

*На правах рукописи*



**Шпак Алиса Николаевна**

**ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
ПЬЕЗОАКТУАТОРОВ С УПРУГИМ ВОЛНОВОДОМ  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА**

Специальность 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Краснодар – 2016

Работа выполнена в Институте математики, механики и информатики  
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Кубанский государственный университет»

- Научный  
руководитель:** кандидат физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник,  
**Голуб Михаил Владимирович**
- Официальные  
оппоненты:** **Дунаев Владислав Игоревич**  
доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры производства строительных  
конструкций и строительной механики  
ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный  
технологический университет»
- Наседкина Анна Андреевна**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры математического моделирования  
института математики, механики  
и компьютерных наук им. И.И. Воровича,  
ФГАОУ ВО «Южный Федеральный Университет»
- Ведущая  
организация:** Научно-исследовательский институт механики  
при Нижегородском государственном  
университете им. Н.И. Лобачевского

Защита состоится «16» июня 2016 г. в 14-00 на заседании диссертационного  
совета Д 212.101.07 при ФГБОУ ВО «Кубанский государственный универси-  
тет», 350040, г. Краснодар ул. Ставропольская, 149, ауд. 231.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГБОУ  
ВО «Кубанский государственный университет» по адресу: 350040, г. Красно-  
дар ул. Ставропольская, 149, <http://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>.

Автореферат разослан «8» апреля 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Зарецкая М.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Возрастающая сложность внутренней структуры компонентов и конструкций, используемых в промышленности и технике, вызывает необходимость развития технологий эффективной диагностики их состояния, позволяющих своевременно обнаруживать возникающие в процессе эксплуатации дефекты и, тем самым, предотвращать выход из строя всего объекта. Одним из перспективных подходов к решению данной задачи является применение систем активного ультразвукового волнового мониторинга, которые основываются на использовании бегущих упругих волн, способных распространяться на большие расстояния без сильного затухания и рассеиваться на неоднородностях различного типа, что позволяет судить о наличии повреждений в исследуемой структуре. Для возбуждения и последующего измерения колебаний наиболее часто используются массивы (сети) встроенных или приклеенных к поверхности конструкции активных пьезоэлектрических сенсоров, изготавливаемых из пьезокерамики или из гибких пьезоэлектрических полимеров.

Под влиянием окружающей среды и других неблагоприятных воздействий диагностические свойства сети пьезосенсоров со временем могут ухудшаться. Нарушение сцепления с подложкой или даже частичное разрушение актуаторов может привести к негативным изменениям в производительности системы мониторинга, что обуславливает необходимость разработки специальных методов ее контроля. При этом большое значение имеют теоретические и экспериментальные исследования волновых полей, возбуждаемых как полностью работоспособными, так и частично отклеенными пьезоактуаторами, которые, как правило, сохраняют способность генерировать и регистрировать сигналы, но такие измерения могут давать недостоверные результаты. Для проведения таких исследований необходимы эффективные математические модели, основанные на решении связанных задач и учитывающие весь механизм взаимодействия пьезоактуаторов с протяженной структурой при различных условиях контакта.

Для моделирования взаимодействия пьезоактуатора с упругим волноводом необходимо найти решение соответствующих связанных контактных задач динамической теории упругости, которые сводятся к интегральным уравнениям относительно неизвестных контактных напряжений. Эффективным методом для описания возбуждаемых в слое волновых полей является полуаналитический интегральный подход (*Ворович И.И., Бабешко В.А., 1979; Бабешко В.А. и др., 1989*). Для описания актуатора можно использовать пленочную модель (*Глушков Е.В. и др., 2006*), а в низкочастотном диапазоне для моделирования действия пьезоэлемента возможно использование упро-

ценных моделей (*Giurgiutiu V., 2014*), в рамках которых действие актуатора заменяется сосредоточенными силами, действующими по касательной к области контакта актуатора с волноводом. Для решения связанной задачи также возможно использование прямых численных методов, например, метода конечных элементов или его разновидности – метода спектральных конечных элементов (*Ostachowicz W. et al., 2012*). Важно также отметить, что в последние годы активно развиваются гибридные подходы, сочетающие полуаналитические и численные методы.

Проблема возбуждения упругих колебаний отклеенными пьезоактуаторами исследована в меньшей степени и преимущественно экспериментально. На настоящий момент опубликовано небольшое количество работ, в которых проводилось исследование влияния отслоившегося пьезоактуатора на генерируемые им волновые поля в композитном материале на основе метода конечных элементов (*Huang B., et al., 2015*). Настоящее диссертационное исследование посвящено изучению динамического взаимодействия пьезоактуаторов с упругим слоистым волноводом при различных условиях контакта. Для этого разработана математическая модель, где для описания динамики пьезоактуатора используется метод конечных элементов высокого порядка точности, а для моделирования волновых полей в упругом слое — интегральный подход. Кроме того, в рамках работы были проведены экспериментальные исследования волновых полей, возбуждаемых пьезоактуатором с разной степенью контакта.

На актуальность проводимых исследований указывает также их поддержка грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-33011, 14-08-00370, 13-01-96516), Министерства образования и науки Российской Федерации (проекты 1.189.2014К, 11.9216.2014), Германской службы академических обменов (проект A1373948), а также Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект 14.740.11.0578).

**Целью** диссертационной работы является математическое моделирование, экспериментальное исследование и анализ волновых процессов в упругом волноводе при возбуждении волн Лэмба поверхностными пьезоэлектрическими актуаторами в случае различной степени контакта с упругой слоистой подложкой.

**В задачи** диссертационного исследования входит следующее:

- 1) формулировка и решение задачи о колебаниях пьезоэлектрического тела методом конечных элементов высокого порядка точности с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева;
- 2) разработка математической и компьютерной модели на основе метода ко-

нечных элементов высокого порядка точности и интегрального подхода для описания динамического взаимодействия пьезоактуатора с упругим волноводом при разной степени контакта;

- 3) разработка схемы эксперимента с подходящими для целей исследования пьезоэлектрическими сенсорами, подготовка экспериментальных образцов и проведение эксперимента;
- 4) экспериментальная верификация разработанных моделей;
- 5) анализ волновых явлений на основе экспериментальных данных и результатов, рассчитанных на основе построенной модели.

**Методы исследования.** Для описания волновых полей в упругом волноводе используется интегральный подход, основанный на применении интегральных преобразований; для описания динамики пьезоэлектрического актуатора – метод конечных элементов высокого порядка точности.

**Достоверность и обоснованность** результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых краевых задач, применением строгих математических методов, а также экспериментальной верификацией результатов и сравнением с данными, полученными иными методами.

**Научную новизну** работы составляют следующие результаты:

- 1) модификация метода конечных элементов высокого порядка точности для описания динамического поведения пьезоэлектрических тел с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева;
- 2) результаты анализа динамического поведения пьезоактуатора и соответствующих резонансных эффектов в случае задания различных граничных условий;
- 3) результаты экспериментальных исследований волновых явлений, сопровождающих возбуждение упругих волн прямоугольными и круговыми пьезоэлектрическими актуаторами с разной степенью контакта с упругой подложкой;
- 4) гибридный подход на основе метода конечных элементов высокого порядка точности и интегрального подхода для решения связанной задачи о динамическом взаимодействии пьезоактуатора с упругим волноводом при различной степени контакта и экспериментальная верификация модели;

- 5) результаты анализа динамического взаимодействия пьезоэлектрических актуаторов с упругим волноводом при различных условиях контакта.

**Теоретическая ценность и практическая значимость** полученных результатов определяются возможностью их применения в неразрушающем ультразвуковом контроле, а также для постоянного мониторинга элементов конструкций.

### **На защиту выносятся**

- 1) математическая модель, описывающая динамическое поведение пьезоупругих тел, с помощью модификации метода конечных элементов высокого порядка точности с использованием различных интерполяционных полиномов;
- 2) математическая модель на основе метода конечных элементов и интегрального подхода для решения связанной задачи о динамическом взаимодействии пьезоактуатора с упругим волноводом при различной степени контакта и экспериментальная верификация модели;
- 3) результаты экспериментальных исследований волновых явлений, сопровождающих возбуждение упругих волн прямоугольными и круговыми пьезоэлектрическими актуаторами с разной степенью контакта с упругой подложкой;
- 4) результаты исследования динамического взаимодействия пьезоэлектрических актуаторов с упругим волноводом при различных условиях контакта, включающие резонансные эффекты и вейвлет-анализ.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы были представлены на XVIII Зимней школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2013 г.), Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2013 г.), International Conference DAYS ON DIFFRACTION 2013 (Санкт-Петербург, 2013 г.), 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference YIC 2013 (Франция, г. Бордо, 2013 г.), Акустическом симпозиуме «Консонанс-2013» (Украина, г. Киев, 2013 г.), IX Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 2014 г.), V Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат-2014» (г. Геленджик, 2014 г.), The 11th European Conference on Non-Destructive Testing ECNDT 2014 (Чешская республика, г. Прага, 2014 г.), Seminar for 2014/2015 Lomonosov and Kant Scholars (ФРГ, г. Бонн, 2014 г.), Научном семинаре стипендиатов программ

«Михаил Ломоносов III» и «Иммануил Кант III» (г. Москва, 2015 г.), X Всероссийской школе-семинаре «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивногорское, 2015 г.), XVI Всероссийской школе-конференции молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования», (пос. Абрау-Дюрсо, 2015 г.), а также на семинарах Института математики, механики и информатики КубГУ.

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа общим объёмом 136 страниц имеет следующую структуру: введение, четыре главы основной части, заключение и список литературы, включающий 106 источников. Работа содержит 71 рисунок и 2 таблицы.

**Публикации.** Основное содержание и результаты диссертационных исследований отражены в 17 работах, в том числе в 2 публикациях, вышедших в изданиях из перечня, утвержденного ВАК РФ, получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается общая характеристика диссертационной работы, обсуждается ее актуальность и обзор достижений в изучаемой предметной области, формулируется цель и указываются основные этапы научного исследования.

