

На правах рукописи



ДОРОШЕНКО ОЛЬГА ВАЛЕРЬЕВНА

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН В
СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С НЕИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ**

**Специальность 01.02.04 – механика деформируемого
твердого тела**

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Краснодар
2015

Работа выполнена в институте математики, механики и информатики
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Кубанский государственный университет»

Научный
руководитель

кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Голуб Михаил Владимирович

Официальные
оппоненты

Ватульян Александр Ованесович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории упругости
ФГАОУ ВО «Южный федеральный
университет», (г. Ростов-на-Дону)

Васильев Андрей Сергеевич
кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского», научный
сотрудник научно-исследовательского института
механики (г. Нижний Новгород)

Ведущая
организация:

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный
технологический университет»,
кафедра производства строительных
конструкций и строительной механики

Защита состоится «24» декабря 2015 г. в 14-00 на заседании диссер-
тационного совета Д 212.101.07 при ФГБОУ ВПО «Кубанский госу-
дарственный университет» по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Став-
ропольская, 149, ауд. 231.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сай-
те ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет» по адре-
су: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149,
<http://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>.

Автореферат разослан «22» октября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Зарецкая Марина Валерьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы исследования. Исследование взаимодействия упругих волн с неоднородностями имеет важное значение для дефектоскопии, сейсмологии, геофизики и ряда других областей науки и техники. Создание математических моделей, описывающих дифракцию упругих волн на трещинах, необходимо прежде всего при разработке ультразвуковых методов обнаружения внутренних дефектов (полостей, отслоений, трещин и т.п.) и определения их размеров и формы по отраженному волновому полю.

Наличие большого количества разнородных соединений (интерфейсов) в современных конструкциях увеличивает риск формирования зон концентрации микротрещин. Соответственно, необходимы эффективные методы идентификации трещин и частичных отслоений в местах соединения элементов конструкций из разных материалов. Более того, следует отличать открытые или идеальные трещины, которые математически описываются как поверхности, свободные от нормальных и касательных напряжений, и отслоения, которые являются зонами неидеального контакта или зонами концентрации микродефектов. Зоны неидеального контакта – предвестники возникновения макродефекта, а их идентификация является еще более сложной задачей, нежели идентификация макродефектов типа раскрытой трещины, так как волновые поля, рассеянные на отслоениях, имеют меньшие амплитуды. Кроме того, упругие волны рассеиваются на границе раздела сред, что дополнительно усложняет идентификацию интерфейсных дефектов.

Рассеяние упругих волн на одиночных трещинах различных форм традиционно изучается с помощью комбинирования полуаналитических подходов с численными методами, среди которых можно отметить методы конечных и граничных элементов. Начиная с 1980-х гг. было выполнено значительное количество исследований по описанию и изучению поведения трещин круговой, прямоугольной, эллиптической или произвольной формы при воздействии на них падающих упругих волн. В большинстве этих работ использовался метод граничных интегральных уравнений (МГИУ), позволяющий эффективно исследовать трещины различных форм. При этом, однако, повреждения на границе раздела двух разнородных сред были недостаточно подробно изучены.

При моделировании повреждений традиционно используется математическая модель трещины со свободными от напряжений бе-

регами, но, в тех случаях, когда речь идет о зоне неидеального контакта или концентрации микродефектов, то есть области с чередующимися зонами непрерывности и разрывности в перемещениях, этого недостаточно. Математически описать динамическое поведение трещиноватой среды или зоны, содержащей внутренние дефекты, можно введением распределения микротрещин или, наоборот, пятен контакта между несоприкасающимися слоями. При этом необходимо уточнить, что размеры рассматриваемых микротрещин малы по сравнению с длиной падающей волны. Альтернативный подход к моделированию поврежденных материалов заключается в использовании эффективных граничных условий с заменой поврежденной зоны тонким вязкоупругим слоем, в том числе введением граничных условий пружинного типа. В любом случае для описания поведения упругой среды с отслоением необходима информация о поврежденности (трещиноватости) области: форма и размеры микротрещин, их количество, ориентация и т.п.

Данная диссертационная работа посвящена построению моделей, описывающих дифракцию упругих волн на круговых трещинах и зонах неидеального контакта, расположенных между двумя разнородными материалами. С помощью интегрального подхода задача описания дифракции на круговой интерфейсной трещине сводится к граничным интегральным уравнениям, которые решаются методом Бубнова-Галеркина. Для описания зон концентрации микродефектов используется стохастическое распределение микротрещин и граничные условия пружинного типа. Соответствие между жесткостью пружинной модели и параметрами поврежденного интерфейса устанавливается на основе предположения об эквивалентности рассматриваемых моделей.

Актуальность проведенного диссертационного исследования определяется необходимостью построения и развития механико-математических моделей для описания динамического поведения зон концентрации микродефектов, расположенных на границе раздела двух сред. Такие модели могут использоваться для идентификации отслоений и зон неидеального контакта средствами ультразвукового неразрушающего контроля.

Целями диссертационного исследования являются:

- разработка эффективных математической и компьютерной моделей, описывающих распространение и дифракцию упругих волн

на одиночной круговой трещине, расположенной на границе раздела двух различных упругих сред;

- построение модели, позволяющей описывать прохождение упругих волн через границы с неидеальным контактом материалов;
- вывод определяющих соотношений для компонент матрицы жесткости в граничных условиях пружинного типа для полосовых микротрещин различных размеров;
- вывод определяющих соотношений для компонент матрицы жесткости в граничных условиях пружинного типа для круговых микротрещин одинаковых размеров.

Для достижения целей были решены следующие задачи:

- построение в цилиндрической системе координат Фурье-символа матрицы Грина для упругого полупространства;
- вывод системы граничных интегральных уравнений для определения скачка перемещений при рассеянии упругих волн на одиночной круговой интерфейсной трещине и ее решение методом Бубнова-Галеркина;
- нахождение соотношений для амплитудных коэффициентов прохождения, описывающих дифракцию упругих волн на границе раздела сред с неидеальным контактом, моделируемой распределенным набором микротрещин и граничными условиями пружинного типа;
- построение асимптотического решения для скачка перемещений при рассеянии плоских упругих волн на одиночной круговой микротрещине, расположенной между двумя разнородными полупространствами;
- нахождение элементов матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, описывающих поведение полосовых интерфейсных микротрещин различных размеров;
- определение нормальных и тангенциальных элементов матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, описывающих поведение круговых интерфейсных микротрещин одинаковых размеров.

