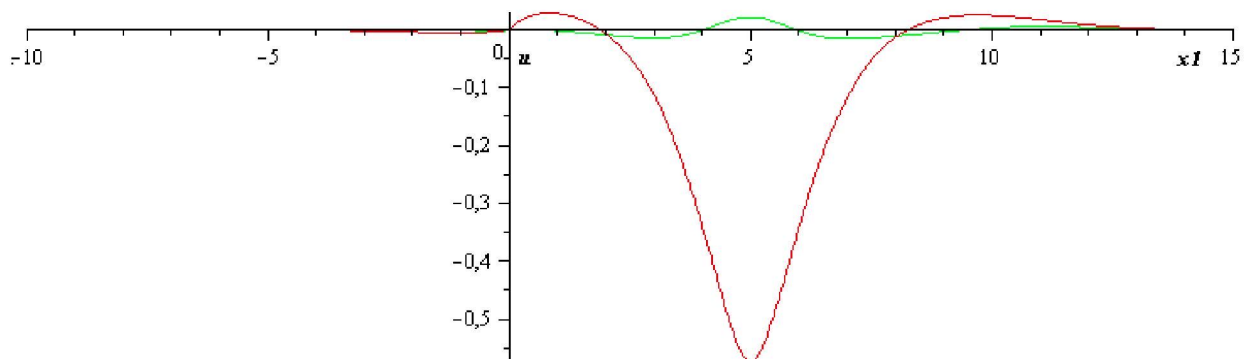


а

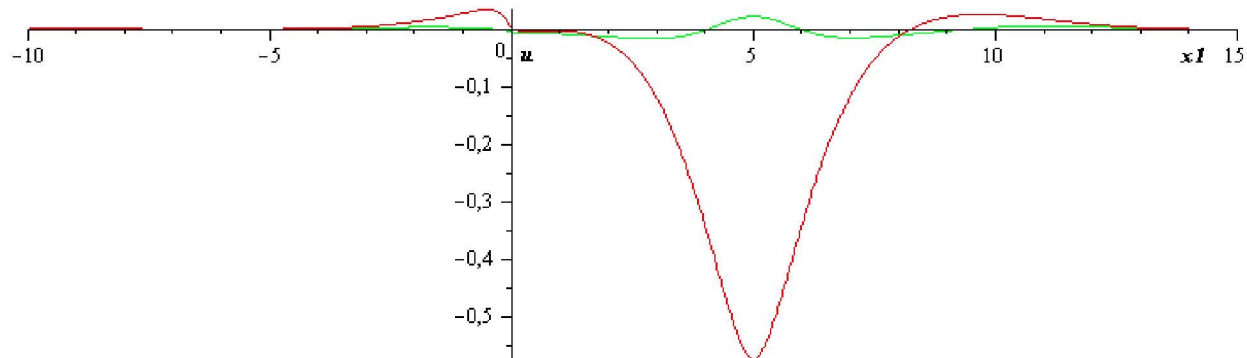


б

Рисунок А8

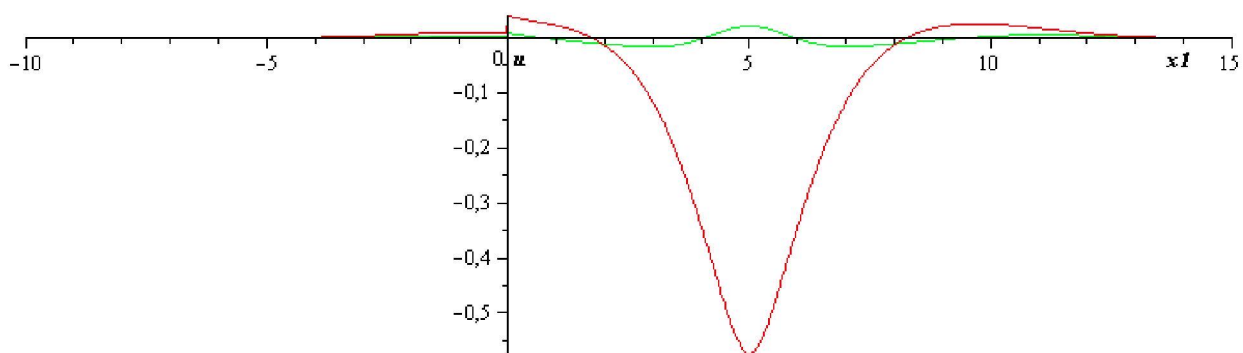


а

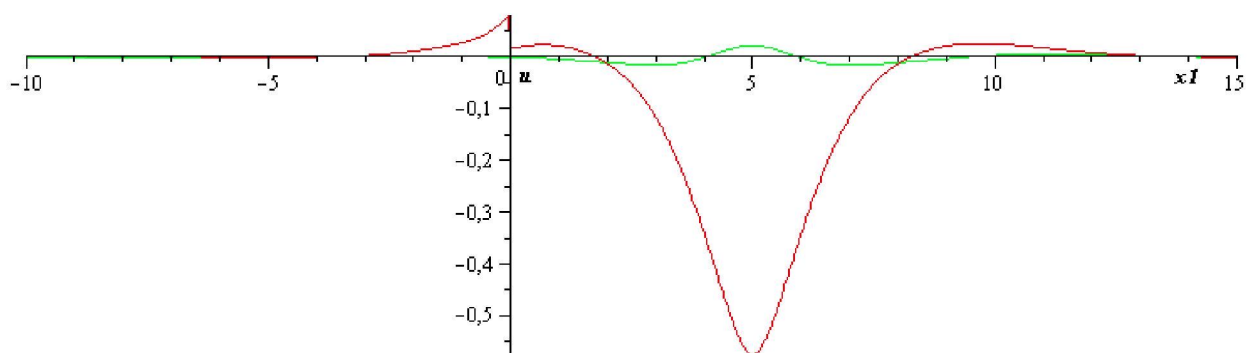


б

Рисунок А9



а



б

Рисунок А10

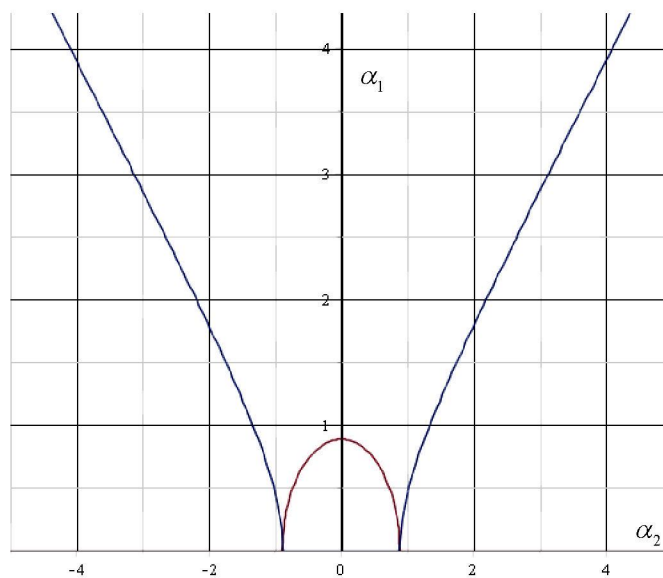


Рисунок А11

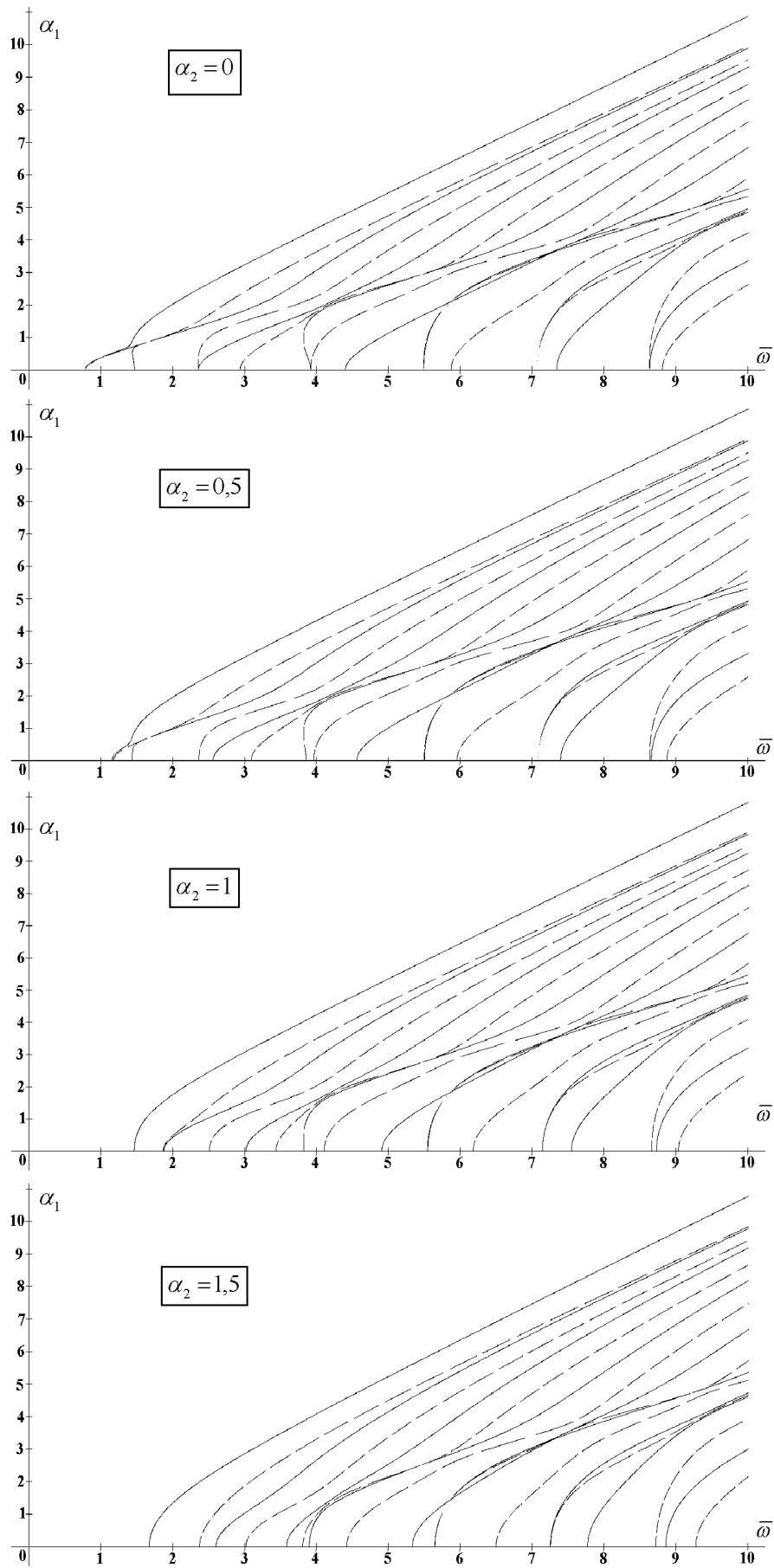


Рисунок А12

α_2	α_1
0,20	(0,99448, 2,13623)
0,40	(0,98387, 2,15928)
0,60	(0,96675, 2,19752)
0,80	(0,94392, 2,25066)
1,00	(0,91640, 2,31825)
1,20	(0,88532, 2,39964)
1,40	(0,85182, 2,49401)
1,60	(0,81698, 2,60037)
1,80	(0,78172, 2,71764)
2,00	(0,74681, 2,84468)
2,20	(0,71281, 2,98037)
2,40	(0,68012, 3,12363)
2,60	(0,64899, 3,27348)
2,80	(0,61954, 3,42904)
3,00	(0,59184, 3,58953)
3,20	(0,56587, 3,75429)
3,40	(0,54157, 3,92273)
3,60	(0,51887, 4,09435)
3,80	(0,49767, 4,26874)
4,00	(0,47788, 4,44554)
4,20	(0,45939, 4,62445)
4,40	(0,44211, 4,80520)