В **первой главе** изложены теоретические основы динамической теории пьезоупругости, необходимые при дальнейшем изложении материала. В *разделе 1.1* приведены уравнения состояния и уравнения движения пьезоупругой анизотропной среды, занимающей объём  $V$  и ограниченной поверхностью  $S$ , с учётом сопряженных электрических полей, обусловленных пьезоэффектом. В декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , для обозначения которой также используются переменные  $(x, y, z)$ , уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}^E s_{kl} - e_{ijk}^\theta E_k, \\ D_i &= e_{ikl}^\theta s_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $s_{ij}$  – тензор деформаций,  $E_i$  – компоненты вектора напряженности электрического поля,  $D_i$  – компоненты вектора электрической индукции,  $C_{ijkl}^E$  – тензор упругих постоянных,  $e_{kij}$  – тензор констант пьезоэлектрических напряжений материала,  $\varepsilon_{ij}$  – тензор констант диэлектрической проницаемости. По повторяющимся индексам проводится суммирование,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . Верхние индексы  $E$ ,  $\theta$  и  $S$  указывают на то, что соответствующие модули измерены при постоянном электрическом, температурном поле или постоянных деформациях, далее эти индексы опущены.

На основе уравнений (1) записываются уравнения движения в частных

производных второго порядка относительно  $u_i$  и  $\phi$ :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} + F_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ e_{ikl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_i} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  – перемещения точек среды,  $t$  – время,  $\rho$  – плотность материала,  $F_i$  – объёмные силы. Уравнения (2) предполагают их выполнение в любой точке тела. Для записи вариационной формулировки уравнений движения вводятся пространства тестовых или пробных функций  $W$ , выбор которых обуславливают граничные условия. Уравнения движения (2) умножаются в  $L_2(V)$  соответственно на пробные функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in W_v$  и  $\psi(\mathbf{x}) \in W_\psi$ . Таким образом получается вариационная формулировка уравнений движения (2), причем тестовые функции  $\mathbf{v}^s = \{v_1^s, v_2^s, v_3^s\}$ ,  $s = 1, 2, 3$  линейно независимы.

Применяя формулу интегрирования по частям, вариационную формулировку нетрудно преобразовать к так называемой слабой постановке:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \oint_S v_i^s(\mathbf{x}) \left[ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^3 e_{kij} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \nu_j dS - \\ - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_V \frac{\partial v_i^s(\mathbf{x})}{\partial x_j} \left[ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^3 e_{kij} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] dV = \\ = \sum_{i=1}^3 \int_V v_i^s(\mathbf{x}) \rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial t^2} dV, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \oint_S \psi(\mathbf{x}) \left[ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 e_{ikl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \nu_i dS - \\ - \sum_{i=1}^3 \int_V \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left[ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 e_{ikl} \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

здесь  $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$  – вектор нормали к поверхности.

Для постановки краевой задачи необходимо задать граничные условия, поэтому *раздел 1.2* содержит описание возможных начальных, механических и электрических граничных условий для постановки краевой задачи динамической теории пьезоупругости. Начальные условия для всего объема, занимаемого телом, полностью определяются заданием перемещений и скоростей его точек в начальный момент времени  $t = 0$  (*Ворович И.И. и др., 1999*). На-



чальные условия для электрического потенциала не записываются, так как в уравнении (2) отсутствуют производные по времени от электрического потенциала.

В *разделе 1.3* приводятся различные способы задания тензоров констант пьезоматериала и представлены принципы перехода к матрицам констант, используемых при решении задачи в плоской постановке, в зависимости от плоского деформированного или плоского напряженного состояний пьезоэлектрического тела.

Во **второй главе** рассматриваются задачи моделирования динамического поведения пьезоэлектрического тела на основе модификации метода конечных элементов высокого порядка точности. Постановка задачи для пьезоактуатора без подложки была выбрана таким образом, чтобы разработанную конечноэлементную модель пьезоактуатора можно было использовать для решения контактной задачи (актуатор на упругом слое). Кроме того, в данной главе проводится сравнение результатов моделирования с расчётами в системе COMSOL, поэтому была рассмотрена еще одна вспомогательная задача, решение которой можно построить с помощью пакета COMSOL.

В *разделе 2.1* приводятся постановки задач о колебаниях полосового пьезоэлектрического актуатора, занимающего область  $\Omega = [0, w] \times \mathbb{R} \times [0, h]$  с границей  $\partial\Omega$ , см. рисунок 1.

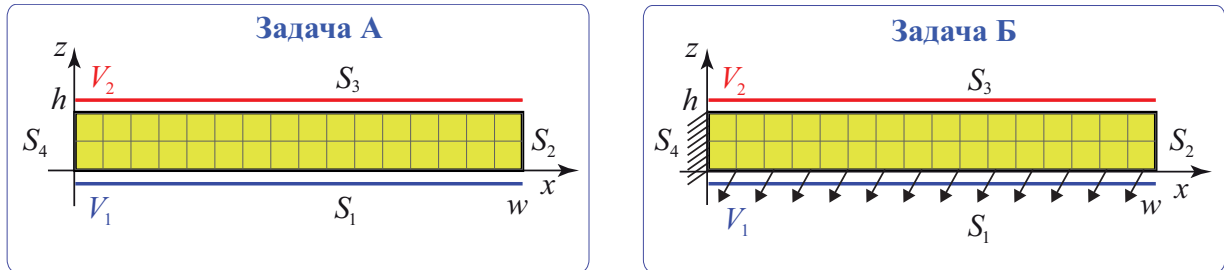


Рисунок 1 – Геометрия задачи для полосового пьезоэлектрического актуатора

Для рассматриваемого полосового пьезоактуатора, который не ограничен по оси  $y$ , вектор перемещений  $\mathbf{u} = \{u_x, 0, u_z\}$  имеет две ненулевые компоненты, поэтому задачи А и Б можно сформулировать в плоской постановке. Для упрощения выкладок используется двумерный вектор перемещений  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\} = \{u_x, u_z\}$  в декартовой системе координат  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\} = \{x, z\}$ , а граница актуатора разбивается на четыре части  $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ , на каждой из которых задаются свои граничные условия. Общими для задач А и Б являются следующие условия: отсутствие нормальных и касательных напряжений на двух границах и приложение нагрузки  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  к нижней границе:

$$\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_3, \quad \sigma_{iz}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (5)$$

отсутствие электрического поля на боковых границах:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_4; \quad (6)$$

наличие электрического потенциала на нижней и верхней границах:

$$\phi(\mathbf{x}) = V_1, \quad \mathbf{x} \in S_1, \quad \phi(\mathbf{x}) = V_2, \quad \mathbf{x} \in S_3. \quad (7)$$

Задачи А и Б различаются условиями на границе  $S_4$ : задача А – граница  $S_4$  предполагается свободной от напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_4; \quad (8)$$

задача Б – актуатор заземлен по всей границе  $S_4$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_4. \quad (9)$$

Для решения задачи уравнения движения (3)–(4) упрощаются с учётом плоской постановки. Здесь и далее при переходе к плоской постановке используется условие отсутствия нормальных и касательных деформаций в плоскости  $Oy$ . Помимо этого, рассматриваются установившиеся гармонические колебания  $u_k(x_1, x_2, t) = u_k(x_1, x_2) \exp(i\omega t)$  с круговой частотой  $\omega$ .

В *разделе 2.2* приводится общая схема применения метода конечных элементов высокого порядка точности (МКЭ ВПТ). Этот метод, являясь комбинацией метода конечных элементов и спектрального метода, предполагает использование интерполяционных полиномов высоких степеней. Выбор полиномов определяет узловые точки, которые распределяются неравномерно, сгущаясь у краев интервала, что позволяет уменьшить осцилляцию решения на границах, возникающую при использовании полиномов высокой степени.

В *разделе 2.3* подробно описывается использование многочленов Лобатто и Чебышева для построения интерполяционных полиномов. На основе полинома Лобатто  $L_N(x)$  степени  $N$  строится  $N + 1$  интерполяционный полином Гаусса–Лежандра–Лобатто  $C_{N+1}^i(x)$  с нулями в точках Гаусса–Лежандра–Лобатто (*Бубенчиков А.М. и др., 2008*), являющихся нулями полинома Лобатто с добавлением крайних точек интервала  $[-1, 1]$ . Помимо полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто используются интерполяционные многочлены  $\varphi_{N+1}^i(x)$  с нулями в точках  $x_i = -\cos(\pi(i-1)/N)$ ,  $i = \overline{1, N+1}$ , определяемые на основе ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода  $T_n(x)$  (*Priolo E. et al., 1994*). Здесь и далее нижний индекс  $N + 1$  при обозначении функций  $C_{N+1}^i(x)$  и  $\varphi_{N+1}^i(x)$  опущен.

*Раздел 2.4* посвящен вопросам применения МКЭ ВПТ к решению задач А и Б, см. рисунок 1. Для нахождения решения уравнений (3)–(4) область  $\Omega$

разбивается на  $M_i$  элементов вдоль оси  $Ox_i$ :

$$[0, w] \times [0, h] = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} [x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1}] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} [x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1}].$$

При использовании интерполяционных полиномов  $C^i(x)$  или  $\varphi^i(x)$ , которые являются ортогональными на отрезке  $[-1, 1]$ , вводится преобразование координат, связывающее глобальные переменные  $x_i$  и локальные переменные  $\xi_i^{l_i}$  на элементе  $l_i$ , где  $l_i = \overline{1, M_i}$  – номер элемента по оси  $Ox_i$ .

Решение уравнений (3)–(4) в плоской постановке отыскивается в виде:

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad k = \overline{1, 2}, \\ \phi(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \phi^{l_1 l_2 i_1 i_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}). \end{aligned} \quad (10)$$

При этом в качестве тестовых функций используются

$$\begin{aligned} v_i^s(\mathbf{x}) &= \delta_{is} C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}), \quad \mathbf{v}^s(\mathbf{x}) \in W_v, \\ \psi(\mathbf{x}) &= C^{p_1}(\xi_1^{t_1}) C^{p_2}(\xi_2^{t_2}), \quad \psi(\mathbf{x}) \in W_\psi, \end{aligned} \quad , \quad t_m = \overline{1, M_m}. \quad (11)$$

Пространства тестовых функций  $W_v$  и  $W_\psi$  определяются в соответствии с граничными условиями (5)–(9) (Левин В.А., 2015; Komatitsch D. et al., 1999). Представления (10)–(11) подставляются в уравнения (3)–(4), что приводит к системе линейных алгебраических уравнения (СЛАУ) относительно  $u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2}$  и  $\phi^{l_1 l_2 i_1 i_2}$ . При использовании интерполяционных полиномов на основе многочленов Чебышева  $C^i(x)$  в (10)–(11) заменяются на  $\varphi^i(x)$ .