Методы исследования. Для описания волновых полей, рассеиваемых трещиной, при падении упругих волн используется интегральный подход, метод граничных интегральных уравнений и метод Бубнова-Галеркина. Для описания распределенного набора трещин применяется техника усреднения по ансамблю, теорема Бетти-Рэлея и граничные условия пружинного типа.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых граничных задач, применением строгих математических методов, а также сравнением с результатами, полученными иными методами или известными результатами других авторов.

Научную новизну диссертации определяют следующие основные результаты, полученные автором:

- модификация метода граничных интегральных уравнений для моделирования дифракции упругих волн на одиночной круговой трещине, расположенной на границе раздела двух различных сред;
- метод построения аналитического асимптотического решения задачи о рассеянии плоских упругих волн на круговых микротрещинах, расположенных на границе раздела двух различных упругих полупространств;
- подход к описанию динамического поведения неидеального контакта материалов и зон концентрации круговых микродефектов, основанный на применении граничных условий пружинного типа;
- алгоритм определения компонент матриц жесткости граничных условий пружинного типа, описывающих динамическое поведение интерфейса с неидеальным контактом для случаев разноразмерных полосовых микротрещин и круговых микротрещин одинаковых размеров, расположенных на границе раздела двух разнородных сред.

Теоретическая значимость и практическая ценность полученных результатов определяются возможностью их применения в различных областях науки и техники, неразрушающем контроле конструкций и материалов, а также при математическом моделировании волновой динамики многослойных композитов с неоднородностями.

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33011 «Теоретико-экспериментальное решение обратных задач по восстановлению упругих свойств слоистых композитов и идентификации в них неоднородностей с применением упругих волн Лэмба»), Министерства образования и науки Российской Федерации (1.189.2014К «Математическое и компьютерное моделирование волновых процессов в приложении к проблемам развития инфокоммуникационных технологий и волнового мониторинга композитных материалов»), а также в рамках выполнения ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (14.740.11.0578, «Моделирование динамического поведения компо-

зитных материалов с повреждениями, неоднородностями и зонами неидеального контакта: приложения в неразрушающем контроле»; 14.В37.21.0387 «Волновая динамика слоистых фононных кристаллов: моделирование неповрежденных и поврежденных структур, фильтрационные и блокирующие свойства»).

На защиту выносятся:

1) метод решения задачи о дифракции упругих волн на круговой трещине, расположенной на границе раздела двух разнородных сред;

2) метод построения асимптотического решения задачи о дифракции плоских упругих волн на круговой микротрещине, расположенной на границе раздела двух различных полупространств;

3) модель, описывающая динамическое поведение зон неидеального контакта в предположении стохастического распределения круговых микротрещин между разнородными материалами;

4) полученные оценки компонент матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, описывающих неидеальный контакт между двумя различными упругими материалами в случае полосовых микродефектов различных размеров и круговых микродефектов одинаковых размеров.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XVIII Зимней школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2013 г.), Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2013 г.), VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 2013 г.), Акустическом симпозиуме «КОНСОНАНС-2013» (Украина, г. Киев, 2013 г.), IX Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2014 г.), V Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат-2014» (г. Геленджик, 2014 г.), The 11th European Conference on Non-Destructive Testing ECNDT 2014 (Чешская республика, г. Прага, 2014 г.), XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2014 г.), IX Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2015 г.), XI Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (г. Казань, 2015 г.), а также на семинарах Института математики, механики и информатики КубГУ.

Публикации. Основное содержание и результаты диссертационных исследований отражены в 15 работах, в том числе в 2 публикациях, вышедших в изданиях из перечня, утвержденного ВАК РФ. Результаты исследований использованы при получении 1 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ. В указанных публикациях идеи постановок задач и методы их исследования разрабатывались совместно с научным руководителем М.В. Голубом и соавторами. Кроме того, одна статья направлена в журнал *International Journal of Solids and Structures*, индексируемый в *Web of Science*.

Объем и структура работы. Диссертация общим объемом 115 страниц содержит введение, три главы основной части, заключение и список литературы, включающий 122 источника. Работа проиллюстрирована 19 рисунками и 2 таблицами.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается общая характеристика диссертационной работы, обсуждается ее актуальность и обзор достижений в изучаемой предметной области, формулируется цель и решаемые в ходе исследования задачи, указываются основные этапы исследования, отмечена научная новизна и практическая ценность полученных результатов.

В **первой главе** излагаются теоретические основы динамической теории упругости и особенности интегрального подхода, применяемого в диссертационном исследовании. В *разделе 1.1* приведены уравнения движения линейной теории упругости, связывающие перемещения $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^3$, напряжения σ_{ij} и деформации, которые при установившихся гармонических колебаниях с круговой частотой ω в точке \mathbf{x} в отсутствие объемных сил для изотропного тела сводятся к уравнениям Ляме относительно перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$(\lambda + \mu)\nabla\text{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \rho\omega^2\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0.$$

где λ, μ – константы Ляме, ρ – плотность. Для описания различного типа взаимодействия сред сформулированы граничные условия, учитывающие содержащиеся внутренние неоднородности (трещины, отслоения и пр.).

Для решения поставленных задач необходимо находить волновые поля перемещений и напряжений, возникающих в однородном

изотропном полупространстве под воздействием произвольных нагрузок. При описании динамического поведения многослойных материалов часто пользуются интегральными преобразованиями, позволяющими уменьшить количество переменных и свести дифференциальные уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В *разделе 1.2* приводятся основные свойства интегральных преобразований Фурье и Ханкеля, которые используются в последующих разделах при построении решений. *Раздел 1.3* посвящен вопросам распространения плоских упругих волн через границу раздела двух сред. В нем описываются отраженное и преломленное волновые поля для случаев падения P - и S -волн. Основной интегрального подхода является переход к Фурье-символам при построении матриц Грина. В начале *раздела 1.4* приводятся основные сведения о схеме построения Фурье-образа матрицы Грина в декартовой системе координат для плоской и трехмерной постановок, см. рисунок 1, поскольку схема подробно описана в работах представителей южно-российской школы механики (Ворович И.И., Бабешко В.А., 1979; Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф., 1989 и др.).