4,60	(0,42595, 4,98758)
4,80	(0,41081, 5,17139)
5,00	(0,39661, 5,35647)

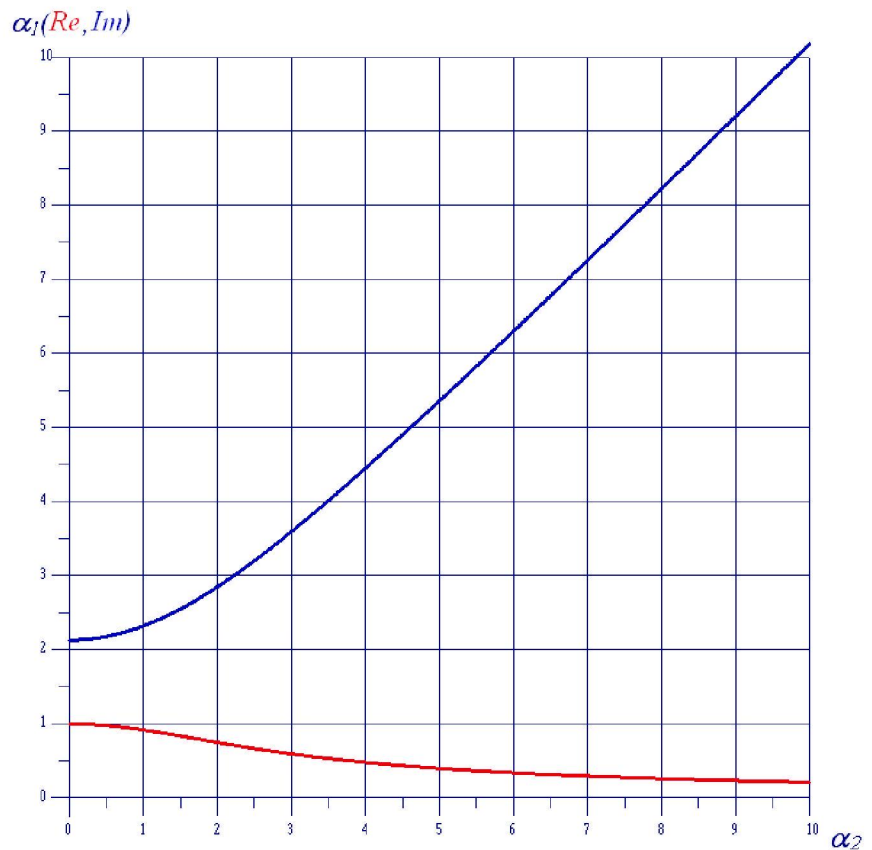


Рисунок А13 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (0,99808, 2,12853)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 0,1$, $\nu = 0,1$

α_2	α_1
0,20	(0,00000, 2,89910)
0,40	(0,00000, 2,91972)
0,60	(0,00000, 2,95377)
0,80	(0,00000, 3,00079)
1,00	(0,00000, 3,06019)
1,20	(0,00000, 3,13126)
1,40	(0,00000, 3,21322)
1,60	(0,00000, 3,30526)
1,80	(0,00000, 3,40658)
2,00	(0,00000, 3,51636)
2,20	(0,00000, 3,63384)
2,40	(0,00000, 3,75829)
2,60	(0,00000, 3,88906)
2,80	(0,00000, 4,02551)
3,00	(0,00000, 4,16710)
3,20	(0,00000, 4,31332)
3,40	(0,00000, 4,46372)
3,60	(0,00000, 4,61787)
3,80	(0,00000, 4,77543)
4,00	(0,00000, 4,93607)
4,20	(0,00000, 5,09949)
4,40	(0,00000, 5,26543)
4,60	(0,00000, 5,43367)
4,80	(0,00000, 5,60400)
5,00	(0,00000, 5,77622)

