

## Лекция 13

# Автокорреляция: Происхождение и Выявление

# Учебные цели и задачи

Студент должен быть способен:

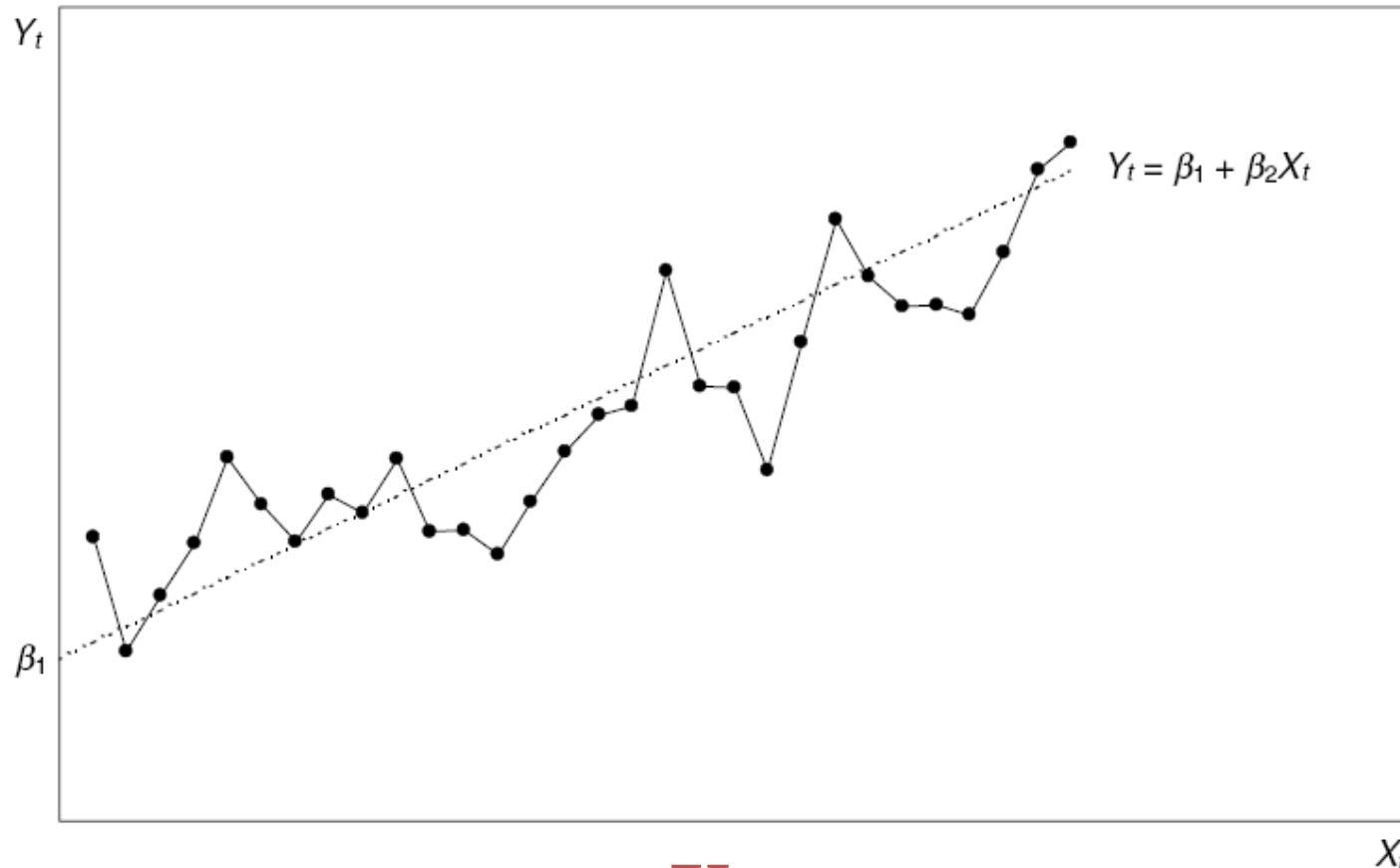
- Объяснять природу автокорреляции
- Понимать причины и последствия автокорреляции
- Проводить тесты на выявление присутствия в регрессионной модели автокоррелированных возмущений

## 13.1 Происхождение автокорреляции

**Автокорреляция** есть систематическая связь между случайными членами серий наблюдений упорядоченных в пространстве (панельные данные) или во времени (временные ряды). (Наруш 3-го усл Г.-М.) Случайные члены могут породить положительную и отрицательную **автокорреляцию**.