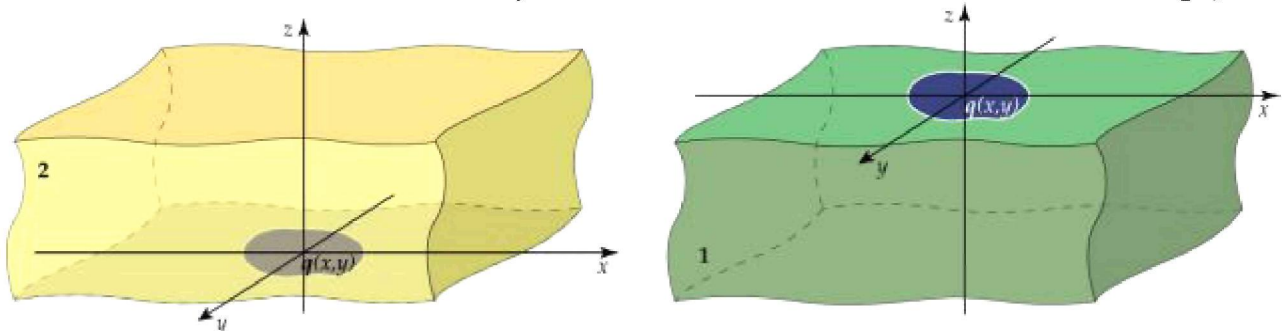


Рисунок 1 – Постановки задач для заданных нагрузок на поверхностях двух полупространств

Более подробно приводится схема вывода образа матрицы Грина для случая неосесимметричной нагрузки в круговой области с использованием цилиндрической системы координат (r, θ, z) . При построении решения применяется разложение вектора перемещений $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ в ряд Фурье по угловой координате

$$\mathbf{u}(r, z, \theta) = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{u}^{nm}(r, z) \mathbf{Y}^{nm}(\theta), \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}^{1m}(\theta) = \text{diag}(\cos m\theta, \sin m\theta, \cos m\theta),$$

$$\mathbf{Y}^{2m}(\theta) = \text{diag}(\sin m\theta, -\cos m\theta, \sin m\theta)$$

и преобразование Ханкеля, что позволяет свести задачу определения вектора $\mathbf{w}^{nm} = (u_r^{nm} + u_\theta^{nm}, u_r^{nm} + u_\theta^{nm}, u_z^{nm})$ к интегральному представлению с однократным интегрированием

$$\mathbf{w}^{sc, nm}(r, z) = \begin{cases} \mathbf{w}_1^{sc, nm}(r, z) = \int_0^\infty \mathbf{J}^m(\alpha r) \mathbf{K}_1(\alpha, z) \mathbf{Q}^{nm}(\alpha) \alpha d\alpha, & z < 0 \\ \mathbf{w}_2^{sc, nm}(r, z) = \int_0^\infty \mathbf{J}^m(\alpha r) \mathbf{K}_2(\alpha, z) \mathbf{Q}^{nm}(\alpha) \alpha d\alpha, & z > 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{K}_j(\alpha, z)$ – Фурье-символ матрицы Грина, $\mathbf{Q}^{nm}(\alpha)$ – Фурье-символ разложения поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(r, 0)$ в ряд вида (1), $\mathbf{J}^m(\alpha r) = \text{diag}\{J_{m+1}(\alpha r), J_{m-1}(\alpha r), J_m(\alpha r)\}$ – диагональная матрица, состоящая из функций Бесселя J_m .

Во второй главе описывается модификация метода граничных интегральных уравнений для построения волновых полей, рассеянных интерфейсными круговой или полосовой трещинами. Помимо самостоятельной ценности получаемые результаты используются в третьей главе, поскольку описание дифракции упругих волн на распределенном наборе дефектов или поврежденной границе раздела двух сред использует решение задачи о рассеянии на одиночной трещине определенной формы. Кроме того, с целью получения аналитических соотношений строятся асимптотические решения для микро-трещин, характерный размер которых значительно меньше длины волны.

В разделе 2.1 описывается схема определения волновых полей, рассеиваемых одиночными полосовой и круговой трещинами, расположенными на границе раздела двух различных упругих полупространств. Предполагается, что на границу раздела двух разнородных изотропных полупространств, содержащую одиночную трещину, представляющую собой бесконечно тонкий разрез Ω , падает некоторое волновое поле \mathbf{u}^{in} . Рассеянное волновое поле \mathbf{u}^{sc} удовлетворяет уравнениям Ламе, а граничные условия на трещине Ω задают равенство нулю вектора $\boldsymbol{\tau} = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\}$:

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Схема построения поля перемещений, рассеиваемого полосовой трещиной, с помощью интегрального подхода, хорошо известна (Глушков Е.В., Глушкова Н.В. и Шапарь Е.М., 2004) и приводится в кратком изложении в начале раздела 2.1 Модель, описывающая ди-

фракцию на круговой интерфейсной трещине, рассматривается подробно. На рисунке 2 приведена геометрия задачи для случая круговой интерфейсной трещины радиуса a . Для построения решения вводится функция раскрытия берегов круговой трещины

$$\Delta w^{nm}(r, \theta) = w^{sc, nm}(r, \theta, 0^-) - w^{sc, nm}(r, \theta, 0^+).$$

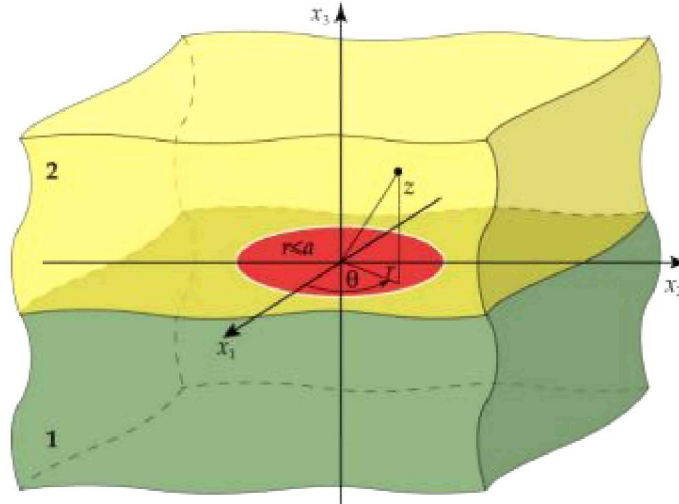


Рисунок 2 – Постановка задачи для круговой интерфейсной трещины

Применение преобразования Ханкеля к скачку смещений $\Delta w^{nm}(r, \theta)$ ведет к функциональному уравнению относительно Фурье-символа напряжений на границе раздела сред

$$Q^{nm}(\alpha) = [K_1(\alpha, 0) - K_2(\alpha, 0)]^{-1} \Delta W^{nm}(\alpha) = L(\alpha) \Delta W^{nm}(\alpha).$$