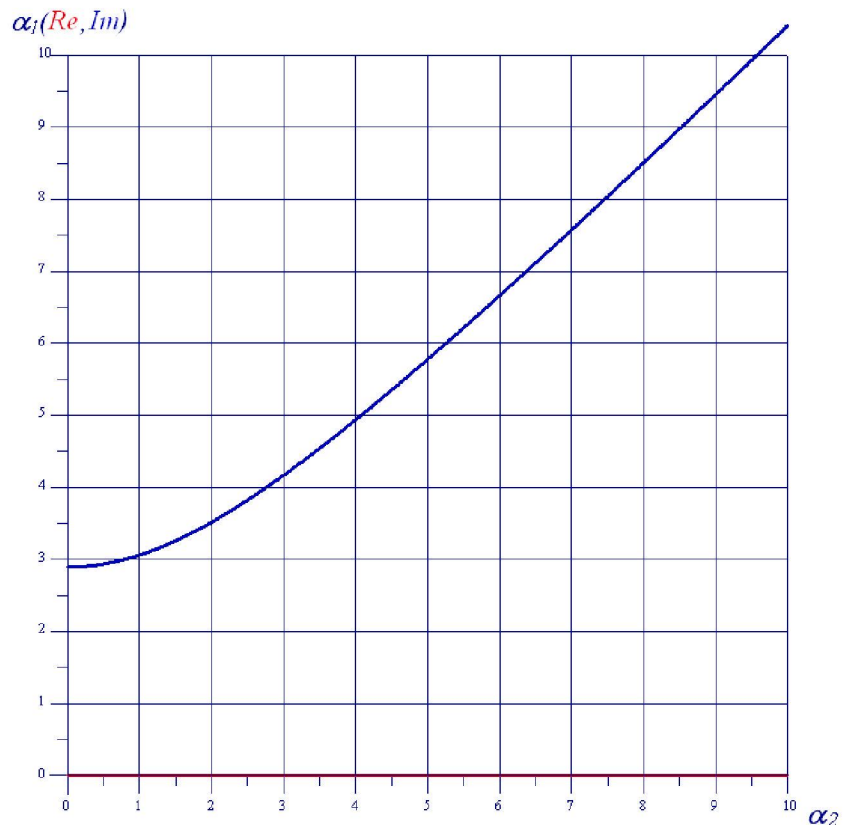


Рисунок А14 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (0, 2,89219)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 1$, $\nu = 0,1$

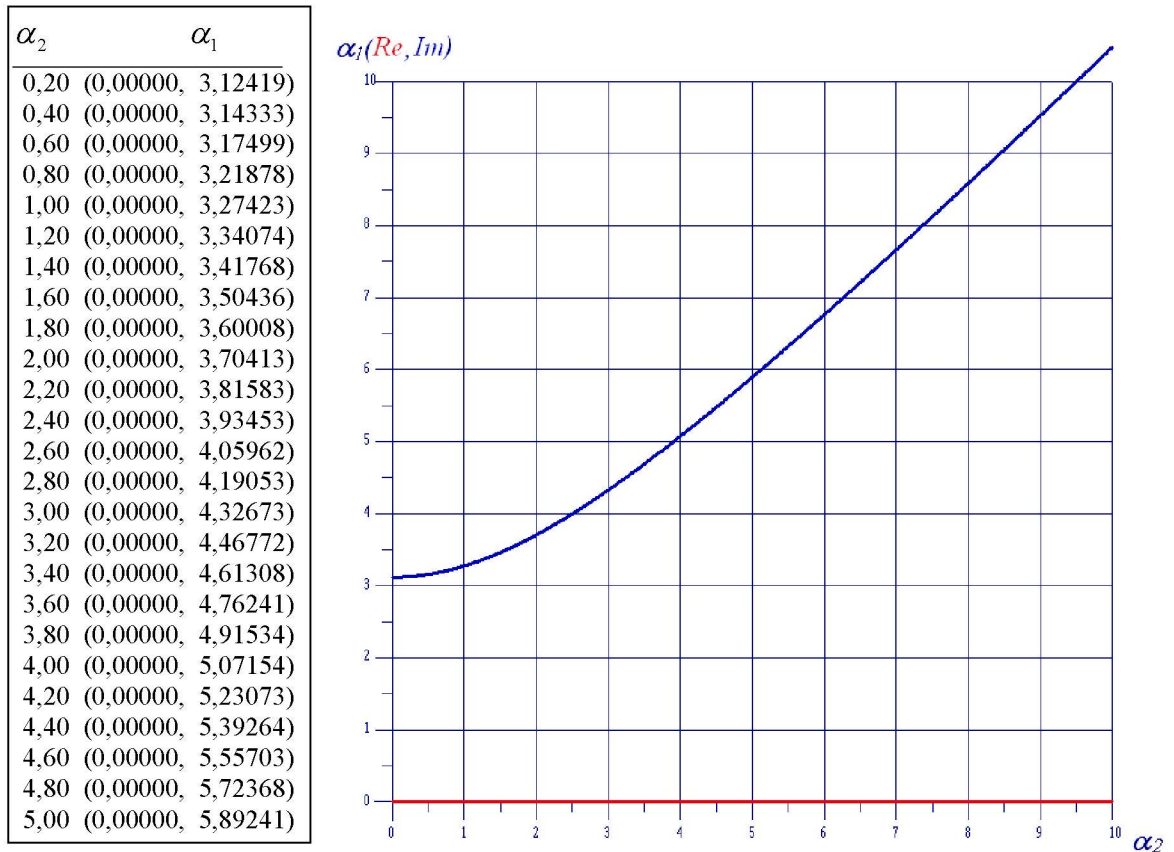


Рисунок А15 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (0, 3,11778)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 10$, $\nu = 0,1$