Для учета граничных условий реализуется соответствующая процедура формирования СЛАУ. В силу (5) компоненты вектора правой части, соответствующие узловым точкам на границе  $S_1$ , содержат спектральные коэффициенты разложения нагрузок  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  по выбранному базису. Так, для задачи Б строки матрицы, соответствующие узловым точкам на границе  $S_4$ , заполняются нулями, за исключением диагонального элемента, равного единице.

Для верификации построенной модели проведено сравнение результатов с расчётами в системе COMSOL Multiphysics. Графики сравнения, а также графики, иллюстрирующие сходимость численного решения, представлены в *разделе 2.5*. Во всех приведенных в этом разделе примерах рассматривается пьезоактуатор из материала PIC 155 производства PI Ceramic GmbH размерами 6 мм×0.2 мм при  $V_1 = 50$  В,  $V_2 = 0$  В и нагрузке  $q_1(x) = 5$  Па,  $q_2(x) = 10$  Па. Рисунок 2 иллюстрирует распределение напряжений при

$z = 0, 1$  мм, рассчитанных с использованием МКЭ ВПТ и пакета COMSOL, на частоте 100 кГц. За счёт более точного вычисления производных МКЭ ВПТ даёт более гладкую аппроксимацию тензора напряжений.

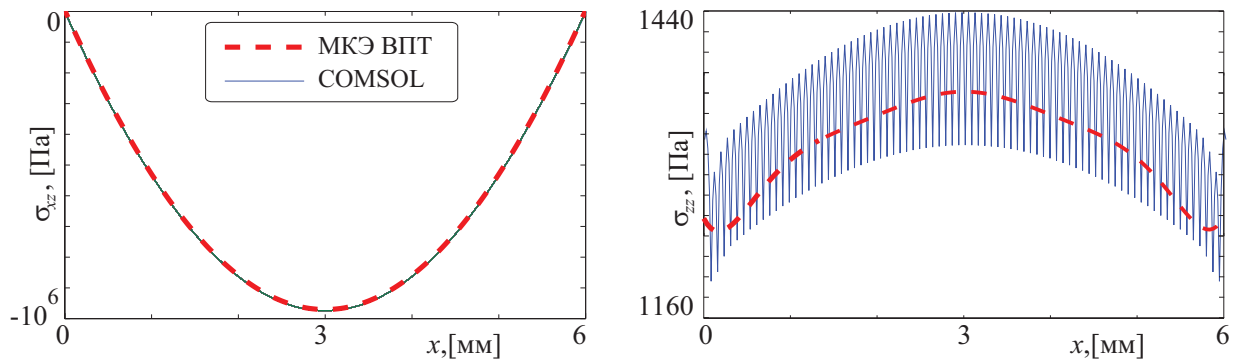


Рисунок 2 – Напряжения при частоте 100 кГц, рассчитанные МКЭ ВПТ и COMSOL. Задача А

Исследование сходимости численного решения показывает, что достаточно хорошая точность достигается уже при использовании  $M_1 = 3$  элементов и степени интерполяционных полиномов  $N = 11$ . Если использовать полиномы степени  $N = 7$ , то следует разбивать искомую область примерно на 8 конечных элементов. Исследуя сходимость, можно заключить, что необходимо сначала повышать степень  $N$  интерполяционных полиномов, а затем увеличивать количество элементов  $M_1 M_2$ . Аналогичные оценки были ранее получены для уравнения Лапласа (Попонин В.С., 2007) и для анизотропных упругих материалов (Ostachowicz W. et al., 2012).

Раздел 2.6 посвящён изучению резонансных свойств пьезоактуаторов. Установлено, что выбор интерполяционных полиномов практически не влияет на рассчитываемое значение резонансной частоты, а при использовании небольшого числа элементов, значения резонансных частот оказываются немного завышены. На рисунке 3 представлены графики изменения резонансных частот  $f_n$  в зависимости от размеров актуатора в диапазоне частот до 150 кГц. При увеличении ширины актуатора  $w$  резонансные частоты сгущаются и смещаются в сторону более низких, а при увеличении высоты актуатора  $h$  — в сторону более высоких. На этих графиках можно видеть два семейства резонансных частот, обозначенных сплошными и пунктирными линиями, причем траектории изменения частот  $f_n$  первого семейства не пересекаются между собой, но их пересекает резонансная частота из второго семейства (обозначается пунктирной линией на рисунке 3). Следует также отметить, что на второе семейство резонансных частот мало влияет изменение высоты актуатора.

В **третьей главе** приведена схема построения математической модели на основе гибридного подхода, описывающей взаимодействие актуатора со

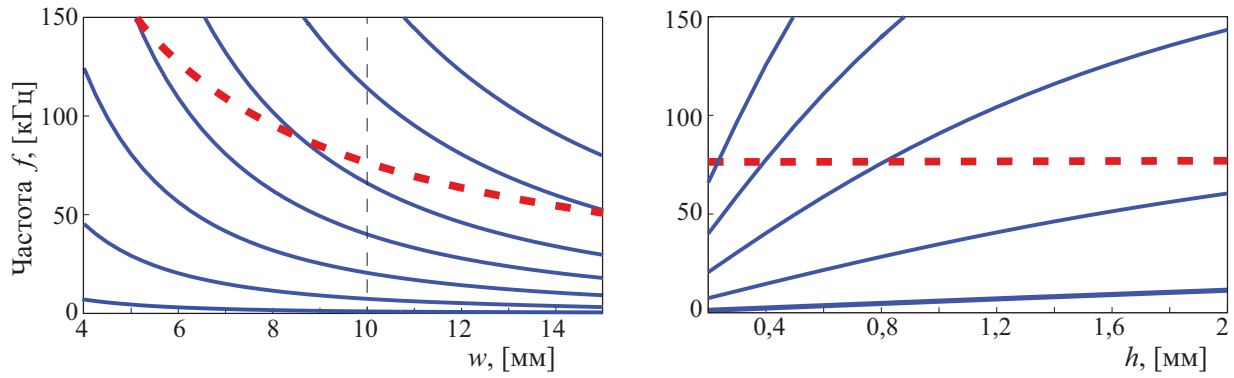


Рисунок 3– Резонансные частоты  $f_n$  актуатора высотой 0,2 мм (справа) и шириной 10 мм (слева). МКЭ ВПТ с использованием полиномов Чебышева. Задача Б

слоистым упругим волноводом. *Раздел 3.1* содержит постановку краевой задачи динамической теории пьезоупругости, общая схема которой приведена на рисунке 4. Предполагается, что на поверхность упругого слоя с константами Ляме  $\lambda_1, \mu_1$  и плотностью  $\rho_1$ , занимающего область  $\Omega_1 = \{-\infty < x, y < \infty, -H \leq z \leq 0\}$  приклеен пьезоэлектрический актуатор высотой  $h$  и шириной  $w$ , занимающий область  $\Omega_2 = \{0 \leq x \leq w, |y| < \infty, 0 \leq z \leq h\}$  с границей  $\partial S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ . Общая поверхность для пьезоактуатора и упругого слоя  $S_1 = \{0 \leq x \leq w, |y| < \infty, z = 0\}$  при моделировании отслоения актуатора разбивается на две подобласти:  $S_1 = S_c \cup S_d$ . На поверхности  $S_c$  предполагается контакт между слоем и актуатором, а в то время как на  $S_d$  задаётся условие отсутствия нормальных и касательных напряжений, причём при  $S_d = \emptyset$  актуатор и слой контактируют вдоль всей нижней грани актуатора  $S_1$ . Далее все волновые поля, относящиеся к области  $\Omega_1$ , обозначаются верхним индексом 1, а к области  $\Omega_2$ , соответственно, верхним индексом 2.

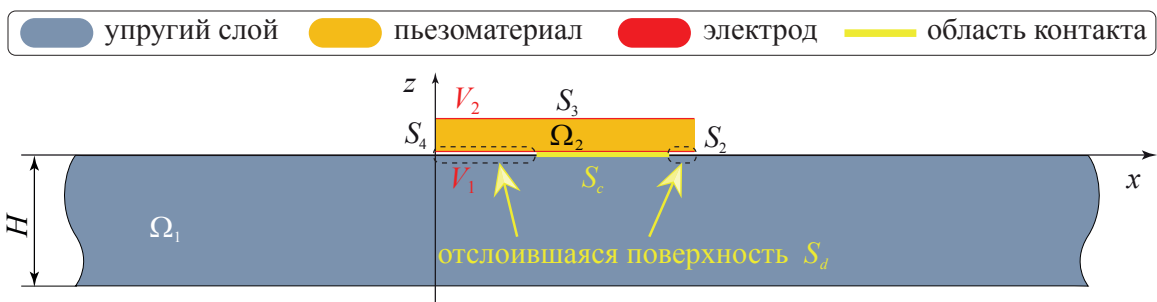


Рисунок 4– Постановка задачи в случае частичного отслоения актуатора от упругого слоя

В рассматриваемой плоской задаче (также как и в главе 2) вектор смещений в обеих областях имеет две ненулевые компоненты  $\mathbf{u} = \{u_x, 0, u_z\}$ . Описание колебаний полосового актуатора можно получить подстановкой  $\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t)$  и  $\phi(\mathbf{x}, t)$  в уравнения движения (2), переписанные с учётом плоской постановки. Перемещения в упругом слое  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t)$  в таком случае описыва-

ются уравнениями Ляме:

$$(\lambda_1 + \mu_1)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) + \mu_1\Delta\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) - \rho_1\frac{\partial^2\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

Начальные условия задаются таким образом, что система находится в покое до момента времени  $t = 0$ , когда на актуатор подаётся электрический импульс  $p(t)$ . На нижней и верхней границах задаётся электрический потенциал, начиная с момента времени  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t < 0) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_1 \cup S_3, \\ \phi(\mathbf{x}, t \geq 0) &= V_1 \cdot p(t), & \mathbf{x} &\in S_1, & \phi(\mathbf{x}, t \geq 0) &= V_2 \cdot p(t), & \mathbf{x} &\in S_3. \end{aligned} \quad (13)$$

На практике в качестве электрического импульса  $p(t)$  нередко используется  $N$  циклов косинуса, сглаженного окном Ханна с центральной частотой  $f_0$ .