Переформулировка граничных условий в терминах напряжений на границе раздела сред сводит задачу к интегральному уравнению

$$\int_0^\infty J^{nm}(\alpha r) L(\alpha) \Delta W^{nm}(\alpha) \alpha d\alpha = -\hat{\mathbf{t}}^{in, nm}(r), \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{t}}^{nm} = (\sigma_{rz}^{nm} + \sigma_{\theta z}^{nm}, \sigma_{rz}^{nm} - \sigma_{\theta z}^{nm}, \sigma_{zz}^{nm})$ – компоненты разложения вектора \mathbf{t} в ряд Фурье вида (1). Для нахождения решения интегрального уравнения (2), неизвестный скачок перемещений на круговой трещине раскладывается в ряд по нормированным присоединенным полиномам Лежандра

$$\Delta w_k^{nm}(r) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_{kt}^{nm} \phi_{kt}^m(r),$$

$$\phi_{(3/2 \pm 1/2)t}^m(r) = \frac{P_{m+2t+1 \pm 1}^{m+1}(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{m+2t+1 \pm 1}^m(0)}, \quad \phi_{3t}^m(r) = \frac{P_{m+2t+1}^m(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{m+2t+1}^m(0)}.$$

При $m = 0$ необходима поправка в индексах

$$\phi_{1t}^0(r) = \frac{P_{2t+2}^1(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{2t+2}^2(0)}, \quad \phi_{3t}^0(r) = \frac{P_{2t+1}^0(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{2t+1}^1(0)}, \quad \phi_{2t}^0(r) = \phi_{1t}^0(r)$$

Применение схемы Бубнова-Галеркина позволяет произвести дискретизацию и редукцию интегрального уравнения (2), что приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{t=0}^T \mathbf{A}_{t't}^m \boldsymbol{\beta}_t^{nm} = -\mathbf{g}_{t'}^{nm}, \quad t' = 0, \dots, T. \quad (3)$$

В правой части системы уравнений (3) стоят интегралы

$$g_{it'}^{nm} = \int_0^a \hat{t}^{\text{in},nm}(r, 0) \phi_{it'}^m(r) r dr,$$

матрица системы состоит из блоков 3×3

$$\mathbf{A}_{t't}^m = \int_0^{a^2} \boldsymbol{\Phi}_{t'}^m(\alpha) \mathbf{L}(\alpha) \boldsymbol{\Phi}_t^m(\alpha) \alpha d\alpha,$$

а матрица $\boldsymbol{\Phi}_{t'}^m = \text{diag}(\Phi_{1t'}^m, \Phi_{2t'}^m, \Phi_{3t'}^m)$ составлена из преобразований Ханкеля функций $\phi_{kt}^m(r)$.

Для дефектов малого размера по сравнению с длиной падающих волн можно построить асимптотические представления для вектор-функции раскрытия берегов трещины. Описываемая далее схема может с равным успехом применяться как для полосовых, так и для круговых микротрещин. В разделе 2.2 излагается схема вывода асимптотического решения для случая падения плоских P и S -волн под нормальным углом к интерфейсу. Для этого используется следующее разложение ядра интегрального уравнения (2):

$$\mathbf{L}(\alpha) = \alpha \mathbf{L}_{\text{as}} + \check{\mathbf{L}}(\alpha), \quad (4)$$

где $\check{\mathbf{L}}(\alpha) \sim O(\alpha^{-1})$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Подстановка разложения (4) в систему (3) позволяет вычислять элементы в правой части как

$$\mathbf{A}_{t't}^m = \tilde{\mathbf{A}}_{t't}^m + \int_0^\infty \boldsymbol{\Phi}_{t'}^m(\alpha) \check{\mathbf{L}}(\alpha) \boldsymbol{\Phi}_t^m(\alpha) \alpha d\alpha,$$

где блок $\tilde{\mathbf{A}}_{t't}^m = \int_0^\infty \boldsymbol{\Phi}_{t'}^m(\alpha) \mathbf{L}_{\text{as}} \boldsymbol{\Phi}_t^m(\alpha) \alpha^2 d\alpha$ может быть вычислен аналитически, а блок $\int_0^\infty \boldsymbol{\Phi}_{t'}^m(\alpha) \check{\mathbf{L}}(\alpha) \boldsymbol{\Phi}_t^m(\alpha) \alpha d\alpha$ принимает малые значения при $\omega a \ll 1$ и приравнивается нулю при построении асимптотического решения. Правая часть системы уравнений (3) уточняется для случаев, когда в качестве падающего поля рассматриваются плоские P и SV -волны, распространяющиеся из нижнего полупространства в общем случае под углом ϕ_0 к оси Oz в плоскости xOz . Для

нормального угла падения из формул преобразования координат и разложения компонент модифицированного вектора напряжений $\hat{\mathbf{t}}^{\text{in}}$ в ряд Фурье следует, что лишь несколько компонент вектора правой части уравнения (2) отличны от нуля, а именно, в случае P -волны $\hat{\mathbf{t}}^{\text{in},10} = (0, 0, \sigma_{zz})$, а для падающей SV -волны $\hat{\mathbf{t}}^{\text{in},11} = (0, 2\sigma_{xz}, 0)$.

Подставляя полученные соотношения с учетом $\mathbf{A}_{t't}^m = \tilde{\mathbf{A}}_{t't}^m$ в (3) и выбирая $T = 0$, можно получить аналитическое асимптотическое решение для скачка перемещений на круговой трещине. Получаемые асимптотики в дальнейшем необходимы для построения модели стохастического набора трещин. Полученные асимптотические решения сравниваются с численными расчетами, демонстрируется высокая точность асимптотик даже для достаточно высоких частот, что указывает на возможность их использования в дальнейших построениях. В качестве примера на рисунке 3 приводятся отношения численного решения к асимптотическому в случае падающих на круговую трещину P -волн (рассмотрено несколько пар материалов).