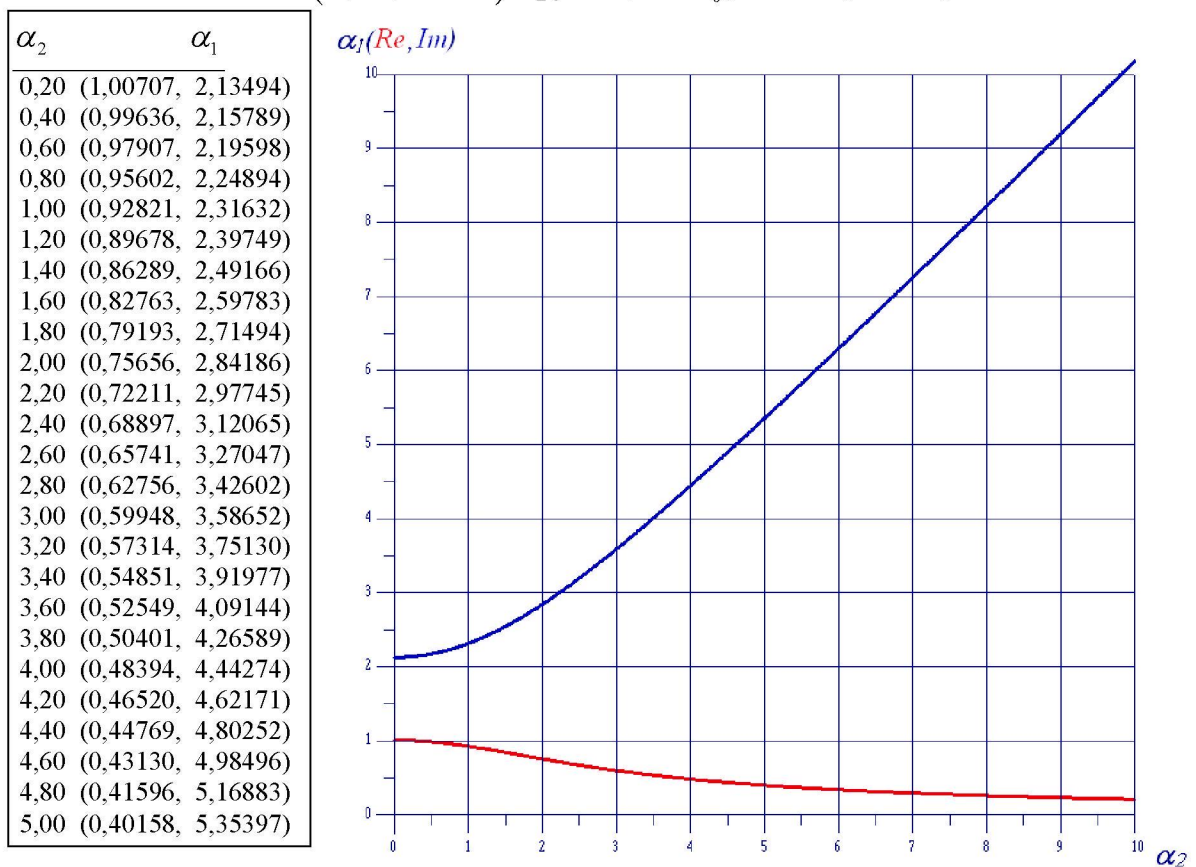


Рисунок А16 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (1,0107, 2,12727)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 0,1$, $\nu = 0,2$

α_2	α_1
0,20	(0,00000, 1,08542)
0,40	(0,00000, 1,13935)
0,60	(0,00000, 1,22398)
0,80	(0,00000, 1,33346)
1,00	(0,00000, 1,46223)
1,20	(0,00000, 1,60565)
1,40	(0,00000, 1,76015)
1,60	(0,00000, 1,92305)
1,80	(0,00000, 2,09240)
2,00	(0,00000, 2,26674)
2,20	(0,00000, 2,44502)
2,40	(0,00000, 2,62643)
2,60	(0,00000, 2,81036)
2,80	(0,00000, 2,99635)
3,00	(0,00000, 3,18404)
3,20	(0,00000, 3,37315)
3,40	(0,00000, 3,56344)
3,60	(0,00000, 3,75475)
3,80	(0,00000, 3,94691)
4,00	(0,00000, 4,13982)
4,20	(0,00000, 4,33337)
4,40	(0,00000, 4,52749)
4,60	(0,00000, 4,72209)
4,80	(0,00000, 4,91713)
5,00	(0,00000, 5,11255)

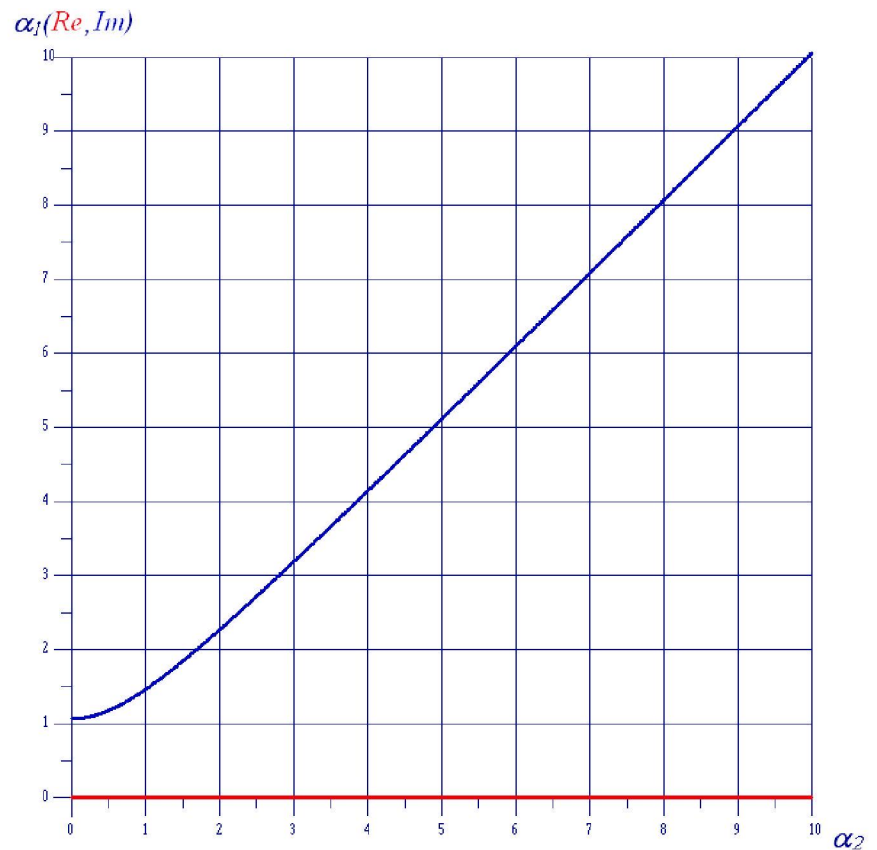


Рисунок А17 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (0, 1,06683)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 1$, $\nu = 0,2$

α_2	α_1
0,20	(0,00000, 0,38964)
0,40	(0,00000, 0,52136)
0,60	(0,00000, 0,68689)
0,80	(0,00000, 0,86707)
1,00	(0,00000, 1,05443)
1,20	(0,00000, 1,24572)
1,40	(0,00000, 1,43938)
1,60	(0,00000, 1,63457)
1,80	(0,00000, 1,83080)
2,00	(0,00000, 2,02776)
2,20	(0,00000, 2,22527)
2,40	(0,00000, 2,42318)
2,60	(0,00000, 2,62142)
2,80	(0,00000, 2,81990)
3,00	(0,00000, 3,01858)
3,20	(0,00000, 3,21742)
3,40	(0,00000, 3,41640)
3,60	(0,00000, 3,61550)
3,80	(0,00000, 3,81468)
4,00	(0,00000, 4,01395)
4,20	(0,00000, 4,21329)
4,40	(0,00000, 4,41269)
4,60	(0,00000, 4,61214)
4,80	(0,00000, 4,81163)
5,00	(0,00000, 5,01117)

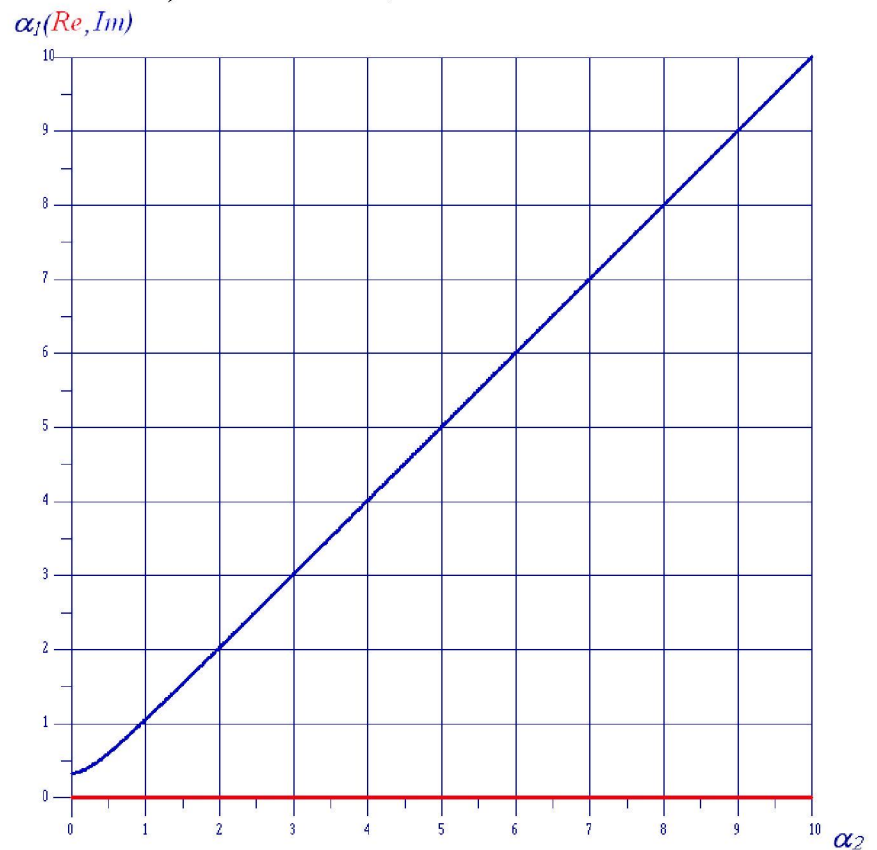


Рисунок А18 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (0, 0,33439)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 10$, $\nu = 0,2$