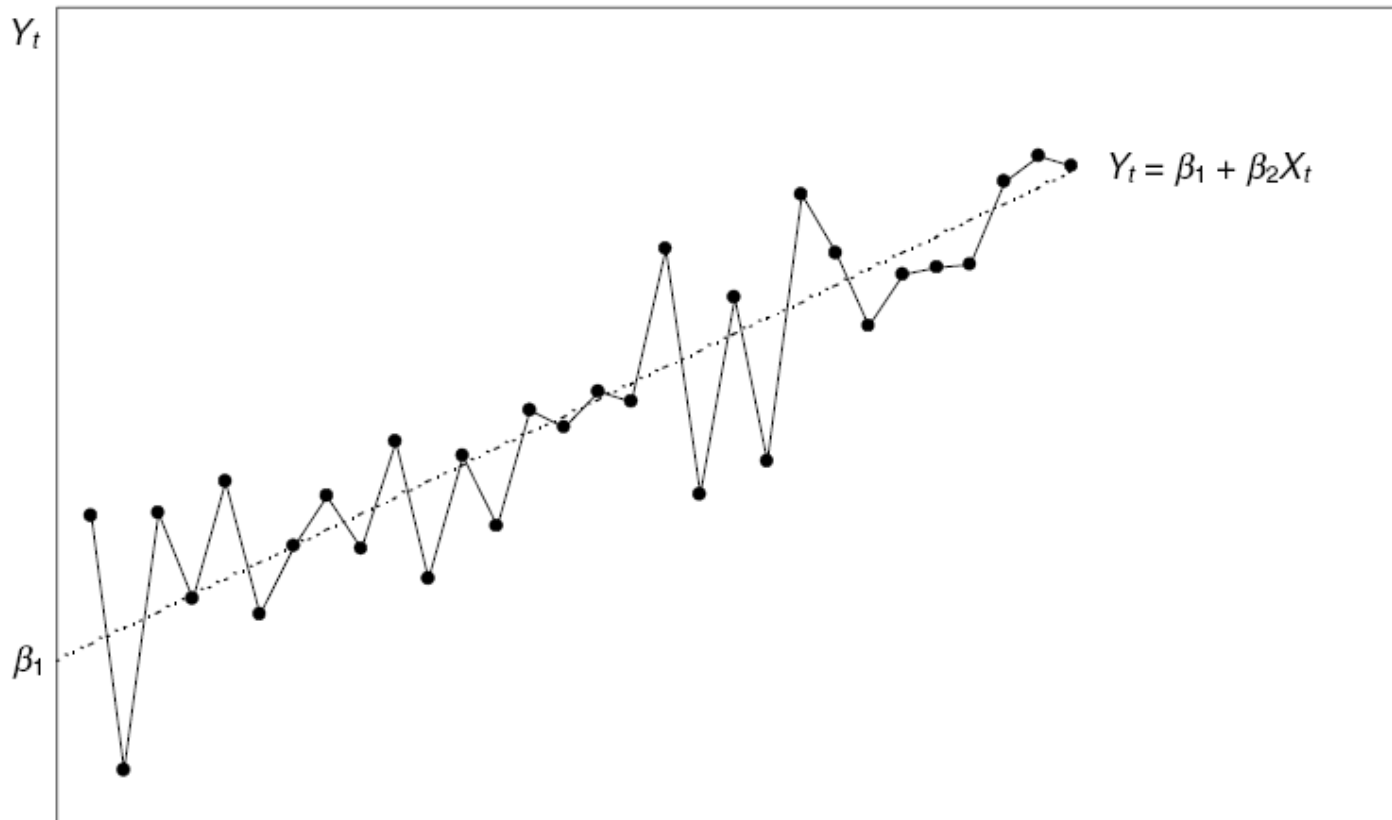
Однако, для **эффективности** (accurate estimation/prediction) регрессионная модель должна содержать всю систематическую информацию.