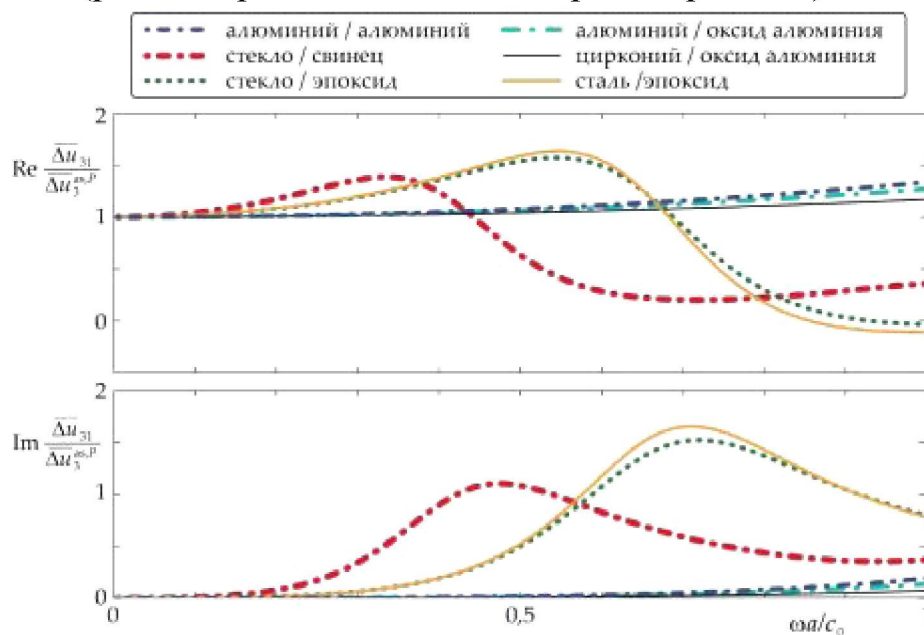


Рисунок 3 – Отношения точного и асимптотического средних значений вертикальных компонент скачков смещений при падении P -волны на круговую трещину, $c_0 = 3160$ м/с

В разделе 2.3 приводятся результаты сопоставления решений, полученных разными подходами, а также с опубликованными результатами других авторов на примере скачков перемещений. Некоторые результаты сравнения приведены на рисунке 4.

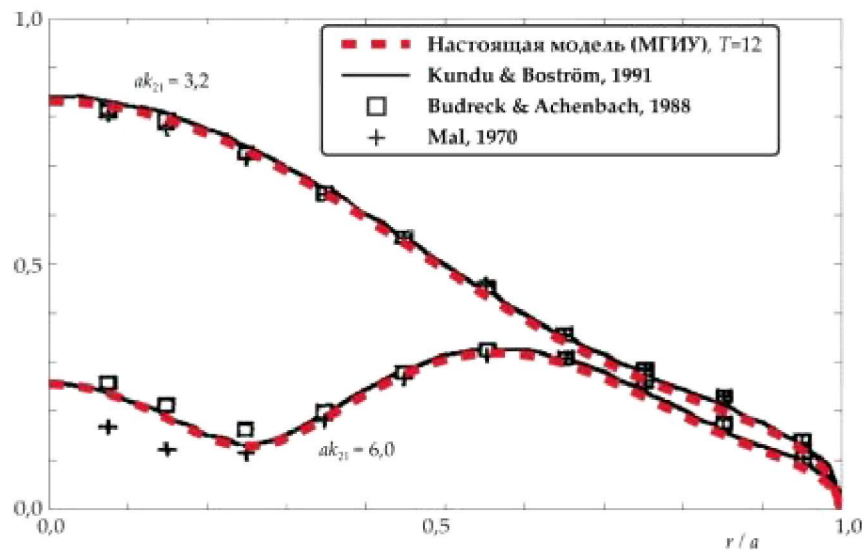


Рисунок 4 – Сравнение нормализованного скачка перемещений при падении P -волны на круговую трещину в упругом пространстве (стекло) под нормальным углом

В **третьей главе** рассматриваются два подхода для описания зон неидеального контакта, что отображено на рисунке 5. Согласно первому методу вводится распределенный или периодический набор микротрещин для описания зон неидеального контакта. Альтернативный подход заключается в моделировании динамического поведения зоны неидеального контакта поврежденного интерфейса с помощью граничных условий пружинного типа (*Baik J.M., Thompson R.B., 1984*). На основе предположения об эквивалентности моделей устанавливается соответствие между жесткостью распределенной пружины и параметрами поврежденного интерфейса.

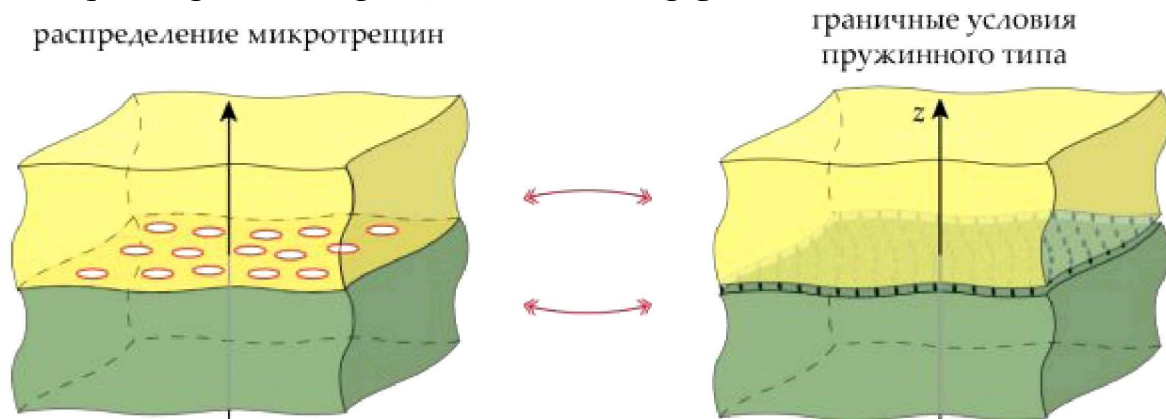


Рис. 5 – Моделирование неидеального контакта между материалами

Граничные условия пружинного типа, которым посвящен *раздел 3.1*, записываются как условие непрерывности напряжений при скачке перемещений

$$\tau_n(x) = \kappa(u_n(x) - u_{n1}(x)), \quad (5)$$

где $\mathbf{\kappa}$ – матрица жесткостей 3×3 , \mathbf{n}^\pm – внешняя и внутренняя нормали к поверхности в рассматриваемой точке \mathbf{x} , \mathbf{t}_n – нормальные и касательные компоненты вектора напряжений в точке \mathbf{x} , \mathbf{u} – вектор перемещений. В изотропном случае можно выбрать локальную систему координат таким образом, что ненулевыми остаются только диагональные компоненты матрицы жесткости. В случае падения плоской волны на границу раздела двух сред, на которой задана распределенная пружина, после подстановки представлений для плоских упругих волн в граничные условия получится выражение для перемещений

$$\mathbf{u}_s^\kappa = \begin{cases} \mathbf{p}_s \left(e^{ik_{s1}z} + R_s^\kappa e^{-ik_{s1}z} \right), & z < 0 \\ \mathbf{p}_s T_s^\kappa e^{ik_{s2}z}, & z > 0. \end{cases}$$