α_2	α_1
0,20	(1,02000, 2,13342)
0,40	(1,00918, 2,15628)
0,60	(0,99173, 2,19423)
0,80	(0,96844, 2,24699)
1,00	(0,94034, 2,31416)
1,20	(0,90855, 2,39511)
1,40	(0,87426, 2,48906)
1,60	(0,83855, 2,59505)
1,80	(0,80239, 2,71200)
2,00	(0,76656, 2,83879)
2,20	(0,73163, 2,97429)
2,40	(0,69804, 3,11743)
2,60	(0,66604, 3,26722)
2,80	(0,63577, 3,42276)
3,00	(0,60729, 3,58328)
3,20	(0,58059, 3,74809)
3,40	(0,55561, 3,91661)
3,60	(0,53227, 4,08833)
3,80	(0,51048, 4,26283)
4,00	(0,49014, 4,43975)
4,20	(0,47114, 4,61877)
4,40	(0,45338, 4,79965)
4,60	(0,43678, 4,98216)
4,80	(0,42122, 5,16609)
5,00	(0,40665, 5,35130)

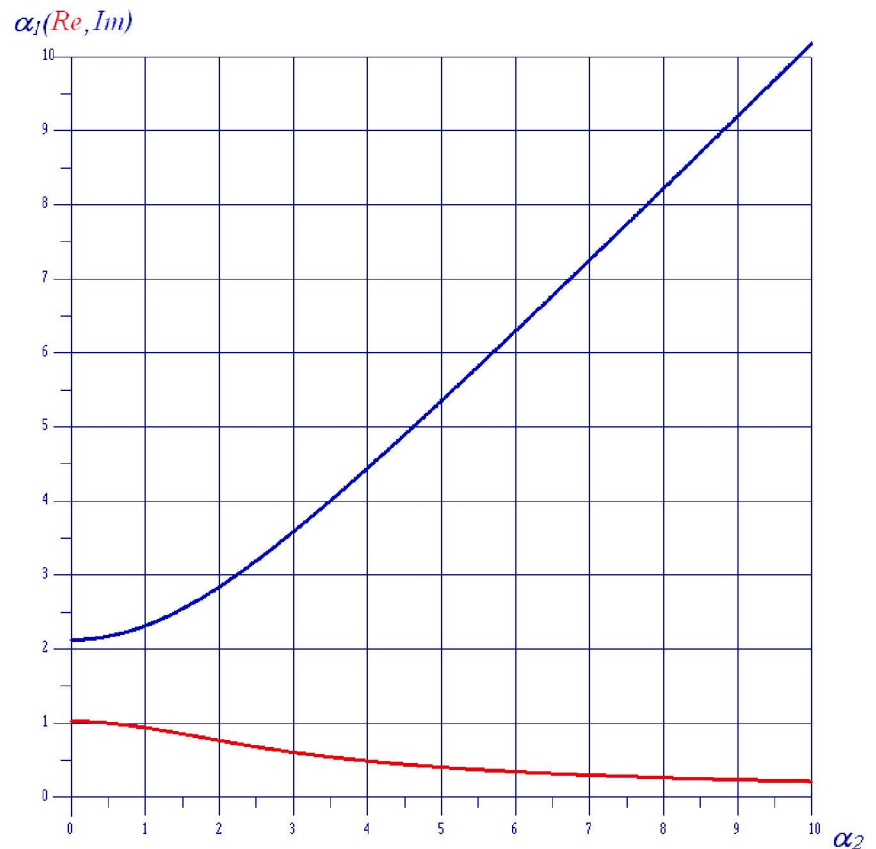


Рисунок А19 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (1,02366, 2,12579)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 0,1$, $\nu = 0,3$

α_2	α_1
0,20	(0,00000, 1,12265)
0,40	(0,00000, 1,17488)
0,60	(0,00000, 1,25712)
0,80	(0,00000, 1,36394)
1,00	(0,00000, 1,49008)
1,20	(0,00000, 1,63105)
1,40	(0,00000, 1,78335)
1,60	(0,00000, 1,94431)
1,80	(0,00000, 2,11195)
2,00	(0,00000, 2,28481)
2,20	(0,00000, 2,46178)
2,40	(0,00000, 2,64203)
2,60	(0,00000, 2,82495)
2,80	(0,00000, 3,01004)
3,00	(0,00000, 3,19693)
3,20	(0,00000, 3,38531)
3,40	(0,00000, 3,57496)
3,60	(0,00000, 3,76568)
3,80	(0,00000, 3,95731)
4,00	(0,00000, 4,14974)
4,20	(0,00000, 4,34285)
4,40	(0,00000, 4,53656)
4,60	(0,00000, 4,73079)
4,80	(0,00000, 4,92548)
5,00	(0,00000, 5,12058)