Граничные условия на нижней и верхней границах слоя, за исключением области контакта  $S_c$  между слоем и актуатором, предполагают отсутствие нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_{iz}^1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} = \{-\infty < x_1 < \infty, -H \leq x_2 \leq 0\}/S_c. \quad (14)$$

Все границы актуатора кроме  $S_1$  также свободны от напряжений:

$$\sigma_{iz}^2(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_3 \cup S_4, \quad (15)$$

а на боковых границах актуатора отсутствуют горизонтальные электрические перемещения:

$$D_x(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_4. \quad (16)$$

В области отслоения  $S_d$  задаются только условия отсутствия напряжений:

$$\sigma_{iz}^1(x_1, x_2 = 0, t) = \sigma_{iz}^2(x_1, x_2 = 0, t) = 0, \quad x_1 \in S_d. \quad (17)$$

В области контакта  $S_c$  для описания различной адгезии задаются граничные условия пружинного типа, которые предполагают непрерывность нормальных и касательных напряжений

$$\sigma_{iz}^1(\mathbf{x}, t) = \sigma_{iz}^2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_c, \quad (18)$$

и их связь со скачком перемещений

$$\sigma_{iz}^1(\mathbf{x}, t) = \kappa (u_i^1(\mathbf{x}, t) - u_i^2(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in S_c \quad (19)$$

посредством диагональной матрицы жёсткости  $\boldsymbol{\kappa} = \operatorname{diag}\{\kappa, \kappa\}$  (Lekesiz H. et al., 2011; Golub M.V., Boström A., 2011). При  $\kappa \rightarrow \infty$  условие (19) описывает идеальный контакт, так как соответствует непрерывности перемещений в

области контакта  $S_c$ .

Решение строится в частотной области, т.е. рассматриваются гармонические колебания, а затем для нахождения нестационарного решения во временной области вычисляется обратное преобразование Лапласа на основе гармонического решения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[ \int_0^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) P(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right],$$

здесь  $P(\omega)$  – преобразование Лапласа входного электрического импульса  $p(t)$ .

Для решения поставленных задач необходимо находить волновые поля, возникающие в упругом слое под воздействием некоторой поверхностной нагрузки. Поэтому в *разделе 3.2* излагается общая схема применения интегрального подхода для моделирования упругих колебаний, возбуждаемых поверхностной нагрузкой в упругом волноводе. Для этих целей в разделе приводятся основные сведения об алгоритме построения Фурье-образа матрицы Грина в плоском случае. Гармонические колебания  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \omega)$  упругого слоя, возбуждаемые поверхностной нагрузкой  $\mathbf{q}(x)$ , можно представить в виде:

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (20)$$

Здесь  $\mathbf{K}(\alpha, z, \omega)$  и  $\mathbf{Q}(\alpha, \omega)$  – преобразования Фурье от матрицы Грина слоя и функции напряжений  $\mathbf{q}(x)$ , заданной на некоторой границе контакта  $S_c$ , задача определения  $\mathbf{q}(x)$  рассматривается далее в *разделе 3.4*.

*Раздел 3.3* посвящен упрощенным моделям сдвиговой задержки (shear lag) и точечных сил, которые могут быть использованы для описания волновых полей, генерируемых при идеальном контакте пьезоэлектрического актуатора с подложкой, на невысоких частотах и в случае тонкого актуатора. Результаты расчётов нестационарных сигналов с помощью модели точечных сил представлены в *главе 4*.

В *разделе 3.4* приводится описание гибридного подхода, заключающегося в использовании метода конечных элементов высокого порядка точности для моделирования динамического поведения пьезоактуатора и интегрального подхода для описания возбуждаемых актуатором волновых полей в слое. В соответствии с граничными условиями (17) и (18) напряжения в слое и в актуаторе на границе  $S_1$  должны быть равны. Для обеспечения этого условия вводится неизвестная функция нагрузки  $\mathbf{q}(x)$ :

$$\sigma_{iz}^1(x, z) = \sigma_{iz}^2(x, z) = q_i(x), \quad (x, z) \in S_1, \quad (21)$$

причем  $\mathbf{q}(x) = 0$ , если  $x \in S_d$ .

Поскольку для решения краевой задачи (12)–(19) используется неизвестная функция нагрузки (21), то в соответствии со схемой МКЭ ВПТ, описанной в главе 2, значения  $\mathbf{q}(x)$  в узловых точках на границе  $S_1$  записываются в вектор неизвестных, а соответствующая СЛАУ расширяется путем добавления  $2(M_1N + 1)$  уравнений.

Для моделирования динамического поведения отклеенного актуатора используется такая же схема решения, как и при идеальном контакте актуатора со слоем. Для выполнения граничных условий (17) в случае отслоения, последние  $2(M_1N + 1)$  строк матрицы СЛАУ, получаемой при решении краевой задачи (12)–(19) и сопоставимые узловым точкам на границе  $S_d$ , заполняются нулями, за исключением диагонального элемента, равного единице.

Неизвестная вектор-функция нагрузки  $\mathbf{q}(x)$  определяется своими значениями  $\mathbf{q}^{l_{i1}}$  в узловых точках  $(\chi^{l_{i1}}, 0)$  на границе  $S_1$ . Значения  $\chi^{l_{i1}}$  рассчитываются в зависимости от степени  $N$  интерполяционных полиномов и их вида, а также количества элементов  $M_1$ . В случае полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто  $\mathbf{q}(x)$  интерполируется сплайнами-шапочками, а при использовании многочленов Чебышева полиномами  $\varphi^i(x)$ . Применение преобразования Фурье к  $\mathbf{q}(x)$  позволяет получить представления, которые затем используются в (20) для нахождения волновых полей в упругом слое. Подстановка полученных выражений для напряжений  $\mathbf{q}(x)$  на  $S_1$  и (20) в уравнение

$$\kappa u_{i_1 l_{i1}}^2 = \kappa u^1(\chi^{l_{i1}}, 0, \omega) - \mathbf{q}^{l_{i1}}$$

позволяет удовлетворить граничным условиям в области контакта.

*Раздел 3.5* посвящён численному анализу сходимости перемещений и напряжений при различных условиях контакта и сравнению гармонического решения с результатами расчётов в системе COMSOL. В графиках ниже приводятся результаты расчётов для пьезоактуатора PI Ceramic GmbH размерами  $6 \times 0,2$  мм или  $10 \times 0,2$  мм, материал для слоя – алюминий ( $E_1 = 69,9$  ГПа,  $\nu_1 = 0,33$ ,  $\rho_1 = 2730$  кг/м<sup>3</sup>). Результаты сравнения расчётных значений перемещений и напряжений при идеальном контакте хорошо согласуются с аналогичными данными, полученных в системе COMSOL.

На рисунке 5 представлены графики амплитуд вертикальных перемещений  $|u_z|$  на верхней границе слоя, рассчитанные МКЭ ВПТ с использованием интерполяционных полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто и Чебышева разной степени  $N$  при  $M_1 = 10$  на частотах 30 кГц и 500 кГц при идеальном контакте ( $\kappa = \infty$ ). Оба типа интерполяционных полиномов обеспечивают достаточно хорошую сходимость, причем с ростом  $N$  амплитуды перемещений сходятся к одному численному решению, но, как правило, с разных сторон.



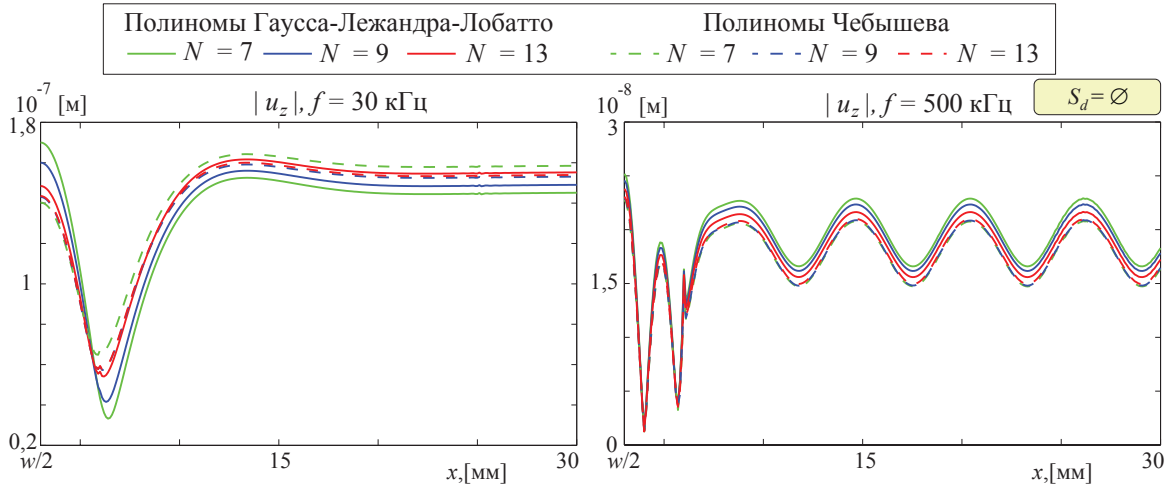


Рисунок 5 – Амплитуды вертикальных перемещений  $|u_z(x, 0)|$  для частот  $f = 30$  кГц и  $f = 500$  кГц при идеальном контакте на  $S_c = S_1$  ( $\kappa = \infty$ );  $w = 6$  мм,  $h = 0,2$  мм