Коэффициенты отражения и прохождения R_s^κ и T_s^κ выражаются через компоненты матрицы жесткости κ_s

$$R_s^\kappa = \frac{ic_{s1}k_{s1} + \kappa_s(c_{s1}k_{s1} - c_{s2}k_{s2})}{ic_{s1}k_{s1}c_{s2}k_{s2} + \kappa_s(c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2})},$$

$$T_s^\kappa = \frac{2\kappa_sc_{s1}k_{s1}}{ic_{s1}k_{s1}c_{s2}k_{s2} + \kappa_s(c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2})},$$

где используются следующие обозначения: s – тип падающей волны, k_{sj} – волновые числа, $c_{1j} = \lambda_j + 2\mu_j$, $c_{2j} = \mu_j$, j – индекс полупространства.

Второй подход, описанный в разделе 3.2, заключается во введении распределенного или периодического набора микротрещин. Степень поврежденности интерфейса определяется плотностью распределения трещин, или трещиноватостью C , задаваемую как отношение суммарной площади трещин к общей рассматриваемой площади на границе раздела сред. Применение техники усреднения по ансамблю позволяет представить рассеянное волновое поле вдали от границ полупространств в виде плоских волн с амплитудами P^\pm . Для определения амплитудных коэффициентов к падающему \mathbf{u}_s^{in} и рассеянному \mathbf{u}_s^{sc} полям применяется теорема Бетти-Рэлея

$$\iint_S [u_i^{\text{in}} \sigma_{ij}^{\text{sc}} - u_i^{\text{sc}} \sigma_{ij}^{\text{in}}] n_j dS = 0.$$

В качестве контура или поверхности интегрирования S в нижнем полупространстве выбирается параллелепипед S^- с вершинами в точках $(\pm x_0; \pm y_0; 0^-)$ и $(\pm x_0; \pm y_0; -z_0)$ и параллелепипед S^+ из верхнего полупространства, симметричный к S^- относительно плоскости $z=0$. Интегралы вдоль вертикальных плоскостей $x=\pm x_0$ в обоих случаях обращаются в ноль, а интегралы по горизонтальным плоскостям дают ненулевой вклад

$$\left(\int_{z=z_0} - \int_{z=-z_0} \right) [u_i^{\text{in}} \sigma_{ij}^{\text{sc}} - u_i^{\text{sc}} \sigma_{ij}^{\text{in}}] dx dy - \left(\int_{\Omega} \Delta u_i \sigma_{ij}^{\text{in}} dx dy \right) = 0,$$

где Ω – поврежденная область. Из данного уравнения получаются выражения для амплитуд рассеянного поля

$$P_s^- = -\frac{1}{2}(1 - R_s^-)C(\Delta \bar{u}_s, \mathbf{p}_s), \quad P_s^+ = -\frac{1}{2}(1 + R_s^-)C(\Delta \bar{u}_s, \mathbf{p}_s),$$

при этом полный коэффициент прохождения \bar{T}_s выражается через среднее значение скачка перемещений на трещине $\Delta \bar{u}_s$, который зависит от типа падающей волны и упругих модулей материалов.

$$\bar{T}_s = T_s^- + P_s^+ = T_s^- \left(1 - \frac{1}{2} C(\Delta \bar{u}_s, \mathbf{p}_s) \right), \quad \Delta \bar{u}_s = \frac{1}{S(\Omega_0)} \iint_{\Omega_0} \Delta \bar{u}_s dx dy,$$

где $S(\Omega_0)$ – площадь одиночного микродефекта, \mathbf{p}_s – вектор направления распространения волны.

Раздел 3.3 посвящен выводу соотношений для компонент матрицы жесткости и их анализу, а также сравнению с имеющимися результатами других авторов, в первую очередь с работой (Lekesiz H. et al, 2013). Предполагается равенство коэффициентов прохождения $T_s^{\mathbf{k}}$ и \bar{T}_s отдельно для P и SV -волн ($s = 1, 2$ соответственно и приводится итоговое соотношение для всех ненулевых компонент матрицы жесткости \mathbf{k} , которое имеет вид

$$\frac{c_{s1} k_{s1} c_{s2} k_{s2}}{c_{s1} k_{s1} + c_{s2} k_{s2}} \cdot \frac{1}{C(\Delta \mathbf{u}_s, \mathbf{p}_s)} = \frac{f_s}{2} \quad (6)$$

В случае полосовых дефектов разной ширины трещиноватость вводится как удельный вес $C_l = \sum_{i=1}^N l_i / x_0$. Для плоской задачи получаются одинаковые константы граничных условий пружинного типа вне зависимости от типа волн

$$\kappa_{11} = \kappa_{33} = \frac{n(1+d_1)}{\pi \beta C_l l^*}, \quad d_1 = \sqrt{1 + i\pi \beta C_l l^*},$$

$$\beta = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)\mu_1} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{(\lambda_2 + \mu_2)\mu_2}, \quad l^* = \frac{\hat{\sigma}^2 + (l)^2}{\bar{l}},$$

где \bar{l} и $\hat{\sigma}^2$ – выборочные оценки математического ожидания и дисперсии для набора трещин различных размеров. Данная оценка обобщает результат, опубликованный в работе (Golub M.V., Boström A., 2011), полученный для полосовых микродефектов одинаковой ширины.