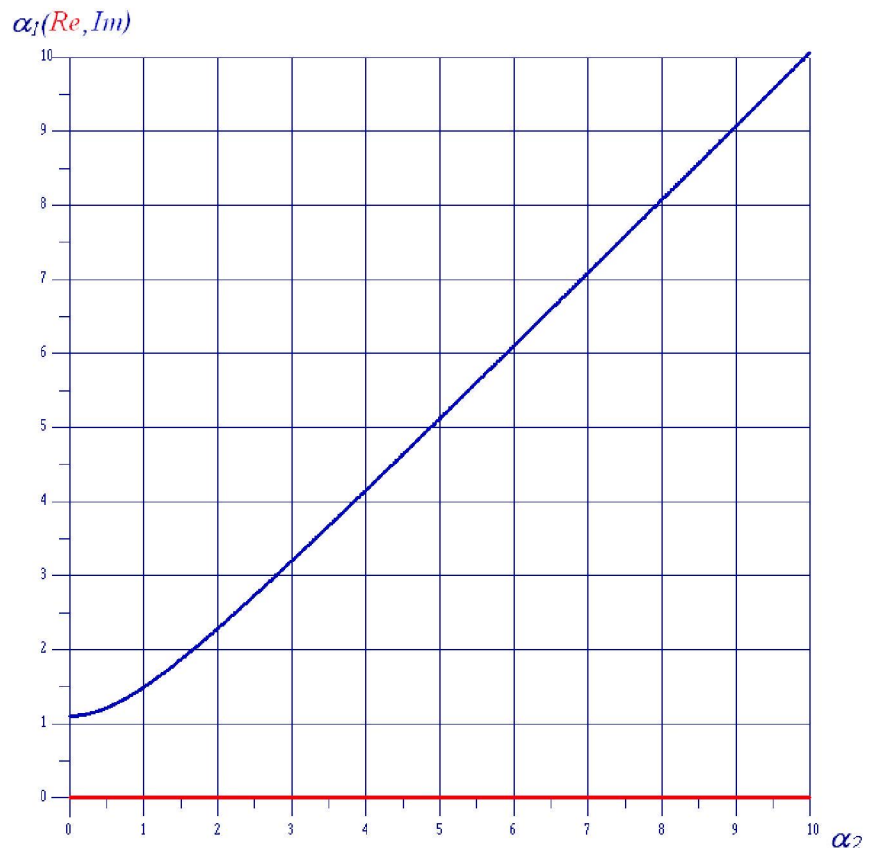
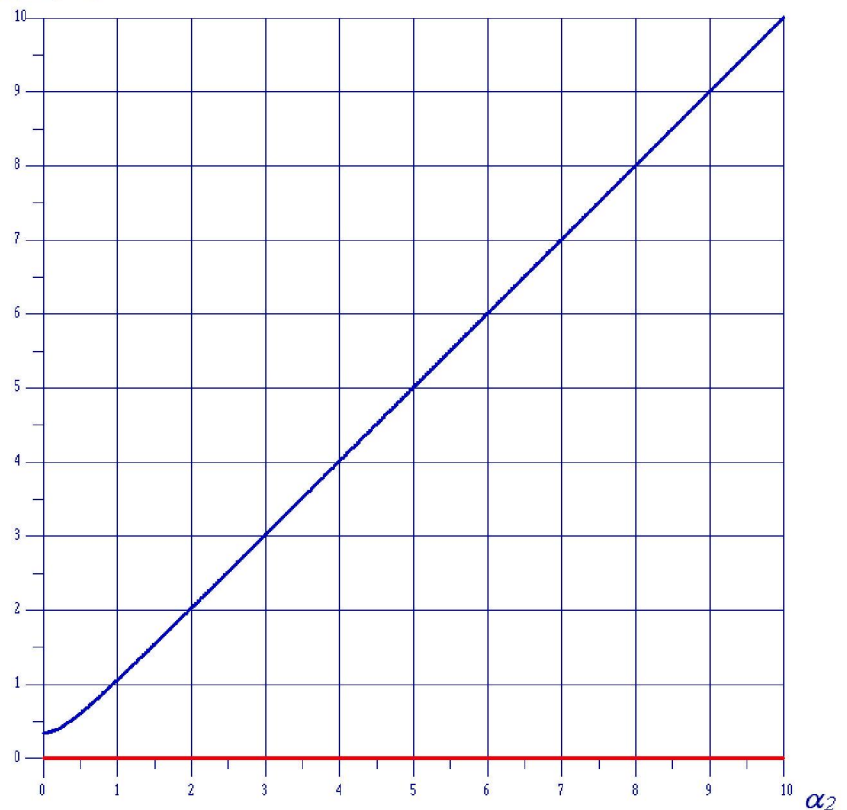
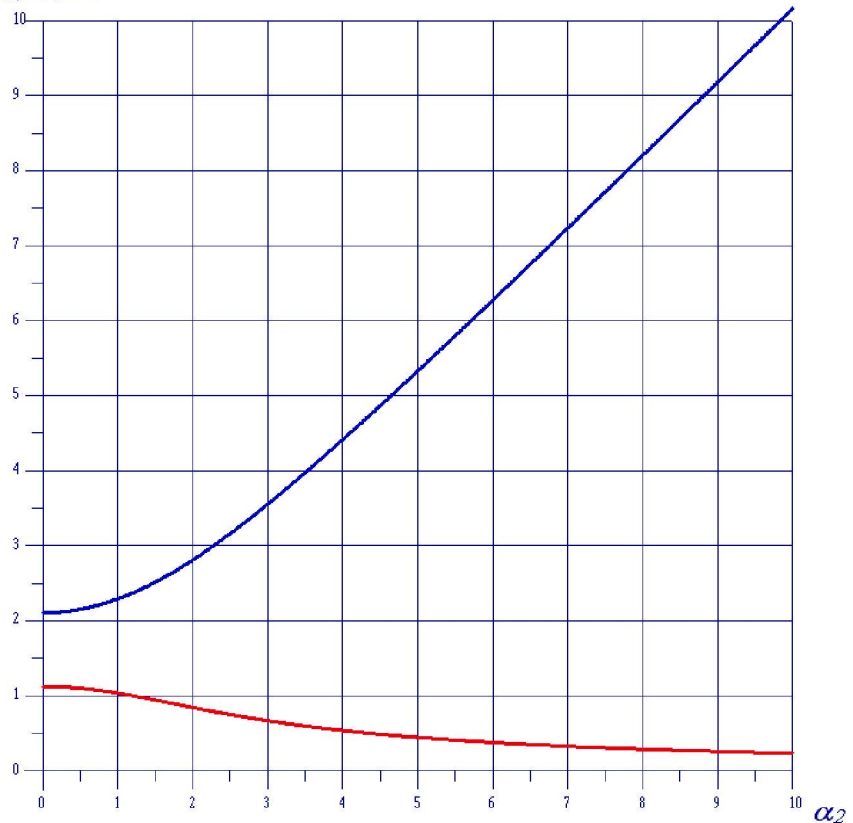


Рисунок А20 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (0, 1,10469)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 1$, $\nu = 0,3$

α_2	α_1
0,20	(0,00000, 0,39943)
0,40	(0,00000, 0,52872)
0,60	(0,00000, 0,69249)
0,80	(0,00000, 0,87152)
1,00	(0,00000, 1,05808)
1,20	(0,00000, 1,24882)
1,40	(0,00000, 1,44206)
1,60	(0,00000, 1,63693)
1,80	(0,00000, 1,83291)
2,00	(0,00000, 2,02967)
2,20	(0,00000, 2,22700)
2,40	(0,00000, 2,42478)
2,60	(0,00000, 2,62289)
2,80	(0,00000, 2,82127)
3,00	(0,00000, 3,01986)
3,20	(0,00000, 3,21862)
3,40	(0,00000, 3,41753)
3,60	(0,00000, 3,61657)
3,80	(0,00000, 3,81570)
4,00	(0,00000, 4,01492)
4,20	(0,00000, 4,21421)
4,40	(0,00000, 4,41356)
4,60	(0,00000, 4,61298)
4,80	(0,00000, 4,81244)
5,00	(0,00000, 5,01194)

 $\alpha_i(Re, Im)$ Рисунок А21 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (0, 0,34575)$ функции \bar{K}_0 , $\varepsilon = 10$, $\nu = 0,3$

α_2	α_1
0,20	(1,12143, 2,11359)
0,40	(1,10980, 2,13572)
0,60	(1,09100, 2,17254)
0,80	(1,06581, 2,22387)
1,00	(1,03530, 2,28943)
1,20	(1,00063, 2,36874)
1,40	(0,96307, 2,46113)
1,60	(0,92380, 2,56575)
1,80	(0,88389, 2,68159)
2,00	(0,84423, 2,80756)
2,20	(0,80551, 2,94253)
2,40	(0,76821, 3,08541)
2,60	(0,73264, 3,23518)
2,80	(0,69900, 3,39091)
3,00	(0,66734, 3,55176)
3,20	(0,63767, 3,71702)
3,40	(0,60993, 3,88608)
3,60	(0,58403, 4,05842)
3,80	(0,55987, 4,23357)
4,00	(0,53733, 4,41116)
4,20	(0,51629, 4,59088)
4,40	(0,49665, 4,77245)
4,60	(0,47829, 4,95564)
4,80	(0,46111, 5,14026)
5,00	(0,44502, 5,32613)

 $\alpha_i(Re, Im)$ Рисунок А22 – Зависимость α_1 от α_2 для комплексного нуля $\alpha = (1,12536, 2,1062)$ функции \bar{K}_0^{-1} , $\varepsilon = 0,1$, $\nu = 0,3$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ДАННЫЕ ВЫСОКОТОЧНЫХ ПРИЕМНИКОВ GPS/ГЛОНАСС PREGO