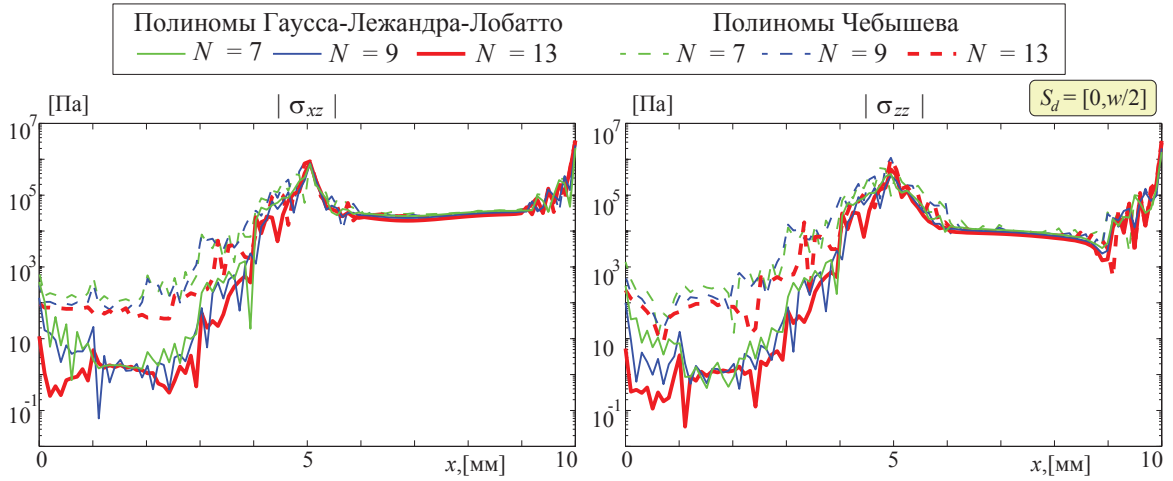


Рисунок 6 – Напряжения  $|\sigma_{xz}(x, 0)|$  и  $|\sigma_{zz}(x, 0)|$  на частоте 80 кГц при отслоении актуатора на 50% ( $S_d = [0, \frac{w}{2}]$ ) и идеальном контакте на  $S_c$  ( $\kappa = \infty$ );  $w = 10$  мм,  $h = 0,2$  мм

На рисунке 6 изображены графики напряжений в логарифмической шкале, рассчитанные при отслоении актуатора от слоя на 50% ( $S_d = [0, \frac{w}{2}]$ ). В точке  $x = \frac{w}{2}$  происходит переход от граничных условий (17) к условиям (18), что при численном моделировании сопровождается некоторой погрешностью решения. При использовании полиномов Гаусса-Лежандра-Лобатто моделируемые значения напряжений быстрее сходятся к граничным условиям в области отслоения, по сравнению с использованием полиномов Чебышева.

Для изучения влияния ширины  $w$  и высоты  $h$  пьезоактуатора на нормальные и касательные напряжения, возникающие в области  $S_1$  после возбуждения актуатора электрическим импульсом, были построены графики зависимости напряжений  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{zz}$  на границе  $S_1$  от размеров сенсора. На рисунке 7 представлены такие графики при фиксированной ширине  $w = 10$  мм. Анализируя зависимость напряжений от размеров пьезоактуатора, можно за-

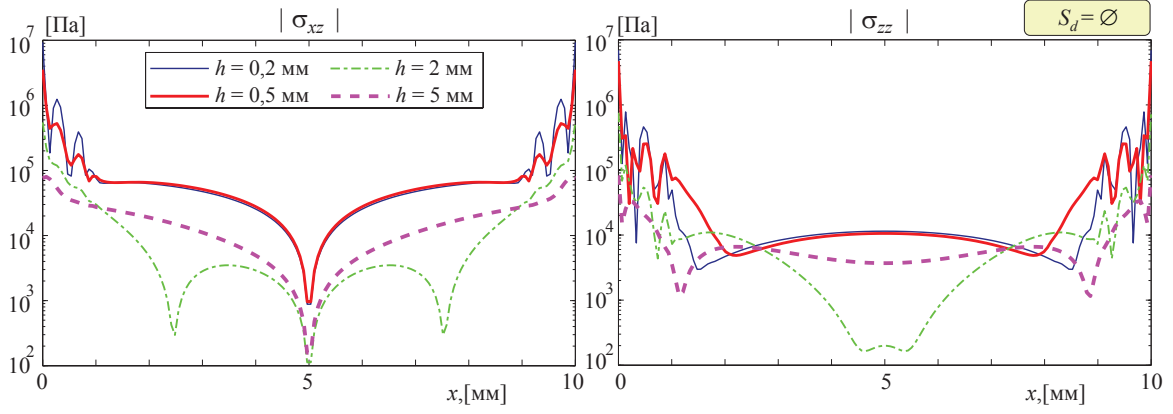


Рисунок 7 – Напряжения  $|\sigma_{xz}(x, 0)|$  и  $|\sigma_{zz}(x, 0)|$  на частоте 30 кГц при различной высоте  $h$  актуатора и идеальном контакте на  $S_c = S_1$  ( $\kappa = \infty$ );  $w = 10$  мм

метить, что ширина актуатора оказывает существенно меньшее влияние на напряжения, чем высота, а с ростом высоты актуатора обе функции напряжений  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{zz}$  принимают более сложный вид. В то же время касательные напряжения  $\sigma_{xz}$  уменьшаются, а нормальные напряжения  $\sigma_{zz}$  остаются величиной того же порядка. Это указывает на то, что с помощью упрощенной модели точечных сил можно достаточно точно рассчитывать перемещения при относительно низких частотах и для тонких накладок ( $h \lesssim 1$  мм). Полученные результаты в значительной мере согласуются с приведенными в работах (*Giurgiutiu V., 2014; Raghavan A., Cesnik C. E. S., 2007; Glushkov E. et al., 2011*).

При изучении волновых явлений в упругих телах важным этапом является рассмотрение циркуляции потока волновой энергии. Этому посвящен *раздел 3.6*, где представлены зависимости средней за период колебаний  $T = 2\pi/\omega$  энергии (*Бабешко В.А. и др., 1989*)

$$E^0 = \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z, \omega) \mathbf{Q}(\alpha) \mathbf{Q}^*(\alpha^*) d\alpha, \quad (22)$$

закачиваемой от актуатора через поверхность  $z = 0$  в упругий слой.

На рисунке 8 приведены линии уровня  $E^0$ , иллюстрирующие влияние толщины  $h$  и ширины  $w$  актуатора на зависимость  $E^0$  от частоты. Тёмные участки соответствуют большим значениям, а светлые – меньшим, при этом белые области соответствуют  $E^0 < 0,02$  Дж. На всех поверхностях хорошо видны тёмные полосы различной ширины, соответствующие наибольшим значениям закачиваемой в слой энергии. Данные локальные максимумы расположены близко к траекториям комплекснозначных резонансных частот системы актуатор–слой, рассчитываемых как нули определителя матрицы СЛАУ, возникающей при решении контактной задачи. При идеальном кон-

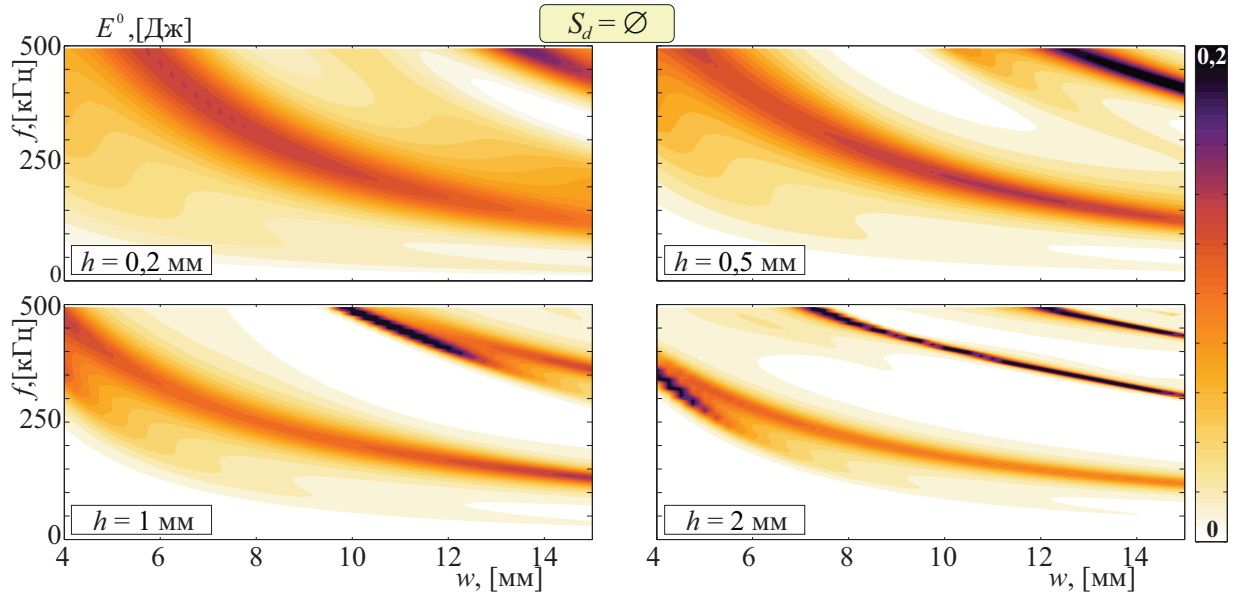


Рисунок 8 – Линии уровня поверхности энергии  $E^0(f, w)$  для приклеенного актуатора ( $S_d = \emptyset$ ) при различных  $h$

также (рисунок 8) количество резонансных частот в фиксированном частотном диапазоне растёт с увеличением толщины и ширины актуатора. Для большей толщины  $h$  на поверхностях проявляются пересекающиеся резонансные траектории, что соответствует результатам, полученным для актуатора без подложки в главе 2.