В случае круговых микротрещин одинакового радиуса может быть использовано асимптотическое решение для одиночной трещины, построенное в разделе 2.2. Его подстановка в представление (6) для P -волны позволяет получить выражение для нормальной компоненты матрицы жесткости

$$\kappa_N = \frac{3}{16\pi a C} \left(\frac{15m_3^2 - 4m_1^2\pi^2}{m_1(m_1^2 - m_3^2)} \right) - \frac{f_1}{2}, \quad (7)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \right),$$

$$m_2 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}, \quad m_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2} \right).$$

а в случае падения SV -волны – для тангенциальных компонент матрицы жесткости

$$\kappa_T = \frac{3}{32\pi a C} \cdot (m_1^2 + m_1 m_2 - m_3^2) \cdot$$

$$\cdot \frac{\pi(36m_1(m_1^2 + m_1 m_2 - m_3^2)\pi^2 - 275m_3^2 m_2)}{m_2(m_1^2 - m_3^2)(9m_1(m_1^2 + m_1 m_2 - m_3^2)\pi^2 - 35m_3^2 m_2)} - \frac{f_2}{2} \quad (7)$$

В случае поврежденного интерфейса между одинаковыми материалами, формулы нормальной и тангенциальной эффективной пружинной жесткости упрощаются

$$\kappa_N = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{3\pi}{4} \frac{1}{aC} - \frac{f_1}{2}, \quad \kappa_T = \frac{\mu(3\lambda + 4\mu)}{4(\lambda + 2\mu)} \frac{3\pi}{4} \frac{1}{aC} - \frac{f_2}{2}$$

Для проверки точности полученных соотношений для компонент матрицы жесткости было проведено сравнение с жесткостями, полученными в работе (Lekesiz H. et al, 2013), которое проиллюстрировано на рисунке 6.

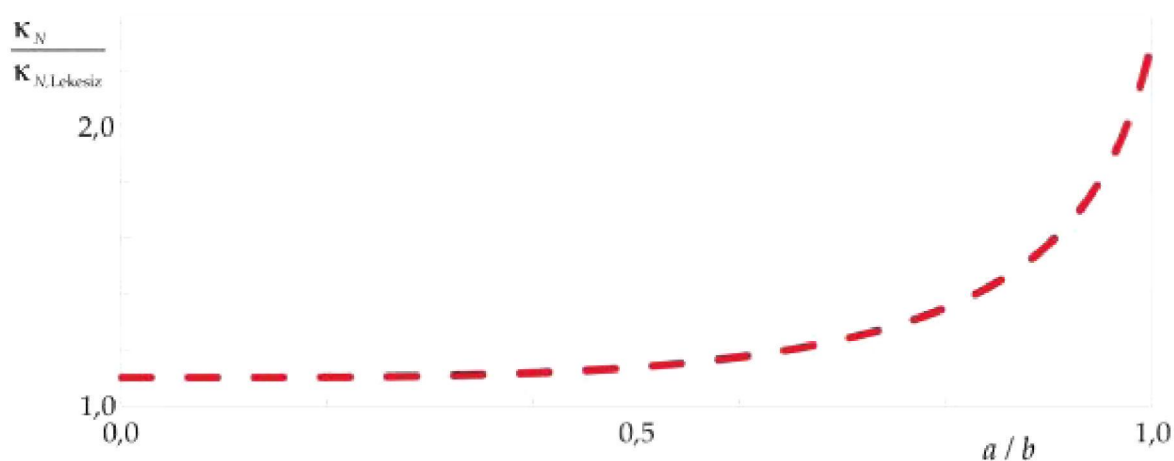


Рисунок 6 – Сравнение жесткости K_N , полученной в настоящей работе, и значения $K_{N,Lekesiz}$ из работы (Lekesiz H. et al, 2013)

В указанной работе есть отличия в постановке задачи по сравнению с настоящим исследованием. А именно, в ней рассматривалась статическая задача с гексагональной расстановкой круговых трещин, а для описания поврежденности вместо трещиноватости C использовались параметры распределения дефектов, т.е. радиус круговой трещины a , и расстояния между трещинами $2b$. Для обоих подходов жесткости представимы в виде произведения двух множителей, первый из которых зависит только от упругих модулей, а второй – от параметра поврежденности. Сравнительный анализ показал, что первые множители, полученные независимо в настоящем исследовании и в референтной работе, совпадают для одинаковых материалов и отличаются не более чем на 0,2% для различных материалов.

Второй множитель зависит от отношения a/b и приводит к различным значениям жесткостей. Расхождение в 10% при $a/b < 0,5$ объясняется тем, что сделаны различные предположения о распределении круговых микротрещин. Аналогичное различие между стохастическим и периодическим набором полосовых трещин было продемонстрировано в работе (Sotiropoulos D.A., Achenbach J.D., 1988).

В разделе 3.4. приводится важный пример возможного практического приложения полученных результатов и соотношений для обнаружения частично отслоившихся участков многослойных пластин с помощью волн Лэмба. Здесь рассматриваются волны Лэмба, распространяющиеся в волноводе, составленном из двух одинаковых слоев с поврежденным интерфейсом. Рисунок 7 демонстрирует влияние неидеального контакта, описываемого с помощью граничных условий

пружинного типа, на групповые скорости волн Лэмба, которые отличаются в поврежденном и целом волноводах.