# Положительная автокорреляция



**Y** зависит не только от **X** но и от невключенных в модель переменных, имеющих совокупный эффект (which defines  $u_i$ ) определенного знака time by time для достижения баланса

# Отрицательная автокорреляция



**Отрицательная** автокорреляция ( $\text{Cov}(u_i, u_j) < 0$  когда у последовательных наблюдений знаки случайного члена меняются) – в экономике встречается редко

## Регрессионная модель

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

---

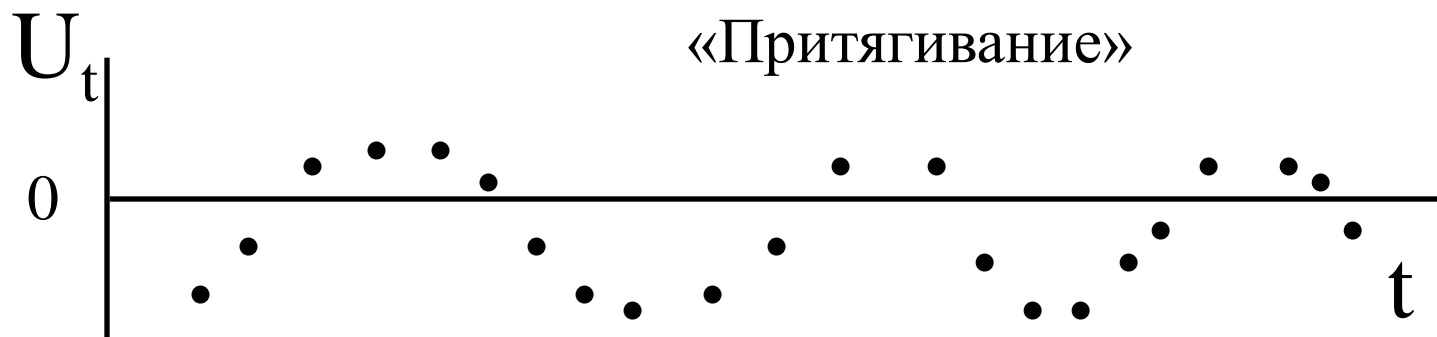
Нет автокорреляции:  $\text{Cov}(u_i, u_j) = 0$   
или  $E(u_i, u_j) = 0$

---

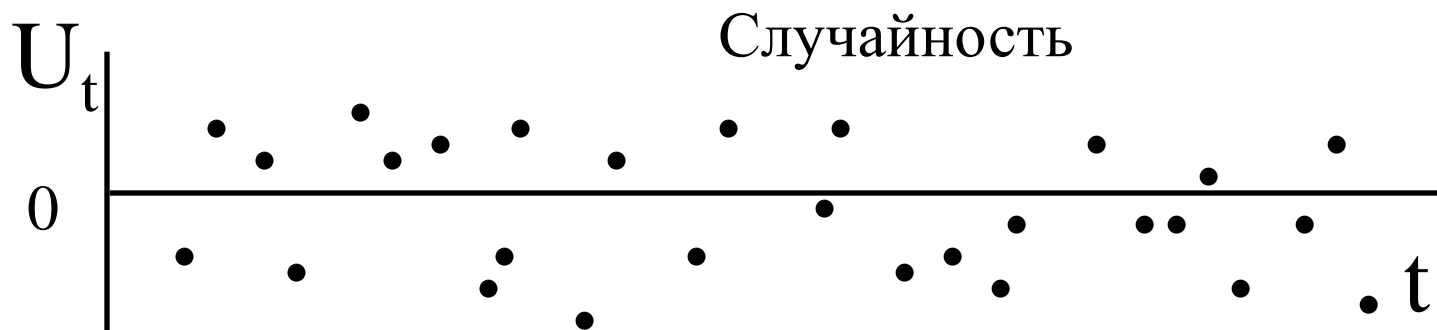
Автокорреляция:  $\text{Cov}(u_i, u_j) \neq 0$   
или  $E(u_i, u_j) \neq 0$