Анализ линий уровня поверхности  $E^0(f, \Delta w)$  для случая, когда оба края актуатора приклеены, а отклеенной оказывается часть интерфейса между актуатором и подложкой  $S_d = [\frac{w}{2} - \Delta w, \frac{w}{2} + \Delta w]$ , показали малое влияние отклейки середины актуатора на возбуждение волн Лэмба в слое. Исключения составляют несколько значений, соответствующих резонансным колебаниям отслоившегося актуатора.

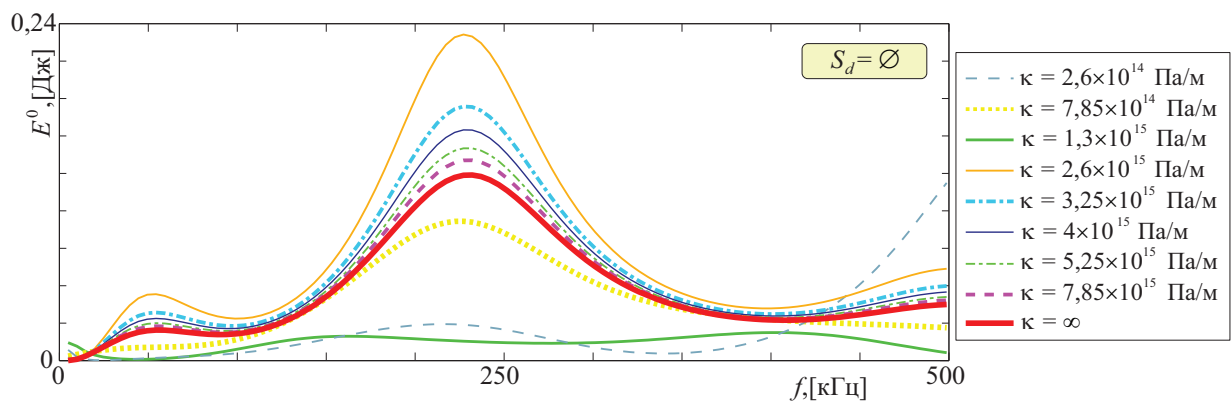


Рисунок 9 – Зависимость  $E^0(f)$  для актуатора ( $S_d = \emptyset$ ) при различной адгезии  $\kappa$

Для иллюстрации влияния адгезии на взаимодействие актуатора с подложкой на рисунке 9 приведены зависимости от частоты  $f$  средней за пе-

риод энергии  $E^0$ , поступающей в волновод, для разных значений жёсткости в пружинных граничных условиях (19). Можно видеть, что с уменьшением жёсткости  $\kappa$  значение энергии, закачиваемой в слой, увеличивается для всех частот при значениях  $\kappa \gtrsim 2 \cdot 10^{15}$  Па. В этом диапазоне изменения  $\kappa$  сохраняется положение локальных максимумов, соответствующих резонансным колебаниям. При  $\kappa \lesssim 2 \cdot 10^{15}$  Па поведение  $E^0(f)$  может отличаться весьма значительно, включая положение локальных максимумов.

**Четвёртая глава** посвящена экспериментальному исследованию взаимодействия полностью работоспособных и отклеенных круговых и прямоугольных протяженных пьезоактуаторов. В этой главе также проводится экспериментальная верификация построенной в третьей главе математической модели на основе гибридного подхода. В *разделе 4.1* описываются экспериментальная установка и схема проведения эксперимента, см. рисунок 10.

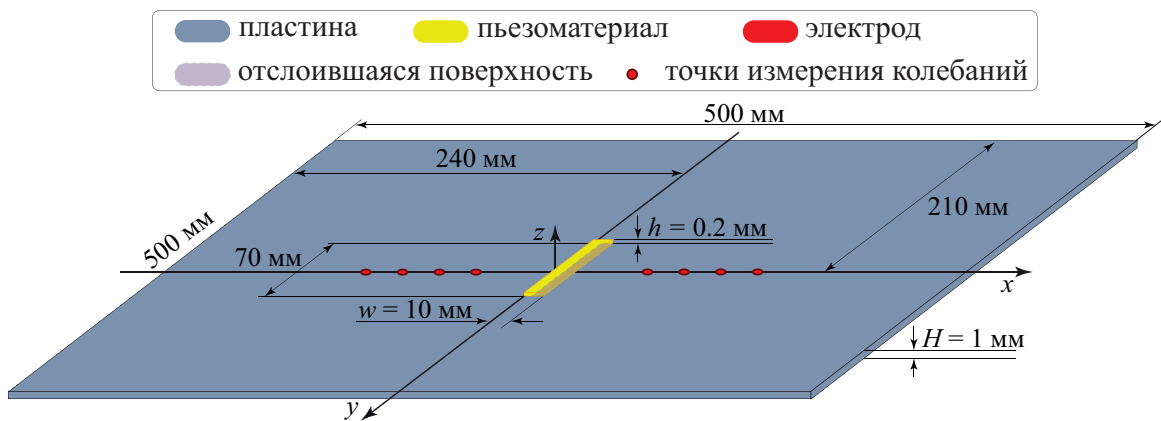


Рисунок 10 – Экспериментальный образец

На алюминиевую пластину размерами 500 мм × 500 мм и толщиной 1 мм был приклеен прямоугольный пьезоактуатор 70 мм × 10 мм × 0,2 мм. На актуатор подаётся электрический импульс  $p(t)$ , который в силу обратного пьезоэлектрического эффекта вызывает механические перемещения пластины, измеряемые с помощью лазерного виброметра.

Рисунок 11 наглядно характеризует волновую картину, возникающую в ходе проведения экспериментов с центральной частотой 180 кГц. На этом рисунке приведены линии уровня скоростей перемещений на поверхности пластины  $\dot{u}_z(x, 0, -H, t)$  в зависимости от координаты точки  $x$  на линии  $y = 0$ ,  $z = -H$  и времени  $t$ . Можно видеть распространение двух волновых пакетов, соответствующих двум незатухающим нормальным модам  $A_0$  и  $S_0$ . Так как образец имеет конечные размеры, то волны Лэмба отражаются от границ алюминиевой пластины, что хорошо видно на рисунке 11. Эти отражённые от краёв пластины волны дополнительно усложняют трактовку и анализ результатов.

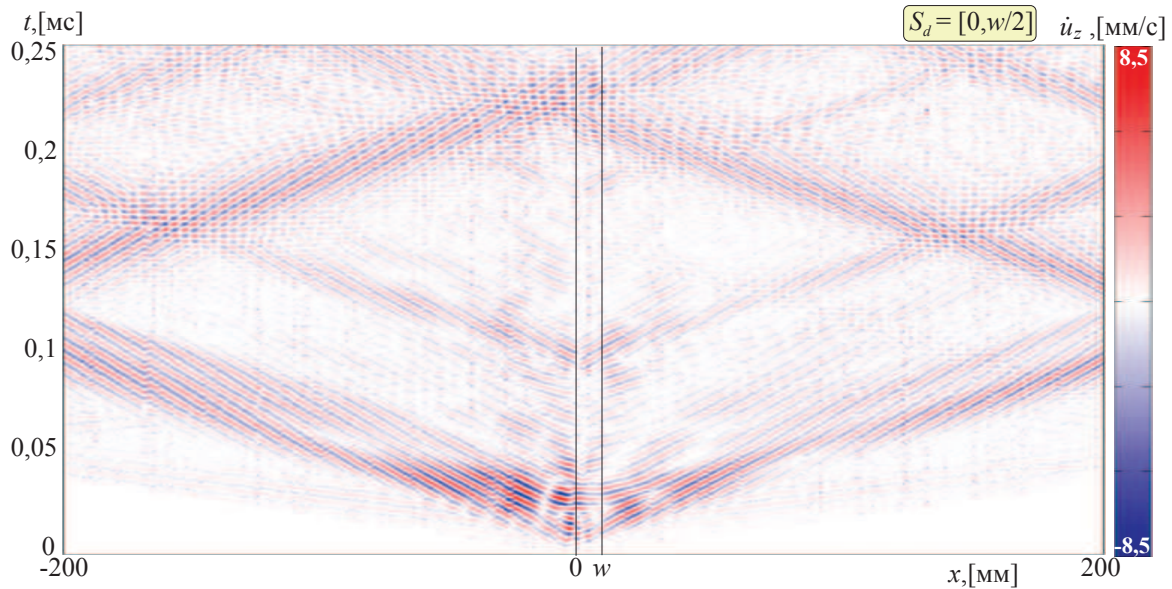


Рисунок 11 – Скорости перемещений на поверхности пластины  $\dot{u}_z(x, 0, -H, t)$ , измеренные при  $f_0 = 180$  кГц, для наполовину отклеенного актуатора ( $S_d = [0, \frac{w}{2}]$ )

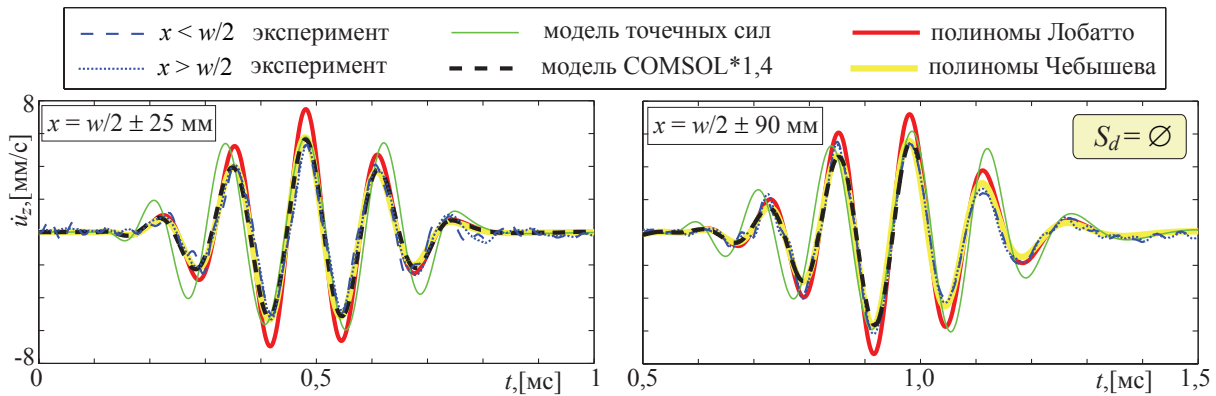


Рисунок 12 – Скорости перемещений на поверхности пластины  $\dot{u}_z(\frac{w}{2} \pm 25, 0, 0, t)$  и  $\dot{u}_z(\frac{w}{2} \pm 90, 0, 0, t)$ , рассчитанные и измеренные при центральной частоте  $f_0 = 80$  кГц, для приклеенного актуатора ( $S_d = \emptyset$ )