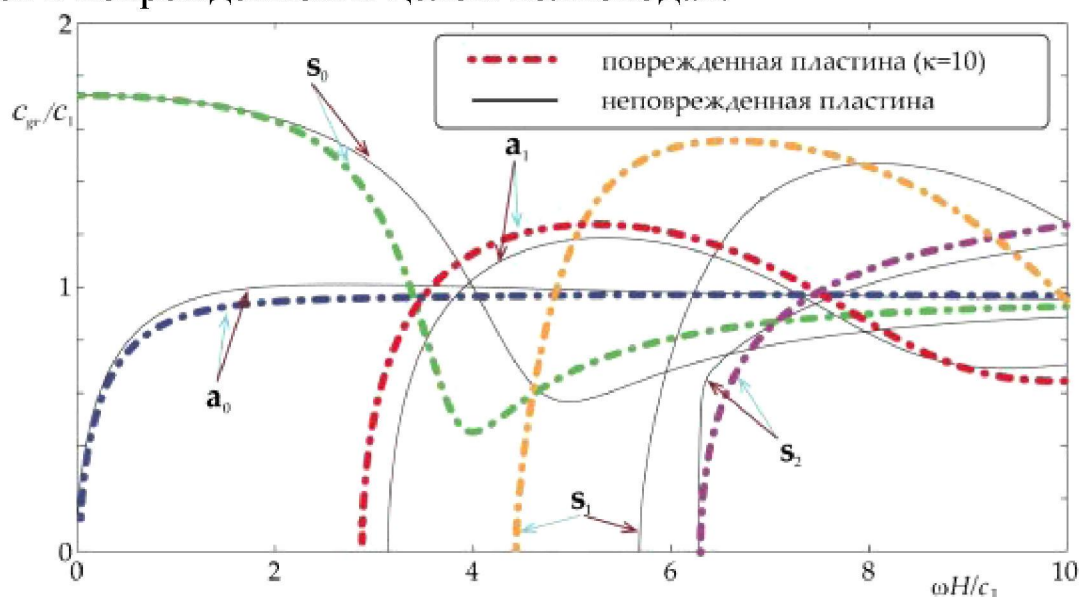


Рисунок 7 – Групповые скорости волн Лэмба в поврежденной при $\kappa = 10$ (пунктирные линии) и неповрежденной алюминиевых пластинах (сплошные линии)

Причем различие тем больше, чем больше степень поврежденности и выше частота излучаемой волны, а частоты отсечки сдвигаются в область низких частот для поврежденной пластины.

В заключении дана краткая сводка основных результатов, указано их научное и практическое значение. В работе приведены графики, иллюстрирующие сравнение полученных результатов с работами других авторов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. На основе интегрального подхода разработаны математическая и компьютерная модели, описывающие распространение упругих волн в слоистых волноводах, и их дифракцию на круговой трещине на границе раздела двух различных упругих сред.

2. Найдено асимптотическое решение задачи о дифракции плоских упругих волн на круговой микротрещине, расположенной на границе раздела двух разнородных полупространств.

3. Описан метод моделирования неидеального контакта между разнородными материалами граничными условиями пружинного типа и стохастическим распределением трещин.

4. Получены оценки компонент матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, моделирующих неидеальный контакт между двумя упругими разнородными материалами в случае полосовых микродефектов различных размеров.

5. Получены оценки компонент матрицы жесткости граничных условий пружинного типа, моделирующих неидеальный контакт между двумя упругими разнородными материалами в случае круговых микродефектов одинакового размера.

Список работ по теме диссертации, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК

1. Дорошенко О.В. Асимптотическое решение задачи о рассеянии плоских упругих волн на круговой интерфейсной трещине / О.В. Дорошенко // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2015. – №2. – С. 30–38.

2. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Моделирование прохождения упругих волн через зоны неидеального контакта с помощью граничных условий пружинного типа / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – Т. 77. – № 2. – С. 113-120.

Список работ по теме диссертации, опубликованных в других изданиях

3. Голуб М. В., Дорошенко О.В. Моделирование зон непрочности и концентрации микродефектов на плоскопараллельных интерфейсах / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". – Самара: СамГТУ, 2013 г. Ч.1, С. 86-88.

4. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Вывод пружинных граничных условий для описания многослойных упругих композитов со стохастически распределенными микротрещинами / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Тезисы акустического симпозиума "КОНСОНАНС-2013". – Киев: Институт гидромеханики НАН Украины, 2013. – С. 12.

5. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Обобщение пружинных граничных условий для полосовых микротрещин различного размера и для плоских трехмерных микротрещин / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Труды акустического симпозиума "КОНСОНАНС-2013", – Киев: Институт гидромеханики НАН Украины, 2013. – С. 89-94.

6. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Обобщение пружинных граничных условий на случай дефектов разных размеров для задач моделирования зон непрочности / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Тезисы VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2013 г. – С. 48.

7. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Обобщение пружинных граничных условий на случай дефектов разных размеров для задач моделирования зон непрочности / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2013 г. – Т. 1, – С. 164-168.

8. Голуб М. В., Дорошенко О.В. Моделирование дифракции упругих волн на круговой интерфейсной трещине / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Тезисы докладов IX Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете». – Дивноморское: Изд-во Южного федерального университета, 2014. – С.50.

9. Голуб М.В., Дорошенко О.В. К определению зон неидеального контакта на интерфейсах многослойных композитов с использованием пружинных граничных условий и волн Лэмба / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Сборник докладов V Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов "ТестМат-2014". – Москва: ВИАМ (научное электронное издание локального распространения), 2014. – 12 с.

10. Golub M.V., Doroshenko O.V. Spring boundary conditions for nonperfect contact simulation in multilayered composites in three-dimensional case / M.V. Golub, O.V. Doroshenko // Abstracts for ECNDT 2014. – Prague, 2014. – P. 182.

11. Golub M.V., Doroshenko O.V. Spring boundary conditions for imperfect contact simulation in multilayered elastic composites in three-dimensional case / M.V. Golub, O.V. Doroshenko // The e-Journal of Nondestructive Testing. – 2014. – Vol. 19. – No. 12. – 16443. – 7 pp.

12. Дорошенко О.В., Голуб М. В. Вывод пружинных граничных условий для неидеального контакта разнородных упругих материалов (трехмерный случай), О.В. Дорошенко, М.В. Голуб // Тезисы XVII Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2014. – С. 48.

13. Дорошенко О.В., Голуб М. В. Вывод пружинных граничных условий для неидеального контакта разнородных материалов (трехмерный случай) / О.В. Дорошенко, М.В. Голуб // Труды XVII Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2014. – Т. 1. – С. 171–175.

14. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Оценка тангенциальных компонент матрицы жесткости для описания динамического поведения поврежденных разномодульных интерфейсов / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете». – Дивноморское: Изд-во Южного федерального университета, 2015. – С. 39.

15. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Пружинные граничные условия для описания динамического поведения поврежденных планарных интерфейсов / М.В. Голуб, О.В. Дорошенко // Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2015. – С. 994-995.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

16. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Программный комплекс для моделирования упругих волноводов с круговыми отслоениями «Circular crack». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (Россия). № 2015616893 от 30.07.2015. Заявка № 2015613618 от 30.04.2015.

Д о р о ш е н к о Ольга Валерьевна

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ИНТЕРФЕЙСАХ
С НЕИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ КОМПОНЕНТ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать2015. Формат 60x84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Тираж 100 экз. Заказ №????.

Тираж 100 экз. Печать цифровая. Заказ №
Издательско-полиграфический центр
Кубанского государственного университета
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149