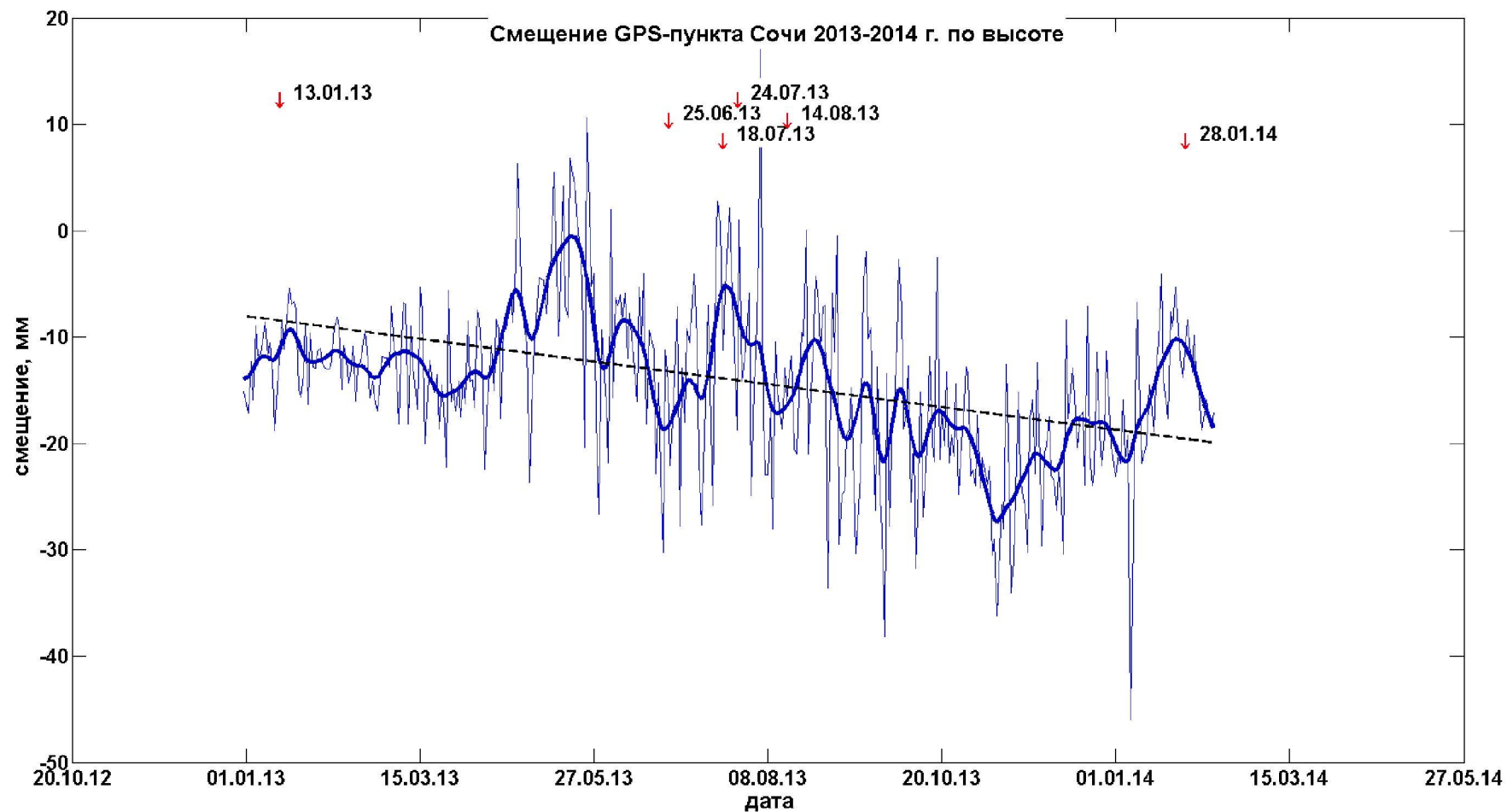


Рисунок Б1 – Вертикальные смещения по данным высокоточного приемника GPS/ГЛОНАСС PREGO (широта – 43,56929, долгота – 39,76227)

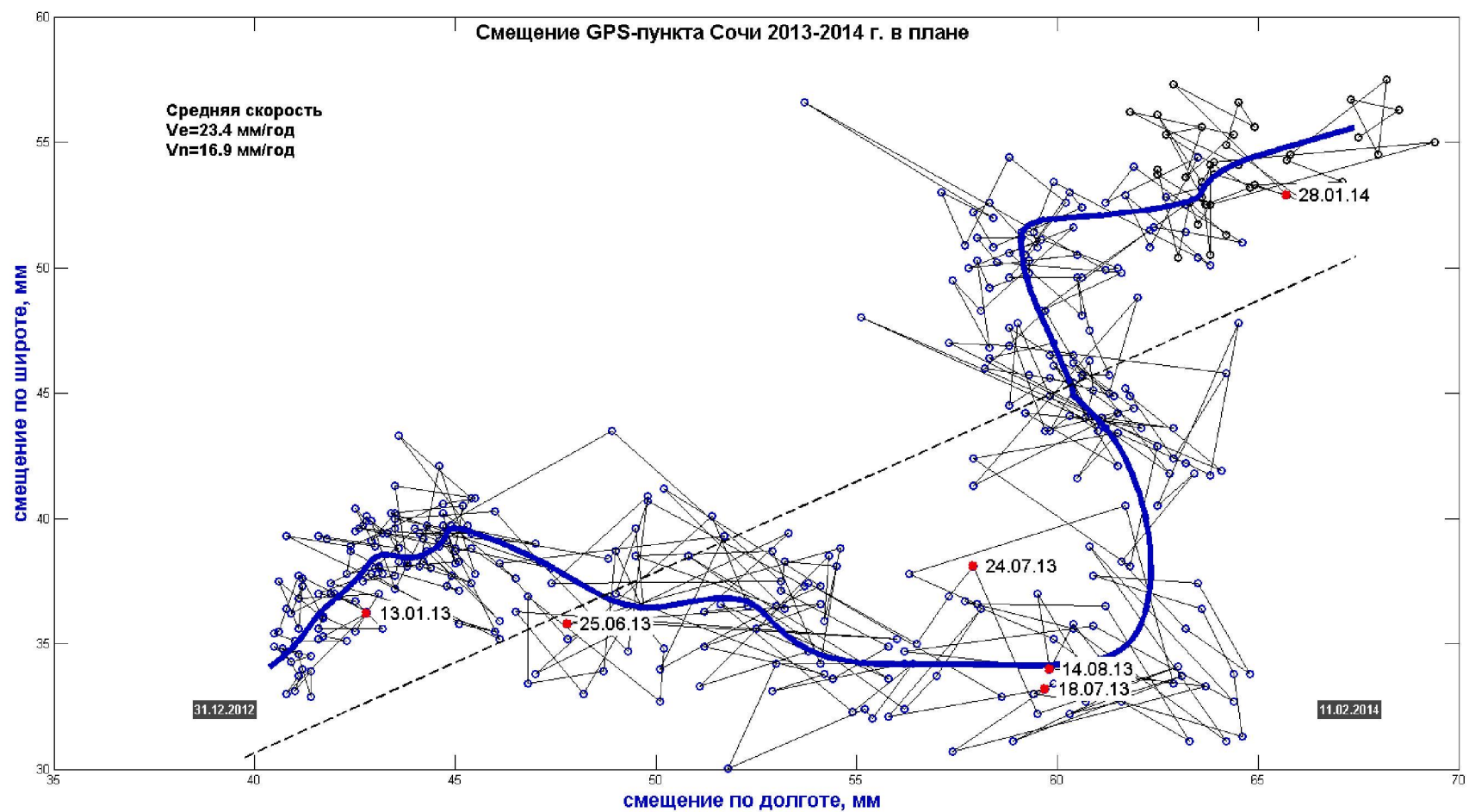


Рисунок Б2 – Горизонтальные смещения по данным высокоточного приемника GPS/ГЛОНАСС PREGO (широта – 43,56929, долгота – 39,76227)