Раздел 4.2 посвящён экспериментальной верификации построенной модели в случае идеального контакта при  $w = 10$  мм,  $h = 0,2$  мм,  $H = 1$  мм,  $V_2 = 10$  В для центральных частот  $f_0 = 80$  кГц и  $f_0 = 180$  кГц. На рисунке 12 представлены скорости перемещений, измеренные на поверхности  $z = 0$  в точках  $x = \frac{w}{2} \pm 25$  и  $x = \frac{w}{2} \pm 90$  для приклеенного актуатора ( $S_d = \emptyset$ ), а также рассчитанные с помощью трёх моделей (COMSOL, модели на основе интегрального подхода с решением связанной задачи и модели с заменой действия актуатора точечными силами). В случае идеального контакта аппроксимация точечными силами позволяет получить приемлемые результаты, однако локальные максимумы моделируемого сигнала не всегда совпадают с максимумами экспериментального сигнала. Результаты расчетов в COMSOL содержат заниженные амплитуды скоростей перемещений пласти-



ны, но позволяют довольно точно моделировать динамическое поведение пьезоактуатора на упругом слое. И, наконец, скорости перемещений пластины, рассчитанные путём решения связанной задачи, практически совпадают со скоростями, зафиксированными лазерным виброметром в ходе эксперимента. Амплитуды скоростей перемещений пластины, рассчитанные с использованием полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто, примерно на 10% выше измеренных экспериментально, в то время как полиномы Чебышева позволяют получить решение, практически полностью совпадающее по амплитудам с экспериментальными данными.

В *разделе 4.3* демонстрируются результаты верификации разработанной модели с экспериментальными данными, полученными в ходе двух независимых экспериментов, с наполовину отслоившимся актуатором ( $S_d = [0, 5]$ , а  $S_c = [5, 10]$ ). На рисунке 13 представлены расчётные и экспериментальные значения скорости перемещений пластины в двух точках: со стороны приклеенной части актуатора  $x = \frac{w}{2} + 108$  и со стороны отклеенной  $x = \frac{w}{2} - 108$ . При сравнении результатов моделирования с экспериментальными данными можно отметить, что при хорошем совпадении времени прихода сигнала справа (со стороны приклеенной части актуатора) появляется некоторое расхождение во времени прихода сигнала слева (со стороны отклеенной части актуатора).

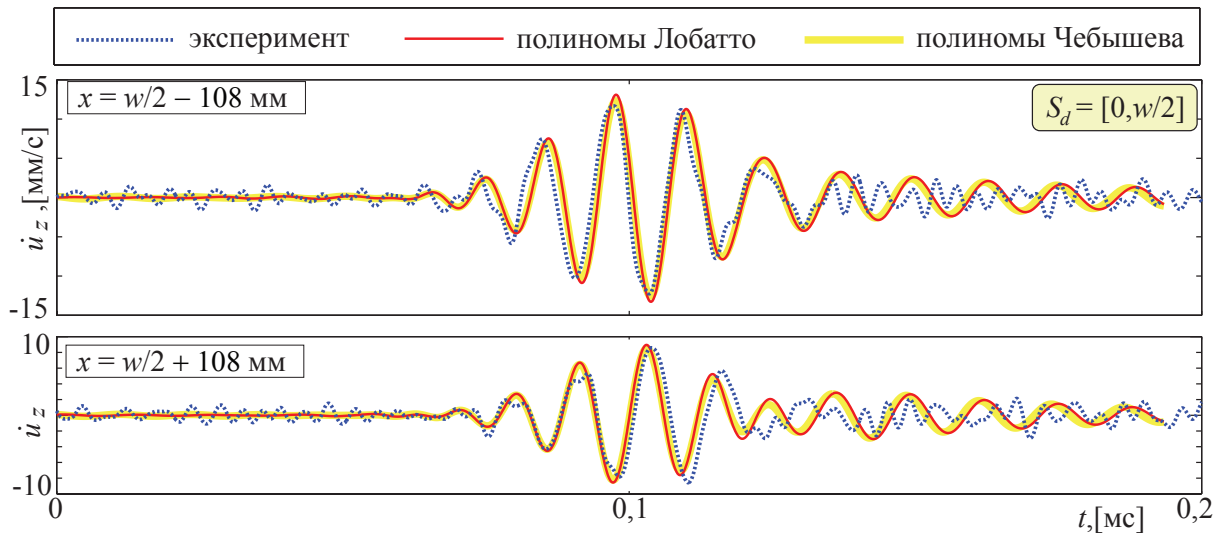


Рисунок 13 – Скорости перемещений на поверхности пластины  $\dot{u}_z(x = \frac{w}{2} \pm 108, 0, 0, t)$ , измеренные и рассчитанные при центральной частоте  $f_0 = 80$  кГц, для наполовину отклеенного актуатора ( $S_d = [0, \frac{w}{2}]$ )

На рисунке 14 представлено сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования на основе интегрального подхода и МКЭ ВПТ с использованием двух различных интерполяционных полиномов для центральных частот  $f_0 = 80$  кГц и  $f_0 = 180$  кГц. Можно видеть, что конкрет-

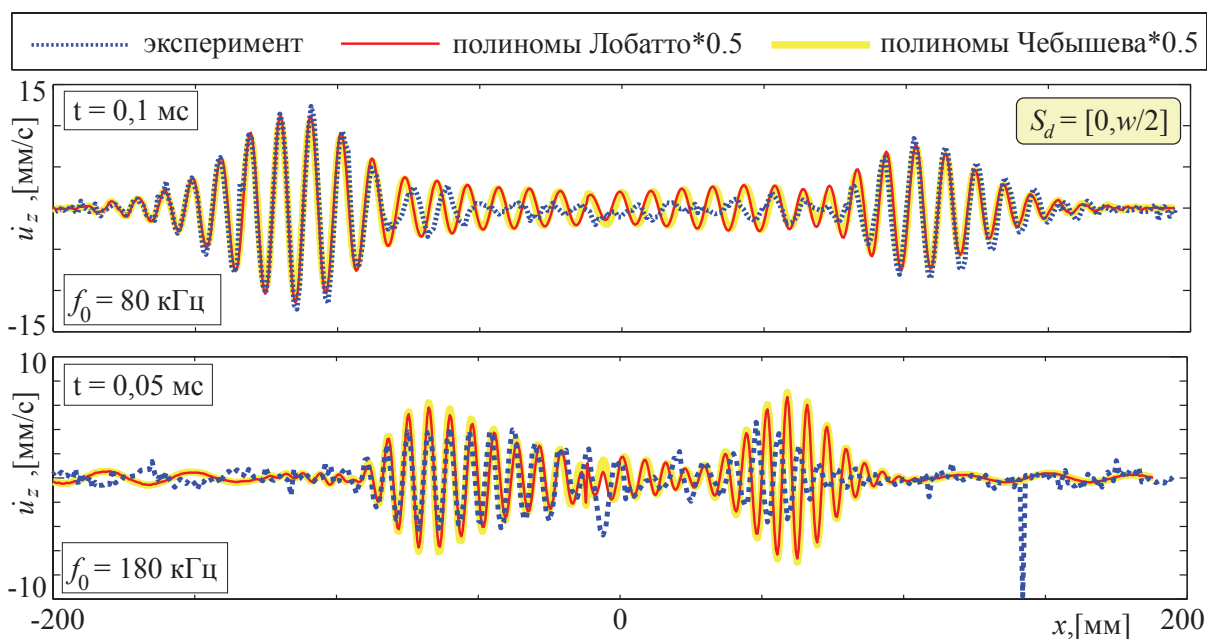


Рисунок 14 – Скорости перемещений на поверхности пластины  $\dot{u}_z(x, 0, -H, t)$ , измеренные и рассчитанные на частотах  $f_0 = 80$  кГц и  $f_0 = 180$  кГц для наполовину отклеенного актуатора ( $S_d = [0, \frac{w}{2}]$ )

ный вид аппроксимирующих функций практически не влияет на полученное численное решение. На более высоких частотах совпадение моделируемых значений с экспериментальными данными несколько хуже, так как двумерная постановка недостаточно точно описывает сложные волновые поля, возникающие в пластине после подачи электрического импульса на отклеенный пьезоактуатор.

В разделе 4.4 представлены результаты частотно-временного анализа сигналов, генерируемых в пластине отслоившимися пьезоактуаторами. Для анализа волновых полей, возбуждаемых частично приклеенными круговыми неосесимметричными пьезоактуаторами с загнутым электродом, был проведен эксперимент, где шестнадцать круговых пьезоактуаторов были различным образом приклеены на алюминиевую пластину толщиной  $H = 2$  мм, см. рисунок 15. Положение актуатора однозначно определяется ориентацией отклеенной области  $\theta$ .

Для каждого из актуаторов в точках окружности радиусом 20 мм с центром, совпадающим с центром актуатора, были измерены скорости перемещений  $\dot{u}_z(t)$ , записанные после возбуждения пьезоактуатора входным электрическим импульсом  $p(t)$  на центральной частоте  $f_0$ . К записанным скоростям  $\dot{u}_z(t)$  применялось вейвлет-преобразование  $\mathcal{W}[\dot{u}_z](\omega, t)$ , где в качестве ядра вейвлет-преобразования  $\mathcal{W}$  был выбран вейвлет Габора, так как его форма схожа с формой исходного сигнала  $p(t)$ . Вейвлет-преобразование позволяет определять несущую частоту сигнала как максимум  $|\mathcal{W}[\dot{u}_z](\omega, t)|$ , см. рис. 16.