Где:  $i \neq j$

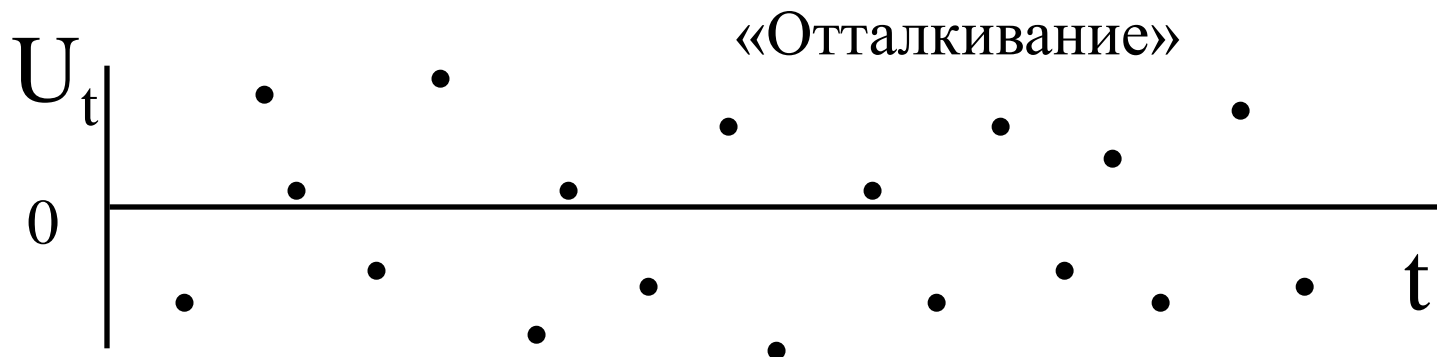
Positive  
Auto.



No  
Auto.



Negative  
Auto.



## Порядок автокорреляции

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

---

1й порядок:  $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$

2й порядок:  $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + v_t$

3й порядок:  $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + v_t$

Где  $-1 < \rho < +1$

---

Далее будем предполагать Автокорреляцию первого порядка т.е.:

AR(1) :  $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$



## 13.2 Причины автокорреляции

### Прямые

- Инертность или постоянство
- Частичная (точечная) корреляция
- Циклические влияния

### Косвенные

- Невключенные переменные
- Аналитическая форма
- Сезонность

## 13.3 Последствия автокорреляции

1. МНК остается **линейным** и **несмещенным**.  
ОДНАКО
2. МНК **не эффективен**.
3. Обычные формулы дают **некорректные** стандартные ошибки для МНК.
4. Интервалы определенности и тестирование гипотез основанное на стандартных ошибках – **не верны**.

$$Y_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_t + e_t$$

Автокоррелированные остатки:  $E(e_t, e_{t-s}) \neq 0$

---

Формула дисперсии для МНК

(нет автокорреляции в остатках):

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

---

Формула дисперсии для МНК

(остатки автокоррелированы):

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \left( 1 + \frac{1}{\sum x_t^2} 2 \sum x_i x_j \rho^k \right)$$

Таким образом если ошибки автокоррелированы – оценки МНК неэффективны (т.е. не “наилучшие”)

## 13.4 Выявление автокорреляции

$$Y_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \hat{\beta}_3 X_{3t} + e_t$$

$e_t$  является замещающей для  $u_t$

### Прелиминарный анализ (неформальные тесты)

- Тест данных – автокорреляция часто проявляется во временных рядах (исключения: частичная (точечная) корреляция в панельных данных)
- Графическая экзаменация остатков – построить  $e_t$  против времени или  $e_{t-1}$  на предмет взаимосвязи

# Формальные тесты на автокорреляцию

**Runs Test:** анализ последовательностей знаков остатков.

---

**Durbin-Watson (DW) d test:** отношение сумм квадратов разностей последовательных остатков к сумме квадратов остатков [для AR(1)].