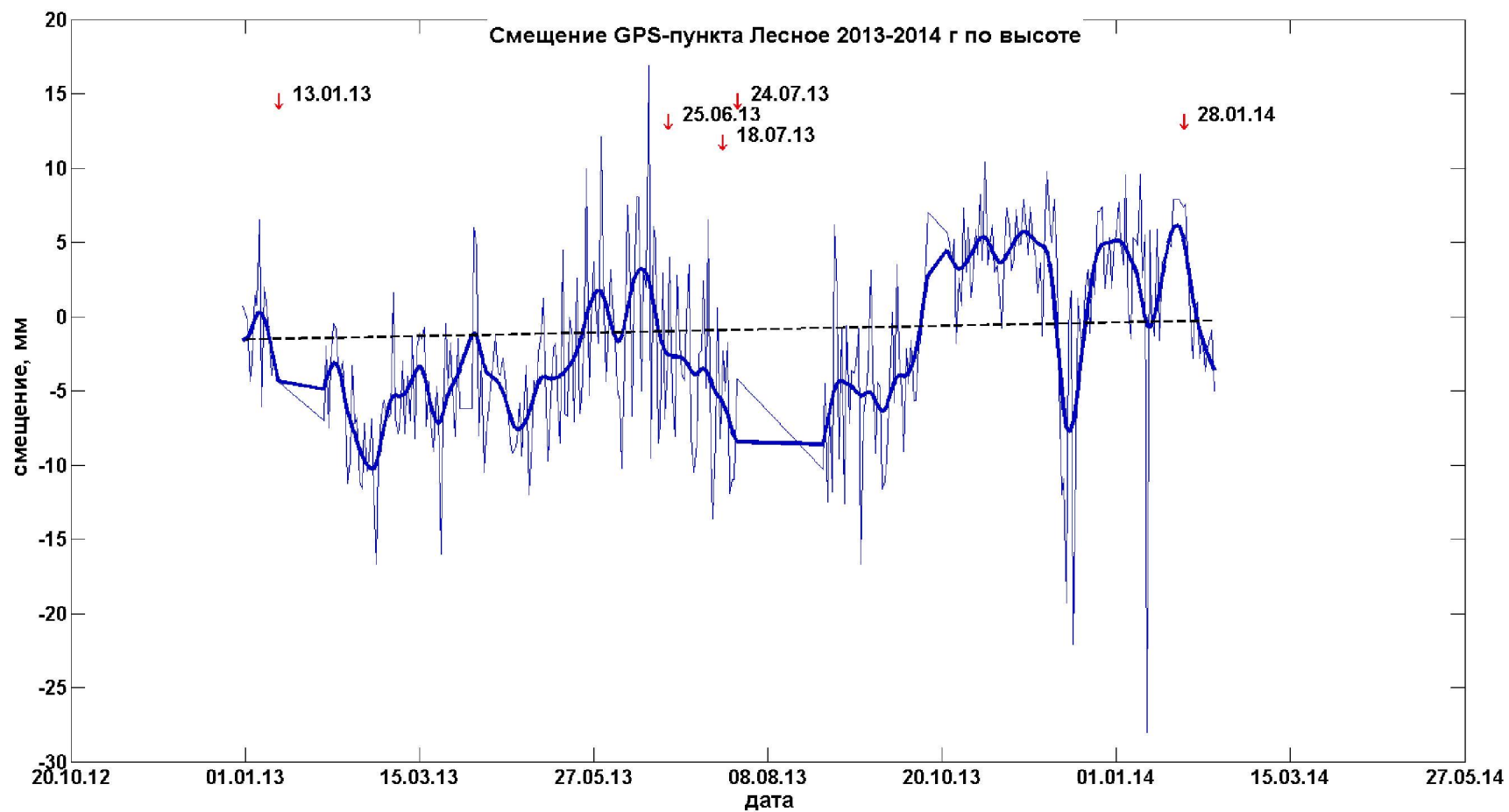


Рисунок Б3 – Вертикальные смещения по данным высокоточного приемника GPS/ГЛОНАСС PREGO (широта – 43,57458, долгота – 39,97444)

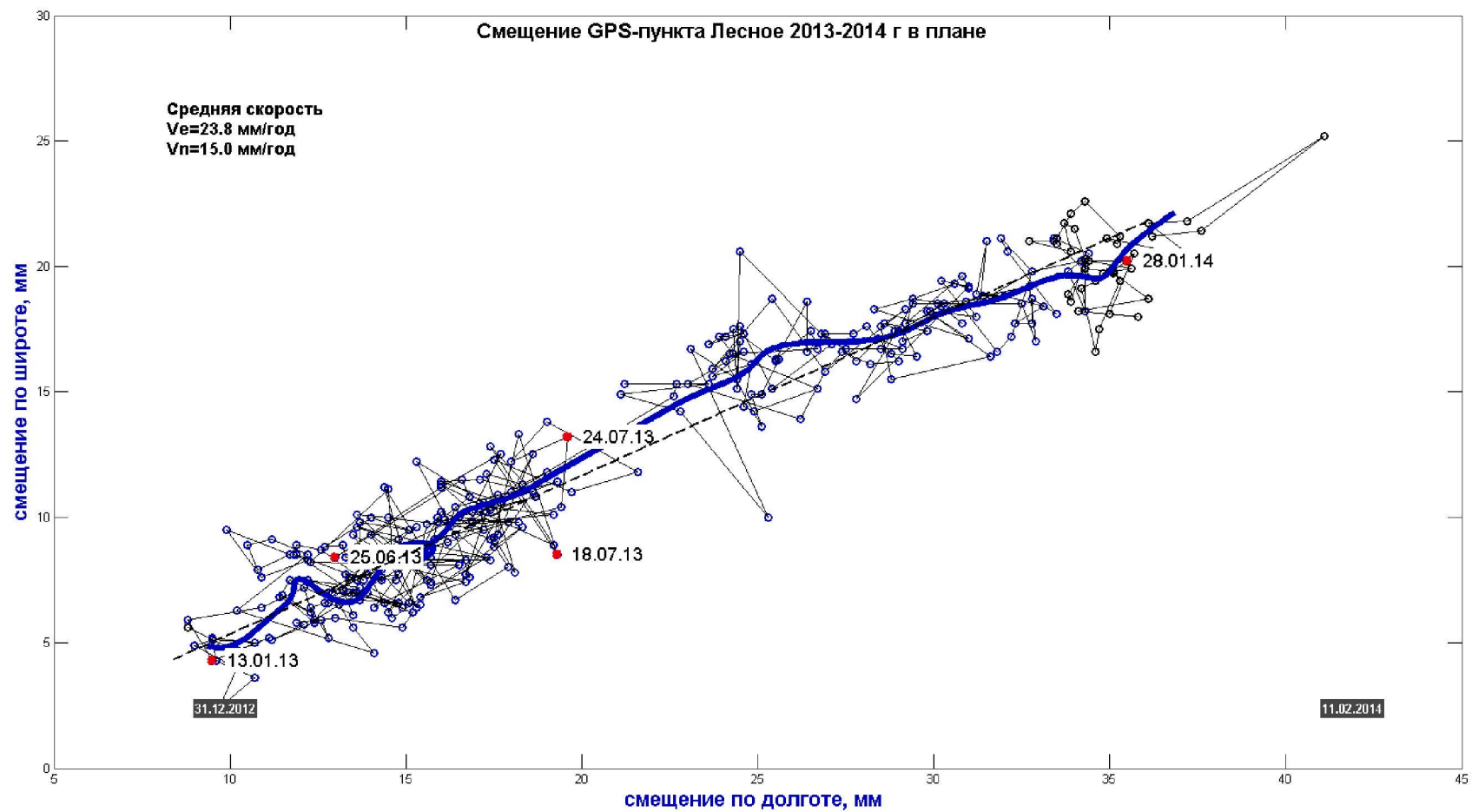


Рисунок Б4 – Горизонтальные смещения по данным высокоточного приемника GPS/ГЛОНАСС PREGO (широта – 43,57458, долгота – 39,97444)



Рисунок Б5 – Размещение приемников GPS/ГЛОНАСС (bith – Сочи, lesn – Лесное)