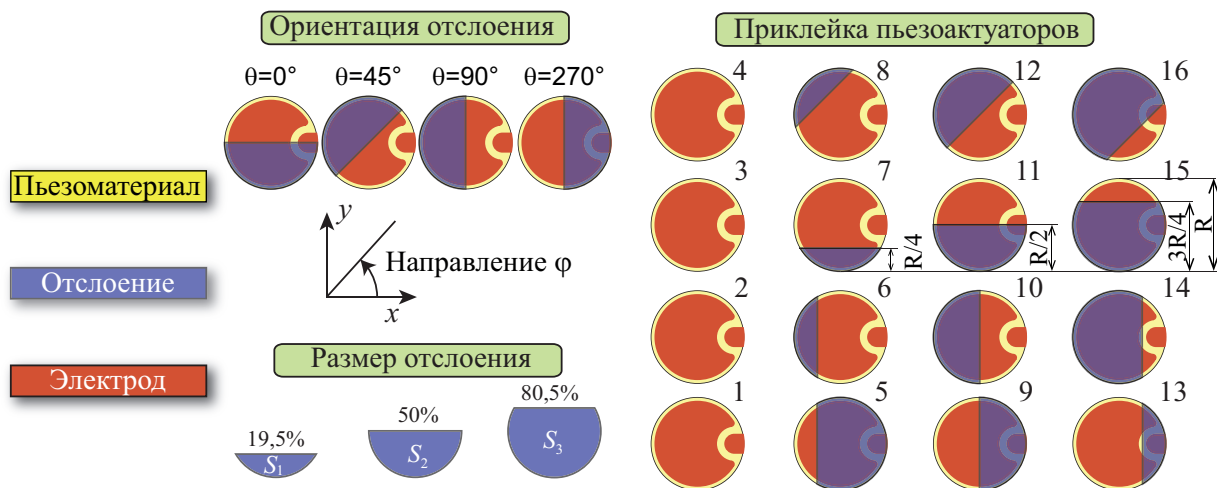


Рисунок 15 – Схема расположения и приклейки актуаторов на экспериментальном образце

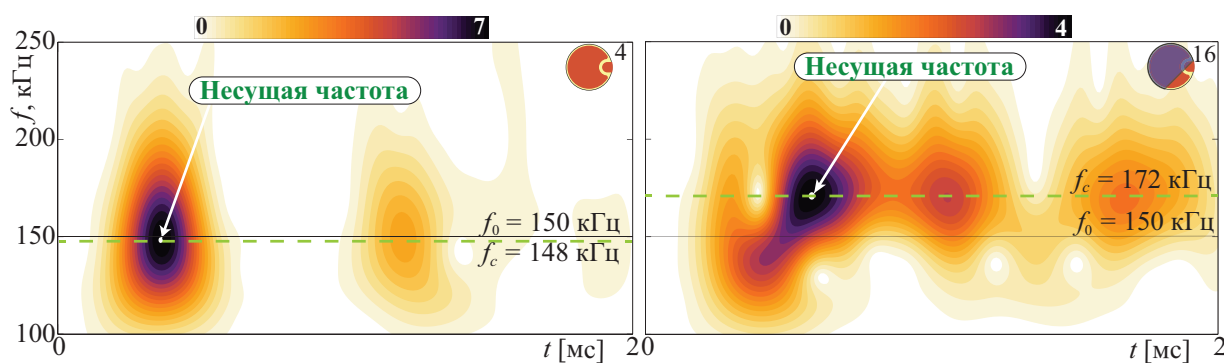


Рисунок 16 – Вейвлет-преобразование для работоспособного актуатора (слева) и сильно недоклеенного (справа) на центральной частоте 150 кГц и для направления  $\phi = 230^\circ$

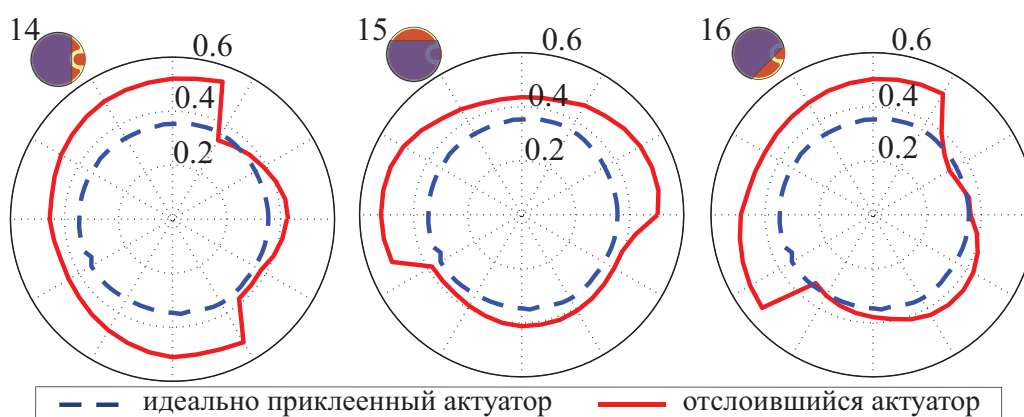


Рисунок 17 – Время прихода несущей частоты в случае недоклеенных актуаторов №14, 15 и 16 с ориентацией области отслоения  $S_3$   $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 180^\circ$  в сравнении с полностью приклеенным актуатором №4 на центральной частоте  $f_0 = 150$  кГц

Рисунок 17 показывает время прихода несущей частоты для всех направлений в случае недоклеенных актуаторов с разной ориентацией области



отслоения  $S_3$  ( $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 180^\circ$ ) и аналогичные измерения для полностью работоспособного актуатора. При значительных отслоениях актуатора на некоторых направлениях время прихода несущей частоты увеличивается с ростом центральной частоты. В то же время для полностью проклеенного актуатора наблюдается равномерное уменьшение времени прихода несущей частоты при увеличении центральной частоты. На рисунках 16–17 можно видеть, что и время прихода, и значение несущей частоты существенно зависят от формы отслоения. Информация о времени прихода и значении несущей частоты, а также резонансные частоты  $f_n$ , могут использоваться для определения наличия и характера отслоений или повреждений актуаторов.

Для более полного анализа для всех шестнадцати актуаторов были проведены измерения электрического импеданса, по которым можно заключить, что с ростом площади отслоения актуатора проявляется большее количество резонансных частот в рассматриваемом диапазоне до 1000 кГц. Для значительно отклеенных актуаторов наблюдается сильный резонанс на частотах из диапазона 180–200 кГц, что соответствует сдвигу несущей частоты, который наблюдается на рисунке 16.

В **заклучении** дается краткая сводка результатов, указывается их научное и практическое значение.

### **Список работ по теме диссертации, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК**

1. Шпак А.Н. Моделирование динамики пьезоэлектрического актуатора/сенсора методом конечных элементов с использованием полиномов Чебышева / А.Н. Шпак // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2015. – Т 4. – С. 75–85.

2. Голуб М.В. Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности / М.В. Голуб, А.Н. Шпак, И. Бюте, К.-П. Фритцен // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 397-407.

### **Список основных работ по теме диссертации, опубликованных в других изданиях**

3. Голуб М.В. Мониторинг работоспособности пьезоактуаторов с помощью непрерывного вейвлет-преобразования / М.В. Голуб, А.Н. Шпак // Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» / СамГТУ. – Самара: 2013. – С. 78-81.

4. Golub M.V. Continuous wavelet transform application in diagnostics of piezoelectric wafer active sensors / M.V. Golub, A.N. Shpak, I. Buethe, C.-P. Fritzen, H. Jung, J. Moll // Proceedings of the International conference DAYS on DIFFRACTION 2013. – Saint-Petersburg: 2013. – P. 59-64.

5. Golub M.V. Application of the integral approach and wavelet transform in simulating and analysis of guided waves excitation by axisymmetric partially debonded piezoactuators / M.V. Golub, A.N. Shpak // Proceedings of 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference YIC 2013. – Bordeaux, France: 2013. – 4 pp.

6. Голуб М.В. Вейвлет-преобразование для изучения механизмов возбуждения волн Лэмба отслоившимися пьезоактуаторами / М.В. Голуб, А.Н. Шпак // Труды акустического симпозиума "КОНСОНАНС-2013". – Киев, Украина: 2013. – С. 95-100.

7. Голуб М.В. Математическое моделирование динамического взаимодействия неосесимметричного пьезоактивного элемента с упругой многослойной подложкой / М.В. Голуб, А.Н. Шпак // Сборник докладов V Всероссийской конференции по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат-2014» / ВИАМ. – Москва: 2014. – 10 с.

8. Golub M.V. Analysis of Lamb wave excitation by the partly debonded circular piezoelectric wafer active sensors / M.V. Golub, A.N. Shpak, I. Buethe, C.-P. Fritzen, H. Jung, J. Moll // The e-Journal of Nondestructive Testing. – 2014. – Vol. 19, No. 12 – 7 pp.

9. Шпак А.Н. Моделирование и анализ волн Лэмба, возбуждаемых отклеенным пьезоактуатором / А.Н. Шпак // Сборник материалов научного семинара стипендиатов программ «Михаил Ломоносов III» и «Иммануил Кант III» 2014/2015 года. – Москва: 2015. – С. 89-93.

10. Голуб М.В. Метод конечных элементов высокой степени точности, или метод спектральных элементов, в задачах математической физики / М.В. Голуб, С.И. Фоменко, А.Н. Шпак. / Кубанский Государственный университет. – Краснодар: 2015. – 78 с.

### **Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ**

11. Голуб М.В., Шпак А.Н. Программный комплекс для определения несущих и мгновенных частот нестационарных сигналов «Carrier/instantaneous frequencies». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (Россия). № 2015610643 от 15.01.2015. Заявка № 2014661650 от 18.11.2014.

ШПАК АЛИСА НИКОЛАЕВНА

**ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
ПЬЕЗОАКТУАТОРОВ С УПРУГИМ ВОЛНОВОДОМ  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА**

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 04.04.16.

Бумага № 2. Печать лазерная.

Тираж 100 экз. Заказ 000.

350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149,  
Центр «Универсервис», тел. (861) 219-95-51.