---

**Breusch-Godfrey LM test:** Более общий тест который не предполагает что случайный член имеет автокорреляцию первого порядка AR(1).

## Runs Test

Определим **Run** как последовательность остатков одного знака и **R** количество таких непрерывных последовательностей. Пусть **N** – общее кол-во наблюдений где **N<sub>1</sub>** и **N<sub>2</sub>** кол-во знаков «+» и «-».

Тогда:

$$E(R) = \frac{2N_1N_2}{N} + 1 \quad \text{Var}(R) = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N)}{(N)^2(N-1)}$$

Если **R** принадлежит интервалу **E(R) ± 1,96s.d.** То нельзя отвергнуть нулевую гипотезу о случайности остатков на 95% уровне.

## Durbin-Watson d Test

$H_0: \rho = 0$  vs.  $H_1: \rho \neq 0, \rho > 0, \text{ or } \rho < 0$

Статистика d для теста Durbin-Watson:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

Отношение сумм квадратов разностей последовательных остатков к сумме квадратов остатков

Тестовая статистика,  $d$ , относительно связана с  $\hat{\rho}$  как:

$$d \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

Когда  $\hat{\rho} = 0$ , статистика Durbin-Watson  $d \approx 2$ .

Когда  $\hat{\rho} = 1$ , статистика Durbin-Watson  $d \approx 0$ .

Когда  $\hat{\rho} = -1$ , статистика Durbin-Watson  $d \approx 4$ .



# DW d Test

## 4 Steps

---

**Шаг 1:** Оценить  $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i}$

И получить остатки

---

**Шаг 2:** Вычислить статистику d теста DW

---

**Шаг 3:** Получить  $d_L$  и  $d_U$ : нижнюю и верхнюю границы из Durbin-Watson таблицы

---

## Шаг 4: Использование правил принятия решения:

Value of $d$ relative to $d_L$ and $d_U$	Decision
$d < d_L$	Reject null of no positive autocorrelation
$d_L \leq d \leq d_U$	No decision
$d_U < d < 4 - d_U$	Do not reject null of no positive or negative autocorrelation
$4 - d_L < d < 4 - d_U$	No decision
$d > 4 - d_L$	Reject null of no negative autocorrelation

## Предполагаемые ограничения:

- В модели отсутствуют пересечение
- Значения  $X$  нестохастичны
- Случайные члены автокоррелированы с AR(1)
- Модель не включает зависимой переменной с лагом в качестве объясняющей переменной, т.е.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 Y_{t-1} + u_t$$

# Breusch-Godfrey LM Test

Этот тест работает в случае зависимой переменной с лагом и может быть использован для тестирования автокорреляций высоких порядков

Предположим, например, что мы оцениваем:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 Y_{t-1} + u_t$$

И хотим протестировать на автокорреляцию следующую форму:

$$U_t = \rho_1 U_{t-1} + \rho_2 U_{t-2} + \rho_3 U_{t-3} + v_t$$

# Breusch-Godfrey LM Test

Тест выполняется в 4 шага

Шаг 1. Оцениваем

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 Y_{t-1} + u_t$$

и получаем остатки ( $e_t$ )

Step 2. Оцениваем следующую регрессионную модель:

$$e_t = b_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 Y_{t-1} \\ + c_1 e_{t-1} + c_2 e_{t-2} + c_3 e_{t-3} + w_t$$

# Breusch-Godfrey LM Test

**Шаг 3.** Для выборок большого размера, тестовая статистика имеет эквивалент:

$$(n - p)R^2 \sim \chi_p^2$$

Где  $p$  – значение максимального лага

**Шаг 4.** Если тестовая статистика превышает критическое значение хи-квадрат, тогда нулевая гипотеза об отсутствии серийной корреляции в любом из терминов  $p$  – отвергается

